УДК 519.714

О ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ШЕННОНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Д. А. Дагаев[1]

В данной работе рассматривается некоторое счетное множество семейств классов функций трехзначной логики, принимающих значения из множества {0,1}. Для каждого класса из этих семейств и для каждой его конечной порождающей системы получен порядок соответствующей функции Шеннона.

Ключевые слова: функции трехзначной логики, формулы, глубина формул.

I consider the countable set of families of the classes of three-valued logic functions, taking values from the set {0,1}. For each class from these families and for each its finite generating system I obtain the order of growth of the corresponding Shannon depth function.

Key words: functions of three-valued logic, formulas, depth of formulas.

Известно [1, 2], что для произвольной конечной системы булевых функций всякая функция из замкнутого класса, порожденного этой системой, может быть реализована формулой, глубина которой имеет не более чем линейный порядок роста от числа переменных. В данной работе рассматривается некоторое счетное множество семейств классов функций из $P_{3,2}$ — множества всех функций трехзначной логики, принимающих значения 0 или 1. Для каждого класса из этих семейств и для каждой его конечной порождающей системы получена линейная по порядку оценка для соответствующей функции Шеннона по глубине.

Дадим необходимые определения (см. также [3–5]). Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k, $k \geqslant 2$. Пусть $F \subseteq P_k$, $k \geqslant 2$. Через $[F]$ обозначим замыкание F относительно операции суперпозиции, а через $F(n)$ — множество всех функций из F, зависящих от переменных $x_1, ..., x_n$, $n \geqslant 1$. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in [F]$, Φ — формула над F, реализующая функцию f, а $H \subseteq [F]$. Через $D(\Phi)$ будем обозначать глубину формулы Φ, через $D_F(f)$ — минимум $D(\widehat{\Phi})$ по всем формулам $\widehat{\Phi}$ над системой F, реализующим функцию f, а через $D_F(H(n))$ — функцию Шеннона по глубине для множества H.

Пусть $f \in P_2$ и $A \subseteq P_2$. Через f^* обозначим функцию, двойственную к f, а через A^* — множество $\bigcup\{f^*\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in A$. Говорят, что функция f удовлетворяет условию $< 0^m >$ (соответственно $< 1^m >$), $2 \leqslant m < \infty$, если любые m наборов, на которых функция f равна нулю (соответственно единице), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту. Будем придерживаться обозначений для замкнутых классов булевых функций из работы [3], а именно: P_2 — множество всех булевых функций; S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i = 0, 1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^m >$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^m >$, $2 \leqslant m < \infty$. Положим

$$M_0 = M \cap T_0, M_1 = M \cap T_1, T_{01} = T_0 \cap T_1, M_{01} = M_0 \cap M_1, S_{01} = S \cap T_{01}, SM = S \cap M$$

и для каждого $m \geqslant 2$ положим

$$O_0^m = T_0 \cap O^m, I_1^m = T_1 \cap I^m, MO^m = M \cap O^m, MI^m = M \cap I^m, MO_0^m = M \cap O_0^m, MI_1^m = M \cap I_1^m.$$

[1]*Дагаев Дмитрий Александрович* – канд. физ.-мат. наук, доцент НИУ ВШЭ, e-mail: ddagaev@gmail.com.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество замкнутых классов булевых функций

$$\{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}, S, S_{01}, SM, O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m,\ 2 \leqslant m < \infty\},$$

а через $\mathcal{R}$ — множество

$$\{P_2, T_1, T_{01}, M, M_1, M_{01}, O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m,\ 2 \leqslant m < \infty\}.$$

Легко видеть, что для любого класса $A \in \mathcal{Q} \setminus \{S, S_{01}, SM\}$ выполняется по крайней мере одно из двух условий:

1) $A \in \mathcal{R}$;

2) существует класс $B \in \mathcal{R}$, такой, что $A = B^*$.

Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$ и $F \subseteq P_{3,2}$. Проекцией функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется такая булева функция $\mathrm{pr}f(x_1, ..., x_n)$, значение которой на каждом наборе $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ определяется равенством $\mathrm{pr}f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Проекцией $\mathrm{pr}F$ множества функций F называется множество $\bigcup\{\mathrm{pr}f\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$. Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций. Определим множество $\mathrm{pr}^{-1}B$ следующим образом. Положим

$$\mathrm{pr}^{-1}B = \{f \in P_{3,2} | \mathrm{pr}f \in B\}.$$

Очевидно, что множество $\mathrm{pr}^{-1}B$ является замкнутым классом. При этом для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{3,2}$, такого, что $\mathrm{pr}F = B$, выполняется соотношение $F \subseteq \mathrm{pr}^{-1}B$. Замкнутый класс $\mathrm{pr}^{-1}B$ называется максимальным. Положим

$$\mathfrak{N}(B) = \{A \subseteq P_{3,2} | A = [A],\ \mathrm{pr}A = B\}.$$

Известно (см., например, [5]), что $|\mathfrak{N}(B)| < \infty$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{Q}$.

Обозначим через $Z_{2,i}$ множество всех функций из $P_{3,2}$, обладающих следующим свойством: если набор $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ получен из набора $\widetilde{\beta} \in \{0,1,2\}^n$ заменой всех двоек на i, то $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$, $i = 0, 1$.

Определим некоторые функции из $P_{3,2}$. Обозначим через $j_i(x)$ функцию, равную 1 при $x = i$ и 0 в остальных случаях, $i = 0, 1, 2$. Через $x \vee y$ и $x \cdot y$ обозначим функции из $P_{3,2}$, проекции которых являются булевыми функциями дизъюнкция и конъюнкция соответственно и которые равны 0 на наборах, содержащих хотя бы одну двойку.

Основным результатом данной работы является следующая теорема (см. также [6]).

Теорема. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества $\mathcal{Q}$, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $\mathrm{pr}H = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда выполняется соотношение*

$$D_G(H(n)) \asymp n.$$

При доказательстве верхней оценки используются известные методы синтеза формул над неполными системами, реализующих функции алгебры логики (см. [1, 2, 7]), а также некоторые свойства функций из $P_{3,2}$. Опишем основные этапы доказательства.

Множество $\mathcal{Q}$ представляется в виде объединения трех непересекающихся подмножеств, и доказательство верхней оценки проводится отдельно для каждого из них.

Сначала рассматриваются классы B из множества $\mathcal{Q} \setminus \{S, S_{01}, SM\}$. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $\mathrm{pr}H = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Пусть $B \in \mathcal{R}$. Нетрудно показать, что найдутся натуральное число $r \geqslant 2$ и функция $\Delta_r(x_1, ..., x_{r(r-1)})$, такие, что любая функция $f(x_1, ..., x_n) \in H$ при $n \geqslant 10$

может быть представлена в виде $f = \Delta_r(\widetilde{Y}^r)$, где $\widetilde{Y}^r$ – набор из $r(r-1)$ функций, каждая из которых получается отождествлением переменных у функции f и зависит не более чем от $n-1$ переменных (см. также лемму 3 из [7]). Тогда для любой конечной порождающей системы G_0 класса H, содержащей функцию Δ_r и все функции из множества $H(9)$, выполняется соотношение $D_{G_0}(H(n)) \leqslant c_0 n$, где c_0 — некоторая константа. Отсюда следует, что для порождающей системы G класса H выполняется соотношение $D_G(H(n)) \leqslant cn$, где c — некоторая константа (так как переход от одного базиса к другому влечет увеличение глубины формул, реализующих функцию f, не более чем в константу раз). Если B — такой класс, что $B^* \in \mathcal{R}$, то верхняя оценка для функции $D_G(H(n))$ следует из соображений двойственности.

Затем рассматриваются классы $B \in \{S, S_{01}\}$. Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $\mathrm{pr}H = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Обозначим через $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2)$ функцию из $P_{3,2}$, такую, что $\mathrm{pr}\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2) = x_1$ и равную 0 на всех наборах, содержащих хотя бы одну двойку. Из описания множества всех классов, проекция которых совпадает с классом S или S_{01} (см. [5]), следует, что для каждого из таких классов выполняется по крайней мере одно из трех следующих условий:

1) для некоторого $i \in \{0, 1\}$ выполняется соотношение $H \subseteq Z_{2,i}$;

2) $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2) \in H$;

3) класс H является двойственным относительно подстановки $(01)(2)$ одному из классов, удовлетворяющих условию 2.

Из определения множеств $Z_{2,i}$ вытекает, что для классов H, удовлетворяющих условию 1, верхняя оценка для функции $D_G(H(n))$ следует непосредственно из верхней оценки для функции $D_{\mathrm{pr}G}(B(n))$. Если класс H удовлетворяет условию 2, то верхняя оценка для функции Шеннона получается с помощью аналога метода моделирования констант (см. [2]) для функций из $P_{3,2}$, причем вместо константы 0 используется функция $\varepsilon_1^{(2)}(x_1, x_2)$. Для класса, удовлетворяющего условию 3, соответствующая верхняя оценка выполняется в силу соображений двойственности.

Наконец, рассматривается случай $B = SM$. Дадим некоторые дополнительные определения и приведем схему доказательства теоремы для этого случая. Пусть $p \geqslant 2$ и $1 \leqslant i \leqslant p$. Положим $x^i = (x_1^i, ..., x_{i-1}^i, x_{i+1}^i, ..., x_p^i)$. Обозначим через $\widetilde{X}^p$ набор $(x^1, ..., x^p)$, состоящий из $p(p-1)$ переменных. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ — произвольная функция из $P_{3,2}$, $n \geqslant p$. Через $f_j^i(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$ будем обозначать функцию $f(x_1, ..., x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, ..., x_n)$. Через $\widetilde{Y}^p$ будем обозначать набор функций, получающийся из набора $\widetilde{X}^p$ заменой переменных x_j^i на функции f_j^i соответственно, где $i, j = 1, ..., p$, $i \neq j$.

Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 5$. Определим функции $g_i^f(y_1, ..., y_i, x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$, следующим образом. Положим

$$g_i^f(y_1, ..., y_i, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)(j_1(y_1) \vee ... \vee j_1(y_i)) \vee (j_1(y_1) \cdot ... \cdot j_1(y_i)).$$

Доказательство опирается на специальное разложение функций из $\mathrm{pr}^{-1}SM$. Сначала с помощью рекуррентных соотношений строятся функции $\Omega_i \in \mathrm{pr}^{-1}SM$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$, такие, что для любой функции $f(x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$, $n \geqslant 10$, и любого набора $\widetilde{\beta} \in \{0, 1, 2\}^n$ выполняется равенство

$$\Omega_i(j_1(x_1), ..., j_1(x_i), \widetilde{Y}^{10}(\widetilde{\beta})) = g_i^f(x_1, ..., x_i, \widetilde{\beta}).$$

Из этого равенства в случае $i = 6$ подстановкой функций $f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3$ вместо переменных $x_1, ..., x_6$ соответственно получается соотношение

$$\Omega_6(f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3, \widetilde{Y}^{10}(\widetilde{\beta})) = g_i^f(f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3, \widetilde{\beta}).$$

Используя определение функций g_i^f, несложно доказать, что

$$g_i^f(f_2^1(\widetilde{\beta}), f_3^1(\widetilde{\beta}), f_4^1(\widetilde{\beta}), f_3^2(\widetilde{\beta}), f_4^2(\widetilde{\beta}), f_4^3(\widetilde{\beta}), \widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}).$$

Поэтому

$$f(\widetilde{\beta}) = \Omega_6(f_2^1(\widetilde{\beta}), f_3^1(\widetilde{\beta}), f_4^1(\widetilde{\beta}), f_3^2(\widetilde{\beta}), f_4^2(\widetilde{\beta}), f_4^3(\widetilde{\beta}), \widetilde{Y}^{10}(\widetilde{\beta})).$$

Пусть H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $\mathrm{pr}H = SM$, G — произвольная конечная порождающая система класса H, $f(x_1, ..., x_n) \in SM$, $n \geqslant 10$. Тогда $f = \Omega_6(f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_3^2, f_4^2, f_4^3, \widetilde{Y}^{10})$. Каждая из функций, подставляемых в функцию Ω_6, получается отождествлением переменных у функции f и зависит не более чем от $n-1$ переменной. Тогда множество $G_0 = \{\Omega_6\} \cup H(9)$ является порождающей системой класса H. Кроме того, выполняется неравенство

$$D_{G_0}(f^{(n)}) \leqslant 1 + D_{G_0}(H(n-1)).$$

Поэтому найдется константа c_0, такая, что $D_{G_0}(H(n)) \leqslant c_0 n$. Следовательно, для любого конечного базиса G класса H существует константа $c = c(G)$, такая, что $D_G(H(n)) \leqslant cn$.

Соответствующая нижняя оценка следует из мощностных соображений.

Автор выражает благодарность профессору А. Б. Угольникову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11–01–00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения”, проект “Задачи оптимального синтеза управляющих систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Докл. АН СССР. 1988. **298**, №6. 1341–1344.
2. *Угольников А. Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. 1988. Вып. 1. 242–245.
3. *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Изв. вузов. Математика. 1988. №7. 79–88.
4. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2008.
5. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
6. *Дагаев Д. А.* Глубина и сложность реализации формулами функций из некоторых классов трехзначной логики // Тез. докл. XV Междунар. конф. “Проблемы теоретической кибернетики” (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань: Отечество, 2008. 24.
7. *Угольников А. Б.* Глубина формул в некоторых классах k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. №4. 44–47.

Поступила в редакцию
09.12.2011