Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.1, с. 106–137

УДК 519.83, 519.86
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЯ В СЕТЕВОЙ ИГРЕ С ПРОИЗВОДСТВОМ И С ЭКСТЕРНАЛИЯМИ ЗНАНИЙ

Владимир Д. Матвеенко
Алексей В. Королев
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: vmatveenko@hse.ru, danitschi@gmail.com

Исследуется игровое равновесие в сети, в каждом узле которой экономика описывается простой двухпериодной моделью Ромера эндогенного роста с производством и экстерналиями знаний. Сумма уровней знаний в соседних узлах вызывает внешний эффект в производстве каждого узла сети. Рассматриваются решения агентов в зависимости от получаемой экстерналии. Доказывается единственность внутреннего равновесия. Изучается роль пассивных агентов в формировании сети, в частности, возможности присоединения пассивного агента к регулярной сети, а также соединения регулярных сетей через вершины с пассивными агентами. Показано, что сумма уровней знаний по всем вершинам сети понижается при добавлении нового звена сети.

Ключевые слова: сеть, структура сети, игра на сети, равновесие Нэша, экстерналия.

1. Введение

Важной характеристикой современных экономических, социальных и политических отношений является высокая степень взаимной зависимости агентов/акторов[1], которая проявляется на различных уровнях социально-экономических систем (фирма, организация, отрасль, город, регион, страна, мир). С одной стороны, атрибутами современной экономики стали фрагментация производства, офшоринг (т.е. перенос фирмой отдельных видов деятельности или всего производства в другие страны), внутрифирменная торговля, глобальные сети предложения. С другой стороны, взаимозависимость агентов растет в связи с быстрым развитием информационных и социальных сетей.

Поведение агентов в сетевых структурах во многом определяется экстерналиями (внешними эффектами), создаваемыми соседними агентами в сети. Экстерналии обладают свойствами общественного блага, не проходят через механизм цен и не оплачиваются полностью. В частности, так называемые, «джекобианские» положительные экстерналии [14] непосредственно связаны с дополняемостью деятельности агентов. Положительные экстерналии, в частности, экстерналии знания и человеческого капитала, возникают как в процессах производства ([20], [16], [15], [9], [4]), так и в процессах потребления ([5]), и их учет важен при экономическом и социологическом анализе, прогнозировании и дизайне механизмов.

В экономике сетей и теории сетевых игр изучаются вопросы формирования сетей, распространения (диффузии) информации в сетях, положительных и отрицательных экстерналий, дополняемости (complementarity) и заменяемости (substitutability) видов деятельности (см. обзоры [12], [3], [10], [13]).

В случае дополняемости (и, соответственно, супермодулярности) предельный результат усилий агента положительно зависит от усилий других агентов (его соседей по сети) ([7], [18], [19], [21], [17]), и агент заинтересован в увеличении своих усилий, если другие агенты

---

[1] В экономике используется термин «агент», а в менеджменте, социологии и политологии – «актор». Далее мы говорим об «агентах», хотя результаты работы могут иметь приложения при анализе как экономических, так и социальных и политических отношений.

создают достаточные экстерналии. Наоборот, в случае заменяемости (субмодулярности), если другие агенты увеличивают свои усилия, то усилия данного агента могут стать несущественными, и он может положиться на других агентов ([11], [13]); так возникает проблема «безбилетника» (free-rider problem) – см. [6].

В теории игр на сетях появилось направление, связанное с анализом роли положительных экстерналий, но внимание пока в основном уделяется не производственным, а потребительским экстерналиям, связанным с распределением усилий. Типичная схема модели такова (например, [6]). Каждый из n агентов на сети затрачивает некоторые усилия, например, потребляя определенную услугу, причем усилия соседей создают экстерналию, увеличивая полезность данного агента. При этом равновесие Нэша, так же как и эффективное, с позиций общественного благосостояния, размещение усилий существенно зависят от конфигурации сети.

В данной статье продолжается линия исследования равновесий Нэша на сети при наличии положительных экстерналий; при этом наша работа содержит целый ряд новых элементов по сравнению с предшествующими исследованиями.

Во-первых, изучаются производственные, а не потребительские экстерналии; усилия агентов в нашей модели имеют смысл инвестиций, в частности, инвестиций в создание знаний. Наличие производственного блока позволяет интерпретировать случаи дополняемости (супермодулярности) и заменяемости (субмодулярности) как, соответственно, отсутствие и наличие продуктивности. Проводится сравнительный анализ обоих этих случаев в рамках одной и той же модели.

Во-вторых, наша модель, по-видимому, впервые в игровой литературе, в концепции равновесия использует понятие «джекобианской» производственной экстерналии, предложенное в работах [20] и [16]. Суть вводимой нами концепции равновесия Нэша с экстерналиями в том, что каждый агент принимает решение, находясь в определенной среде, состояние которой зависит от действий самого агента и его соседей. При принятии решения агент учитывает состояние среды, причем последнее является в момент принятия решения экзогенным для агента, в том смысле, что агент не принимает во внимание то, что его действия прямо влияют на состояние среды.

В качестве простейшего примера, представим себе игровое равновесие в коллективе курящих и некурящих. Курильщик, принимая в равновесии решение, продолжать или бросить курить, делает это, находясь в среде, определяемой тем, что он курит. Возможно, курящий даже не может себе представить в полной мере, каким было бы его состояние в иной среде – если бы он не курил.

Мы показываем, что при определенных условиях, поведение агента существенно влияет на среду, в которой он находится, и при одной и той же чистой экстерналии, создаваемой соседями по сети, возможно различное равновесное поведение агента (и различная среда).

В-третьих, в нашей работе используется динамический подход в описании и анализе игры с положительными экстерналиями. По существу, наша модель является обобщением простой двухпериодной модели Ромера эндогенного роста с производством и экстерналиями знаний [20].

Основное содержание статьи составляет анализ игрового равновесия Нэша с экстерналиями в модели производства на сети. Мы показываем, что равновесие зависит от структуры сети, выясняем наличие и определяем роль трех эндогенных типов агентов: пассивных, активных и гиперактивных. Рассматривается возможность присоединения пассивного агента к сети, находящейся в равновесии с активными агентами (внутреннем равновесии), так, чтобы поведение каждого агента в новой сети не изменилось. Мы изучаем также условия соединения сетей, находящихся во внутреннем равновесии, через пассивных агентов без изменения поведения всех агентов новой сети.

Дальнейшее содержание статьи таково. В разделе 2 дается описание модели и доказывается единственность внутреннего равновесия. В разделе 3 рассматриваются решения агента в зависимости от получаемой им чистой экстерналии. Раздел 4 посвящен внутренним равновесиям в регулярной сети. Разделы 5 и 6 посвящены угловым равновесиям. В разделе 7 изучаются последствия появления новой связи в сети. В разделе 8 рассматриваются возможности присоединения вершины с пассивным агентом к регулярной сети, находящейся во внутреннем равновесии. В разделе 9 изучаются возможности соединения регулярных сетей через вершины с пассивными агентами. Раздел 10 – заключение.

2. Модель

Рассмотрим сеть (неориентированный граф) с n вершинами $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\mathbf{M}$ – матрица смежности нашей сети. В матрице $\mathbf{M}$ элементы M_{ij} и M_{ji} равны 1, если вершины i и j связаны в сети ребром, и равны 0 в противном случае. Мы полагаем $M_{ii} = 0$ при всех i.

В вершинах сети находятся агенты, предпочтения каждого из которых в двух периодах времени, 1 и 2, описываются функцией полезности $U(c_1^i, c_2^i)$, где c_1^i, c_2^i – объемы потребления финального блага в вершине i в периоды 1 и 2. В модели используется только одно финальное благо (т.е. все блага агрегированы), которое выражено в денежных единицах. В период 1 каждый агент наделен начальным запасом $e > 0$ финального блага. Этот запас он может использовать частично для потребления в первом периоде (c_1^i), частично для инвестиций в знания (k_i). Эти инвестиции в знания, которые мы для краткости будем называть просто объемом знаний, или еще короче, знаниями, имеют ту же размерность, что и финальное благо. Имеется исследовательская технология, которая производит знания один к одному из инвестируемого финального блага. Знания используются при производстве финального блага для потребления во втором периоде. Производство потребительского блага в вершине i в период 2 задается производственной функцией $F(k_i, K_i)$, зависящей от объема знаний k_i в данной вершине и от среды K_i, в которой находится агент. Под средой мы понимаем сумму $K_i = \tilde{K}_i + k_i$, где $\tilde{K}_i$ – суммарные инвестиции в знания всех соседей агента i (чистая экстерналия).

От производственной функции F требуется возрастание по каждому аргументу и вогнутость (может быть, не строгая, например, линейность) по первому аргументу.

Функция полезности предполагается в области $c_1 \in [0, e]$ дважды непрерывно дифференцируемой, возрастающей по каждому аргументу, строго вогнутой по c_1 и вогнутой по c_2.

Согласно используемой нами концепции экстерналии [20], [16], в момент принятия решения агент считает среду K_i экзогенно заданной, т.е. не учитывает ее изменения за счет выбора им k_i. Агент (индекс i для простоты обозначений опущен) решает следующую оптимизационную задачу $P(K)$:

$$U(c_1, c_2) \xrightarrow[c_1, c_2, k]{} \max$$

$$\begin{cases} c_1 \leq e - k, \\ c_2 \leq F(k, K), \\ c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, k \geq 0. \end{cases}$$

При наложенных на функции U и F условиях, задача $P(K)$ имеет единственное решение k для любого значения K. Первые два ограничения задачи $P(K)$ в точке оптимума, очевидно, выполняются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, определим новую функцию (платежную функцию)

$$V(k, K) = U(e - k, F(k, K)).$$

Решение задачи $P(K)$ однозначно определяется значением k, максимизирующим функцию $V(k, K)$ при условии $k \in [0, e]$ при заданном K.

Вектор сред вычисляется с использованием матрицы смежности следующим образом:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})\mathbf{k},$$

где $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \ldots, K_n)^T$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка n, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$, T – знак транспонирования. При этом

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{M}\mathbf{k},$$

где $\tilde{\mathbf{K}} = (\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_n)^T$ – вектор чистых экстерналий в вершинах.

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты $i = 1, 2, \ldots, n$. Стратегиями каждого игрока являются значения инвестиций k_i из промежутка $[0, e]$.

Определение 2.1. *Равновесием Нэша с экстерналиями назовем профиль стратегий игроков $(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*)$ такой, что каждая стратегия k_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, максимизирует платежную функцию $V(k_i, K_i^*)$ при соответствующей среде K_i^*, которая определяется этим же профилем стратегий игроков.*

Если равновесные значения k_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ являются внутренними точками отрезка $[0, e]$, то равновесие $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ мы будем также называть внутренним. В противном случае мы будем называть равновесие угловым. Ясно, что внутреннее равновесие Нэша с экстерналиями (если оно существует при заданных U, F, e) определяется системой уравнений

$$D_1 V(k_i, k_i + \tilde{K}_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где D_1 обозначает частную производную по первому аргументу.

Выберем конкретный вид функции полезности и производственной функции, которые позволят исследовать структуру равновесий в зависимости от параметров.

Пусть функция полезности агента имеет квадратичную форму:

$$U(c_1, c_2) = c_1(e - ac_1) + bc_2, \tag{2.2}$$

причем $0 < a < 1/2, b > 0$. Здесь a – коэффициент насыщения.

Мотивация выбора именно такой формы функции полезности состоит в том, что это простейшая форма, при которой в интересующей нас области $c_1 \in [0, e]$ функция $U(c_1, c_2)$ обладает типичными неоклассическими экономическими свойствами полезности.

Пусть производственная функция имеет вид

$$F(k, K) = BkK,$$

где $B > 0$.

Эта простая функциональная форма двухфакторной функции описывает линейную зависимость выпуска от знаний агента (подобно известной AK-модели), а также от совокупных знаний в той среде, в которой данный агент находится.

Заметим, что, по смыслу параметров b и B, их увеличение способствует инвестициям агента. Произведение bB для удобства будем с этого момента обозначать A.

Замечание 2.1. Можно рассмотреть задачу $P(K)$ как стандартную экономическую модель индивида с двумя периодами жизни (см., например, [8]). В этой модели индивид максимизирует функцию полезности $U(c_1, c_2)$ при бюджетном ограничении $c_2 = (1 + r)(e - c_1)$, где $(1+r)$ – отдача на инвестиции. В случае внутреннего равновесия, условие оптимальности первого порядка состоит в равенстве предельной нормы замещения (MRS) и отдачи от инвестиций:

$$MRS = \frac{\partial U/\partial c_1(c_1, c_2)}{\partial U/\partial c_2(c_1, c_2)} = 1 + r.$$

В нашем случае: $1+r = BK$. Вычисляя производные и делая замену $c_1 = e - k$, приходим к равенству $D_1V(k, K) = 0$.

Замечание 2.2. При сделанных предположениях, определенная равенством (2.2) функция полезности, очевидно, строго возрастает по обоим аргументам и вогнута. Мы могли бы рассмотреть строго вогнутую функцию полезности, подвергнув функцию (2.2) вогнутой трансформации:

$$U(c_1, c_2) = \frac{[c_1(e - ac_1) + bc_2]^{1-\sigma}}{1-\sigma},$$

где $0 < \sigma < 1$, σ - показатель относительной несклонности к риску. Точки максимума у обеих функций совпадают, так что задача $P(K)$ в нашем случае также будет иметь единственное решение, что гарантируется следующей леммой.

Лемма 2.1. *Платежная функция $V(k_i, K_i)$ для i-ой вершины, рассматриваемая при фиксированном K_i как функция от k_i на всей вещественной оси, имеет единственный строгий глобальный максимум. Внутреннее равновесие описывается системой уравнений:*

$$(A - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{M}\mathbf{k} = \bar{\mathbf{e}}, \tag{2.4}$$

где

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e(1-2a) \\ e(1-2a) \\ \dots \\ e(1-2a) \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

$$V(k_i, K_i) = (e - k_i)(e - a(e - k_i)) + Ak_iK_i =$$

$$= e^2(1-a) - k_ie(1-2a) - ak_i^2 + Ak_iK_i,$$

$$D_1V(k_i, K_i) = e(2a-1) - 2ak_i + AK_i, \tag{2.5}$$

таким образом, система уравнений (2.1) принимает вид:

$$-\bar{\mathbf{e}} - 2a\mathbf{k} + A\mathbf{K} = 0,$$

что эквивалентно

$$-\bar{\mathbf{e}} - 2a\mathbf{k} + A\mathbf{M}\mathbf{k} + A\mathbf{k} = 0.$$

Значение второй производной функции $V(k_i, K_i)$ по первому аргументу в любой точке есть $-2a < 0$. □

Определение 2.2. *Решение системы уравнений (2.4) будем называть стационарными значениями инвестиций и обозначать* $\mathbf{k^s} = (k_1^s, k_2^s, \ldots, k_n^s)^T$.

Теорема 2.1. *Если $A \neq 2a$, то система уравнений (2.4) имеет единственное решение.*

Доказательство. Матрица системы (2.4) имеет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A-2a & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & A-2a & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & A-2a \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = AM_{ij}$ при $i \neq j$. Разделив все элементы матрицы $\mathbf{T}$ на A, получим матрицу

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & \alpha & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & \alpha \end{pmatrix},$$

где, в силу (2.3), диагональные элементы удовлетворяют условию $0 < |\alpha| < 1$. Для доказательства теоремы нам достаточно проверить невырожденность матрицы $\tilde{\mathbf{T}}$.

Определитель матрицы $\tilde{\mathbf{T}}$ имеет вид:

$$\alpha^n + a_2\alpha^{n-2} + a_3\alpha^{n-3} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0, \tag{2.6}$$

где, очевидно, все коэффициенты $a_2, a_3, \ldots, a_n$ – целые числа. Пусть m – наибольшая степень переменой α, при которой коэффициент многочлена (2.6), a_{n-m}, отличен от нуля. Если $a_n \neq 0$, то $m = 0$. В противном случае сократим многочлен (2.6) на α^m , получив

$$\alpha^{n-m} + a_2\alpha^{n-m-2} + a_3\alpha^{n-m-3} + \ldots + a_{n-m-1}\alpha + a_{n-m}. \tag{2.7}$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-m}$ – все корни полинома (2.7). Тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-m} = 0, \tag{2.8}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-m-1}\alpha_{n-m} = a_2, \tag{2.9}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-m-2}\alpha_{n-m-1}\alpha_{n-m} = -a_3, \tag{2.10}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \ldots + \alpha_{n-m-3}\alpha_{n-m-2}\alpha_{n-m-1}\alpha_{n-m} = a_4, \tag{2.11}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-m} = (-1)^{n-m}a_n. \tag{2.12}$$

Покажем, что ни один из корней не может удовлетворять условию:

$$0 < |\alpha_i| < 1.$$

Предположим противное, пусть, например, $0 < |\alpha_1| < 1$. Тогда из (2.8) следует, что найдется другой корень, пусть это будет, например, α_2, который не является целым числом. Тогда и произведение $\alpha_1\alpha_2$ – нецелое, а тогда из (2.9) следует, что найдется еще нецелое произведение, например $\alpha_2\alpha_3$ или $\alpha_3\alpha_4$. В любом случае имеем нецелое произведение уже трех или даже четырех корней. Но тогда из (2.10) или (2.11) получаем, что найдется еще нецелое произведение, соответственно, трех или сразу четырех корней. Продолжая этот процесс дальше, видим, что произведение всех корней $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-k}$ не может быть целым, что противоречит (2.12). Это противоречие доказывает, что ни один из корней α многочлена (2.6) не может удовлетворять условию $0 < |\alpha| < 1$, следовательно, при любых допустимых значениях параметров модели матрица $\tilde{\mathbf{T}}$ невырождена. □

Следствие 2.1. *Если при данных значениях параметров существует внутреннее равновесие, то оно единственно.*

Если $A \neq 2a$, из (2.5) следует, что в равновесии

$$k_i^s = \frac{e(1-2a) - A\tilde{K}_i}{A-2a}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Замечание 2.3. Если $A = 2a$, то, как видно из (2.4), необходимое условие внутреннего равновесия имеет вид

$$A\tilde{\mathbf{K}} = A\mathbf{M}\mathbf{k} = \bar{\mathbf{e}}, \tag{2.14}$$

т.е.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{A}\bar{\mathbf{e}}.$$

В дальнейшем мы не будем рассматривать случай $A = 2a$.

3. Поведение агента в равновесии

Определение 3.1. *Если агент делает нулевые инвестиции в знания, $k = 0$, будем говорить, что агент пассивен (П). Если он делает инвестиции $0 < k < e$, будем говорить, что он активен (А); в этом случае $k = k^s$. Если же агент делает максимально возможные инвестиции, e (и, значит, не потребляет в первом периоде), будем говорить, что он гиперактивен (Г).*

Определение 3.2. *Если $A > 2a$, будем говорить, что имеет место продуктивность. В противном случае, если $A < 2a$, будем говорить, что продуктивность отсутствует.*

Замечание 3.1. Поскольку предполагается $a < 1/2$, то из $A > 1$ следует наличие продуктивности, и соответственно, из отсутствия продуктивности следует $A \leq 1$.

Замечание 3.2. Из формулы (2.13) непосредственно видно, что для активных агентов в равновесии при отсутствии продуктивности имеет место стратегическая дополняемость, а при наличии продуктивности имеет место стратегическая заменяемость.

Следующая лемма описывает необходимые и достаточные условия различных видов поведения агента в равновесии, в зависимости от получаемой им чистой экстерналии $\tilde{K}$. Индекс вершины i опускается.

Лемма 3.1. *При отсутствии продуктивности необходимые и достаточные условия различных видов поведения агента следующие.*

1) Агент пассивен, если и только если

$$\tilde{K} \leq \frac{e(1-2a)}{A}.$$

2) Агент активен, если и только если

$$\frac{e(1-2a)}{A} < \tilde{K} < \frac{e(1-A)}{A}.$$

3) Агент гиперактивен, если и только если

$$\tilde{K} \geq \frac{e(1-A)}{A}.$$

При наличии продуктивности необходимые условия различных видов поведения агента следующие.

1) Агент пассивен, только если

$$\tilde{K} \leq \frac{e(1-2a)}{A}.$$

2) Агент активен, только если

$$\frac{e(1-A)}{A} < \tilde{K} < \frac{e(1-2a)}{A}.$$

3) Агент гиперактивен, только если

$$\tilde{K} \geq \frac{e(1-A)}{A}.$$

Доказательство. 1) Пассивный агент имеет среду $K = 0 + \tilde{K}$. Условие равновесия с пассивным агентом состоит в отрицательности производной полезности в точках $k = 0+\varepsilon$, где ε – малое положительное число: согласно (2.5), $e(2a-1) - 2a\varepsilon + A\tilde{K} < 0$.

2) При $0 < k^s < e$, агент активен, $k = k^s$. Записывая подробно эти условия и используя уравнение (2.13), получаем неравенства, указанные в пунктах 2 обеих частей формулировки леммы.

3) Гиперактивный агент имеет среду $K = e + \tilde{K}$. Условие равновесия с гиперактивным агентом состоит в положительности производной полезности в точках $k = e - \varepsilon$, где ε – малое положительное число: $e(2a-1) - 2a(e-\varepsilon) + A(e+\tilde{K}) > 0$. □

Следствие 3.1. *В любой сети возможно равновесие, при котором все агенты пассивны.*

Замечание 3.3. При отсутствии продуктивности при каждой чистой экстерналии $\tilde{K}$ возможен лишь один тип поведения агента.

Наоборот, при наличии продуктивности, если

$$\tilde{K} \in (\frac{e(1-A)}{A}, \frac{e(1-2a)}{A}),$$

то возможны все три типа поведения; если $\tilde{K} = e(1-A)/A$ или $\tilde{K} = e(1-2a)/A$, то агент может быть и пассивным, и гиперактивным; и только если $\tilde{K} < e(1-A)/A$, то агент может быть только пассивным, а если $\tilde{K} > e(1-2a)/A$, то агент может быть только гиперактивным.

Лемма 3.1 имеет очевидную экономическую интерпретацию. Так как чистая экстерналия вносит очень большой вклад в производительность агента, как правило, намного больший, чем величина его собственных инвестиций в знания, то непродуктивному агенту при малых экстерналиях не имеет смысла делать инвестиций в знания, а имеет смысл использовать весь начальный запас финального блага исключительно на потребление. При высоких экстерналиях ему, напротив, выгодно инвестировать весь имеющийся у него начальный запас в знания. При промежуточных значениях среды, непродуктивному агенту имеет смысл делить начальный запас между потреблением и инвестициями в знания, причем инвестировать в знания тем больше, чем больше величина экстерналии.

В случае наличия продуктивности, собственные инвестиции агента приобретают существенную роль, и теперь, в зависимости от действия агента, возможны множественные равновесия. Теперь при промежуточной величине экстерналии агент может не только делить начальный запас между потреблением и инвестициями, но также, формируя среду, может использовать запас весь целиком на инвестиции, либо весь целиком на потребление.

Зависимость размера инвестиций агента в знания k от величины экстерналии $\tilde{K}$ показана на рис. 1 – 4 красной линией; синяя линия показывает стационарное решение k^s.

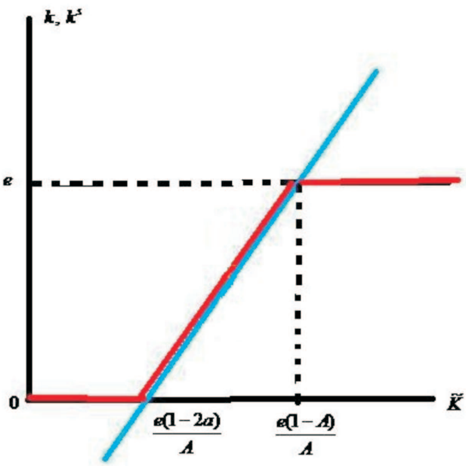

Рисунок 1. Случай $A < 2a$

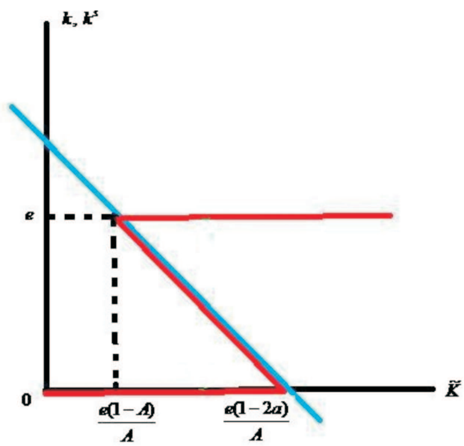

Рисунок 2. Случай $2a < A < 1$

Предложение 3.1. *При наличии продуктивности, если $A \geq 1/2$, то всякий агент, имеющий гиперактивного соседа, может быть также гиперактивен, а если $A + 2a > 1$ (тогда и $A > 1/2$), то он может быть только гиперактивен.*

Доказательство. Если агент i имеет соседа, который гиперактивен, то i получает чистую экстерналию $\tilde{K} \geq e$. Следовательно, $\tilde{K} \geq e \geq e(1-A)/A$, и, по лемме 3.1, агент i может быть гиперактивен. Более того, пусть $A+2a > 1$, т.е. $(1-2a)/A < 1$. Тогда $\tilde{K} \geq e > e(1-2a)/A$ и, по лемме 3.1, агент может быть только гиперактивен. $\square$

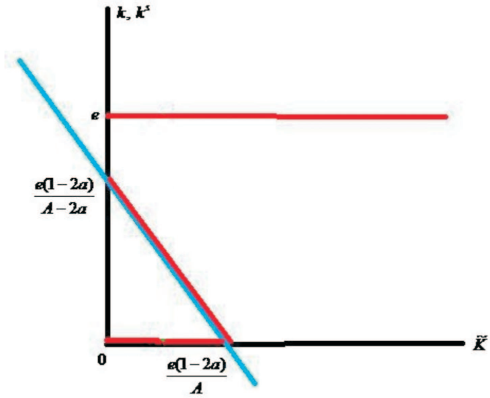

Рисунок 3. Случай $A > 1$

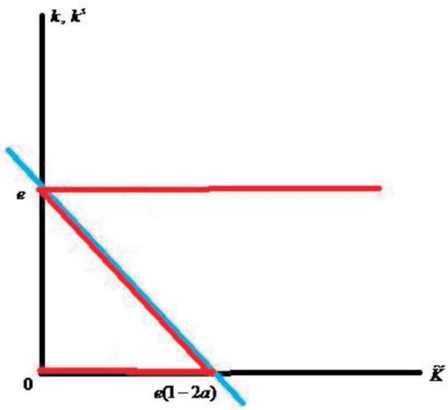

Рисунок 4. Случай $A = 1$

Предложение 3.2. *При отсутствии продуктивности, если $A \geq 1/2$, то всякий агент, имеющий гиперактивного соседа, гиперактивен.*

Доказательство. Аналогично предыдущему, $\tilde{K} \geq e(1 - A)/A$. По лемме 3.1, агент гиперактивен. $\square$

Следующее предложение дает исчерпывающее описание поведения агента, находящегося в изолированной вершине.

Предложение 3.3. *Агент, находящийся в изолированной вершине или такой, что все его соседи пассивны, может быть гиперактивен, активен или пассивен, если $A > 1$; может быть гиперакти-*

вен или пассивен, если $A = 1$*; может быть только пассивен, если* $A < 1$.

Доказательство. Следует из леммы 3.1. □

Лемма 3.2. *В сети, находящейся в равновесии,*

i-ый агент пассивен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии

$$K \leq \frac{e(1-2a)}{A}; \tag{3.1}$$

i-ый агент активен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии

$$\frac{e(1-2a)}{A} < K < \frac{e}{A}; \tag{3.2}$$

i-ый агент гиперактивен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии

$$K \geq \frac{e}{A}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Запишем условие первого порядка для равновесного значения величины инвестиций i-го агента. Так как

$$D_1V(k_i, K) = -2ak_i + AK - e(1-2a),$$

имеем:

$$D_1V(k_i, K)\mid_{k_i=0} = AK - e(1-2a) \leq 0, \tag{3.4}$$

$$D_1V(k_i, K)\mid_{k_i\in(0,e)} = -2ak_i + AK - e(1-2a) = 0, \tag{3.5}$$

$$D_1V(k_i, K)\mid_{k_i=e} = AK - e \geq 0. \tag{3.6}$$

Обозначим

$$\tilde{k}_i = \frac{AK - e(1-2a)}{2a}. \tag{3.7}$$

Именно, если

$$\tilde{k}_i \leq 0, \tag{3.8}$$

то $k_i = 0$, так как (3.8) эквивалентно (3.4) и (3.1);

если

$$\tilde{k}_i \in (0, e), \tag{3.9}$$

то $k_i = \tilde{k}_i$, так как (3.9) эквивалентно (3.5) и (3.2);

а если

$$\tilde{k}_i \geq e, \tag{3.10}$$

то, очевидно, $k_i = e$, так как (3.10) эквивалентно (3.6) и (3.3). □

Замечание 3.4. Так как среда у всех агентов полной сети одинакова, в любом равновесии агенты в полной сети делают одинаковые инвестиции. Таким образом, имеет место гомофилия в полной сети.

Замечание 3.5. Разумеется, формула (3.7) не дает нам равновесного значения величины инвестиций i-го агента; (3.7) является уравнением относительно этой величины, так как входит в K в качестве слагаемого, но формула (3.7) очень удобна для целей анализа.

4. Внутреннее равновесие в регулярной сети

Определение 4.1. *Регулярной назовем сеть, в которой каждая вершина имеет степень m, где $m \geq 1$. Число m будем называть степенью регулярной сети.*

В силу единственности (следствие 2.1) для регулярной сети внутреннее равновесие является симметричным: $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$. При этом уравнение (2.13) при $\tilde{K} = mk$ дает:

$$k = \frac{e(1-2a)}{A(m+1)-2a}. \tag{4.1}$$

Условие активности агентов $0 < k < e$ эквивалентно $A > 1/(m+1)$.

Замечание 4.1. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования внутреннего равновесия в регулярной сети служит $A > 1/(m+1)$ (при действующем постоянно условии $a < 1/2$). Отсюда, в частности следует, что если $A > 1/2$, то внутреннее равновесие в любой регулярной сети существует.

Примеры регулярных сетей

1. Цикл. В этом случае $m = 2$. Согласно (4.1), знание и полезность в вершине цикла не зависят от размера цикла.

2. Полная сеть. В этом случае $m = n - 1$, где n - число вершин в сети. Это как раз случай, соответствующий рассмотренному в [20]. Согласно (4.1), знание в вершине уменьшается с ростом сети. Суммарное знание $nk^s = e(1-2a)/(A-2a/n)$ также уменьшается и стремится к $e(1-2a)/A$.

3. Диада – цепь из двух вершин. Это случай $m = 1$ (она же и частный случай полной сети).

4. Сеть, в которой каждая вершина имеет степень $m = 3$. Такова каждая из сетей, изображенная на рис. 5.

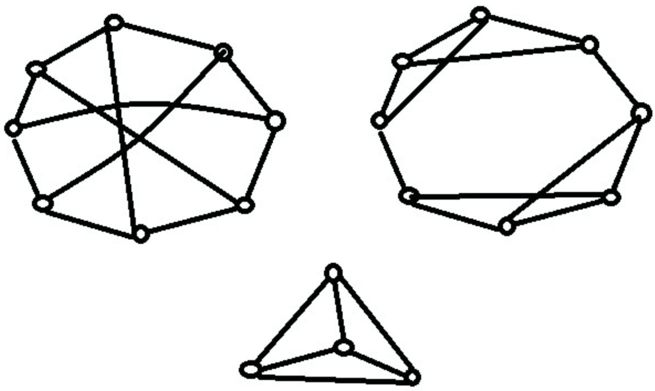

Рисунок 5. Примеры регулярных сетей со степенью $m = 3$

5. Сеть, в которой каждая вершина имеет степень $m = 4$. Такова каждая из сетей, изображенная на рис. 6.

Замечание 4.2. Если m – нечетное число, то регулярная сеть степени m имеет четное число вершин.

Замечание 4.3. Для изолированной вершины также справедливо уравнение (4.1) при $m = 0$. Равновесие изолированного активного агента существует при $A > 1$.

Формула (4.1) позволяет исследовать зависимость знаний, потребления и полезности от степени m регулярной сети. Знания k убывают по m. Потребление в первом и втором периоде равно, соответственно,

$$c_1 = e - k = e\frac{(m+1)A - 1}{(m+1)A - 2a},$$

$$c_2 = F(k, (1+m)k) = B(1+m)k^2 = \frac{B(m+1)e^2(1-2a)^2}{[(m+1)A - 2a]^2}.$$

Нетрудно убедиться, что c_1 возрастает по m и стремится к e, а c_2 убывает и стремится к 0.

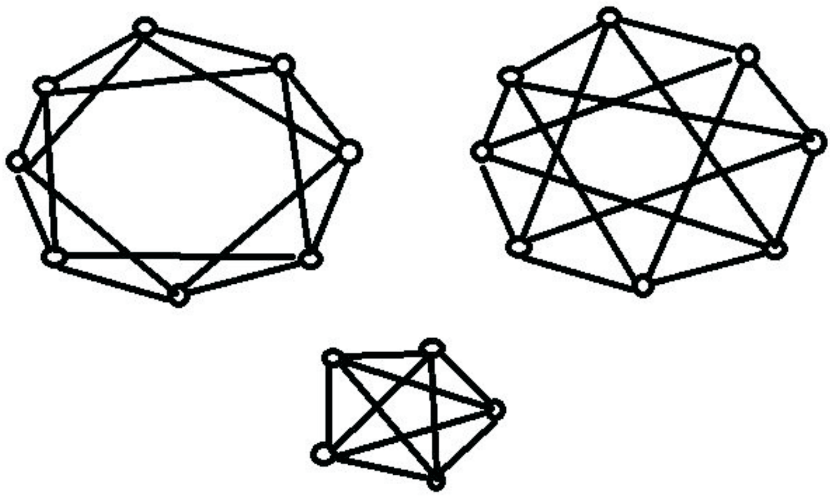

Рисунок 6. Примеры регулярных сетей со степенью $m = 4$

Замечание 4.4. Нетрудно проверить, что c_1 положительно зависит от A, в то время как c_2 отрицательно зависит как от b, так и от B. Экономический смысл этой зависимости понятен. При увеличении продуктивности агенты регулярной сети для того, чтобы оставаться во внутреннем равновесии (не становясь гиперактивными), могут больше тратить на потребление и меньше инвестировать в знания. Увеличение величины e, очевидно, увеличивает как потребление в первом периоде, так и инвестиции в знания, а значит, потребление во втором периоде.

Предложение 4.1. *Для регулярной сети с активными агентами полезность в вершине убывает по m и стремится к величине $U(e, 0) = e^2(1 - a)$.*

Доказательство. Функция полезности принимает вид

$$U = e^2 \frac{[(m+1)A - 1][(m+1)A(1-a) - a] + A(m+1)(1-2a)^2}{[(m+1)A - 2a]^2}.$$

Дифференцируя U по $x = 1 + m$ (считая x непрерывной величиной), получаем

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2aA(Ax - 2a)(2a - 1)^2}{(x^2A^2 - 4aAx + 4a^2)^2}.$$

При $m \geq 1$, т. е. $x \geq 2$, выполняется $Ax - 2a > 0$, поэтому $dU/dx < 0$, таким образом, полезность в каждой вершине убывает по m. При $m \to +\infty$ имеем $c_1 \to e$, $c_2 \to 0$, и, в силу непрерывности, предел полезности равен $U(e, 0)$. □

Этот результат соответствует интуиции: в больших социально-экономических системах полезность велика за счет разнообразия, а в системе, состоящей из однородных агентов, мир, по-видимому, теряет полезность при очень большой степени вершин при отсутствии разнообразия.

Замечание 4.5. Иначе обстоит дело в случае регулярных сетей с гиперактивными агентами. Там, очевидно, полезность агента возрастает по m. Однако, как мы далее увидим (предложение 5.1), равновесие с гиперактивными агентами в регулярной сети требует достаточно высокого уровня A.

Замечание 4.6. Предложение 4.1 показывает, что наибольшая полезность активного агента в регулярной сети достигается в диаде – при $m = 2$. Более того, хотя у изолированного активного агента полезность выше, чем у активного агента в диаде, при $1/2 < A \leq 1$ равновесие изолированного активного агента не существует, а равновесие в диаде существует. Это может служить объяснением чрезвычайной распространенности диад в различных социально-экономических системах.

5. Чисто угловые равновесия

Определение 5.1. *Чисто угловым равновесием будем называть такое равновесие, в котором все агенты пассивны или все гиперактивны.*

Предложение 5.1. *В любой сети существует равновесие, в котором все агенты пассивны.*

Доказательство. Непосредственно следует из предложения 3.3. □

Предложение 5.2. *Пусть $\mu \geq 1$ – наименьшая степень вершины в сети. Ситуация, когда все агенты гиперактивны, является равновесием тогда и только тогда, когда $A \geq 1/(\mu + 1)$.*

Доказательство. Агент, находящийся в вершине с наименьшей степенью, окруженный гиперактивными агентами, согласно лемме 3.1, может быть гиперактивен, лишь если $\mu e = \tilde{K} \geq e(1-A)/A$, а это равносильно доказываемому. Агенты во всех других вершинах при выполнении данного условия тем более могут быть гиперактивны, если они окружены гиперактивными агентами. □

Следствие 5.1. *В регулярной сети, ситуация, когда все агенты гиперактивны, является равновесием тогда и только тогда, когда* $A \geq 1/(1+m)$.

Доказательство. Следует из предложения 5.2 при $\mu = m$. □

Следствие 5.2. *В полной сети, состоящей из n вершин, ситуация, когда все агенты гиперактивны, является равновесием тогда и только тогда, когда $A \geq 1/n$.*

Доказательство. Следует из предложения 5.2 при $\mu = n-1$. □

Из предложений 3.1 и 3.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.3. *В связной сети, если $A \geq 1/2$, то ситуация, когда все агенты гиперактивны, является равновесием. Если, кроме того, отсутствует продуктивность или при наличии продуктивности выполняется условие $A + 2a > 1$, то это единственное равновесие, при котором хотя бы один из агентов гиперактивен.*

Теорема 5.1. *В полной сети, состоящей из n вершин, возможны лишь следующие типы равновесий:*

1. *АА...А, если $A > 1/n$;*
2. *ПП...П, возможно всегда;*
3. *ГГ...Г, если $A \geq 1/n$.*

Доказательство. Следует из замечания 3.4, а также, соответственно, из замечания 4.1, следствия 3.1 и следствия 5.2. □

6. Угловые равновесия в диаде и триаде

Кроме чисто угловых равновесий, возможно и наличие угловых равновесий. Между тем, как было показано в замечании 3.4, в полной сети возможно только однородное поведение всех агентов. Укажем соответствующие условия для диад.

При записи равновесий А будет обозначать вершину с активным агентом, П – вершину с пассивным агентом, а Г – вершину с гиперактивным агентом.

Из теоремы 5.1 непосредственно следует

Предложение 6.1. *В диаде возможны следующие типы равновесий:*

1. АА, если $A > 1/2$;

2. ПП, возможно всегда;

3. ГГ, если $A \geq 1/2$.

Следствие 6.1. *Можно перечислить области плоскости a, A, в которых возможны те или иные равновесия в диаде.*

1. При $0 < a < 1/2$, $0 < A < 1/2$ возможно равновесие типа ПП.

2. При $0 < a < 1/2$, $A = 1/2$ возможны равновесия типов ПП и ГГ.

3. При $0 < a < 1/2$, $A > 1/2$ возможны равновесия типов ПП, АА и ГГ.

В [2] найдены условия существования всевозможных равновесий в цепи из трех вершин (триаде).

Теорема 6.1. *[2] 1) Триада ППП возможна без дополнительных условий.*

2) Триада ГГП (ПГГ) возможна при условии $1/2 \leq A \leq 1 - 2a$.

3) Триада ГГГ возможна при условии $A \geq 1/2$.

4) Триада ААП (ПАА) возможна при условии $A > 1/2$ и $A > 2a$.

5) Триада АГГ (ГГА) возможна при условии $1/2 < A < 1 - 2a$.

6) Триада АГА возможна при выполнении одного из наборов неравенств

$$0 < a \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} < A \leq \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}$$

или

$$\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2} \leq A < \frac{1}{2}.$$

7) Триада ААА возможна при условии

$$A > \frac{1 - 6a + \sqrt{36a^2 - 4a + 1}}{2}.$$

8) Триады ГПП (ППГ), ПГП, ГПГ, ПГА (АГП), ГАП (ПАГ), АПП (ППА), ПАП, АПА, АПГ (ГПА), ГАГ, ААГ (ГАА) невозможны.

7. Образование новых связей

Посмотрим, что происходит, когда в сети, находившейся в равновесии, возникает новая связь между вершинами.

Теорема 7.1. *Пусть W – сеть, а W' – сеть, полученная из W добавлением одной новой связи. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – внутреннее равновесие в сети W, а $k'_1, k'_2, \ldots, k'_n$ – внутреннее равновесие в сети W'. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} k'_i < \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$.*

Доказательство. Векторы $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$ и $\mathbf{k}' = (k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)^T$ являются решениями системы уравнений (2.4), соответственно, для сетей W и W':

$$[A(\mathbf{M} + \mathbf{I}) - 2a\mathbf{I}]\mathbf{k} = \bar{\mathbf{e}}, \tag{7.1}$$

$$[A(\mathbf{M}' + \mathbf{I}) - 2a\mathbf{I}]\mathbf{k}' = \bar{\mathbf{e}}, \tag{7.2}$$

при этом $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ строго положительны. Здесь $\mathbf{M}$ – матрица инциденций сети W, а $\mathbf{M}'$ – матрица инциденций сети W', $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка n, $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{D_{ij}}$, $\bar{\mathbf{e}} = (e(1-2a), e(1-2a), \ldots, e(1-2a))^T$, $\mathbf{D_{ij}}$ – $n \times n$-матрица, у которой на пересечении i-ой строки с j-ым столбцом и на пересечении j-ой строки с i-ым столбцом стоят единицы, а все остальные элементы – нули.

Вычитая (7.2) из (7.1), получаем

$$[A(\mathbf{M} + \mathbf{I}) - 2a\mathbf{I}](\mathbf{k} - \mathbf{k}') = A\mathbf{G_{ij}}, \tag{7.3}$$

где $\mathbf{G_{ij}} = \mathbf{D_{ij}}\mathbf{k}'$ – столбец размерности n, у которого в i-ой строке стоит k'_j, в j-ой строке – k'_i, а во всех остальных строках – нули. Умножая (7.3) слева на матрицу-строку $\mathbf{k^T}$, получим

$$\mathbf{k^T}[A(\mathbf{M} + \mathbf{I}) - 2a\mathbf{I}](\mathbf{k} - \mathbf{k}') = A\mathbf{k^T}\mathbf{G_{ij}}. \tag{7.4}$$

Пользуясь симметричностью матрицы $A(\mathbf{M}+\mathbf{I})-2a\mathbf{I}$, транспонируя равенство (7.1), имеем

$$\mathbf{k^T}[A(\mathbf{M}+\mathbf{I})-2a\mathbf{I}]=\overline{\mathbf{e}}^\mathbf{T}. \tag{7.5}$$

Подставляя (7.5) в (7.4), имеем

$$\overline{\mathbf{e}}^\mathbf{T}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')=A\mathbf{k^T}\mathbf{G_{ij}},$$

$$e(1-2a)(\sum_{i=1}^{n}k_i-\sum_{i=1}^{n}k_i')=A(k_ik_j'+k_jk_i').$$

Поскольку $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ строго положительны, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n}k_i'<\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

□

Экономический смысл теоремы 7.1 вполне очевиден: при появлении новой связи в сети увеличивается влияние экстерналий в производстве, поэтому агентам для того, чтобы оставаться во внутреннем равновесии (не становясь гиперактивными), можно инвестировать в знания меньше, чем они инвестировали раньше, до возникновения этой новой связи.

8. Присоединение вершины с пассивным агентом к регулярной сети

Пассивные агенты не создают экстерналий, т.е. не меняют среду других агентов. Это означает, что возможно равновесие, состоящее из компонент с активными либо гиперактивными агентами, а также групп пассивных агентов, которые соединяют эти компоненты.

Ниже в разделе 9 мы рассматриваем возможности соединения регулярных сетей посредством вершин с пассивными агентами. Предварительно в настоящем разделе мы изучаем возможность присоединения вершины с пассивным агентом к регулярной сети.

Лемма 8.1. *Пусть сеть образована присоединением вершины с пассивным агентом при помощи l связей к регулярной сети степени m,* *находящейся во внутреннем равновесии. Необходимым и достаточным условием существования равновесия, при котором все агенты сохраняют в равновесии свое поведение, является следующее условие:*

$$l \leq m + 1 - \frac{2a}{A}. \tag{8.1}$$

Доказательство. В силу (4.1), присоединенная вершина получает чистую экстерналию

$$\tilde{K} = \frac{le(1-2a)}{A(m+1)-2a}.$$

Согласно лемме 3.1, присоединенный агент может оставаться в равновесии пассивным в том и только в том случае, если

$$\frac{l(1-2a)e}{A(m+1)-2a} \leq \frac{(1-2a)e}{A},$$

что эквивалентно (8.1). □

Таким образом, присоединившийся агент может оставаться пассивным только до тех пор, пока он недостаточно связан с активными агентами. Оставаясь пассивным, он, соответственно, не влияет на равновесие в исходной регулярной сети. Если же число его связей с активными агентами становится достаточно большим, то присоединенный агент получает настолько большую экстерналию, что уже не может сохранять в равновесии безразличное поведение, в результате меняется и равновесие во всей сети.

Следствие 8.1. *В случае $l < m$, $A > a$ всегда возможно присоединение к регулярной сети, находящейся во внутреннем равновесии, вершины с агентом, остающимся пассивным.*

Доказательство. Из $a < A$ следует, что $2a/A < 2$, поэтому

$$m + 1 - \frac{2a}{A} > m - 1 \geq l.$$

□

Следствие 8.2. *В случае $l = m$ присоединение к регулярной сети, находящейся во внутреннем равновесии, вершины с агентом, остающимся пассивным, возможно лишь при наличии продуктивности.*

Следствие 8.3. *В случае $l > m$ присоединение к регулярной сети, находящейся во внутреннем равновесии, вершины с агентом, остающимся пассивным, невозможно.*

Пример 8.1. Пусть пассивный агент 1 присоединяется к диаде активных агентов 2–3 одной связью, т.е. $l = m = 1$. Равновесие, в котором $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = (1 - 2a)e/[2(A - a)]$, возможно, в силу следствия 8.2, лишь при наличии продуктивности.

Аналогично присоединению одной вершины с пассивным агентом, может быть присоединена любая сеть с пассивными агентами в ее вершинах.

9. Соединение регулярных сетей через вершины с пассивными агентами

В этом разделе мы рассматриваем регулярные сети, находящиеся во внутреннем равновесии. Нас интересует, возможно ли построить новую сеть из таких блоков, соединяя их между собой с помощью компонент, состоящих из пассивных агентов, так, чтобы в равновесии во вновь полученной сети все агенты сохранили бы поведение, которое они имели до соединения.

Предложение 9.1. *Пусть $A > a$. Две регулярные сети со степенями m_1 и m_2, находящиеся во внутреннем равновесии, могут быть соединены 2-звенной цепью через вершину с пассивным агентом так, чтобы поведение агентов в равновесии не изменилось, тогда и только тогда, когда*

$$(m_1 - \frac{2a}{A})(m_2 - \frac{2a}{A}) \geq 1.$$

Доказательство. Пассивный агент получает экстерналию, в силу (4.1), равную

$$\frac{e(1-2a)}{A(m_1+1)-2a} + \frac{e(1-2a)}{A(m_2+1)-2a},$$

которая, по лемме 3.1, должна быть не больше, чем $e(1-2a)/A$. Из этого следует доказываемое утверждение. □

Следствие 9.1. *Пусть $A > a$. Если степени соединяемых регулярных сетей совпадают и равны m, то необходимым и достаточным условием возможности соединения их 2-звенной цепью через вершину с пассивным агентом с сохранением поведения всех агентов, является*

$$m \geq 1 + \frac{2a}{A}.$$

Таким образом, при $m \geq 3$ такое соединение всегда возможно. При $m = 2$ такое соединение возможно при наличии продуктивности. При $m = 1$ (случай диад) такое соединение невозможно. Такое соединение активных изолированных вершин также невозможно.

Предложение 9.2. *Регулярные сети со степенями m_1 и m_2, находящиеся во внутреннем равновесии, могут быть соединены через цепочку двух или более пассивных вершин (рис. 7) так, чтобы поведение агентов не изменилось, тогда и только тогда, когда*

$$\min\{m_1, m_2\} \geq \frac{2a}{A}.$$

Доказательство. Из леммы 8.1 при $l = 1$ следует, что необходимым и достаточным условием искомого равновесия является одновременное выполнение двух условий:

$$m_i \geq \frac{2a}{A}, i = 1, 2,$$

что равносильно доказываемому утверждению. □

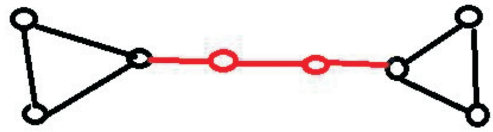

Рисунок 7. Соединение регулярных сетей через цепочку пассивных агентов

Следствие 9.2. *Регулярные сети с одинаковой степенью m, находящиеся во внутреннем равновесии, при $m \geq 2$, могут быть соединены через цепочку двух или более пассивных вершин так, чтобы поведение агентов в равновесии не изменилось. При $m = 1$ такое соединение возможно при наличии продуктивности. Такое соединение активных изолированных вершин невозможно.*

Очевидно, что аналогичным образом, при тех же условиях, может быть составлен «цикл», состоящий из регулярных сетей, соединенных цепочками вершин с пассивными агентами (рис. 8). Группы активных агентов в таком «цикле» чередуются с группами пассивных агентов.

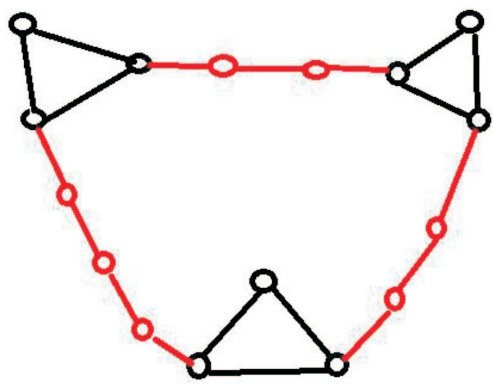

Рисунок 8. «Цикл», в котором регулярные сети, состоящие из активных агентов, соединяются цепочками пассивных агентов

В случае $m = 1$, т.е. соединения диад активных агентов (которые возможны только при $A > 1/2$) через цепочки пассивных агентов, речь идет о цикле в буквальном смысле слова (рис. 9), однако, в этом цикле интересующее нас равновесие возможно только при наличии продуктивности (следствие 8.2). Заметим, что соединение диад через одиночных пассивных агентов с сохранением внутреннего равновесия в диадах невозможно (следствие 8.1).

10. Заключение

В работе рассматривается игра, в которой агенты в сети делают инвестиции некоторого ресурса (такого, как деньги или время) на первой стадии и получают выигрыш на второй стадии. Исследуются игровые равновесия при наличии положительных производственных

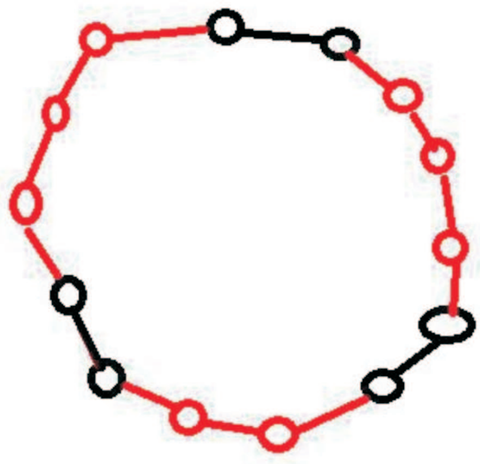

Рисунок 9. Цикл, в котором диады, состоящие из активных агентов, соединяются цепочками пассивных агентов

экстерналий. Такие ситуации типичны для семей, поселений, отраслей, стран, международных организаций и т. д. Таким образом, модель может найти применения при анализе различных экономических, социальных и политических систем.

В рамках модели рассматриваются вопросы, которые касаются взаимосвязей между структурой сети, стимулами и поведением агентов.

Исследованы эндогенные способы поведения игроков: пассивный, активный, гиперактивный. Доказана единственность внутреннего равновесия (т.е. равновесия с активными агентами).

В частности, внимание уделено внутренним равновесиям в регулярных сетях, т. е. таких, у которых все вершины имеют одну и ту же степень m. Доказано, что полезность агента убывает с ростом степени m. В регулярных сетях изучены также чисто угловые равновесия, в которых все агенты пассивны или все гиперактивны.

Выявлено сокращение суммарных инвестиций при появлении новой связи в сети. Изучены возможности соединения регулярных сетей, находившихся во внутреннем равновесии, через компоненты, состоящие из вершин с пассивными агентами, так, чтобы поведение всех игроков в новом равновесии не изменилось.

Продолжением исследования является статья [1], в которой вводится понятие типа вершины сети и строится соответствующая типология сетей; показано, что, независимо от размера и обычной топологической структуры сети, внутреннее игровое равновесие определяется указанной типологией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеенко В.Д., Королев А.В. *Типология сетей и роль новых связей в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний* // Математическая теория игр и приложения. 2016.

2. Матвеенко В.Д., Королев А.В., Скоблова Ю.А. *Анализ равновесий на цепях в сетевой игре с производственными экстерналиями.* Государство и бизнес. Современные проблемы экономики. СПб: СЗИУ РАНХИГС, 2016.

3. Новиков Д.А. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 1. С. 107–124.

4. Alvarez F., Lucas R.Jr. *General equilibrium analysis of the Eaton-Kortum model of international trade* // Journal of Monetary Economics. 2007. V. 54(6). P. 1726–1768.

5. Azariadis C., Chen B.-L., Lu C.-H., Wang Y.-C. *A two-sector model of endogenous growth with leisure externalities* // Journal of Economic Theory. 2013. V. 148. P. 843–857.

6. Bramoullé Y., Kranton R. *Public goods in networks* // Journal of Economic Theory. 2007. V. 135. P. 478–494.

7. Bulow J., Geanakoplos J., Klemperer P. *Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements* // Journal of Political Economy. 1985. V. 93(3). P. 488–511.

8. Chugh S.K . *Modern macroeconomics.* Cambridge: MIT Press, 2015.

9. Eaton J., Kortum S. *Technology, geography, and trade* // Econometrica. 2002. V. 70(5). P. 1741–1779.

10. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega–Redondo F. and Yariv L. *Network games* // Review of Economic Studies. 2010. V. 77. P. 218–244.

11. Grossman G., Maggi G. *Diversity and trade* // American Economic Review. 2000. V. 90. P. 1255–1275.

12. Jackson M.O. *Social and economic networks*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

13. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks*. Young P., Zamir S. eds. / Handbook of game theory with economic applications. 2015. V. 4. Elsevier Science. Amsterdam. P. 95–164.

14. Jacobs J. *The economy of cities*. New York: Random House, 1969.

15. Lucas R.E. *Promoting Economic Literacy: Panel Discussion* // American Economic Review. 2002. V. 92(2). P. 473–75.

16. Lucas R.E. *On the mechanics of economic development* // Journal of Monetary Economics. 1988. P. 22. P. 3–42.

17. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. V. 4(4). P. 475–492.

18. Milgrom P., Roberts J. *The economics of modern manufactoring: technology, strategy, and organisation* // American Economic Review. 1990. V. 80. P. 511–518.

19. Milgrom P., Roberts J. *Complementarities and systems: understanding japanese economic organisation* // Estudios Economicos. 1994. V. 9. P. 3–42.

20. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // The Journal of Political Economy. 1986. V. 94. P. 1002–1037.

21. Topkis D.M. *Supermodularity and complementarity*. Princeton: Princeton University Press, 1998.

EQUILIBRIUM IN A NETWORK GAME WITH PRODUCTION AND KNOWLEDGE EXTERNALITIES

Vladimir D. Matveenko, St.-Petersburg Branch of HSE University, Dr.Sc. (vmatveenko@hse.ru).
Alexei V. Korolev, St.-Petersburg Branch of HSE University, PhD (danitschi@gmail.com).

Abstract: In each node of network, economy is described by the simple two-period Romer's model of endogenous growth with production and knowledge externalities. The sum of knowledge levels in the neighbor nodes causes an externality in the production of each node of network. The game equilibrium in the network is investigated. The agents' solutions in dependence on the size of externality are obtained. The uniqueness of inner equilibrium is proved. The role of passive agents in network formation is studied; in particular, the possibilities of adding of a passive agent to a regular network, and also of joining of regular networks through nodes with passive agents. It is shown, that the sum of knowledge levels in all the nodes decreases under adding of a new link.

Keywords: network, network structure, network game, Nash equilibrium, externality.