УДК 517.9

ИНВАРИАНТНАЯ ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В.М. Четвериков
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», МИЭМ
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34
E-mail: vchetverikov@hse.ru

Ключевые слова: задача стабилизации, глобальная устойчивость, инвариантная область притяжения.

Аннотация: Рассмотрена задача стабилизации при управлении через обратную связь для системы двух нелинейных ДУ. Показано, что в зависимости от выбора управления достигаются различные инвариантные области притяжения начала координат.

1. Введение

Возможность решения задачи стабилизации для автономной системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) с помощью стационарной обратной связи определяется выполнением критерия управляемости Калмана. Это означает, что если СЛДУ содержит n уравнений, то обратной связью должно быть охвачено достаточное число уравнений, но далеко не всегда их число должно быть ровно n.

Принципиально иная ситуация возникает для автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений (СНДУ). Как будет показано на одном простом примере из книги [1], наличие нелинейных слагаемых, не охваченных обратной связью, приводит, в общем случае, к необходимости определения гарантированной области начальных условий для стабилизации, которая лишь в редких случаях может быть глобальной. Подобные вопросы с позиции построения приближенной функции Ляпунова рассматривалась ранее в работе [2].

2. Пример двумерной СНДУ с параметром при нелинейности

Рассмотрим задачу стабилизации для вектора $z(t)$ в двумерном фазовом пространстве

(1)
$$\frac{d}{dt}z = A\cdot z + B\cdot v + F(z), z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},$$
$$F(z) = \eta \begin{pmatrix} x^2\cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix}, z(0) = z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$

где b_1, b_2, η – числовые параметры, а вектор-функция v – искомое управление через обратную связь. Эта задача рассматривалась в параграфе 4.7 книги [1] только для параметров $b_1 = b_2 = \eta = 1$ как пример алгоритмического конструирования регулятора для нелинейной системы. В данной работе нас будут интересовать лишь такие решения, которые удовлетворяют условию стабилизации

(2) $$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

В качестве функционала качества управления выберем функционал

(3) $\qquad J[z(.),v(.)] = (1/2)\int_0^\infty \left(q \cdot z^T \cdot z + r \cdot v^T \cdot v - 2r \cdot \left(\hat{S} \cdot z\right)^T \cdot F(z)\right) dt,$

где q, r – положительные числа, а $\hat{S}$ – положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

(4) $\qquad \hat{S}A + A^T\hat{S} - \hat{S}BB^T\hat{S} + (q/r)I = 0.$

Отличительной особенностью рассматриваемого функционала (3) является отсутствие в общем случае положительной определенности.

Можно показать, что на решениях системы (1), удовлетворяющих условию стабилизации (2), и выборе матрицы $\hat{S}$ в виде положительно определенного решения алгебраического уравнения (4), для функционала качества (3) будет выполняться первое условие экстремума, если функция управления будет линейной функцией координат вида:

(5) $\qquad v = -B^T\hat{S}\, z,$

Заметим, что полученное управление (5) совпадает с известным управлением для системы (1), не содержащей нелинейную функцию F.

Нетрудно заметить, что при управлении (5) система (1) будет иметь вид

(6) $\qquad \dot{z} = (A - BB^T\hat{S}) \cdot z + F(z), z(0) = z^0,$

Для дальнейшего построения введем предполагаемую функцию Ляпунова в виде

(7) $\qquad V_{lin}(z(t)) = r \cdot (z^T(t) \cdot \hat{S} \cdot z(t)),$

что обеспечивает положительную определенность функции (7) при $\forall z \neq 0$. Функция (7) есть не что иное, как функция Ляпунова для линейной задачи, без учета нелинейных слагаемых исходной системы (1). В каких случаях функция (7) может выполнять роль функции Ляпунова для нелинейной задачи будет обсуждаться далее.

Нетрудно показать, что производная по времени предполагаемой функции Ляпунова (7) на решениях системы (6) равна

(8) $\qquad \frac{d}{dt}V_{lin}(z(t)) = -q \cdot (z^T z) - r \cdot\ (z^T M_1 z) + 2r \cdot\ (z^T\hat{S}F),$

где неотрицательно определенная матрица M_1 имеет вид:

(9) $\qquad M_1 = (B^T\hat{S})^T \cdot (B^T\hat{S})$

Если в исходной СНДУ (1) отсутствуют «не охваченные управлением» слагаемые $F(z)$, то функция (7) является функцией Ляпунова, что следует из равенств (8) и (9). В этом случае реализуется глобальная асимптотическая устойчивость начала координат при наличии управления вида (5). Наличие слагаемых $F(z)$ в СНДУ (1), в зависимости от значений параметров b_1, b_2, η, может приводить к двум случаям.

1) Если выполняется неравенство

(10) $\qquad (z^T\hat{S}F) \leq 0\ \forall z \in R^2,$

то асимптотическая устойчивость начала координат продолжает быть глобальной и функция (7) остается функцией Ляпунова.

2) Если условие (10) не выполняются, то выбранные функции управления (5) обеспечивают локальную асимптотическую устойчивость начала координат, и поэтому существует множество начальных условий, при которых траектории стремятся к началу координат. При этом не обязательно, чтобы начальные значения $z(0)$ были бы расположены только в малой окрестности начала координат. Однако все равно в этом случае функция (7) также не будет функцией Ляпунова в общепринятом смысле, который подразумевает глобальную асимптотическую устойчивость.

3. Фазовые портреты при различных значений параметров

В отсутствии управления (при $b_1 = b_2 = 0$), фазовые портреты исходной системы (1) будут качественно отличаться при изменении знака параметра η, что видно из рис. 1.

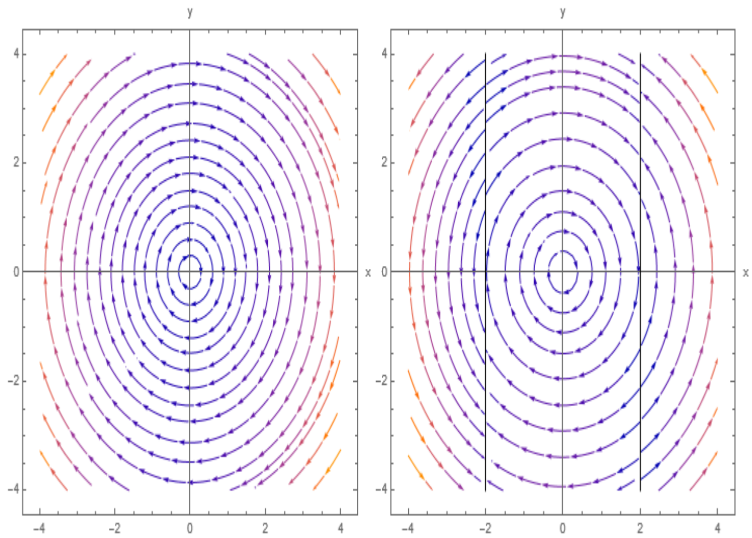

Рис.1. Фазовые портреты системы (1) без управления при различных значениях η. Слева : η=1, справа – η= –1/4.

Оба случая имеют аналитическое решение в полярных координатах ρ, φ:

$$\rho = const, \dot{\varphi} = -1 - \eta \cdot \rho^2 \cdot (\cos\varphi)^2.$$

При положительном значении η траектории в фазовом пространстве (x, y) являются окружностями, движение по которым осуществляется с периодом $T = 2\pi(1 + \eta \cdot \rho^2)^{-1/2}$ и происходит по часовой стрелке (см. рис. 1).

При отрицательном значении η траекториями являются окружности с малым радиусом $\rho < (-\eta)^{-1/2}$или только часть окружностей большего радиуса $\rho > (-\eta)^{-1/2}$. В последнем случае движение прекращается при достижении одной из прямых $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$. Движение в области между этими прямыми происходит по часовой стрелке, а вне этих прямых – в обратную сторону. Точки равновесия: начало координат и все точки прямых $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$.

Поскольку для системы (1) критерий управляемости Калмана допускает только два варианта матрицы B, то рассмотрим их отдельно. Вариант управления по обеим координатам ($b_1 = b_2 = 1$). В этом случае диагональная матрица $\hat{S} = (q/r)^{1/2} \cdot I$ является единственным симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Риккати (4). Тогда, согласно формуле (6), СНДУ (1) при наличии такого управления имеет вид системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(q/r)^{1/2} & 1 \\ -1 & -(q/r)^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix},$$

которая при все значений ηимеет лишь одну точку равновесия – начало координат.
При этом функция $V_{lin}(x(t), y(t))$, определенная формулой (7), является функцией Ляпунова, поскольку для нее выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}V_{lin}(x(t), y(t)) = -2q \cdot (x^2 + y^2)\ \forall x, y.$$

Таким образом, для любых значений параметра η при управлении по обеим координатам начало координат является единственной асимптотически устойчивой точкой по всем пространстве, что показано на рис. 2.

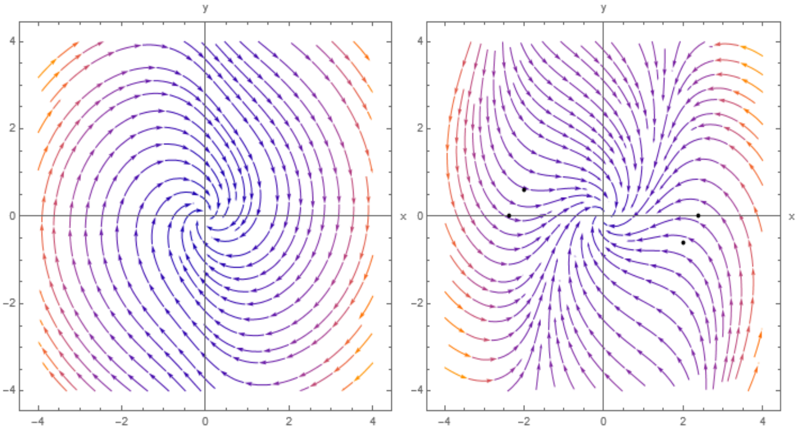

Рис. 2. Фазовые портреты системы (1) при управлении $(b_1 = b_2 = 1, q/r = 1)$. Слева: η=1, справа – η= –1/4.

Вариант управления по второй координате $(b_1 = 0, b_2 = 1)$. В этом случае единственным симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Риккати (4) является матрица

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \alpha = \beta \cdot (\gamma + 1), \beta = \sqrt{q/r + 2\sqrt{1 + q/r} - 2}, \gamma = \sqrt{1 + q/r} - 1$$

Тогда, согласно формуле (6), АСНДУ (1) при наличии такого управления имеет вид системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\gamma + 1) & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Система (11) при $\eta > 0$ имеет только одну точку равновесия – начало координат, а при $\eta < 0$, кроме начала координат система имеет четыре точки равновесия:

$$\bar{z}_1 = \{((1 + \gamma) \cdot (-\eta))^{-1/2}, 0\}, \bar{z}_2 = \{-((1 + \gamma) \cdot (-\eta))^{-1/2}, 0\},$$
$$\bar{z}_3 = \{((-\eta))^{-1/2}, -(\gamma/\beta) \cdot ((-\eta))^{-1/2}\}, \bar{z}_4 = \{-((-\eta))^{-1/2}, (\gamma/\beta) \cdot ((-\eta))^{-1/2}\}.$$

Линеаризация системы ДУ (11) в окрестности точек равновесия $\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4\}$показывает, что первые две точки являются устойчивыми фокусами, а вторые две – седлами. Заметим, что x-координаты седел лежат на прямых точек равновесия $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$, фигурировавших в системе (1) без управления. На правом рис. 3 указанные прямые показаны пунктирными линиями, которые при управлении $(b_1 = 0, b_2 = 1, q/r = 1)$ оказываются сепаратрисами седел.

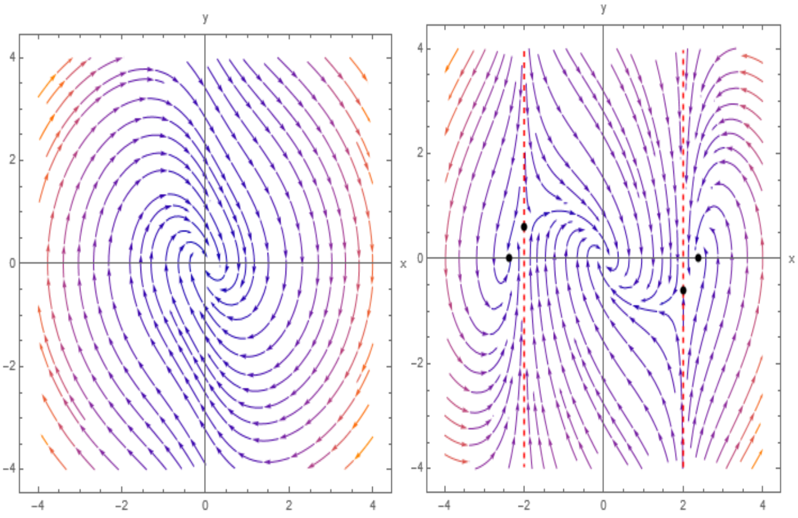

Рис. 3. Фазовые портреты системы (1) при управлении $(b_1 = 0, b_2 = 1, q/r = 1)$. Слева: η=1, справа – η= –1/4. Черными точками отмечены точки равновесия. Пунктирными линиями показаны сепаратрисы двух седел. Область между сепаратрисами являются инвариантной областью притяжения начала координат.

4. Заключение

Введение нового вида функционала качества управления и использование возможности построения сепаратрис седел в обратном времени в пакете Mathematica позволяет находить инвариантные области притяжения начала координат в задачах стабилизации систем двух нелинейных дифференциальных уравнений. Новый функционал не является в общем случае положительно определенным, поэтому при нахождении функции управления используется только выполнение первого условия экстремальности, а не требование минимальности. Рассмотренная в данной работе задача показывает, что именно существование множества точек равновесия в нелинейной системе оказывает существенные трудности при определении инвариантной области притяжения начала координат.

Список литературы

1. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАНД, 2015. 224 с.
2. Каменецкий В.А. Построение областей притяжения методом функции Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1994. № 6. С. 10-26.