



**УЧЕБНИКИ ВШЭ**







УЧЕБНИКИ ВШЭ



**В.А. ГОРДИН**

---

# **ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

---

**ИСКУССТВО И РЕМЕСЛО  
ВЫЧИСЛЕНИЙ ►**



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ  
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

---

МОСКВА, 2025

УДК 519.62

ББК 22.1я7

Г68



<https://elibrary.ru/ysvqkh>

Рукопись подготовлена в рамках грантового проекта НИУ ВШЭ  
по изданию авторских учебников

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Математические основы управления»  
Московского физико-технического института, ректор Университета Иннополис  
*А.В. Гасников;*

доктор физико-математических наук, заслуженный профессор  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»  
*В.А. Тиморин*

**Гордин, В. А.**

Г68 Прикладная математика. Искусство и ремесло вычислений [Текст] : учеб.  
пособие / В. А. Гордин ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». —  
М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2025. — 292, [4] с. — (Учебники  
Высшей школы экономики). — 500 экз. — ISBN 978-5-7598-2918-8 (в пер.). —  
ISBN 978-5-7598-4082-4 (e-book).

Учебное пособие написано на основе курсов, которые автор читает в Высшей школе экономики и Московском физико-техническом институте. В нем излагаются методы, используемые для построения и анализа математических моделей, а также для разработки эффективных алгоритмов их численного исследования: уравнения в частных производных, преобразование Фурье, обобщенные функции, компактные разностные схемы. В приложениях приводятся необходимые сведения о вычислительных методах. Пособие содержит много примеров из разных областей знания и контрольных вопросов. Для ответов на некоторые из них нужно написать код и построить численное решение.

Издание адресовано студентам старших курсов и аспирантам математических, естественно-научных, технических и экономических специальностей.

УДК 519.62

ББК 22.1я7

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики  
<http://id.hse.ru>

doi:10.17323/978-5-7598-2918-8

ISBN 978-5-7598-2918-8 (в пер.)

ISBN 978-5-7598-4082-4 (e-book)

© Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», 2025

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

1. Введение . . . . .	8
Некоторые обозначения и сокращения . . . . .	11
2. Краевые задачи . . . . .	13
2.1. Задача вариационного согласования функции и производной и уравнение Эйлера для простейших функционалов. . . . .	14
2.2. Уравнение неразрывности и уравнение диффузии (теплопроводности). . . . .	22
2.3. Струны, волны и метод разделения переменных . . . . .	33
2.4. Приведение дифференциального уравнения 2-го порядка к самосопряженному виду . . . . .	46
2.5. Динамика упругого стержня. Функция Грина для уравнений высокого порядка. . . . .	51
2.6. Колебания рояльной струны с жесткостью . . . . .	57
3. Задачи: краевая и Штурма–Лиувилля . . . . .	63
3.1. Краевая задача с параметром . . . . .	63
3.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с особыми точками. . . . .	67
3.3. Условие неотрицательности решения самосопряженного уравнения второго порядка . . . . .	67
3.4. Экстремальные свойства собственных функций . . . . .	70
3.5. Теорема Куранта–Фишера. . . . .	72
3.6. Зависимость собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля от параметров задачи . . . . .	74
3.7. Теория возмущений собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля . . . . .	77
3.8. Теоремы Штурма о собственных функциях. . . . .	79
4. Простейшие методы решения краевых задач (продолжение) . . . . .	82
4.1. Простейшая разностная аппроксимация краевой задачи и прогонка . . . . .	83
4.2. Метод экстраполяции Ричардсона . . . . .	87
4.3. Метод стрельбы (пристрелки) для решения краевых задач . . . . .	88
5. Обобщенные функции, или распределения. . . . .	91
5.1. Основные функции . . . . .	92
5.2. Сходимость последовательности основных функций . . . . .	94
5.3. Линейные функционалы — обобщенные функции . . . . .	95
5.4. Сходимость последовательности обобщенных функций. . . . .	99
5.5. Операции с обобщенными функциями . . . . .	100

5.6. Обобщенные функции, зависящие от параметра . . . . .	102
5.7. Разложение на плоские волны . . . . .	107
5.8. Обобщенные решения дифференциальных уравнений. . . . .	110
6. Преобразование Фурье . . . . .	114
6.1. Прямое и обратное преобразования Фурье. . . . .	114
6.2. Условие Дини . . . . .	117
6.3. Обращение преобразования Фурье . . . . .	118
6.4. Примеры преобразования Фурье . . . . .	119
6.5. Функции Вебера–Эрмита — собственные функции преобразования Фурье	123
6.6. Оператор свертки и его собственные функции . . . . .	126
6.7. Линейные замены независимых переменных и преобразование Фурье. . . .	127
6.8. Квантовая механика и принцип неопределенности Гейзенберга . . . . .	127
6.9. Пространства Соболева и лемма о вложении . . . . .	129
6.10. Фундаментальное решение уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и преобразование Фурье обобщенных функций . . . . .	136
6.11. Уравнения Лапласа, Гельмгольца и бигармоническое . . . . .	148
6.12. Классификация уравнений в частных производных: эллиптические, гиперболические, параболические . . . . .	151
6.13. Преобразование Фурье для решения задачи Коши и интеграл ошибок . . .	158
6.14. Синус- и косинус-преобразования Фурье . . . . .	161
6.15. Многомерное преобразование Фурье и функции Бесселя . . . . .	162
6.16. Некорректная задача Коши . . . . .	171
6.17. Положительная определенность функций и ядер и теорема Бохнера . . . .	174
6.18. Случайные поля, их оценивание и использование . . . . .	177
6.19. Универсальность операторов Фредгольма — теорема Л. Шварца о ядре . .	185
6.20. Пример интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода — интерполяция случайных полей . . . . .	186
6.21. Данные с шумом и уравнение Фредгольма 2-го рода . . . . .	190
7. Компактные разностные схемы . . . . .	193
7.1. Компактные аппроксимации оператора $d_x^2$ на совмещенной сетке . . . . .	195
7.2. Компактные аппроксимации оператора $d_x$ на совмещенной сетке . . . . .	200
7.3. Сплайны Шёнберга для оценки производных . . . . .	202
7.4. Компактная аппроксимация одномерной задачи на шахматной сетке . . . . .	204
7.5. Компактные аппроксимации уравнения Пуассона на плоскости — совмещенная квадратная сетка . . . . .	206
7.6. Компактные аппроксимации уравнения Пуассона на плоскости — шахматная квадратная сетка . . . . .	209
7.7. Компактные аппроксимации третьей производной . . . . .	211
7.8. Компактная аппроксимация производных на неравномерной сетке . . . . .	214
7.9. Операторы интерполяции . . . . .	218
7.10. Компактные операторы сглаживания . . . . .	222

7.11. Компактные разностные соотношения высокого порядка точности между осредненными и точечными значениями гладких функций . . . . .	229
7.12. Средние по пикселю и точечные значения функции двух переменных . . . . .	238
7.13. Средние по части пикселя и точечные значения функции . . . . .	242
7.14. Стохастическая оптимизация и компактные схемы . . . . .	245
8. Приложение 1. Интерполяция и аппроксимация функций . . . . .	247
8.1. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита . . . . .	248
8.2. Интерполяция с учетом многих производных. Аппроксимация Паде–Эрмита . . . . .	253
8.3. Оценка погрешности интерполяции. . . . .	256
8.4. Устойчивость результата интерполяции к шумам и константа Лебега . . . . .	260
9. Приложение 2. Теорема Гершгорина и локализация спектра матриц . . . . .	264
9.1. Теорема Гершгорина . . . . .	264
9.2. Тёплицевы матрицы и циркулянты . . . . .	266
10. Приложение 3. Теорема Чебышёва о наилучшем равномерном приближении многочленами или рациональными функциями . . . . .	268
11. Приложение 4. Интерполяционные сплайны . . . . .	272
11.1. Размерность пространства сплайнов. Алгоритм построения. Граничные условия . . . . .	272
11.2. Оценка погрешности интерполяции функции сплайном Шёнберга. Периодическая прогонка . . . . .	278
Список литературы . . . . .	281
Предметный указатель . . . . .	287

# 1

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

*Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры.*

Д.И. Менделеев <sup>1</sup>

От себя добавим: точная наука немислима и без адекватного задаче математического анализа полученной информации.

Многие задачи естествознания сводятся к построению математической модели, включающей дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия. За несколько веков, вплоть до настоящего времени, разрабатывался и совершенствовался математический и вычислительный аппарат изучения таких моделей — иногда качественный, а иногда вычислительный, с доведением до конечного результата в виде таблиц и графиков, количественно описывающих соответствующие явления.

В последние десятилетия этот прогресс предлагает довольно обширный спектр общедоступных или платных программных средств, решающих тот или иной тип задач. Вместе с огромной экономией средств и времени на разработку собственных алгоритмов и программ такое богатство часто приводит к соблазну применять эти разнообразные солверы, не слишком вникая в их суть.

Как и многие другие соблазны, этот может привести к печальным последствиям: выбор неадекватного, неэффективного алгоритма, применение алгоритма к некорректно поставленной задаче (вместо того, чтобы более тщательно обдумать модель и модифицировать ее), наконец, неумение обнаружить ошибки в результатах применения алгоритма, очевидные знающему специалисту.

Содержание данного учебного пособия связано в первую очередь с моделями, основанными на дифференциальных уравнениях. С помощью модели, если она корректна, можно изучать качественные свойства решений (напри-

---

<sup>1</sup> Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907).



мер, свойства спектра краевой задачи) и конструировать солверы: алгоритмы построения решения по входным данным — начальным условиям, краевым условиям и заданному внешнему воздействию — форсингу (если он имеется). При построении алгоритма решения необходимо избежать некорректности модели (когда решение задачи не всегда существует, не всегда единственно или сильно меняется при малом возмущении входных данных).

Наряду с классическими темами: простейшие (и важнейшие) уравнения математической физики, краевая задача и задача Штурма<sup>2</sup>–Лиувилля<sup>3</sup> для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке, уравнения с особой точкой и преобразование Фурье<sup>4</sup>, здесь будут рассмотрены теория обобщенных функций и методы разностной аппроксимации задач. Основное место тут уделено компактным схемам, получившим развитие в последние десятилетия. Эти схемы позволяют существенно повысить по сравнению с классическими точность численного решения задачи почти без увеличения вычислительной трудоемкости алгоритма. В конце книги имеется несколько приложений, изучение которых должно снабдить читателя подсобными средствами для построения различных алгоритмов.

Учебное пособие адресовано студентам, аспирантам и научным сотрудникам, занимающимся практическим построением моделей для описания конкретных процессов. Ввиду ограниченности объема автор во многих случаях жертвовал трудными доказательствами, отсылая читателя к специальной литературе (по уравнениям математической физики на русском языке издано много отличных учебников и монографий). Зато рассмотрено большое количество разнообразных примеров из различных областей. Еще больше в книге контрольных вопросов (они обозначены буквой **К**), — их формулировки составляют важную часть материала. Преподаватели смогут использовать их в том числе и для курсовых работ.

Материалы, здесь изложенные, были включены в несколько курсов для студентов Высшей школы экономики. Им предлагалось проделать довольно много домашних работ, в которых часть заданий нужно было выполнить аналитически, а часть — на компьютере с последующим анализом полученных чисел и графиков.

Книгу можно использовать и как справочник по целому ряду методов и алгоритмов. Однако автор убежден, что без практического опыта решения упражнений профессиональное овладение предметом невозможно.

Предполагается, что читатель, приступающий к освоению материала этого учебного пособия, уже свободно владеет аппаратом линейной алгебры (в объеме несколько не устаревшего, несмотря на почтенный возраст, учебника [Гельфанд, 1970]) и математического анализа. Также предполагается,

---

<sup>2</sup> Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855).

<sup>3</sup> Жозеф Лиувилль (1809–1882).

<sup>4</sup> Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830).

что ему известна теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Тут имеется много замечательных учебников, например: [Айнс, 2005; Арнольд, 1984; Матвеев, 1967], весьма различных и по отобранному материалу, и по стилю изложения.

Настоящая книга является продолжением учебника «Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать» [Гордин, 2016]<sup>5</sup>, где рассмотрены модели из самых разных областей, основанные на обыкновенных уравнениях, дифференциальных и разностных, а также методы качественного и количественного анализа их решений.

При написании книги я пользовался возможностью обсуждать рассмотренные в ней вопросы со своими коллегами. Это позволило улучшить изложение и избежать многих ошибок. Особенно я признателен Д.Я. Прессману, В.Е. Року, М.А. Смирнову, В.А. Тиморину и Б.А. Хесину, сделавшим много полезных замечаний.

---

<sup>5</sup> Издательский дом ВШЭ предполагает в ближайшее время выпустить переработанное издание этой книги.

# НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

---

$!$  — факториал,

$\mathbf{x}$  — величина векторная, — выделена жирным шрифтом; если все компоненты  $\mathbf{x}$  — целые и неотрицательные, то эта величина иногда называется мультииндексом, и тогда  $|\mathbf{x}| = x_1 + \dots + x_n$ ,

$\bar{x}$  — комплексная величина, сопряженная к  $x$ ,

$d_x u$  — производная функции  $u(x)$ ,

$\partial_x$  — производная функции  $u$  нескольких переменных по переменной  $x$ ,

$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} u(\mathbf{x})$  — производная  $\partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_n}^{j_n} u(\mathbf{x})$ ,

**grad** — градиент,

**div** — дивергенция,

**rot** — ротор,

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  — набор из  $n$  чисел; возможно, координаты  $n$ -мерного вектора,

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  — скалярное произведение векторов,

$\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное вещественное пространство,

$\mathbb{C}^n$  —  $n$ -мерное комплексное пространство,

$\mathbb{R}_+$  — множество неотрицательных вещественных чисел,

$\mathbb{R}_-$  — множество неположительных вещественных чисел,

$\mathbf{O}(n)$  — группа ортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ ,

$\mathbf{SO}(n)$  — группа специальных ортогональных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ , т.е. с определителем, равным  $+1$ ,

$\omega_n$  — объем единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ ,

$\Omega_{n-1}$  — площадь  $(n-1)$ -мерной единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ,

$\partial D$  — граница области  $D$ ,

$\bar{D}$  — замыкание области  $D$ ,

$\mathbf{L}_\rho^2(G)$  — гильбертово пространство функций на области  $G$ , суммируемых в квадрате с положительной весовой функцией  $\rho$ , где скалярное произведение задается формулой:  $(u, v)_{\mathbf{L}_\rho^2(G)} = \int_G u(\mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ,

$\mathbf{C}(G)$  — банахово пространство ограниченных непрерывных функций на области  $G$  — норма задается формулой  $\|u\|_{\mathbf{C}(G)} = \sup_{\mathbf{x} \in G} |u(\mathbf{x})|$ ,

$C^k(G)$  — банахово пространство функций, с ограниченными и непрерывными производными  $\partial_{\mathbf{x}}^j u(\mathbf{x})$ ,  $|j| \leq k$  на области  $G$  — норма задается формулой  $\|u\|_{C^k(G)} = \max_{|j| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in G} |\partial_{\mathbf{x}}^j u(\mathbf{x})|$ ,

$x_+^z$  — обобщенная функция одного переменного типа функции, равная нулю при  $x \leq 0$  и  $x^z$  при  $x > 0$ , где  $z \in \mathbb{C}$ ,

$\varphi(\mathbf{x}) * \psi(\mathbf{x})$  — свёртка функций  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $\psi(\mathbf{x})$ ,

$A^*$  — линейный оператор, сопряженный к оператору  $A$ , или матрица, сопряженная к матрице  $A$ ,

**Spec**  $A$  — спектр (множество всех собственных чисел) матрицы  $A$ ,

$A'$  — матрица, транспонированная к матрице  $A$ ,

$\Delta$  — оператор Лапласа<sup>1</sup>,

$\delta_m^n$  — символ Кронекера<sup>2</sup>,

**dim**  $L$  — размерность пространства  $L$ ,

$\delta$  — обобщенная дельта-функция Дирака<sup>3</sup>,

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений,

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение,

ФСР — фундаментальная система решений (базис в пространстве решений линейного обыкновенного однородного дифференциального уравнения или системы).

---

<sup>1</sup> Пьер-Симон Лаплас (1749–1827).

<sup>2</sup> Леопольд Кронекер (1823–1891).

<sup>3</sup> Поль Адриен Морис Дирак (1902–1984).

# 2

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

---

Для различных обыкновенных дифференциальных<sup>1</sup> уравнений и систем порядка  $n$

$$d_t \mathbf{X} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \quad (2.1)$$

часто рассматривается задача Коши<sup>2</sup>:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \quad (2.2)$$

Предполагается, что правая часть — функция  $\mathbf{F}$  в окрестности точки  $\langle 0, \mathbf{X}_0 \rangle$  непрерывна по совокупности всех  $n + 1$  аргументов, а по  $\mathbf{X}$  она дополнительно Липшиц<sup>3</sup>-непрерывна, т.е. существует такая константа  $L$ , что при всех  $\mathbf{X}_1$  и  $\mathbf{X}_2$ , лежащих в этой окрестности, выполняется неравенство

$$|\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{X}_2)| \leq L|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|;$$

Липшиц-непрерывность функции  $\mathbf{F}$  следует (докажите!) из существования у нее ограниченной первой производной.

При таких предположениях теорема Пикара<sup>4</sup>–Линделефа<sup>5</sup> гарантирует (см. [Арнольд, 1984; Гордин, 2016; Камке, 1976; Матвеев, 1967]) существование и единственность решения такой задачи Коши «в малом» (т.е. при достаточно малых  $|t|$ ), а также непрерывную зависимость этого решения от начальных условий (данных Коши)  $\mathbf{X}_0$ . Во многих случаях (например, для линейных уравнений и систем) гарантируется существование и единственность решения даже «в большом», т.е. при всех  $t$ .

**Замечание А.** Для нелинейного дифференциального уравнения 1-го порядка  $d_t x = x^2$  при  $x_0 > 0$  решение существует только в малом, причем время существования ограниченного решения зависит (докажите!) от начального условия  $x_0$ . Если же рассматривать решение дифференциального уравнения как функцию комплексного

---

<sup>1</sup> Во всей книге используется обозначение  $d_x$  для оператора дифференцирования по переменной  $x$ , — не путать с дифференциалом  $dx$ . Частная производная обозначается  $\partial_x$ .

<sup>2</sup> Огюстен Луи Коши (1789–1857).

<sup>3</sup> Рудольф Отто Сигизмунд Липшиц (1832–1903).

<sup>4</sup> Шарль Эмиль Пикар (1856–1941).

<sup>5</sup> Эрнст Леонард Линделёф (1870–1946).

переменного, то (при ограничениях на правую часть  $\mathbf{F}$ ) решение уравнения может существовать при почти всех значениях  $t \in \mathbb{C}$ .

**Замечание Б.** Условие непрерывности  $\mathbf{F}$  не является достаточным для единственности решения задачи Коши. Например, при  $n = 1$ ,  $F = \sqrt{|x|}$  существуют и нулевое, и ненулевые решения с одинаковым начальным условием  $x_0 = 0$ .

Если же вместо одного момента времени  $t = 0$  дополнительные условия (в количестве, равном размерности вектора  $\mathbf{X}_0$ ) заданы в несколько моментов времени, то могут поменяться весьма существенно свойства задачи: существование и единственность решения, как и непрерывная его зависимость от исходных данных (форсинга и граничных условий).

В этой главе рассмотрены такие задачи. Основное внимание уделяется линейному дифференциальному уравнению второго порядка на отрезке  $[a, b]$ , когда одно граничное (краевое) условие задано при  $t = a$ , а второе — при  $t = b$ .

## 2.1. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО СОГЛАСОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ И УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть два разных прибора измеряют положение  $\tilde{x}(t)$  автомобиля на прямолинейной дороге и его скорость  $\tilde{v}(t)$  при  $t \in [a, b]$  (например, ГЛОНАСС и спидометр). Если показания приборов, как это обычно бывает, не вполне согласованы между собой из-за погрешностей измерений, то приближенное равенство

$$d_t \tilde{x}(t) \approx \tilde{v}(t)$$

выполняется лишь с некоторой погрешностью. Предположим, что у нас имеется априорное представление о точности обоих приборов. Тогда можно поставить задачу вариационного согласования показаний. Среди таких пар функций  $\langle x(t), v(t) \rangle$ , которые удовлетворяют точно соотношению

$$d_t x(t) = v(t), \tag{2.3}$$

нужно найти минимально отличающиеся от измерений:

$$\mathbf{I}[x(t), v(t)] = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(t) [x(t) - \tilde{x}(t)]^2 + \beta(t) [v(t) - \tilde{v}(t)]^2 dt \rightarrow \min_{x(t), v(t)}, \tag{2.4}$$

т.е. минимизировать функционал  $\mathbf{I}[x(t), v(t)]$  при условии (2.3).

Поставленная задача — бесконечномерный аналог хорошо известного метода наименьших квадратов, предназначенного для поиска минимума положительно определенной квадратичной формы на заданном подпространстве конечномерного пространства (см., например, [Гельфанд, 1970]).

Здесь предполагается, что все известные функции,  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{v}(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ , достаточно гладкие, а также что и решение вариационной задачи должно получиться гладким. Если функция  $\tilde{x}(t)$  терпит скачки, то будет терпеть скачки и 2-я производная решения. Если терпит скачок функция  $\tilde{v}(t)$ , то будет терпеть скачки 1-я производная решения.

Положительные коэффициенты  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  (имеющие разную физическую размерность) описывают наше относительное доверие к показаниям приборов: чем больше доверие, тем больше вес. Разумеется, если умножить оба эти коэффициента на одинаковое число, решение задачи не изменится. Коэффициент  $1/2$  в определении функционала использован для удобства дальнейших вычислений.

Задачу минимума функционала (2.4) при условии (2.3) можно заменить на задачу абсолютного (безусловного) минимума неотрицательного функционала

$$\mathbf{J}[x(t)] = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(t) [x(t) - \tilde{x}(t)]^2 + \beta(t) [d_t x - \tilde{v}(t)]^2 dt \rightarrow \min_{x(t)}. \quad (2.5)$$

**К.1.** Сформулируйте аналогичную задачу о наилучшем согласовании независимой информации о координате, скорости и ускорении. Все три веса доверия предполагаются известными.

Используем основную идею математического анализа (видимо, принадлежащую Кеплеру<sup>6</sup>): около минимума или максимума гладкой функции ее изменения имеют более высокий порядок малости, нежели изменения аргумента.

Пусть  $x_*(t)$  искомая функция, на которой достигается минимум функционала (2.5). Прибавим к ней  $\delta x(t)$  — функцию с малой нормой (здесь буква  $\delta$  напоминает об этой малости). Здесь норма<sup>7</sup> понимается в смысле  $\mathbf{C}^1$ .

Оценим изменение значения функционала при малом изменении функции  $x_*(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}[x_*(t) + \delta x(t)] - \mathbf{J}[x_*(t)] &= \\ &= \int_a^b \alpha(t) \left\{ \delta x(t) [x_*(t) - \tilde{x}(t)] + \frac{1}{2} (\delta x(t))^2 \right\} + \\ &+ \beta(t) \left\{ d_t(\delta x(t)) [d_t x_* - \tilde{v}(t)] + \frac{1}{2} (d_t \delta x(t))^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

<sup>6</sup> Иоганн Кеплер (1570–1630).

<sup>7</sup> Напомним определение. Пусть  $L$  — линейное пространство. *Нормой* называется неотрицательная функция (обозначение  $\|\mathbf{f}\|$ ,  $\mathbf{f} \in L$ ), такая что а)  $\|\mathbf{f}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ; б)  $\|\lambda \mathbf{f}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{f}\|$  для любого числа  $\lambda$  и любого  $\mathbf{f} \in L$  (это свойство *нормы* называется *полулинейностью*); в)  $\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\| \geq \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|$  (это свойство называется *неравенством треугольника*). Нетрудно проверить, что в пространстве  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке  $[a, b]$  формула  $\|f(t)\|_k = \sum_{j=0}^k \left[ \max_{t \in [a, b]} |d_t^j f(t)| \right]$  действительно задает норму.

Проинтегрируем в (2.6) по частям и перегруппируем слагаемые:

$$\mathbf{J}[x_*(t) + \delta x(t)] - \mathbf{J}[x_*(t)] = \delta \mathbf{J}[\delta x(t)] + \frac{1}{2} \int_a^b \alpha(\delta x)^2 + \beta(t)(d_t \delta x)^2 dt, \quad (2.7)$$

где функционал  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)]$  определяется формулой (проверьте, что он линеен по  $\delta x$ ):

$$\int_a^b \delta x(t) \{ \alpha(t) (x_*(t) - \tilde{x}(t)) - d_t [\beta(t) (d_t x_*(t) - \tilde{v}(t))] \} dt + \{ \delta x(t) [\beta(t) (d_t x_*(t) - \tilde{v}(t))] \}_{t=a}^{t=b}. \quad (2.8)$$

Функционал  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)]$  называется *первой вариацией функционала  $\mathbf{J}$*  от аргумента  $\delta x$  при фиксированной функции  $x_*(t)$ .

Значения первой вариации при малой норме возмущения  $\delta x$  имеют первый порядок малости, а второй интеграл в (2.7) — второго порядка малости. Его величина оценивается сверху величиной  $|b - a| \left[ \max_{t \in [a, b]} |\alpha(t)| \cdot \|\delta x(t)\|_{\mathbb{C}}^2 + \max_{t \in [a, b]} |\beta(t)| \cdot \|d_t \delta x(t)\|_{\mathbb{C}}^2 \right]$ . Следовательно, существует константа  $K$  (укажите для нее явную формулу), гарантирующая оценку сверху квадратом нормы:  $K \cdot \|\delta x(t)\|_{\mathbb{C}}^2$ . Это величина второго порядка малости при  $\|\delta x(t)\|_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow 0$ .

**Лемма.** Необходимое условие минимума на функции  $x_*(t)$  гладкого функционала  $\mathbf{J}$  — тождественное (т.е. при всех функциях  $\delta x(t)$ ) равенство нулю его первой вариации — линейного функционала  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)]$ , вычисленного в  $x_*(t)$ .

Действительно, если существует функция  $\delta x(t)$ , такая что  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)] \neq 0$ , то либо  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)] < 0$ , либо  $\delta \mathbf{J}[-\delta x(t)] < 0$ . Пусть, например, реализуется первый вариант.

Рассмотрим семейство функций  $s \cdot \delta x(t)$ , где  $s \rightarrow +0$ . Поскольку второе слагаемое в формуле (2.7) зависит от  $s$  квадратично, оно при достаточно малых  $s$  убывает быстрее, чем первая вариация (т.е. первая вариация будет «главнее» этого остатка, а значит, при достаточно малых  $s$  левая часть в (2.7) отрицательна, т.е.  $x_*(t)$  — не минимум функционала  $\mathbf{J}$  — в сколь угодно малой окрестности  $x_*(t)$  существуют функции, на которых функционал  $\mathbf{J}$  принимает меньшие значения.

**К.2.** Проведите доказательство леммы для случая  $\delta \mathbf{J}[-\delta x(t)] < 0$ .

Ограничимся сначала возмущениями  $\delta x$ , обращающимися в нуль на краях отрезка. Тогда внеинтегральные слагаемые в (2.8) обращаются в нуль.

**Лемма.** Необходимое условие тождественного равенства нулю линейного функционала  $\delta \mathbf{J}[\delta x(t)]$  — равенство нулю при всех  $t$  функции:

$$\alpha(t) (x_*(t) - \tilde{x}(t)) - d_t [\beta(t) (d_t x_*(t) - \tilde{v}(t))] = 0. \quad (2.9)$$



**Доказательство** от противного. Если в точке  $t_0 \in [a, b]$  равенство нарушено и левая часть (обозначим ее  $f(t)$ ) равна числу  $\mu > 0$ , то из непрерывности всех входящих в него функций следует, что существует  $\epsilon$ -окрестность  $t_0$ , в которой  $f(t) > \mu/2$ . Предположим, что эта окрестность целиком лежит на интервале  $(a, b)$ .

Рассмотрим функцию (постройте ее график):

$$\delta x(t) = \begin{cases} (t - t_0 - \epsilon)^2(t - t_0 + \epsilon)^2 & \text{при } |t - t_0| \leq \epsilon, \\ 0 & \text{при } |t - t_0| \geq \epsilon. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда выполняются неравенства:

$$\delta \mathbf{J}[\delta x(t)] \geq \epsilon^5 \mu / 2 > 0,$$

т.е. мы пришли к противоречию.

**К.3.** Докажите лемму в случаях, когда  $\mu < 0$  или когда  $\epsilon$ -окрестность точки  $t_0$  не лежит целиком в интервале  $(a, b)$ .

Равенство (2.9) выполняется при всех  $t$ , а значит, его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка на функцию  $x_*(t)$ . Оно называется *уравнением Эйлера*<sup>8</sup> для функционала  $\mathbf{J}$ . Его решения  $x_*(t)$  называются *экстремальями* (не путать с экстремумами).

До сих пор мы ограничивались рассмотрением вариаций  $\delta x(t)$ , обращаясь в нуль на краях отрезка. Предположим, что уравнение Эйлера выполнено, т.е.  $x_*(t)$  — экстремаль задачи. Рассмотрим теперь такую функцию  $\delta x(t)$ , которая обращается в нуль только на правом краю отрезка. Интегральное слагаемое в (2.8) равно нулю, а внеинтегральное (при  $t = a$ ) равно

$$\delta x(a) \cdot \beta(a) \cdot (d_t x_*(t) - \tilde{v}(t)).$$

Поскольку первая вариация в точке минимума функционала  $\mathbf{J}$  тождественно равна нулю, а  $\delta x(a) \cdot \beta(a) \neq 0$ , получаем отсюда граничное условие:

$$d_t x_*(a) = \tilde{v}(a). \quad (2.11)$$

Граничное условие (2.11) на искомую экстремаль  $x_*(t)$  называется *условием трансверсальности* для функционала  $\mathbf{J}$ .

**Теорема.** Вместе с аналогичным условием трансверсальности на правом краю:

$$d_t x_*(b) = \tilde{v}(b) \quad (2.12)$$

условие (2.11) выделяет единственное решение дифференциального уравнения Эйлера (2.9), которое и реализует минимум функционала  $\mathbf{J}[\delta x]$  среди всех гладких функций  $x(t)$ , т.е. наилучшее согласование данных о динамике координаты и скорости автомобиля.

<sup>8</sup> Леонард Эйлер (1707–1783).

**К.4.** Пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha \equiv 2$ ,  $\beta \equiv 3$ . Пусть  $\tilde{x} = \sin(t)$ ,  $\tilde{v} = \cos(t)$ . Проверьте, что функция  $x_*(t) = \tilde{x}(t)$  удовлетворяет и уравнению Эйлера, и условиям трансверсальности, а функционал  $\mathbf{J}$  принимает на этой экстремали нулевое значение.

**К.5.** Пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha \equiv \sin(\pi t)$ ,  $\beta \equiv 3$ . Пусть  $\tilde{x} = \sin(t)$ ,  $\tilde{v} = \cos(t)$ . Проверьте, что функция  $x_*(t) = \tilde{x}(t)$  удовлетворяет и уравнению Эйлера (т.е. является экстремалью функционала), и условиям трансверсальности, а функционал  $\mathbf{J}$  принимает на этой экстремали нулевое значение.

**К.6.** Остается ли верным утверждение теоремы, если  $\alpha \equiv 0$ ,  $\beta > 0$ ?

**К.7.** Получите уравнение Эйлера и граничные условия трансверсальности (по два на каждом краю отрезка) для задачи согласования информации о динамике координаты, скорости и ускорения автомобиля  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{v}(t)$ ,  $\tilde{a}(t)$ , известных с положительными весами доверия  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ .

Предположим теперь, что нам дополнительно точно известно положение автомобиля в момент старта и финиша:

$$x(a) = A, x(b) = B, A, B \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Тогда вариация  $\delta x$  на краях отрезка равна нулю. Вывод граничных условий на производную (2.11, 2.12) оказывается неверен (почему?), а единственное решение уравнения Эйлера выделяется с помощью *граничных условий Дирихле*<sup>9</sup> (2.13). Другими словами, мы ищем минимум функционала  $\mathbf{J}$  не среди всех гладких функций  $x(t)$ , а лишь среди тех, которые удовлетворяют условиям (2.13). Эти два условия в бесконечномерном пространстве гладких функций задают бесконечномерную плоскость.

**К.8.** Пусть в условиях **К.4** используются не граничные условия трансверсальности, а граничные условия Дирихле, причем в этих условиях Дирихле присутствует ошибка:  $x(0) = p$ ,  $x(1) = \sin(1) + q$ , где  $p, q \in \mathbb{R}$ . Постройте экстремаль, удовлетворяющую этим граничным условиям. Оцените величину рассогласованности — значения функционала  $\mathbf{J}[x_*]$  в зависимости от параметров  $p, q$ . Постройте изолинии погрешности на плоскости параметров  $p, q$ .

**К.9.** Пусть в условиях **К.6** используются не граничные условия трансверсальности, а граничные условия Дирихле. Верно ли утверждение теоремы?

**К.10.** Пусть в условиях **К.9** весовая функция  $\alpha$  — маленькая отрицательная константа. При каких значениях  $\alpha/\beta$  утверждение теоремы остается верным?

**К.11.** Пусть  $\alpha = \text{const} > 0$ ,  $\beta(x) = c(x - a)$ ,  $c > 0$ , т.е. коэффициент при старшей производной в уравнении (2.9) обращается в нуль на левом краю отрезка. Используя метод Фробениуса<sup>10</sup> для дифференциального уравнения с особенностью в точке  $x = a$  (см. разд. 26.2 из [Гордин, 2016]), постройте решение ограниченного решения уравнения Эйлера (2.9) в виде ряда по целым степеням  $(x - a)$  (предполагается, что функции  $\tilde{x}$  и  $\tilde{v}$  также представимы в виде таких рядов).

<sup>9</sup> Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859).

<sup>10</sup> Фердинанд Георг Фробениус (1849–1917).

**Замечание А.** Поскольку в ОДУ из **К.11** у определяющего уравнения корень  $\rho = 0$  имеет кратность 2, одно решение однородного уравнения может быть представлено в виде ряда Тейлора<sup>11</sup> (это так называемая специальная *функция Похгаммера*<sup>12</sup> или *вырожденная гипергеометрическая функция*), а другое содержит логарифмическую особенность. Поэтому вместо граничного условия трансверсальности на левом краю отрезка нужно ставить условие ограниченности решения. Константа  $\alpha/c$  входит в функцию Похгаммера как параметр.

Рассмотрим случай, когда значение экстремали задано не на краях, а в какой-то промежуточной точке  $x(c) = C$ ,  $c \in (a, b)$ . Тогда на краях отрезка получаем граничные условия трансверсальности. Но задача согласования информации распадается на две: для левого и правого полуотрезков они решаются независимо, а условие, заданное в точке  $c$ , используется для обеих. Поэтому общее решение будет непрерывно в точке  $c$ , но гладкость экстремали в этой точке, как правило, отсутствует.

**К.12.** Приведите примеры, подтверждающие это утверждение. Постройте график экстремали с изломом в точке  $c$ .

Описанный здесь метод вариационного согласования разнородной информации может быть использован для ее автоматического контроля. Предположим, что нужно обработать большой архив парных данных о координатах и скоростях автомобилей. Конечно, можно построить графики пары измеренных функций  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{v}(t)$  и постараться их сопоставить «на глазок». Но можно доверить это компьютеру: для каждой пары определяем экстремали, удовлетворяющие условиям трансверсальности (т.е. решаем задачу вариационного согласования информации). Для каждой найденной экстремали вычислим минимальное значение функционала  $\mathbf{J}[x_*(t)]$ . Если на какой-то паре отношение  $\mathbf{J}[x_*(t)]/(b - a)$  заметно превосходит большинство остальных, то, вероятно, в этой паре содержатся ошибки, возникшие при измерениях или при передаче информации. Разумеется, нужен материал обучения, чтобы конкретизировать, что такое «заметно большие значения».

**Замечание Б.** Обычно информация об измерениях относится не ко всему отрезку  $t \in [a, b]$ , а к дискретному набору моментов времени  $\{t_j\}_{j=0}^N$ . Вместо оператора дифференцирования  $d_t$  можно, например, использовать формулу центральных разностей во внутренних точках  $j \neq 1, N$ , а в крайних — формулу направленных разностей. Вместо интеграла воспользуемся суммой. Рассматривая максимумы функций  $|x_*(t) - \tilde{x}(t)|$  и  $|d_t x_*(t) - \tilde{v}(t)|$ , можно локализовать момент, когда допущена ошибка в исходных данных.

**К.13.** Пусть  $\tilde{x} = \sin(t)$ ,  $\tilde{v} = \cos(t)$ , а узлы сетки  $\{t_j\}_{j=0}^N$  расположены на отрезке  $[0, 2\pi]$  равномерно с шагом  $h = 2\pi/N$ . Как зависит значение функционала  $\mathbf{J}$  (его аргумент — пара векторов размерности  $N + 1$ ) от числа  $N$ ?

<sup>11</sup> Брук Тейлор (1685–1731).

<sup>12</sup> Лео Август Похгаммер (1841–1920).

**К.14.** Пусть на компоненты векторов  $\tilde{x} = \sin(t)$ ,  $\tilde{v} = \cos(t)$  при  $N = 20$  наложен случайный шум с амплитудой  $A$ . С помощью компьютерного эксперимента оцените, как зависит значение функционала  $\mathbf{J}$  от  $A$ ? Для ответа на вопрос постройте график этой зависимости в билогарифмической системе координат  $(\ln(A), \ln \mathbf{J})$ .

Результаты получаются точнее, если оператор дифференцирования аппроксимировать не по формуле центральных разностей, а с помощью кубических сплайнов (см. прил. 4) или формулы компактного дифференцирования (см. разд. 7.2).

**К.15.** Получите оценки **К.13, 14** для этих конечномерных аппроксимаций оператора дифференцирования в функционале  $\mathbf{J}$ .

Рассмотрим аналогичный пример вариационного согласования информации о функции и ее производной из метеорологии [Гордин, 1987б]. Пусть заданы (получены из наблюдений двумя приборами одного метеорологического зонда) две функции давления, которое здесь используется в качестве вертикальной координаты: высота (геопотенциал) соответствующей точки и ее температура,  $\tilde{H}(p)$ ,  $\tilde{T}(p)$ , входящие в уравнение гидростатики:

$$\frac{dH}{d \ln p} = -\gamma T, \quad \gamma = \frac{R_{\text{уд}}}{g}, \quad (2.14)$$

где  $R_{\text{уд}}$  — удельная газовая постоянная, которую для сухого<sup>13</sup> воздуха тропосферы и стратосферы Земли можно принять равной 289,7 дж/(кг·град),  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнение (2.14) получается из уравнения Клапейрона<sup>14</sup> для совершенного газа: и из уравнения гидростатики в  $z$ -системе координат:

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho, \quad (2.15)$$

которое, в свою очередь, получается из уравнения газовой динамики для вертикальной компоненты скорости [Гордин, 1987а; Гордин, 1987б; Гордин, 2010].

**Замечание В.** Уравнение (2.15) получается, если пренебречь вертикальным ускорением в уравнении газовой динамики (см., например, [Гордин, 1987б]). Из (2.15) следует известный закон Архимеда<sup>15</sup> [Гордин, 2016]. При движении самолета или судна на подводных крыльях вертикальные ускорения в окрестности крыла велики, и закон Архимеда (в отличие от исходных уравнений газовой динамики) там сильно нарушается.

<sup>13</sup> Для учета вклада водяного пара, имеющего другую удельную газовую постоянную, вместо обычной температуры вводится так называемая виртуальная температура, которую имел бы сухой воздух с той же плотностью и при том же давлении:  $T_v = T(1 + 0,608s)$ , где  $s$  — удельная влажность воздуха. Виртуальная температура отличается от обычной на величины порядка 1°C.

<sup>14</sup> Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799–1864).

<sup>15</sup> Архимед Сиракузский (287–212 до н.э.).

Чтобы согласовать показания приборов, измеряющих при произвольном давлении  $p$  геопотенциал и температуру, введем две положительные функции  $\alpha(p)$ ,  $\beta(p)$ , которые характеризуют относительное «доверие» к измерениям геопотенциала и температуры при разных значениях независимого переменного — давления  $\ln p$ .

Требуется найти на отрезке  $[P_1, P_2]$  новые функции  $H(p)$ ,  $T(p)$ , которые удовлетворяют уравнению гидростатики (2.14) и минимизируют функционал

$$\mathbf{I}[H, T] = \frac{1}{2} \int_{\ln P_1}^{\ln P_2} \left\{ \alpha(p) \cdot [\tilde{H}(p) - H(p)]^2 + \beta(p) \cdot [\tilde{T}(p) - T(p)]^2 \right\} d \ln p \rightarrow \min_{H, T}. \quad (2.16)$$

Можно упростить задачу, подставив в интегральный функционал функцию  $T$  из уравнения (2.14):

$$\mathbf{J}[H] = \frac{1}{2} \int_{\ln P_1}^{\ln P_2} \left\{ \alpha(p) \cdot [\tilde{H}(p) - H(p)]^2 + \beta(p) \cdot [\tilde{T}(p) + A d_{\ln p} H]^2 \right\} d \ln p \rightarrow \min_H, \quad (2.17)$$

где  $A = \frac{g}{R_{\text{уд}}}$ .

Теперь минимизация проводится только по одной неизвестной функции  $H(p)$  без дополнительных условий — в таких случаях говорят, что разыскивается *абсолютный минимум* функционала  $\mathbf{J}[H]$ .

**К.16.** Докажите, что уравнение Эйлера при  $p \in (P_1, P_2)$  для задачи вариационного согласования геопотенциала и температуры (2.16) имеет вид

$$\alpha(p) [H(p) - \tilde{H}(p)] - d_{\ln p} \{ A \beta(p) [\tilde{T}(p) + A d_{\ln p} H] \} = 0. \quad (2.18)$$

**К.17.** Получите условия трансверсальности для задачи согласования информации о геопотенциале и температуре, полученных в вертикальном столбе воздуха.

Уравнение гидростатики (2.14) выполняется лишь приближенно. Например, оно может нарушаться из-за того, что метеорологический зонд поднимается не вертикально вверх, а его (одновременно с подъемом архимедовой силой) сносит ветром по горизонтали, а значения давления на одинаковой высоте над различными точками земной поверхности могут различаться, можно изменить саму постановку задачи вариационного согласования и искать абсолютный минимум другого квадратичного функционала, зависящего от двух независимых функций:  $H(p)$  и  $T(p)$ . Вес доверия к выполнению соотношения (2.14) обозначим  $\gamma(p)$ .

Будем минимизировать функционал

$$\mathbf{I}[H, T] = \frac{1}{2} \int_{\ln P_1}^{\ln P_2} \left\{ \alpha(p) \cdot [\tilde{H}(p) - H(p)]^2 + \beta(p) \cdot [\tilde{T}(p) - T(p)]^2 + \gamma(p) \cdot [T(p) + Ad_{\ln p} H]^2 \right\} d \ln p \rightarrow \min_{H, T}. \quad (2.19)$$

Для этого будем независимо давать функционалу приращение  $H \rightarrow H + \delta H$  и приращение  $T \rightarrow T + \delta T$ . В первом случае нужно использовать интегрирование по частям, а во втором — нет. Получим, соответственно, дифференциальные уравнения:

$$\alpha(p) [H(p) - \tilde{H}(p)] - Ad_{\ln p} \{ \gamma(p) [T(p) + Ad_{\ln p} H] \} = 0 \quad (2.20)$$

и

$$\beta(p) [T(p) - \tilde{T}(p)] + \gamma(p) \cdot [T(p) + Ad_{\ln p} H] = 0. \quad (2.21)$$

**К.18.** Докажите это утверждение.

Порядок уравнения (2.20) можно понизить, подставив в него (2.21):

$$\alpha(p) [H(p) - \tilde{H}(p)] + Ad_{\ln p} \{ \beta(p) [T(p) - \tilde{T}(p)] \} = 0. \quad (2.22)$$

Систему двух линейных неоднородных ОДУ первого порядка (2.21, 2.22) по независимой переменной  $\ln p$  можно сначала разрешить относительно производных.

**К.19.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$  и коэффициенты системы ОДУ (2.21, 2.22) постоянны. Определите характеристический многочлен этой системы.

**К.20.** Докажите, что при варьировании функционала  $\mathbf{I}$  по  $H$  получаются два граничных условия трансверсальности:

$$Ad_{\ln p} H = -T(p) \quad \text{при } p = P_1, P_2, \quad (2.23)$$

а при варьировании по  $T$  никаких граничных условий не возникает.

**К.21.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$ . Верно ли, что при любых данных измерений  $\tilde{H}, \tilde{T}$  решение краевой задачи (2.21, 2.22, 2.23) существует и единственно.

**К.22.** Как изменятся уравнение Эйлера и условия трансверсальности, если в интегралах (2.16, 2.17, 2.19) интегрировать не по переменной  $d \ln p$ , а по  $dp$ ?

## 2.2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ И УРАВНЕНИЕ ДИФфуЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ)

Закон сохранения вещества для системы, состоящей, скажем, из пяти камней, прост: число камней и масса каждого из них не меняются со временем. Этим о задаче сказано все. Пастух, отправившийся на пастбище

с сотней коров, должен не только обеспечить увеличение их массы, но и следить за сохранением (увеличением) численности. Для описания динамики стаи саранчи (или планктона в море, или бактерий в наших пищеводах, или автомобилей на загруженных трассах) можно рассуждать примерно таким же образом, но, по понятным причинам, здесь дискретный подход не слишком конструктивен. Если нет необходимости оценить количество саранчи с точностью до одной штуки, то лучше оперировать такими понятиями, как ее плотность на кубический метр, распределение этой плотности в трехмерном<sup>16</sup> пространстве, изменение этой плотности со временем — на этом языке больше шансов найти конкретные ответы на разумные вопросы<sup>17</sup>.

Итак, перейдем к модели сплошной среды. Пусть  $\rho(\mathbf{x})$  — *плотность вещества* (сплошной среды) в точке  $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$  в момент времени  $t$ . Это означает, что существует предел:

$$\lim_{r \rightarrow +0} \left[ \frac{m(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^r)}{V(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^r)} \right] = \rho(t, \mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^r$  — шар радиусом  $r$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ ; величины  $m$  и  $V$  — масса этого шара в момент времени  $t$  и его объем соответственно. Кроме того, что этот предел существует, мы предположим его (предела, т.е. функции  $\rho$ ) гладкую зависимость<sup>18</sup> от переменных  $t, \mathbf{x}$  которые здесь, при переходе к пределу, играют роль параметров. Плотность<sup>19</sup> в любой точке может меняться

<sup>16</sup> Здесь можно полагать, что дороги — одномерные объекты, и рассматривать плотность автомобилей на метр дороги.

<sup>17</sup> Впрочем, для численного решения дифференциальных уравнений необходимо будет вернуться к динамике систем с конечным (хотя часто и очень большим) числом степеней свободы. А при решении, например, задач динамики крови в кровеносных сосудах приходится комбинировать описание непрерывной жидкой среды и дискретно расположенных в ней красных кровяных телец.

<sup>18</sup> Это существенное ограничение. Среди задач газо- и гидродинамики важный класс составляют задачи, допускающие решения, в которых плотность терпит разрыв на какой-то поверхности. Например, речь может идти о динамике двух жидкостей (одна жидкость над другой или внутри другой — в виде мицелл), динамике ударных волн [Гельфанд, 1959] или атмосферных фронтов [Гордин, 2010] и т.п.

<sup>19</sup> «Было очень трудно поверить, что он (воздух) обладает весом, и требуется много опытов и рассуждений, чтобы удостовериться в этом, ибо, когда он располагается поверх воды и всех других жидкостей, приписывают это движение снизу вверх свойству абсолютной легкости». Эта фраза принадлежит одному из основателей Французской академии наук — Эдму Мариотту (1620–1684). Основные его результаты собраны в четырех выпусках «Физических опытов», вышедших в 1676–1681 гг.

Начало изучения газов на основе закона сохранения массы было положено алхимиком и врачом Яном Батистом Ван-Гельмонтом (1579–1644) около 1620 г. Его опыт был простой, но, что очень важно, количественный: Ван-Гельмонт сжег 62 фунта угля и получил 1 фунт золы. Вывод: «Следовательно, остальной уголь (61 фунт) превратился в лесной дух. Этот лесной дух, неизвестный до сих пор, нельзя собрать ни в какой сосуд и нельзя сделать видимым телом. По особенностям дела и за отсутствием имени я назвал это *испарение газом, что близко к хаосу деревьев*». Слово позаимствовано у Парацельса (псевдоним Филиппа Августа Теофраста Бомбаста фон Гогенгейма, 1493–1541). Впрочем, Лукиан из Самосаты (около 120–180 гг. н.э.)

со временем, поэтому необходимо знать закон такого изменения, т.е. во всех точках нужно определить производную  $\partial_t \rho(t, x, y, z)$ . Этот закон различен для различных физических процессов.

Обсудим сначала перенос вещества заданным потоком, например, ветром, скорость которого  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ .

Предположим, что функции  $\rho$  и  $u$ , которые понадобятся для описания механизма этого изменения, являются дифференцируемыми, и получим его математическую запись. Для простоты сначала будем рассматривать одномерную модель, т.е. предположим, что функции  $\rho$  и  $u$  зависят только от первой координаты  $x$  вектора  $\mathbf{x}$  и от времени  $t$ .

Пусть  $m([x - r, x + r])$  — масса воображаемого цилиндра, торец которого имеет единичную площадь, а образующая параллельна оси  $x$  и совпадает с отрезком  $[x - r, x + r]$ . Оси  $y$  и  $z$  направлены вдоль торца. Тогда линейная плотность вещества определяется как предел:

$$\rho(t, x) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{m([x - r, x + r])}{2r}.$$

Из закона сохранения массы вещества следует, что ее изменение  $\Delta_t m_{\Delta x} = m_{t+\Delta t, \Delta x} - m_{t, \Delta x}$  на отрезке  $[x, x + \Delta x]$  за малое время  $\Delta t$  есть разность:

**I.** массы вещества, поступающей через левый край:  $P(t, x) \cdot \Delta t + \mathbf{o}(\Delta t)$ , где  $\mathbf{o}(\Delta t)$  есть величина, которая стремится к нулю при  $\Delta t \rightarrow +0$  быстрее, чем  $\Delta t$ , и где *поток вещества*  $P(t, x) = u(t, x)\rho(t, x)$  (знак скорости  $u$  может быть и отрицательным);

**II.** аналогичной (но не равной) массы вещества,  $P(t, x + \Delta x) \cdot \Delta t + \mathbf{o}(\Delta t)$ , выходящей через правый край отрезка.

Тогда (см. рис. 2.1) выполняется асимптотическое равенство

$$\Delta_t m_{\Delta x} = [u(t, x)\rho(t, x) - u(t, x + \Delta x)\rho(t, x + \Delta x)]\Delta t + \mathbf{o}(\Delta t). \quad (2.24)$$

Разделим равенство (2.24) на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow +0$ :

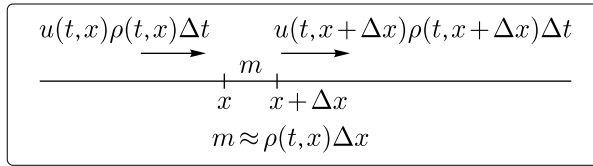
$$\begin{aligned} \partial_t m_{\Delta x} &= P(t, x) - P(t, x + \Delta x) = \\ &= [u(t, x)\rho(t, x) - u(t, x + \Delta x)\rho(t, x + \Delta x)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

---

пишет о своем друге, философе Демонакте (около 70–170). «Кто-то ради насмешки спросил философа: «Если я сожгу тысячу мин дерева, сколько получится мин дыма?» — «Взвесь, — сказал Демонакт, — золу, все остальное — вес дыма». Но одно дело рекомендация, а другое — проведенный эксперимент.

Ван-Гельмунту принадлежит также ошибочное утверждение, продержавшееся до конца XVIII в. Оно также базировалось на количественном опыте. В сухую землю весом 200 фунтов он посадил ветку ивы весом 5 фунтов и в течение 5 лет поливал ее водой. Затем он снова произвел взвешивание: земли было столько же, а дерево ивы весило 169 фунтов. Этим он опроверг мнение Аристотеля (384–322 до н.э.) о том, что деревья питаются «сырым соком Земли» и сделал вывод о питании дерева водой. О том, что питание может также поступать через листья из воздуха, — из того самого «*gas sylvestre*», им же и открытого, он не догадался. Труды Ван-Гельмонта были опубликованы уже сыном алхимика: *Johannis Baptistae Ven Helmont. Opera omnia. Francofurti, 1682.*





**Рис. 2.1.** Изменение массы при переносе вещества потоком со скоростью  $u$  через отрезок  $[x, x + \Delta x]$

Согласно определению линейной плотности,

$$\rho(t, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{m \Delta x}{\Delta x}.$$

Поэтому разделим равенство (2.25) на  $\Delta x$  и перейдем к пределу при  $\Delta x \rightarrow +0$ . В результате получим одномерное *уравнение неразрывности*:

$$\partial_t \rho = -\partial_x(u\rho), \quad (2.26)$$

которое выполняется (при условии гладкости функций  $\rho(t, x)$  и  $u(t, x)$ ) во всех точках  $\mathbf{x}$  цилиндра во все моменты времени  $t$  и оценивает изменение плотности  $\rho$  со временем.

**К.1.** Докажите, что  $n$ -мерное (когда вектор скорости  $\mathbf{u} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  имеет  $n$  компонент, и все они, как и решение  $\rho$ , гладко зависят от независимых переменных  $t, \mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ) *уравнение неразрывности* имеет вид:

$$\partial_t \rho = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(u_j \rho). \quad (2.27)$$

Величина  $\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} v_j$  называется *дивергенцией* векторного поля  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  и обозначается  $\mathbf{div} \mathbf{v}$ . Это скалярная функция переменных  $\langle t, \mathbf{x} \rangle$ . В уравнении (2.27) участвует поле  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ .

**К.2.** Постройте на плоскости векторные поля  $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ , с компонентами, равными  $\langle \pm x^2, \pm y^2 \rangle$ ,  $\langle \pm x, \pm y \rangle$  и  $\langle \pm y, \pm x \rangle$ . Для каждого из этих полей определите дивергенцию.

*Векторное поле*  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  называется *бездивергентным*, если скалярная функция  $\mathbf{div} \mathbf{u}$  тождественно равна нулю.

Для того чтобы определить при заданном поле скорости  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  единственное решение дифференциального уравнения в частных производных (2.27) при всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  и при всех  $t \in \mathbb{R}$  (как положительных, так и отрицательных), ставится *начальное условие*:

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}),$$

где  $\rho_0(\mathbf{x})$  — заданная функция. Комплект из дифференциального уравнения (2.27) и начального условия называется *задачей Коши* для уравнения (2.27).

**Замечание А.** В отличие от задачи Коши (2.1, 2.2) здесь значения искомой функции от аргумента  $t$  принадлежат не конечномерному пространству  $\mathbb{R}^n$ , а бесконечномерному линейному пространству функций от аргумента  $x$ .

Механизм движения вещества может определяться не только переносом со скоростью движения окружающей среды (воды в реке, ветра и т.п.). При так называемом диффузионном распространении примеси, т.е. распространении молекул одного твердого вещества по другому, изменение плотности примеси со временем описывается *уравнением диффузии*<sup>20</sup>, которое в простейшем одномерном случае ( $x \in \mathbb{R}$ ) имеет вид:

$$\partial_t \rho = \nu \partial_x^2 \rho + f(t, x), \quad (2.28)$$

где  $\nu$  — некоторая положительная константа, называемая *коэффициентом диффузии*, а функция  $f$  — плотность источника примеси (может принимать и отрицательные значения). Такое изменение может происходить, например, за счет химических реакций, в которых эта примесь участвует.

**К.3.** Пусть при всех  $t > 0$  функция  $f(t, x)$  четная (нечетная) по  $x$ , и в начальный момент  $t = 0$  решение  $\rho(0, x)$  — четная (нечетная) функция. Докажите, что при всех  $t > 0$  четность (нечетность) решения уравнения (2.28) по  $x$  сохраняется.

Свойство сохранять четность решения выполняется отнюдь не для всех эволюционных уравнений с постоянными коэффициентами. Например, для уравнения переноса (2.26) при  $u = \text{const}$  четность (нечетность) решения со временем не сохраняется.

**К.4.** Пусть при всех  $t > 0$  функция  $f(t, x)$  периодическая с периодом  $L$ , и в начальный момент  $t = 0$  решение (2.28) — функция  $\rho(0, x)$  — периодическая функция с тем же периодом. Докажите, что при всех  $t > 0$  периодичность решения по  $x$  сохраняется.

**К.5.** Докажите это же утверждение для уравнения переноса (2.26) при  $u = \text{const}$ .

Покажем, как вывести уравнение (2.28). Оно, как и уравнение (2.26), не противоречит закону сохранения вещества: изменение массы здесь также происходит только за счет притока через границу. Но при переносе согласно (2.26) поток вещества через точку  $x$  в момент времени  $t$  задается формулой  $P(t, x) = u(t, x)\rho(t, x)$  (см. рис. 2.1), а в случае диффузии формула для потока вещества (примеси)  $P$  другая. Концентрация примеси выравнивается: молекулы примеси двигаются хаотически, а в результате из мест большей концентрации перемещаются в места с малой. И процесс этот тем интенсивнее, чем больше производная по переменной  $x$  (описывающая перепад концентрации). Соответствующая формула называется *законом Фика*<sup>21</sup>:

$$P = -\nu \partial_x \rho. \quad (2.29)$$

<sup>20</sup> Это уравнение можно рассматривать как некоторое осредненное описание случайного процесса, отвечающего стохастическому движению молекул.

<sup>21</sup> Адольф Ойген Фик — иногда в русском языке используется написание Вик (1829–1901).

Заменим формулу для потока  $P$  в уравнении (2.25) на (2.29) (см. также рис. 2.1) и, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим (проверьте!) уравнение (2.28). В многомерном случае поток примеси — величина векторная — задается формулой:  $\mathbf{P} = -\nu \mathbf{grad} \rho$ . Уравнение диффузии в отсутствие внешнего притока примеси принимает вид:

$$\partial_t \rho = \mathbf{div} [\nu \mathbf{grad} \rho], \quad (2.30)$$

а в частном случае постоянного коэффициента диффузии  $\nu = \text{const}$ :

$$\partial_t \rho = \nu \Delta \rho, \quad (2.31)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Если в начальный момент времени концентрация примеси постоянна,  $\rho_0 = \text{const}$ , то и в дальнейшем она останется постоянной. Действительно, константа  $\rho = \text{const}$  удовлетворяет уравнению (2.31).

**К.6.** Пусть  $f \equiv 0$  и в начальный момент  $t = 0$  решение  $\rho(t, \mathbf{x})$  зависит только от  $r = |\mathbf{x}|$ . Докажите, что при всех  $t > 0$  эта симметрия по  $x$  относительно начала координат сохраняется. Как изменится ответ, если  $f = f(t, |\mathbf{x}|)$ ?

В общем случае а) коэффициент диффузии  $\nu$  может зависеть от независимых переменных  $t$  и  $\mathbf{x}$ , т.е.  $\nu = \nu(t, \mathbf{x})$ ; б) коэффициент диффузии  $\nu$  может зависеть от искомой плотности, т.е.  $\nu = \nu(\rho)$ ; в) вещество, в котором происходит диффузия, не является изотропным; тогда  $\nu$  — не число, а линейный оператор в  $\mathbb{R}^3$ , который в декартовых координатах задается матрицей третьего порядка: и уравнение (2.28) заменяется на

$$\partial_t \rho = \mathbf{div} \nu \mathbf{grad} \rho, \quad \mathbf{dim} \nu = 3. \quad (2.32)$$

**Замечание Б.** Можно использовать уравнение (2.32) и для исторического анализа активности купцов: чем больше перепад цен, тем интенсивнее данный товар перемещался по поверхности планеты в направлении высоких цен. Здесь  $\mathbf{dim} \mathbf{x} = 2$ . Коэффициент  $\nu$  отвечает как за предприимчивость купцов<sup>22</sup>, так и за удобство и безопасность караванных путей. Основное передвижение товаров в древности происходило не по всей поверхности, а по графу торговых путей (например, по Великому шелковому пути). В терминах матрицы  $C = C(\mathbf{x})$ : вдоль пути направлен один из собственных векторов, и соответствующее собственное число  $C$  большое, а для направленного поперек — маленькое.

С диффузией связаны и некоторые процессы пространственной миграции популяций (см., например, [Братусь и др., 2010]).

<sup>22</sup> *Navigāre necesse est, vivere non est necesse* (лат.) — Плавать по морям необходимо; жить не столь необходимо. Эта латинская поговорка приписывается и Цицерону, и Помпею // *Тут видно было истинное земли изобилие и избытки земледельца; тут явен был во всем своем блеске мощный побудитель человеческих деяний — корыстолюбие.* А.Н. Радищев. «Путешествие из Петербурга в Москву».

Температура изменяется со временем аналогично распространению плотности примеси при диффузии. Поток тепла  $P$  пропорционален градиенту температуры (этот аналог закона Фика называется *законом Фурье*) (1822 г.):

$$P = -\kappa \mathbf{grad} T; \text{ при } n = 1 \text{ получаем } P = -\kappa \partial_x T,$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности (удельная теплопроводность) вещества.

При  $\kappa = \text{const}$ ,  $n = 1$  уравнение для эволюции температуры имеет вид, аналогичный (2.28):

$$\partial_t T = D \partial_x^2 T, \quad (2.33)$$

где константа  $D = \kappa / (\rho c_p)$  — коэффициент температуропроводности;  $\rho$  — плотность вещества,  $c_p$  — его удельная теплоемкость. В более общем случае это могут быть не константы, а известные положительные функции от  $t$  и  $x$ . Тогда уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\begin{aligned} [\rho(t, \mathbf{x}) c_p(t, \mathbf{x})] \partial_t T &= \mathbf{div} [\kappa(t, \mathbf{x}) \mathbf{grad} T] \Leftrightarrow n > 1, \\ [\rho(t, x) c_p(t, x)] \partial_t T &= \partial_x [\kappa(t, x) \partial_x T] \Leftrightarrow n = 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

*Интегральный оператор Фредгольма*<sup>23</sup> действует в пространстве функций на области  $D \subset \mathbb{R}^n$  по формуле:

$$u(\mathbf{x}) \mapsto \int_D K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) ds,$$

где функция  $K(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ , определяющая этот линейный оператор, называется его *ядром*<sup>24</sup>.

Для уравнения диффузии (2.31) или уравнения теплопроводности (2.33) без внешних источников с постоянным коэффициентом  $D$  ограниченное решение задачи Коши с начальным условием  $\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  задается *интегральной формулой Пуассона*<sup>25</sup>:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = (4\pi Dt)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2/4Dt} \rho_0(\mathbf{z}) dz, \quad (2.35)$$

и будет доказана в разд. 6.13. Здесь  $D = \mathbb{R}^n$ , а функция  $P(t, \mathbf{x} - \mathbf{z}) = (4\pi Dt)^{-n/2} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2/4Dt}$  — ядро интегрального оператора. Условия суммируемости или суммируемости в квадрате начальной функции  $\rho_0(\mathbf{x})$  достаточно для того, чтобы интеграл (2.35) абсолютно сходиллся при всех  $t > 0$ .

**К.7.** Докажите это утверждение.

<sup>23</sup> Эрик Ивар Фредгольм (1866–1927).

<sup>24</sup> Не путать с другим использованием этого термина — множеством векторов, которые переводятся линейным оператором в нулевой вектор [Гельфанд, 1970].

<sup>25</sup> Симеон Дени Пуассон (1781–1840).

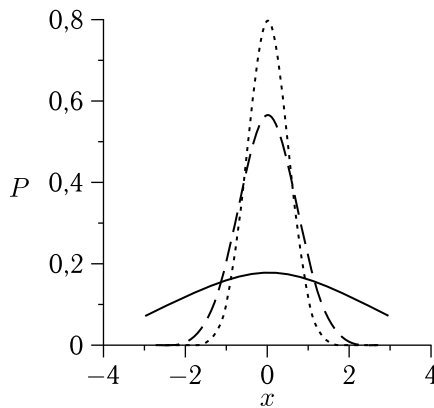
**К.8.** Докажите, что интеграл (2.35) можно дифференцировать любое число раз по пространственным переменным, — результирующий интеграл будет сходиться абсолютно.

**К.9.** Докажите, что при любых  $t_*$ ,  $\mathbf{x}_*$  функция

$$P_{t_*, \mathbf{x}_*}(t, \mathbf{x}) = (4\pi D(t - t_*))^{-n/2} \exp \frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*|^2}{4D(t - t_*)} \quad (2.36)$$

является решением уравнения диффузии (2.31) при  $t > t_*$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**К.10.** Постройте графики зависимости ядра интегрального оператора в формуле Пуассона как функции  $|x|$  для тех же, что и на рис. 2.2, значений всех параметров, но при  $n = 2, 3$ .



**Рис. 2.2.** Графики ядра интегрального оператора одномерной ( $n = 1$ ) формулы Пуассона при  $t_* = 0$ ,  $x_* = 0$ . Здесь ..... отвечает значению  $Dt = 0,5$ , — — —  $Dt = 1,0$ , — — —  $Dt = 10$ . При всех  $t > 0$  это четная, гладкая функция, и интеграл от  $P$  по  $x \in \mathbb{R}$  равен 1

**Замечание В.** Помимо ограниченного решения (2.35), дифференциальное уравнение имеет и неограниченные при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  решения. Однако физического смысла они не имеют (см. подробное разд. 6.13).

**К.11.** Докажите, что  $\int_{\mathbb{R}^n} P(t, \mathbf{x} - \mathbf{z}) dz = 1$  при всех  $t > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**К.12.** Пусть начальная функция  $\rho_0(\mathbf{z})$  кусочно-непрерывна (это предположение можно ослабить) и ограничена:

$$C_1 \leq \rho_0(\mathbf{z}) \leq C_2. \quad (2.37)$$

Докажите, что при всех  $t > 0$  функция  $\rho(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет неравенствам (2.37).

Из **К.12** следуют неравенства:

$$\inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \rho_0(\mathbf{z}) \leq \rho(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \rho_0(\mathbf{z}) \quad (2.38)$$

при всех  $t > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**К.13.** Докажите, что неравенства (2.38) переходят в равенства, если и только если  $\rho_0(\mathbf{z}) = \text{const}$ .

Неравенства (2.38) называются *принципом максимума* для уравнения диффузии (2.31) или уравнения теплопроводности (2.33). Он допускает различные обобщения на решения некоторых других уравнений и не только на решения уравнений в  $\mathbb{R}^n$  при условии ограниченности, но и на решения краевых задач (см. [Фридман, 1968]).

Функция  $P$  строго положительна. Следовательно, если функция  $\rho_0(\mathbf{z})$  неотрицательна и в какой-то подобласти  $U \subset \mathbb{R}^n$  положительна, то, согласно формуле Пуассона, решение будет положительно при всех  $t > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Физическая интерпретация: происходит мгновенное распространение влияния на любое расстояние  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ . Однако чем больше это расстояние между подобластью  $U$  и точкой  $\mathbf{x}$ , тем слабее будет это влияние (функция  $P$  быстро убывает с расстоянием). Добавим, что для адекватного описания релятивистских эффектов (непрерывная конечность скорости) при диффузии и теплопроводности уравнения (2.31) и (2.33) должны быть модифицированы.

Рассмотрим стационарные решения одномерного уравнения диффузии (2.28) на отрезке  $[a, b]$ . На границе с внешней средой (на концах стержня, по которому идет диффузия) может происходить обмен примесью (в случае уравнения теплопроводности — теплообмен). Для того чтобы описание процесса в модели было полным, нужно добавить к уравнению граничные условия.

Комплект из эволюционного дифференциального уравнения в частных производных, начальных условий и граничных условий называется *смешанной задачей*.

Если на левом краю отрезка с помощью какого-то механизма при всех  $t$  поддерживается постоянная концентрация  $A$ , то такое граничное условие называется *условием Дирихле*:

$$\rho(t, a) = A. \quad (2.39)$$

На краю стержня может быть обеспечен заданный поток примеси. При выводе уравнения уже было сказано, что поток пропорционален производной. Соответствующее *граничное условие*

$$\partial_x \rho(t, a) = P \quad (2.40)$$

называется *условием Неймана*<sup>26</sup>.

Аналогичные условия могут ставиться и на правом краю отрезка.

**К.14.** Пусть на обоих краях отрезка поток примеси направлен вовнутрь. Каковы знаки правых частей граничного условия Неймана на каждом из краев?

**Замечание В.** Граничные условия трансверсальности (2.11, 2.12) относятся именно к типу условий Неймана.

<sup>26</sup> Карл Готфрид Нейман (1832–1925).

Правые части граничных условий в общем случае могут зависеть от времени. *Условия* называются *однородными*, если правая часть равна нулю, и *неоднородными* — в противном случае.

*Граничное условие*, обобщающее эти два граничных условия, — условие Робена<sup>27</sup> или *условие третьего рода*:

$$\rho(t, a) + \alpha \partial_x \rho(t, a) = Q. \quad (2.41)$$

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений и систем *решение* уравнения в частных производных называется *стационарным*, если оно не зависит от времени. В случае уравнения (2.28) такое решение удовлетворяет (это возможно, только если правые части уравнения и граничных условий не зависят от времени  $t$ ) обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$d_x^2 \rho = g(x), \quad (2.42)$$

где  $g(x) = -f(x)/\nu$ .

Решим уравнение (2.42) при граничных условиях Дирихле на обоих краях с правыми частями  $A$  и  $B$  соответственно. Начнем с того, что заменой сделаем граничные условия однородными (*задача*, где уравнение неоднородно, а граничные условия однородны, называется *полуоднородной*). Положим  $u(x) = \rho(x) - cx - d$ , где константы выбраны так, чтобы новая функция  $u$  удовлетворяла тому же уравнению (2.42) и однородным условиям Дирихле:

$$c = \frac{A - B}{a - b}, \quad d = A - ca.$$

Построим *солвер* (оператор, который по известной функции  $g$  строит решение  $u$ ) для такой краевой задачи методом вариации постоянных Лагранжа<sup>28</sup> [Гордин, 2016]. Фундаментальную систему решений (ФСР) однородного уравнения выберем так, чтобы первое удовлетворяло однородному граничному условию Дирихле на левом краю, а второе — на правом:

$$Y_1(x) = x - a, \quad Y_2(x) = x - b.$$

Решение ищем в виде  $\rho(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x)$ , где две неизвестные функции  $C_1, C_2$  определяются интегрированием:

$$C_j(x) = \int \frac{W_j}{w} dx = \frac{1}{b - a} \int (-1)^j g Y_i dx, \quad j = 1, 2, \quad i = 3 - j,$$

$w$  — вронскиан этой ФСР,  $W_j$  — вспомогательные вронскианы (в матрице Вронского<sup>29</sup>  $j$ -й столбец заменяется на столбец  $\langle 0, g \rangle^t$ ; см., например, [Арнольд, 1984; Гордин, 2016; Матвеев, 1967]).

<sup>27</sup> Виктор Гюстав Робен или Робэн или Робин (1855–1897).

<sup>28</sup> Жозеф Луи Лагранж (1736–1813).

<sup>29</sup> Юзеф Мария Вроньский (1776–1853). Настоящая фамилия Хёне. Также использовал фамилию Вронский-Гёне.

Свободные константы интегрирования позволяют обеспечить (и притом единственным образом) нулевые значения искомого решения на краях отрезка: для  $C_1(x)$  используется интеграл  $\int_a^x$ , а для  $C_2(x)$  — интеграл  $\int_x^b = -\int_b^x$ .

Окончательная формула для решения краевой задачи:

$$\rho(x) = \int_a^b K(x, s) g(s) ds, \text{ где } K(x, s) = \begin{cases} \frac{(x-a)(s-b)}{b-a} & \Leftarrow x \leq s \\ \frac{(s-a)(x-b)}{b-a} & \Leftarrow x \geq s \end{cases} \quad (2.43)$$

называется ядром солвера или *функцией Грина*<sup>30</sup> *полуоднородной краевой задачи* для уравнения (2.42) с однородными граничными условиями Дирихле. Это непрерывная, кусочно-гладкая функция с изломом на диагонали квадрата  $x = s$ .

**К.15.** Проверьте, что при любой функции  $g(x)$  решение, полученное по формуле (2.43), удовлетворяет однородным условиям Дирихле.

**К.16.** Постройте ФСР, вронскианы и функцию Грина для граничного условия Дирихле на левом краю отрезка и Неймана — на правом.

**К.17.** Постройте ФСР, вронскианы и функции Грина для дифференциальных уравнений

$$d_x^2 u \pm u = g$$

с условиями Дирихле или Неймана (а также вариант, когда на одном краю — условие Дирихле, а на другом — Неймана).

**К.18.** Постройте изолинии и график функции двух переменных  $K(x, s)$  для каждого из примеров **К.16** и **К.17**.

**К.19.** Постройте ФСР, вронскианы и функции Грина для дифференциальных уравнений

$$d_x^2 u \pm iu = g$$

с условиями Дирихле или Неймана (а также вариант, когда на одном краю — условие Дирихле, а на другом — Неймана).

**К.20.** Постройте изолинии и графики функций двух переменных  $\operatorname{Re} K(x, s)$ ,  $\operatorname{Im} K(x, s)$  для примеров **К.19**.

Прибавляя линейную функцию, получаем решение исходной задачи с заданными неоднородными условиями Дирихле:

$$\rho(x) = u(x) + cx + d.$$

Для задачи с граничными условиями Неймана  $\rho'(a) = A$ ,  $\rho'(b) = B$  ситуация принципиально иная. Пусть  $\rho(x)$  решение этой краевой задачи. Но и функция  $\rho(x) + C$ , где  $C = \text{const}$ , также удовлетворяет и уравнению (2.42), и граничным условиям Неймана при тех же  $A, B$ . Следовательно, решение задачи не единственно.

<sup>30</sup> Джордж Грин (1793–1841).



Проинтегрируем уравнение (2.42) по отрезку:

$$\int_a^b d_x^2 \rho dx = d_x \rho(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g(x) dx.$$

Из граничных условий Неймана следует *условие разрешимости задачи*:

$$\int_a^b g(x) dx = B - A, \quad (2.44)$$

т.е. решение задачи Неймана существует не при любых исходных данных  $g, A, B$ .

**Замечание Д.** Одновременное «исчезновение» существования и единственности решения краевой задачи при переходе к условиям Неймана имеет естественный конечномерный аналог. Если решать СЛАУ  $QX = Y$ , где  $Q$  матрица линейного оператора, то при  $\det Q \neq 0$  решение СЛАУ существует и единственно, а при  $\det Q = 0$  нарушаются одновременно оба свойства задачи (см. примеры в гл. 7). Как мы видим, и в бесконечномерном пространстве — пространстве гладких функций на отрезке  $[a, b]$ , где линейный оператор — оператор второй производной, похожее явление (с некоторыми ограничениями) также наблюдается.

**Замечание Е.** Потеря существования и/или единственности решения задачи должна заставить задуматься о правильности физической постановки задачи.

В случае стационарного уравнения диффузии/теплопроводности стоит обратиться к исходной нестационарной задаче. Если поступление примеси (тепла) за единицу времени не находится в полном балансе с уходом примеси (тепла) через границу, то концентрация (температура) никогда не перестанет меняться, а будет или нарастать, или убывать со временем. Стационарное решение невозможно.

**Замечание Ж.** В задаче вариационного согласования такая потеря существования и единственности решения получается при  $\alpha \equiv 0$ . Это полностью вписывается в постановку задачи: если доверяем только показаниям спидометра, то координата автомобиля определяется лишь с точностью до аддитивной константы. Причем решение существует, если и только если интеграл от скорости за известный период времени равен расстоянию между конечными точками  $x(b) - x(a)$ .

---

## 2.3. СТРУНЫ, ВОЛНЫ И МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

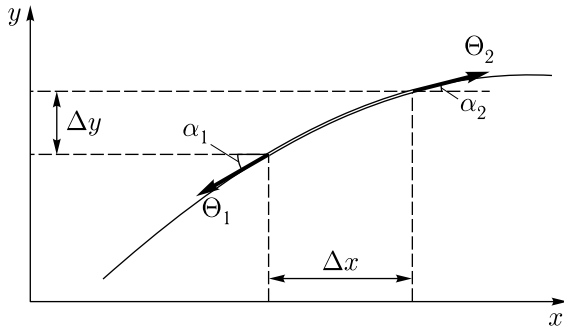
---

Уравнения в разд. 2.2 были получены из законов сохранения вещества или тепловой энергии. Уравнение струны получим из второго закона Ньютона<sup>31</sup> при нескольких дополнительных предположениях.

---

<sup>31</sup> Исаак Ньютон (1643–1727).

Рассмотрим малые колебания туго натянутой упругой струны, которая в состоянии покоя совпадает с отрезком  $[0, L]$  оси  $x$ . Предполагаем, что натяжение струны настолько велико, что можно пренебречь весом струны и силой упругости к малому изгибу (учет упругости к изгибу будет рассмотрен ниже). Рассматриваются колебания в плоскости  $\langle x, y \rangle$ , и такие же малые колебания могут одновременно и независимо происходить в плоскости  $\langle x, z \rangle$ . Положение струны в момент  $t$  задается функцией  $y = u(t, x)$  (см. рис. 2.3). Малость колебаний означает не только малость отклонения  $|u(t, x)|$  от положения равновесия при всех рассматриваемых  $t$  и  $x \in [0, L]$ , но и малость производной:  $|\partial_x u(t, x)| \ll 1$ .



**Рис. 2.3.** Компоненты силы натяжения, направленные вдоль струны, компенсируют друг друга, а поперек (против изгиба) складываются и создают ускорение этого участка струны

Натяжение  $\Theta$  вдоль струны предполагаем постоянным. На малый подотрезок струны  $[x, x + h]$  действуют силы натяжения в почти противоположные стороны. Модули обеих сил равны  $\Theta$ . Но направления у этих сил несколько различаются, поскольку различаются значения производной  $\partial_x u(t, x)$  и  $\partial_x u(t, x + h)$ . Производные можно интерпретировать как тангенсы углов наклона касательных к кривой  $u(t, x)$ , зависящей от  $t$ . Поскольку углы малы, тангенсы можно приближенно заменить синусами, а косинусы — единицами. Таким образом, суммарная сила в направлении оси  $y$  приблизительно равна  $\Theta \partial_x u(t, x + h) - \Theta \partial_x u(t, x)$ , а в направлении оси  $x$  — нулю. По теореме Лагранжа эту разность можно приближенно оценить величиной  $\Theta \partial_x^2 u(t, x)h$ . Масса отрезка  $m$  (интеграл от плотности струны  $\rho(x)$  по этому отрезку) приблизительно равна  $\rho(x)h$ . Если внешние силы на струну не действуют, то, согласно второму закону Ньютона, получаем приближенное равенство

$$\rho(x) \partial_t^2 u(t, x) h \approx \Theta \partial_x^2 u(t, x) h,$$

и оно выполняется тем точнее, чем меньше длина подотрезка  $h$ . Все погрешности вывода составляют величины  $\mathbf{o}(h)$ . Сокращая на  $h$  и переходя к пределу, получаем дифференциальное уравнение струны

$$\partial_t^2 u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x), \quad \text{где } c^2(x) = \Theta \rho^{-1}(x). \quad (2.45)$$

**К.1.** Какой класс гладкости решения  $u$  и известной функции  $\rho(x)$  используется при этом выводе?

Начнем изучение уравнения колебаний струн со случая постоянного коэффициента  $\rho = \text{const}$ .

**Замечание А.** Колебания струны изучали в XVII в. Галилей<sup>32</sup>, Мерсенн<sup>33</sup>, Декарт<sup>34</sup>, Гюйгенс<sup>35</sup>. Тейлор использовал для описания колебаний струны введенные Ньютоном понятия исчисления бесконечно малых. В 1747–1749 гг. Д’Аламбер<sup>36</sup> записал дифференциальное уравнение (2.45). По мнению Тейлора, как и по мнению И. Бернулли<sup>37</sup>, высказанному в 1729 и 1732 гг., динамика струны (2.45) с закрепленными концами, т.е. удовлетворяющей однородным условиям Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad (2.46)$$

при постоянной плотности (т.е. при постоянной  $c$ ) может быть описана только одной синусоидой с амплитудой, зависящей от времени<sup>38</sup>:

$$u(t, x) = A(t) \sin \frac{\pi kx}{L}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.47)$$

Подставляя выражение (2.47) в (2.45), получаем для амплитуды  $A(t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение — уравнение гармонических колебаний:

$$d_t^2 A = -\omega^2 A, \quad \text{где } \omega = \frac{\pi kc}{L}. \quad (2.48)$$

Общее решение уравнения (2.48) задается формулой

$$A(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t), \quad \text{где } a, b = \text{const}. \quad (2.49)$$

Тейлор полагал, что при любом начальном условии решение уравнения струны (2.45) постепенно перейдет в решение типа (2.47) при каком-нибудь  $k$ . Однако непосредственная подстановка в уравнение показывает, что линейная комбинация (суперпозиция) решений, отвечающих различным  $k \in \mathbb{Z}_+$ , также является решением задачи при всех  $t$ . Ошибка связана с тем, что уравнение не вполне точно соответствует колебаниям реальной струны. На практике колебания со временем затухают, а решение типа (2.47) такое затухание вовсе не описывает. Согласно (2.47) колебания происходили бы вечно. Но струна производит акустические колебания в воздухе,

<sup>32</sup> Галилео Галилей (1564–1642).

<sup>33</sup> Марен Мерсенн (1588–1648). В его работе 1625 г. справедливо указывается, что частота колебаний струны длины  $L$ , закрепленной на концах, пропорциональна  $\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\Theta}{S}}$ , где  $\Theta$  — натяжение струны,  $S$  — площадь ее сечения. Коэффициент пропорциональности определяется материалом струны. Мы теперь понимаем, что он имел в виду только главную частоту, а у реальной струны еще есть бесконечно много следующих.

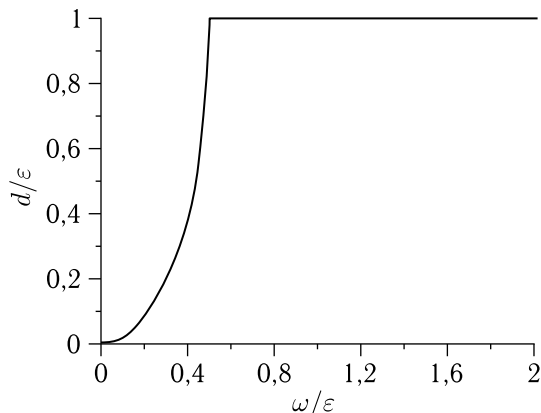
<sup>34</sup> Рене Декарт (1596–1650).

<sup>35</sup> Христиан Гюйгенс (1629–1695).

<sup>36</sup> Жан Лерон Д’Аламбер (1717–1783).

<sup>37</sup> Иоганн Бернулли I (1667–1748).

<sup>38</sup> Подробнее историю вопроса см. [Maltese, 1992].



**Рис. 2.4.** Обезразмеренный коэффициент затухания  $d/\epsilon$  амплитуды колебаний струны со временем в зависимости от обезразмеренного волнового числа  $\omega/\epsilon$ , пропорционального номеру гармоники  $k$ . Колебания, отвечающие  $k = 1$ , затухают со временем медленнее всех остальных

а следовательно, отдает ему энергию, — колебания не могут не затухать. Чтобы описать затухание, нужно уточнить уравнение, учтя и трение о воздух, и трение в точках крепежа струны. Для этого, например, можно заменить уравнение (2.45) на

$$\partial_t^2 u(t, x) = -\epsilon \partial_t u(t, x) + c^2 \partial_x^2 u(t, x), \quad \text{где } \epsilon > 0. \quad (2.50)$$

Тогда для амплитуды  $A(t)$  получится линейное ОДУ с постоянными коэффициентами

$$d_t^2 A = -\epsilon d_t A - \omega^2 A, \quad (2.51)$$

и оба корня его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \epsilon \lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \left[ -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4\omega^2} \right] / 2$$

имеют отрицательную вещественную часть при  $\epsilon > 0$ . Коэффициент затухания ненулевого решения — вещественная часть первого из этих корней (см. рис. 2.4), т.е. при начальных данных в общем положении<sup>39</sup> решение будет убывать при  $t \rightarrow +\infty$  как

<sup>39</sup> Пусть для некоторых элементов метрического пространства  $X$  выполняется какое-то свойство, а для остальных элементов не выполняется. Другими словами,  $X$  разбито на две части:  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = X$ . Говорят, что свойство выполняется в *общем положении*, если i) для любой точки  $x \in A$  (где свойство выполняется) существует  $\epsilon > 0$ , такое что вся  $\epsilon$ -окрестность точки  $x$  лежит в  $A$ , т.е. для всех точек этой окрестности свойство также выполняется; ii) для любой точки  $y \in B$  (где свойство не выполняется) для любого  $\epsilon > 0$  найдется точка  $z \in A$  на расстоянии менее  $\epsilon$  от  $y$ . Примеры.  $X = \mathbb{R}$ . Свойство вещественного числа не быть целым выполняется в общем положении. Свойство двух прямых на плоскости иметь ровно одну точку пересечения выполняется в общем положении. Свойство двух прямых в трехмерном пространстве иметь одну общую точку этим качеством не обладает. Зато свойство двух прямых в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  не пересекаться, выполняется в общем положении. В данном случае  $X = \mathbb{R}^2$ , а свойство, которое выполняется в общем положении, — первая координата вектора (коэффициент при растущей со временем экспоненте) отлична от нуля.

$O(\exp(\lambda_1 t))$ . График коэффициента затухания  $d = \operatorname{Re} \lambda_1(\omega)$  приведен на рис. 2.4. Частота  $\omega$  растет пропорционально номеру гармоники  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Понятно, что медленнее всего будет затухать амплитуда гармоники для  $k = 1$ .

**Замечание Б.** Случай неоднородных условий Дирихле

$$u(t, 0) = A, \quad u(t, L) = B \quad (2.52)$$

сводится к рассмотренному, если положить  $v = u - A - Cx$ , где  $A + CL = B \Leftrightarrow C = (B - A)/L$ . Новая функция  $v$  удовлетворяет и условиям (2.47), и дифференциальному уравнению (2.45) — проверьте!

Рассмотрим сначала уравнение (2.45) при  $c = \operatorname{const}$  на прямой:  $x \in \mathbb{R}$ . Здесь граничных условий не требуется. Д'Аламбер заметил, что при любых гладких функциях одной переменной  $\Phi$  и  $\Psi$  функция двух переменных

$$u(t, x) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct) \quad (2.53)$$

будет решением уравнения (2.45). Этот факт проверяется непосредственной подстановкой. Оказывается, верно и обратное утверждение: всякое решение уравнения (2.45) представимо в виде формулы Д'Аламбера (2.53). Действительно, дифференциальное уравнение (2.45) можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0, \quad \text{где } \xi = x - ct, \quad \eta = x + ct. \quad (2.54)$$

**К.2.** Проверьте это утверждение.

**К.3.** Докажите, что всякое решение (2.45) представимо по формуле Д'Аламбера (2.53).

Для решения задачи Коши для дифференциального уравнения (2.45) нужно поставить два начальных условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x). \quad (2.55)$$

Начальные функции связаны с функциями  $\Phi$ ,  $\Psi$  соотношениями:

$$u_0(x) = \Phi(x) + \Psi(x), \quad u_1(x) = -cd_x \Phi(x) + cd_x \Psi(x),$$

из которых следует, что

$$d_x \Phi = \frac{cd_x u_0 - u_1}{2c}, \quad d_x \Psi = \frac{cd_x u_0 + u_1}{2c}.$$

Функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  определяются для конкретного решения с точностью до общей константы. Можно вычесть из функции  $\Phi$  произвольную константу  $C$  и прибавить ее к  $\Psi$ , решение  $u(t, x)$  от этого не меняется.

**К.4.** С помощью формулы Д'Аламбера постройте пример решения, показывающий, что для уравнения струны (2.45) принцип максимума:

$$\inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}} u_0(\mathbf{z}) \leq u(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}} u_0(\mathbf{z})$$

(сравните с **К.13** в разд. 2.2) не всегда выполняется.

**Замечание Г.** Многомерное волновое уравнение

$$\partial_t^2 u(t, \mathbf{x}) = c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}), \quad \text{где } \Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2, \quad (2.56)$$

есть естественное обобщение уравнения струны (2.45). При  $n > 1$  аналога формулы Д'Аламбера не существует, так как оператор Лапласа нельзя представить в виде произведения двух дифференциальных операторов 1-го порядка. При  $n = 2$  уравнение (2.56) описывает динамику однородной мембраны.

*Носителем кусочно-непрерывной функции  $g(x)$*  называется замыкание множества точек, в которых  $g(x)$  отлична от нуля:

$$\text{supp } g(x) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}},$$

где черта означает замыкание множества.

Например, носитель функции  $g(x) = \sin(x)$  — вся прямая, а носитель функции Хевисайда<sup>40</sup>

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x \leq 0 \\ 1 & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$$

совпадает со множеством неотрицательных чисел. Если носители функций  $f$  и  $g$  не пересекаются, то их скалярное произведение  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx$  равно нулю (функции  $L^2$ -ортогональны).

**К.5.** Докажите, что для любых непрерывных функций  $f, g$  выполняются соотношения:  $\text{supp } [f(x) \cdot g(x)] = \text{supp } f(x) \cap \text{supp } g(x)$  и  $\text{supp } [f(x) + g(x)] \subseteq \text{supp } f(x) \cup \text{supp } g(x)$ .

**К.6.** Пусть  $g(x)$  — гладкая функция. Докажите, что

$$\text{supp } d_x g(x) \subseteq \text{supp } g(x).$$

Приведите примеры функций  $g$ , когда здесь имеет (не имеет) место равенство.

**К.7.** Те же вопросы, но при замене оператора  $d_x$  на произвольный линейный дифференциальный оператор, а аргумента на векторный  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**К.8.** Верны ли эти утверждения для разностных операторов?

Если носитель функции  $g(x)$  — ограниченное множество, то функция  $g$  называется *финитной*. Например, функция (2.10) финитна, а функция, показанная на рис. 2.2, функция Хевисайда и функция  $\sin(x)$  — нет.

<sup>40</sup> Оливер Хевисайд (1850–1925).

Из формулы Д'Аламбера следует *теорема о локализации решения* уравнения струны (2.45). Пусть носители начальных функций  $\mathbf{supp} u_0$ ,  $\mathbf{supp} u_1$  содержатся в отрезке  $[a, b]$ . Тогда при всех  $t$  носитель решения  $\mathbf{supp} u(t, x)$  лежит в объединении двух отрезков:  $[a - ct, b - ct]$  и  $[a + ct, b + ct]$ .

**К.9.** Докажите это утверждение.

Функционал

$$\mathbf{E}[u] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [\rho(x)(\partial_t u)^2 + \Theta(\partial_x u)^2] dx \quad (2.57)$$

на таких решениях (2.45), что интеграл сходится, сохраняется со временем. Физический смысл этого первого интеграла — *энергия малых колебаний струны*. Для доказательства сохранения энергии умножим уравнение (2.45) на  $\rho \partial_t u$  и проинтегрируем по всей прямой. Нужно воспользоваться интегрированием по частям, а для этого предположить, что  $\partial_x u(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Если на струну во время колебаний действует (помимо внутренней силы упругости) внешняя сила (например, мы вернем в рассмотрение силу тяжести, учтем дующий на струну ветер или, если струна находится в электромагнитном поле и она заряжена электричеством или обладает магнитными свойствами, — то учтем электромагнитные силы) с плотностью  $f(t, x)$ , то в уравнение (2.45) — следствие второго закона Ньютона — для учета внешней силы нужно добавить слагаемое — известную функцию:

$$\begin{aligned} \rho(x) \partial_t^2 u(t, x) &= \Theta \partial_x^2 u(t, x) + f(t, x) \Rightarrow \partial_t^2 u(t, x) = \\ &= c^2 \partial_x^2 u(t, x) + \gamma(t, x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где  $\gamma(t, x) = f(t, x)/\rho(t, x)$ . В частности, если учитывается только сила тяжести, то вертикальные колебания расположенной горизонтально струны описываются уравнением (2.58), где  $\gamma = g$  — ускорение свободного падения.

**К.10.** Что изменится в этой задаче, если струна расположена не горизонтально?

При выводе уравнения струны предполагалось, что натяжение струны  $\Theta = \text{const}$ , т.е. изменения натяжения происходят мгновенно. Но в реальности скорость распространения возмущений натяжения распространяются со скоростью звука в материале, из которого сделана струна. Обычно эта скорость  $c_0$  заметно выше, чем упомянутая ранее скорость  $c$  распространения по струне возмущений.

**К.11.** Скорость звука  $c_0$  в стали около 5700 м/с. Полагая диаметр гитарной струны круглого сечения в диапазоне 0,25–1,32 мм, а натяжение  $\Theta$  в диапазоне 7–40 кг, оцените скорость  $c$  в уравнении струны (2.45).

Предположим, что правая часть (форсинг) в уравнении (2.58) гармоническая по времени. Будем использовать комплексную форму описания такого форсинга:  $f(t, x) = \exp(i\omega t)g(x)$ , но можно использовать и вещественное представление  $f(t, x) = \sin(\omega t)g(x)$  или  $f(t, x) = \cos(\omega t)g(x)$ , — во всех

рассмотренных примерах кроме (2.50) получаются одинаковые уравнения для функции  $u(x)$ .

Положим  $u(t, x) = \exp(i\omega t)y(x)$ . Если такое решение уравнения (2.58) существует (это важное предположение), то амплитуда  $y(x)$  удовлетворяет ОДУ второго порядка:

$$-\rho(x)\omega^2 y(x) = \Theta d_x^2 y(x) + g(x) \quad (2.59)$$

и граничным условиям Дирихле.

**К.12.** Пусть в уравнение (2.50) добавлен форсинг  $f(t, x) = \cos(\omega t)g(x)$ . Существует ли вещественное решение вида  $u(t, x) = \sin(\omega t)y(x) + \cos(\omega t)z(x)$ ? Какой системе ОДУ должны удовлетворять функции  $y(x)$ ,  $z(x)$ ?

Пусть при каком-то значении  $\omega$  существует нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение  $Y(x)$  однородного (т.е. при  $g \equiv 0$ ) уравнения (2.59) и граничным условиям. Тогда для неоднородного уравнения решение краевой задачи  $y(x)$  существует, если и только если правая часть уравнения удовлетворяет равенству (условию ортогональности):

$$\int_a^b g(x)\bar{Y}(x) dx = 0, \quad (2.60)$$

причем это решение  $y(x)$  определяется с точностью до слагаемого  $CY(x)$ ,  $C = \text{const}$ .

**К.13.** Докажите эти утверждения.

**К.14.** Пусть  $\rho = \text{const}$ . При каких значениях частоты  $\omega$  существуют нетривиальные решения, удовлетворяющие условию (2.60)?

Соответствующее значение  $\omega$  называется *резонансной (собственной) частотой* краевой задачи для уравнения струны, а множество всех частот — *спектром задачи*.

В таком случае для правой части вида:  $f = \exp(i\omega t)g(x)$  решения задачи для уравнения в частных производных (2.58) вида  $u = \exp(i\omega t)y(x)$  не существует. В этом резонансном случае нужно искать решение в ином виде, учитывающем рост решения со временем:

$$u = t \cdot \exp(i\omega t)y(x). \quad (2.61)$$

Амплитуды колебаний для частот  $\pm\omega$  удовлетворяют одинаковым обыкновенным дифференциальным уравнениям. Вещественная версия уравнения для описания гармонических колебаний струны: полагаем правую часть и решение уравнения (2.58) пропорциональными не экспоненте, а  $\sin(\omega t)$  или  $\cos(\omega t)$  — уравнение для амплитуды совпадает с (2.59).

**Замечание Г.** В случае уравнения диффузии ситуация иная: если правая часть пропорциональна не экспоненте, а  $\sin(\omega t)$  или  $\cos(\omega t)$ , то вещественное решение



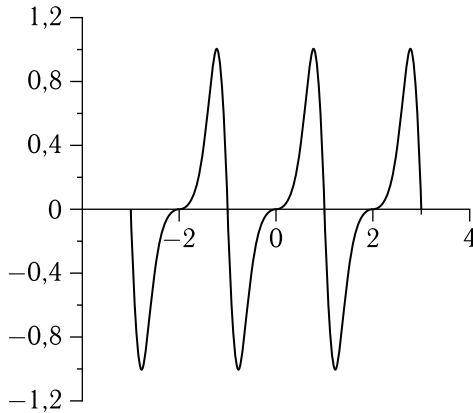
нужно искать в виде комбинации  $\sin(\omega t)$  и  $\cos(\omega t)$  с коэффициентами — функциями от  $x$ .

**К.15.** Докажите, что решение можно найти только в виде такой комбинации.

Формулу Д’Аламбера можно применить к решению полуоднородной задачи Дирихле для уравнения струны, если свести ее следующим образом к задаче на прямой. Функцию  $u$ , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно продолжить кососимметрично на отрезок  $[-L, L]$ :

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \Leftarrow x \in [0, L] \\ -u(-x) & \Leftarrow x \in [-L, 0] \end{cases} .$$

Функцию  $\widehat{u}$  можно периодически продолжить на всю прямую с периодом  $2L$ . Результат продолжения (см. пример на рис. 2.5) — непрерывная функция  $\widehat{\widehat{u}}$ , если  $u$  непрерывна на отрезке  $[0, L]$  и удовлетворяет условиям Дирихле.



**Рис. 2.5.** График функции  $\sin(\pi x^3)$ , продолженный сначала кососимметрично с отрезка  $[0, 1]$  на  $[-1, 1]$ , а затем периодически с отрезка  $[-1, 1]$  с периодом 2. График кососимметричен относительно всех точек  $x \in \mathbb{Z}$

Если функция  $u(t, x)$  удовлетворяет уравнению струны (2.45) на отрезке  $[0, L]$  и условию Дирихле (2.46) на краях этого отрезка, то функция  $\widehat{\widehat{u}}(t, x)$  удовлетворяет уравнению струны (2.45) на всей прямой, а значит, это решение можно определить по формуле Д’Аламбера.

**К.16.** Докажите это утверждение.

**К.17.** Пусть при всех  $t \geq 0$  решение задачи Дирихле  $u(t, x) \in C^1[0, L]$ . Докажите, что при всех  $t \geq 0$   $\widehat{\widehat{u}}(t, x) \in C^1(\mathbb{R})$ . Остается ли утверждение верным, если заменить здесь пространства  $C^1$  на  $C^k$ ,  $k = 2, \dots$ ?

**Замечание Д.** Если нужно продолжить указанным образом начальные условия Коши на всю прямую, то продолжать придется не только функцию  $u_0$ , но и функцию  $u_1(x)$ . Иначе решение на прямой уже не будет периодическим при  $t > 0$ .

**К.18.** Пусть искомое решение  $u(t, x)$  удовлетворяет условию Дирихле на левом краю отрезка  $[0, L]$  и условию Неймана на правом. Как свести эту смешанную краевую задачу к задаче Коши на всей прямой и применить формулу Д'Аламбера?

Вернемся к **Замечанию А.** Определим собственные функции оператора  $d_x^2$  в пространстве гладких функций, удовлетворяющих условиям Дирихле (2.46), как функции, удовлетворяющие уравнению:

$$d_x^2 Y = \lambda Y, \quad Y(x) \neq 0. \quad (2.62)$$

Умножим равенство (2.62) на функцию  $\bar{Y}$  и, проинтегрировав по отрезку  $[0, L]$ , получим равенство:

$$\int_0^L \bar{Y} \cdot d_x^2 Y \, dx = - \int_0^L |d_x Y|^2 \, dx = \lambda \int_0^L |Y|^2 \, dx,$$

поскольку внеинтегральные члены в первом равенстве нулевые ввиду (2.46).

Поскольку правый интеграл отличен от нуля, на него можно поделить. Следовательно, собственное число  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ . Поскольку  $Y \neq \text{const}$  (ввиду граничных условий (2.46) и неравенства (2.62)), левый интеграл также отличен от нуля, а значит,  $\lambda < 0$ .

Общее решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами (2.62):

$$C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x), \quad \text{где } \omega = \sqrt{-\lambda}.$$

Левое граничное условие (2.46) выполняется, если и только если  $C_2 = 0$ . Поскольку  $Y(x) \neq 0$ ,  $C_1 \neq 0$ , и правое граничное условие выполнено, если и только если  $\sin(\omega L) = 0 \Leftrightarrow \omega_k L = \pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Следовательно, собственные числа задачи отрицательны, нумеруются натуральными числами и их модули растут квадратично:

$$\lambda_k = -\omega_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2,$$

и собственных функций не одна, как ошибочно полагали Тейлор и Бернулли. Их счетное множество:

$$Y_k(x) = C_k \sin(\omega_k x), \quad C_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

**К.19.** Докажите свойство ортогональности собственных функций:

$$\int_0^L Y_k(x) Y_m(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow k \neq m.$$

Чтобы обеспечить ортонормированность собственных функций, вычислим коэффициенты из условия:

$$|C_k|^2 \int_0^L |\sin(\omega_k x)|^2 dx = |C_k|^2 L/2 = 1 \Rightarrow |C_k| = \sqrt{2/L}.$$

Рассмотрим функции, которые можно приблизить в смысле гильбертовой метрики  $\mathbf{L}^2[0, L]$  линейными комбинациями функций вида (2.63):

$$\|\phi(x) - \sum_{k=1}^N a_{k,N} Y_k(x)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

Коэффициенты (они называются *коэффициентами Фурье*), обеспечивающие наилучшее (в смысле метрики  $\mathbf{L}^2[0, L]$ ) приближение, легко определить. Поскольку функции  $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$  — ортонормированные, эти наилучшие коэффициенты не зависят от выбора  $N$  и задаются формулой:

$$a_k = (\phi, Y_k) = \int_0^L \phi(x) Y_k(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin(\omega_k x) dx. \quad (2.65)$$

Например, все кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие граничному условию (2.46), свойством (2.64) обладают — это следует из теории рядов Фурье (см., например, [Стейн, Вейс, 1974]). Если функция  $\phi$  зависит от параметра  $t$  непрерывно или гладко, то и коэффициенты этого ряда будут от  $t$  зависеть таким же образом.

**К.20.** Пусть  $L = 1$ ,  $\phi_1(x) = x(1 - x)$ , и  $\phi_2(x) = x$ . Определите коэффициенты Фурье обеих функций. Постройте графики зависимости модулей коэффициентов Фурье  $|a_k|$  от номера  $k$  в логарифмической (для  $|a_k|$  и  $k$ ) системе координат.

**К.21.** Для этих примеров постройте графики невязок

$$\phi(x) - \sum_{k=1}^N a_k Y_k(x)$$

при  $N = 10, 20, 30$ . Во втором примере объясните поведение невязки в окрестности правого края отрезка с ростом  $N$ . Проверьте, что при всех  $N$  выполняется *неравенство Парсевалья*<sup>41</sup>

$$\sum_{k=1}^N |a_k|^2 \leq \|\phi\|_{\mathbf{L}^2}^2,$$

обобщающее многомерную теорему Пифагора<sup>42</sup>.

<sup>41</sup> Марк-Антуан Парсеваль де Шане (1755–1836).

<sup>42</sup> Пифагор Самосский (около 570–490 гг. до н.э.). Известную школьникам теорему он, видимо, узнал в Вавилоне, куда попал пленником.

Предположим, что решение и начальные функции уравнения (2.55) удовлетворяют условию (2.64), и их можно разложить в ряд Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) Y_k(x), \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_k(x), \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Y_k(x), \quad (2.66)$$

причем первый ряд допускает двукратное почленное дифференцирование.

Подставляя это представление решения в уравнение (2.45), получим для всех  $k = 1, 2, \dots$  обобщение формулы (2.49):

$$d_t^2 a_k = c^2 \lambda_k a_k \Rightarrow a_k(t) = B_k \sin(c\omega_k t) + C_k \cos(c\omega_k t), \quad B_k, C_k = \text{const},$$

а из начальных условий при  $t = 0$  получаем окончательно:  $C_k = c_k$ ,  $B_k = b_k / (c\omega_k)$ .

**К.22.** Какой формулой описывается зависимость от времени величины  $d_t a_k$ ?

**К.23.** Докажите, что при любом  $k$  величина  $E_k = [(d_t a_k)^2 + c^2 \omega_k^2 a_k^2] / 2$  не зависит от времени.

Поскольку коэффициент  $a_k$  — коэффициент Фурье — при всех  $t$  вычисляется по формуле (2.65), его можно рассматривать как линейный функционал на решениях, а значит, квадратичный функционал  $E_k = E_k[u]$  — первый интеграл (см., например, [Гордин, 2016]) уравнения струны (2.45) при граничных условиях (2.46). Таким образом, для этой задачи построено счетное семейство независимых квадратичных по  $u$  первых интегралов. Их линейные комбинации образуют бесконечномерное пространство. Независимость (невозможность выразить любой функционал  $E_{k*}$  через остальные) очевидна: на функциях  $u$ , пропорциональных  $Y_{k*}(x)$ , значение  $E_{k*}[u]$  отлично от нуля, а все остальные значения  $E_k[u]$  равны нулю.

**К.24.** Докажите, что сумма этих первых интегралов равна энергии колебаний струны (2.57)

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbf{E}.$$

**К.25.** Сохраняются ли со временем величины  $E_k = E_k[u]$ , если заменить уравнение струны в их определении на уравнение диффузии?

*Метод* построения решения начально-краевой задачи в виде ряда (2.66) — *разделением независимых переменных*  $t$  и  $x$  — носит имя *Фурье*. Этот метод можно применять и ко многим другим линейным уравнениям в частных производных. Особенно просто этот метод применяется, если пространственная область  $D \ni \mathbf{x}$  обладает симметриями. Например, если  $D$  это прямоугольник, круг, цилиндр, шар, сфера, тор.

**К.26.** Методом разделения переменных найдите решение уравнения теплопроводности (2.33) на отрезке  $[0, L]$ , удовлетворяющее начальному условию  $T(0, x) = T_0(x)$ ,  $x \in [0, L]$  и граничным условиям Дирихле  $T(t, 0) = T(t, L) = 0$ . Каким ОДУ и каким начальным условиям удовлетворяют коэффициенты  $a_k(t)$ ?

Рассмотрим теперь более сложный случай струны с переменным сечением:  $\rho(x) \neq \text{const}$ .

В качестве базиса в пространстве функций выберем *обобщенные*<sup>43</sup> *собственные функции* — нетривиальные (отличные от тождественного нуля) решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$d_x^2 Y_k = \lambda_k \rho(x) \Theta^{-1} Y_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.67)$$

удовлетворяющие однородным условиям Дирихле (2.46). В этой задаче участвует не только  $\mathbf{L}^2$ -самосопряженный оператор  $d_x^2$ , но также оператор умножения на положительную вещественную функцию  $\rho$ .

**К.27.** Докажите, что умножение на вещественную функцию  $\rho$  тоже самосопряженный оператор в пространстве функций  $\mathbf{L}^2[0, L]$ .

**К.28.** Докажите, что все обобщенные собственные числа отрицательны:  $\lambda_k \in \mathbb{R}_-$ .

Разумеется, все полученные собственные числа зависят от выбора функции  $\rho(x)$ . Некоторые аналитические оценки будут даны в разд. 2.5.

Для того чтобы определить численно эти обобщенные собственные числа и функции, решим семейство (зависящее от отрицательного параметра  $\mu$ ) задач Коши:

$$d_x^2 Y_\mu = \mu \rho(x) \Theta^{-1} Y_\mu, \quad Y_\mu(0) = 0, \quad d_x Y_\mu(0) = 1. \quad (2.68)$$

По функции  $Y_\mu(x)$ , зависящей от двух переменных:  $x$  и  $\mu$ , определим функцию одного переменного:  $\Psi(\mu) = Y_\mu(L)$ . Нули функции  $\Psi(\mu)$ , упорядоченные по убыванию, и есть обобщенные собственные числа задачи:  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ . Решения  $Y_\mu(x)$  при  $\mu = \lambda_k$  — обобщенные собственные функции задачи с номером  $k = 0, 1, \dots$

**Замечание Е.** Контролировать правильность вычислений удобно с помощью простого критерия **теоремы Штурма** (см. разд. 3.8): число нулей функции  $Y_k(x)$  на интервале  $(0, L)$  равно  $k - 1$ .

Пример. При  $\rho \equiv \Theta$  из условия Дирихле на правом краю отрезка:  $Y_\mu(L) = 0$  получаем

$$Y_\mu(x) = \sin(\sqrt{-\mu} x) / \sqrt{-\mu} \Rightarrow \sqrt{-\mu} L = \pi k \Rightarrow \lambda_k = -\pi^2 k^2 / L^2.$$

Ниже мы оценим, сколько примерно собственных чисел принадлежит области  $[-B, 0)$  при больших значениях числа  $B$ .

**К.29.** Как нужно изменить алгоритм вычисления обобщенных собственных чисел и функций, если ослабить предположение, заменив условие положительности  $\rho$  на условие:  $\rho > A$ ,  $A = \text{const}$ ?

<sup>43</sup> К сожалению, прилагательное «обобщенные» может означать два различных понятия: а) эта функция не обычная, а обобщенная (см. гл. 5), б) нетривиальное решение уравнения  $Au = \lambda Bv$ , где  $A, B$  — линейные операторы,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Здесь имеется в виду случай б).

**К.30.** Как нужно изменить рассмотренный алгоритм оценки собственных чисел, если вместо граничных условий Дирихле на одном или обоих краях ставится условие Неймана? Робена?

В некоторых моделях струны необходимо учитывать ее жесткость по отношению к поперечному изгибу (например, это важно для оценки частот струны рояля в разд. 2.6). Для этого нужно рассматривать краевые задачи для ОДУ 4-го порядка. Близкая задача будет рассмотрена в разд. 2.5.

## 2.4. ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА К САМОСОПРЯЖЕННОМУ ВИДУ

Пусть линейный дифференциальный оператор  $Au = -d_x[\theta(x) d_x u] + q(x)u$  с вещественными непрерывными коэффициентами  $\theta(x)$ ,  $q(x)$  действует в пространстве дважды дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций  $u(x)$ , удовлетворяющих на краях отрезка однородным условиям Дирихле. Оператор  $A$  является  $\mathbf{L}^2([a, b])$ -самосопряженным. Это следует из равенств:

$$\begin{aligned} ([Au], v)_{\mathbf{L}^2} &= \int_a^b [Au(x)]\bar{v}(x) dx = \int_a^b -\theta(x) d_x u(x) d_x \bar{v}(x) + \rho(x)u(x)\bar{v}(x) dx = \\ &= \int_a^b u(x)[A\bar{v}(x)] dx = \overline{(u, [Av])}_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение; при интегрировании по частям внеинтегральные члены равны нулю, поскольку обе функции  $u$  и  $v$  гладкие и удовлетворяют условиям Дирихле.

Покажем, как линейное дифференциальное уравнение с вещественными гладкими коэффициентами

$$Au = \alpha(x) d_x^2 u + \beta d_x u + \gamma u = f(x), \quad (2.69)$$

где  $\alpha(x) \neq 0$ , простой заменой может быть приведено к самосопряженному виду:

$$-d_x[\theta(x) d_x u] + q(x)u = g(x). \quad (2.70)$$

**Лемма о приведении дифференциального уравнения (2.69) к самосопряженному виду.** Предположим, что все коэффициенты дифференциального уравнения (2.69) вещественны и что на отрезке  $[a, b]$  нет особых точек. Знак функции  $\alpha(x)$  будем предполагать отрицательным — его можно поменять, умножив, при необходимости, все уравнение на  $-1$ .

Поскольку в уравнении (2.70)

$$d_x[\theta d_x u] = \theta d_x^2 u + [d_x \theta] d_x u,$$

в уравнении (2.69) между коэффициентами, стоящими перед второй и первой производными неизвестной функции, для выполнения условия самосопряженности должно выполняться соотношение:  $d_x\alpha = \beta$ .

Если же это условие не выполнено, то умножим уравнение (2.69) на (пока неопределенную) положительную функцию  $\rho(x)$ . Подберем функцию  $\rho$  так, чтобы для функций  $\rho\alpha$  и  $\rho\beta$  это соотношение выполнялось, т.е. чтобы

$$d_x(\rho\alpha) = \rho\beta. \quad (2.71)$$

Рассматривая соотношение (2.71) как линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\rho$ , находим (разделяя переменные):

$$\rho(x) = \pm \exp \left[ \int \frac{\beta - d_x\alpha}{\alpha} dx \right].$$

Это знакоопределенная функция, определяемая с точностью до постоянного множителя. Будем считать ее положительной.

После того как нужная функция  $\rho(x)$  определена, два остальных коэффициента и правая часть уравнения (2.70) находятся однозначно:

$$\theta = \rho(x)\alpha(x), \quad q(x) = \rho(x)\gamma(x), \quad g(x) = \rho(x)f(x).$$

**Замечание А.** Для краевой задачи для уравнения (2.70) укажем формулу для ядра солвера (для функции Грина), обобщающую (2.43):

$$K(x, s) = \frac{-1}{\theta(s)w(s)} \begin{cases} Z_a(x)Z_b(s) & \Leftarrow a \leq x \leq s, \\ Z_a(s)Z_b(x) & \Leftarrow s \leq x \leq b, \end{cases} \quad u(x) = \int_a^b K(x, s)g(s) dx. \quad (2.72)$$

Здесь  $Z_a, Z_b$  — решения (2.70), удовлетворяющие граничному условию на левом или правом краю отрезка,  $w$  — вронскиан, построенный по этим функциям. Формулу (2.72) можно также использовать и для граничных условий Неймана или Робена. Единственное условие: функции  $Z_a, Z_b$  не коллинеарны. В таком случае они оказались бы собственными функциями с нулевым собственным числом, а значит, оператор не имел бы обратного. В таком случае и вронскиан обратился бы в нуль.

Формулу для функции Грина можно построить (см. (2.92)) и для линейных дифференциальных операторов порядка  $n$  при надлежащем числе граничных условий.

Таким же преобразованием и задача Штурма–Лиувилля

$$AY_k = \lambda_k Y_k, \quad (2.73)$$

приводится к виду

$$-d_x\theta(x) d_x Y + q(x)Y = \lambda\rho(x)Y. \quad (2.74)$$

Уравнение (2.74) отличается от обычной задачи на собственные значения при  $\rho \neq 1$ . Это уравнение — *обобщенная задача на собственные значения* вида:

$$AY = \lambda BY,$$

где  $B$  — самосопряженный положительно определенный оператор умножения на вещественную положительную функцию  $\rho(x)$ . Разумеется, собственные

числа и собственные функции здесь зависят не только от выбора  $A$ , но и от оператора  $B$ , т.е. от положительной функции  $\rho$ .

Уравнение (2.74) можно еще упростить, умножив его на положительный коэффициент  $\theta(x)$ . Затем, поскольку  $\theta(x) \neq 0$ , сделаем замену независимой переменной:  $s = \int \frac{dx}{\theta(x)}$ . Получаем дифференциальное уравнение

$$d_s^2 Y + [q(x)\theta(x)]Y = \lambda[\rho(x)\theta(x)]Y. \quad (2.75)$$

К аналогичному виду можно привести уравнение (2.69) заменой неизвестной функции  $Y$ . Поделим (2.69) на коэффициент  $\alpha(x)$ :

$$d_x^2 Y + P(x) d_x Y + Q(x)Y = \lambda R(x)Y \quad (2.76)$$

и определим функцию  $Z(x) = Y(x) \exp(\Pi(x)/2)$ , где  $\Pi = \int P(x) dx$ . Вычислим ее производные и используем уравнение (2.76):

$$\begin{aligned} Z' &= [Y' + YP/2] \exp(\Pi(x)/2), \\ Z'' &= \{[Y'' + Y'P/2 + YP'/2] + [Y' + YP/2]P/2\} \exp(\Pi(x)/2) = \\ &= [Y'' + Y'P + Y(P'/2 + P^2/4)] \exp(\Pi(x)/2) = \\ &= [(\lambda R - Q)Y + Y(P'/2 + P^2/4)] \exp(\Pi(x)/2) = [\lambda R - Q + P'/2 + P^2/4]Z. \end{aligned}$$

Новая функция  $Z(x)$  удовлетворяет уравнению, аналогичному (2.75):

$$d_x^2 Z + \Omega(x)Z = \lambda RZ, \quad \text{где } \Omega(x) = Q - P'/2 - P^2/4. \quad (2.77)$$

**К.1.** Приведите обоими способами к самосопряженному виду уравнение  $Y'' + xY' + x^2Y = \lambda Y$ .

Распространим обычные свойства собственных функций самосопряженного оператора и на случай уравнения (2.74), причем при более общих однородных граничных условиях Робена:

$$d_x u(a) + \alpha u(a) = 0, \quad d_x u(b) + \beta u(b) = 0, \quad (2.78)$$

где  $\alpha, \beta$  — заданные числа.

**Замечание Б.** Чтобы формально включить сюда и условия Дирихле, будем допускать и бесконечные значения  $\alpha, \beta$ .

Для самосопряженного оператора типа (2.74) и при общих граничных условиях (2.78) выполняется **Лемма о простоте спектра**: собственные числа не могут быть кратными, т.е. одному собственному числу отвечают лишь пропорциональные (линейно зависимые) собственные функции.

**Доказательство** от противного. Пусть  $Y_1$  и  $Y_2$  — две собственные функции, отвечающие одному собственному числу  $\lambda$ . Эти функции — решения



линейного дифференциального уравнения второго порядка (2.74). Составим из них определитель Вронского

$$\det \begin{pmatrix} Y_1(a) & Y_2(a) \\ d_x Y_1(a) & d_x Y_2(a) \end{pmatrix}.$$

Поскольку обе функции удовлетворяют на левом краю отрезка  $[a, b]$  граничному условию (2.78), оба вектор-столбца этой матрицы ортогональны вектору  $\langle \alpha, 1 \rangle$ , а значит, пропорциональны друг другу. Следовательно, определитель Вронского равен нулю при  $x = a$ , а значит (см. [Гордин, 2016; Матвеев, 1967]), при всех  $x$ . Поэтому обе функции,  $Y_1$  и  $Y_2$ , пропорциональны — лемма доказана.

Лемма не распространяется на задачи с граничными условиями периодичности вместо (2.78). Однако для дифференциального оператора второго порядка кратность в этом случае не больше двух.

**К.2.** Докажите это утверждение.

Поскольку коэффициенты дифференциального уравнения (2.74) и граничных условий (2.74) вещественны, вещественная и мнимая части собственной функции — собственные функции с тем же вещественным собственным числом, а значит, пропорциональны друг другу. Следовательно, умножив при необходимости собственную функцию на подходящее комплексное число, ее можно сделать вещественной. Далее вещественность всех собственных функций предполагается.

**Теорема.** Собственные функции  $Y_1$  и  $Y_2$ , отвечающие различным собственным числам, ортогональны в гильбертовой метрике  $L^2_\rho[a, b]$ .

**Доказательство.** По предположению теоремы функции  $Y_1$  и  $Y_2$  удовлетворяют уравнениям

$$-d_x \theta(x) d_x Y_1 + q(x) Y_1 = \lambda_1 \rho(x) Y_1, \quad -d_x \theta(x) d_x Y_2 + q(x) Y_2 = \lambda_2 \rho(x) Y_2. \quad (2.79)$$

Умножим первое уравнение на функцию  $Y_2$ , а второе — на  $Y_1$  и проинтегрируем:

$$\int_a^b \{[-d_x(p d_x Y_1)] Y_2 - [-d_x(p d_x Y_2)] Y_1\} dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \{\rho Y_1 Y_2\} dx.$$

В левой части проинтегрируем по частям и воспользуемся граничными условиями, которым удовлетворяют обе собственные функции, — все слагаемые сокращаются, т.е. левая часть равенства равна нулю. Поскольку по предположению  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , интеграл в правой части равен нулю, что и требовалось доказать.

Важную роль в теории задачи Штурма–Лиувилля играет следующая теорема, доказанная *Стекловым*<sup>44</sup> (см., например, [Левитан, Саргсян, 1970; Стеклов, 1922]).

**Теорема.** Пусть коэффициент дифференциального уравнения (2.74)  $\Omega(x) \in \mathbf{L}_\rho^1[a, b]$ , а на краях отрезка заданы граничные условия (2.78). Тогда собственные функции задачи Штурма–Лиувилля образуют ортогональный базис в пространстве  $\mathbf{L}_\rho^2[a, b]$ . Это означает, что для любой суммируемой в квадрате функции  $f(x)$  ряд

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j Y_j(x) \quad (2.80)$$

сходится в норме  $\mathbf{L}_\rho^2[a, b]$ . Здесь для любого  $j$  константа  $c_j$  может быть получена проектированием функции  $f$  на функцию  $Y_j$  независимо от других коэффициентов.

**Следствие.** Из формулы (2.80) и ортогональности собственных функций следует *равенство Парсеваля* (бесконечномерный аналог теоремы Пифагора):

$$(f, f) = \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \|Y_j\|^2.$$

В частности, если собственные функции нормированные, т.е.  $\|Y_j\| = 1$ , то ряд из квадратов модулей коэффициентов  $|c_j|^2$  сходится. Обратно, из сходимости этого ряда следует, что функция  $f \in \mathbf{L}_\rho^2[a, b]$ .

Если, кроме того, функция  $f \in \mathbf{C}^2[a, b]$  и удовлетворяет тем же граничным условиям (2.78), то

1) ряд (2.80) сходится абсолютно и равномерно к  $f$ ;

2) ряд (2.80) после почленного дифференцирования по  $x$  сходится абсолютно и равномерно к  $d_x f$ .

**Замечание В.** Возможно рассмотрение рядов по собственным функциям самосопряженного оператора не только для функций  $f(x) \in \mathbf{L}_\rho^2[a, b]$ . Рассмотрим в качестве примера разложение в ряд Фурье (т.е.  $\rho \equiv 1$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ ) функции  $g(x) = \frac{\pi - x}{2} \in \mathbf{L}_\rho^2[0, 2\pi]$ . Эта функция непрерывна на отрезке. Но если ее рассматривать как функцию на окружности, отождествив края отрезка, то в этой точке стыковки линейная функция  $g$  терпит скачок. Коэффициенты Фурье для  $g$  легко вычислить (проверьте!) и получается ряд:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx)/j, \quad (2.81)$$

который сходится в норме  $\mathbf{L}^2[0, 2\pi]$ , но не сходится равномерно (т.е. в норме  $\mathbf{C}[0, 2\pi]$ ). Разность между функцией  $g$  и конечной суммой ряда  $\sum_{j=1}^N \sin(jx)/j$  до-

<sup>44</sup> Владимир Андреевич Стеклов (1863–1926).

стигает максимальных значений в окрестности скачка, т.е. около точек  $x = 0$  и  $x = 2\pi$ . С ростом числа  $N$  максимальные значения этой невязки не стремятся к нулю. Это так называемое явление Уилбрахама<sup>45</sup>–Гиббса<sup>46</sup> (см. подробнее, например, разд. 4.19 в [Гордин, 2010] или [Федорюк, 1987]). Функцию  $g(x)$  можно продолжить периодически на всю прямую. Если продифференцировать эту разрывную функцию в смысле теории обобщенных функций (см. гл. 5), то получим

$$g' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi m),$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Формально дифференцируя ряд Фурье, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \cos(jx). \quad (2.82)$$

Коэффициенты этого ряда не убывают, и он не сходится в норме  $\mathbf{L}^2[0, 2\pi]$ .

Еще одно дифференцирование в смысле обобщенных функций приводит к формуле:  $g'' = -\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi m)$ .

А формальное дифференцирование ряда Фурье дает

$$-\sum_{j=1}^{\infty} j \sin(jx). \quad (2.83)$$

Ряды Фурье (2.82) и (2.83) расходятся. Однако отрезки этих рядов могут дать важную информацию о предельной обобщенной функции (см. гл. 5).

**К.3.** Постройте графики отрезков ряда Фурье (2.81) с верхним пределом  $N = 10, 20, 30$  и графики разности функции  $g(x)$  и этих отрезков.

**К.4.** Постройте графики отрезков формальных рядов Фурье (2.82, 2.83) с верхними пределами  $N = 10, 20, 30$ . Сопоставьте полученные графики с обобщенными функциями  $g', g''$ .

## 2.5. ДИНАМИКА УПРУГОГО СТЕРЖНЯ. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

---

*Стержень* называется деформируемое твердое тело, размер которого в двух направлениях намного меньше размера в третьем и которое обладает конечной жесткостью на растяжение, кручение и изгиб. Здесь рассмотрены только задачи, в которых эта эволюция обратима. Сильные отклонения от положения равновесия, когда существенны вязкость и пластичность стержня, здесь не рассматриваются.

---

<sup>45</sup> Генри Уилбрахам (1825–1883).

<sup>46</sup> Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903).

Далее  $\rho$  — линейная плотность материала стержня,  $E$  — его модуль Юнга<sup>47</sup>,  $\sigma$  — его коэффициент Пуассона,  $K$  — радиус инерции сечения стержня относительно центра тяжести этого сечения. Модуль Юнга характеризует свойство материала упруго сопротивляться сжатию или растяжению; коэффициент Пуассона — свойство расширяться в поперечном сечении при сжатии вдоль стержня. Все эти параметры могут зависеть или не зависеть от переменной  $x$ , направленной вдоль стержня.

Для продольных колебаний дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид:

$$\rho \partial_t^2 w - \partial_t \partial_x \sigma^2 K^2 \partial_t \partial_x w - \partial_x E \partial_x w = F(t, x), \quad (2.84)$$

где неизвестная функция  $w(t, x)$  — отклонение точки  $x$  от положения равновесия в момент  $t$ ,  $F$  — линейная плотность силы.

Похожие дифференциальные уравнения получаются и для крутильных упругих колебаний стержня (где неизвестная функция — угол поворота  $\psi = \psi(t, x)$  сечения стержня относительно некоторого стандартного сечения), и поперечных (в той же плоскости, что и в уравнении колебаний струны) колебаний; подробнее см., например, [Ландау, Лифшиц, 1987; Ляв, 1935; Тимошенко, Гудьер, 1979; Timoshenko, 2008].

Если параметры стержня  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $K$ ,  $E$  постоянны вдоль стержня, получается дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Стационарное дифференциальное уравнение получается занулением всех производных по времени. Гармоническое по времени решение  $w = \exp(i\omega t)u(x)$  получим, если правая часть имеет вид

$$F = \exp(i\omega t)g(x), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Функция  $u(x)$  интерпретируется как амплитуда гармонических колебаний стержня, а функция  $g(x)$  — как амплитуда внешнего воздействия в точке стержня  $x$ .

Соответствующее линейное ОДУ для функции  $u$ :

$$-\rho \omega^2 u + \omega^2 d_x \sigma^2 K^2 d_x u - d_x E d_x u = g \quad (2.85)$$

можно при различных граничных условиях решить методом вариации постоянных (см. разд. 2.2 и [Арнольд, 1984; Гордин, 2016; Матвеев, 1967]), если найдена ФСР, отвечающая этим граничным условиям.

Если конец стержня свободен, то это интерпретируется как выполнение однородного условия Неймана:  $\partial_x w = 0$ , а если закреплен — как однородного условия Дирихле:  $w = 0$ .

Такая же ситуация и в случае крутильных колебаний.

**К.1.** При постоянных параметрах материала и формы стержня  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $K$ ,  $E$  и перечисленных выше вариантах граничных условий (на разных концах могут быть

<sup>47</sup> Томас Юнг или Янг (1773–1829).

различные граничные условия) постройте для уравнения (2.85) соответствующие ФСР и функции Грина (аналогичные (2.43)). Постройте ее изолинии при различных значениях параметров стержня и частоты  $\omega$ .

**К.2.** В рассмотренных примерах определите амплитуду гармонических колебаний стержня при внешнем воздействии  $g(x) = \text{const}$ ,  $\cos(\pi x/L)$  или  $\sin(\pi x/L)$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с круглым сечением:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ R^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ ER^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = f(t, x), \quad (2.86)$$

где  $x \in [-L/2, L/2]$  — координата вдоль стержня,  $L$  — его длина,  $\rho$  — плотность,  $R$  — радиус сечения,  $E$  — модуль Юнга, неизвестная функция  $u = u(t, x)$  описывает отклонение оси стержня от положения равновесия вдоль координатной оси  $y$ . Правая часть (форсинг)  $f(t, x)$  описывает внешнюю силу, действующую поперек стержня также вдоль  $y$ . Колебания вдоль оси  $z$  описываются таким же дифференциальным уравнением.

В случае поперечных колебаний стержня дифференциальное уравнение имеет четвертый порядок по переменной  $x$ . Здесь для корректности задачи нужно на каждом краю отрезка ставить по два граничных условия.

На свободном краю стержня выполняются граничные условия

$$\partial_x^2 u = 0, \quad \partial_x^3 u = 0.$$

На закрепленном краю стержня граничные условия таковы:

$$u = 0, \quad \partial_x u = 0.$$

Если край стержня опирается на твердую опору, то ставятся граничные условия

$$u = 0, \quad \partial_x^2 u = 0.$$

Кинетическая энергия поперечных колебаний задается интегральным функционалом

$$\mathbf{K}[u] = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (2.87)$$

а потенциальная — функционалом

$$\mathbf{P}[u] = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} ER^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (2.88)$$

Уравнение (2.86) может быть выведено из принципа наименьшего (стационарного) действия Гамильтона<sup>48</sup>. Согласно этому принципу для такого вывода нужно найти экстремаль функционала

$$\mathcal{S}[u] = \int_0^t \{K[u] - P[u]\} dt.$$

Уравнение Эйлера для этого интегрального функционала и есть уравнение (2.86) для функции  $u = u(t, x)$ .

**Замечание А.** Исходя из этого вариационного принципа, можно получить многие другие уравнения математической физики (см. [Арнольд, 1989; Гельфанд, Фомин, 1961; Дубровин и др., 1979; Ландау, Лифшиц, 1965; Ландау, Лифшиц, 1967; Ландау, Лифшиц, 1987; Шубин, 2001]). Близким по смыслу является вариационный принцип Ферма<sup>49</sup>, согласно которому луч света в неоднородной среде с переменной скоростью распространения попадает из точки **A** в точку **B** по траектории, минимизирующей время. Квантово-механическое объяснение этих принципов принадлежит Фейнману<sup>50</sup> (см. [Фейнман и др., 1965; Фейнман, Хибс, 1968]).

Гамильтониан (энергия) для уравнения (2.86)

$$\mathcal{H} = \mathbf{K} + \mathbf{P} \tag{2.89}$$

при отсутствии форсинга ( $f \equiv 0$ ) не меняется на решении со временем.

**К.3.** Докажите это утверждение. Постройте аналогичный первый интеграл для уравнения продольных и крутильных колебаний стержня (2.84).

Уравнение для амплитуды гармонических поперечных колебаний при форсинге  $f(t, x) = \exp(i\omega t)g(x)$  — линейное ОДУ 4-го порядка:

$$-\rho\omega^2 u + \omega^2 d_x R^2 \rho d_x u + d_x^2 E R^2 d_x^2 u = g. \tag{2.90}$$

**К.4.** Для уравнения (2.90) с постоянными коэффициентами и различных вариантов граничных условий постройте соответствующие ФСР.

**К.5.** При каких из перечисленных граничных условий квадратичный функционал  $\mathcal{H}$  строго положительно определен?

Пусть для линейного дифференциального уравнения порядка  $n$  с гладкими коэффициентами  $\{p_j(x)\}_{j=1}^n$ :

$$d_x^n u + p_1(x)d_x^{n-1}u + \dots + p_n(x)u = g(x) \tag{2.91}$$

поставлены  $k < n$  однородных граничных условия на левом краю отрезка и  $n - k$  — на правом. Функцию Грина можно построить (частный случай  $n = 2, k = 1$  был рассмотрен в разд. 2.2 и 2.4) при условии невырожденности краевой задачи: при  $g \equiv 0$  однородная задача имеет только тривиальное

<sup>48</sup> Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865).

<sup>49</sup> Пьер де Ферма (1607–1665).

<sup>50</sup> Ричард Филлипс Фейнман (1918–1988).

(нулевое) решение (например, для уравнения (2.42) с условиями Неймана задача вырождена — решением является любая константа).

Определим ФСР  $\{Y_j(x)\}_{j=1}^n$  так, чтобы первые  $n - k$  решений удовлетворяли граничным условиям на левом краю, а остальные  $k$  — на правом. Для этой ФСР определим матрицу Вронского  $W = W(x)$ , вычислим вронскиан  $w = \det W$  и определители  $w_j$  алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы  $W$ . Тогда функция Грина задается формулой (обобщающей формулу (2.43)):

$$K(x, s) = \chi(x - s) \sum_{j=1}^{n-k} \frac{Y_j(x)w_j(s)}{w(s)} + \chi(s - x) \sum_{j=n-k+1}^n \frac{Y_j(x)w_j(s)}{w(s)}, \quad (2.92)$$

где  $\chi$  — функция Хевисайда.

Солвером полуоднородной краевой задачи является интегральный оператор Фредгольма

$$u(x) = \int_a^b K(x, s) g(s) ds.$$

Функция Грина  $K(x, s)$  — функция двух переменных, обладающая следующими свойствами.

I. Непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка  $n - 2$  включительно при  $x, s \in [a, b]$ .

II. Имеет единичный скачок  $n - 1$ -й производной на диагонали:

$$\partial_x^{n-1} K(s + 0, s) - \partial_x^{n-1} K(s - 0, s) = 1.$$

III. На каждом из полуотрезков  $[a, s]$  и  $(s, b]$  функция по первому переменному удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.91) и граничным условиям на обоих краях отрезка.

**К.6.** Докажите эти утверждения.

Имеет место обратная **Теорема** (доказательство см., например, [Наймарк, 1969]): для невырожденной краевой задачи ядро оператора Фредгольма — функция Грина  $K(x, s)$  — однозначно определяется свойствами I–III.

**К.7.** Пусть на краях отрезка  $[0, 1]$  заданы значения многочлена третьей степени и его первые производные. Докажите, что существует единственный многочлен (интерполяционный многочлен Эрмита<sup>51</sup>, см. разд. 8.2) степени не выше трех, удовлетворяющий этим четырем условиям.

**К.8.** Для уравнения  $d_x^4 u = f$  с однородными граничными условиями Дирихле и Неймана (вместе) на краях отрезка  $[0, 1]$  постройте ФСР и функцию Грина. Постройте ее изолинии.

**К.9.** Пусть на левом краю отрезка  $[0, 1]$  заданы значения функции и ее первых  $k$  производных, а на правом краю — значения функции и ее первых  $m$  производных.

<sup>51</sup> Шарль Эрмит (1822–1901).

Верно ли, что существует и единственен многочлен степени  $n = k + m + 1$ , который удовлетворяет всем этим условиям?

**К.10.** Для уравнения (2.90) с постоянными коэффициентами и различных вариантов граничных условий, рассмотренных в **К.4**, постройте ФСР и функции Грина.

**К.11.** В рассмотренных примерах определите амплитуду гармонических колебаний стержня при внешнем воздействии  $g(x) = \text{const}$ ,  $\cos(\pi x)$  или  $\sin(\pi x)$ .

**К.12.** Постройте функцию Грина для уравнения  $d_x^6 u = f$  при нулевых граничных условиях на решение  $u$  и его первые две производные на обоих краях отрезка.

**К.13.** Для стержня с переменным радиусом сечения:  $R(x) = 1 + 0,5 \cos(\pi x)$  численно постройте ФСР (образующих базисы в соответствующих парам левых и правых граничных условий двумерных подпространствах четырехмерного пространства решений задачи<sup>52</sup>) для различных вариантов граничных условий. Постройте соответствующие функции Грина, их изолинии и графики.

**Замечание Б.** Линейное ОДУ с периодическим коэффициентом

$$d_x^2 Y + [a - 2q \cos(2x)]Y = 0, \quad (2.93)$$

где  $a, q \in \mathbb{R}$ , называется *уравнением Матьё*<sup>53</sup>. Поскольку это уравнение приведенное, т.е. коэффициент при  $d_x Y$  нулевой, то (см., например, [Гордин, 2016; Матвеев, 1967]) определитель Вронского не зависит от  $x$ . Плоскость параметров  $\langle a, q \rangle \in \mathbb{R}^2$  разбивается на две части: в  $L_1$ , где решения уравнения (2.93) — ограниченные функции  $x$ , и  $L_2$ , для параметров из которой можно построить ФСР, такую что одно из решений (2.93) растет при  $x \rightarrow +\infty$  и убывает при  $x \rightarrow -\infty$ , а другое решение — наоборот.

Для определения к какой из двух подобластей плоскости  $L = \langle a, q \rangle \in \mathbb{R}^2$  принадлежат конкретные параметры не обязательно решать это уравнение до очень больших значений  $x$ . Можно применить следующий алгоритм. Дважды решим уравнение второго порядка (2.93) с начальными условиями  $\langle 1, 0 \rangle$  и  $\langle 0, 1 \rangle$  на одном периоде коэффициента, т.е. на отрезке  $[0, \pi]$ . Получаем матрицу Вронского  $W$  при  $x = \pi$  и находим ее собственные числа (они называются *мультипликаторами* дифференциального уравнения (2.93)). Поскольку вронскиан  $w = \det W \equiv 1$ , произведение мультипликаторов равно 1. Следовательно, если и только если мультипликаторы комплексно-сопряженные числа, все решения дифференциального уравнения (2.93) ограничены. На границе между  $L_1$  и  $L_2$  оба мультипликатора или равны 1, или  $-1$ . Подробнее см., например, [Арнольд, 1989].

**К.14.** Постройте примеры графиков ФСР уравнения (2.93) для параметров, принадлежащих  $L_1$  и  $L_2$ .

**К.15.** Определите численно границу между  $L_1$  и  $L_2$ . Ограничены ли решения (2.93) для параметров, принадлежащих границе?

**К.16.** При каком условии на мультипликаторы решения уравнения (2.93) периодичны с периодом, кратным  $\pi$ ?

<sup>52</sup> Невырожденность краевой задачи эквивалентна (докажите!) утверждению: эти два двумерных подпространства функций пересекаются только по нулевому решению.

<sup>53</sup> Эмиль Леонард Матьё (1835–1890).



## 2.6. КОЛЕБАНИЯ РОЯЛЬНОЙ СТРУНЫ С ЖЕСТКОСТЬЮ

Всегда ли стоит предполагать, что рояльная струна абсолютно гибкая (например, для шелковой нити погрешность такого приближения весьма мала)? Ведь при сильном изгибе струна оказывает ему сопротивление. Поэтому дифференциальное уравнение

$$\rho \partial_t^2 u = k \partial_x^2 u - \beta \partial_x^4 u, \quad \beta = ESK^2 > 0, \quad (2.94)$$

описывает свободные колебания струны точнее, чем (2.45). Здесь  $k$  — натяжение струны,  $E$  — модуль Юнга,  $S$  — площадь сечения струны,  $K$  — радиус инерции ее сечения. Если параметры струны переменны вдоль сечения, то правую часть (2.94) нужно заменить на выражение  $\partial_x k \partial_x u - \partial_x^2 (\beta \partial_x^2 u)$ .

Этим же уравнением иногда описывают упругие колебания балки и называют *уравнением Бернулли–Эйлера*. Потенциальная энергия здесь задается квадратичным интегральным функционалом

$$\int_0^L [k(d_x u)^2 + \beta(\partial_x^2 u)^2] dx.$$

В качестве примеров рассмотрим граничные условия типа:

**I. Закрепленный конец:**  $u(a) = 0$ ,  $\partial_x u(a) = 0$ . Равны нулю прогиб и угол поворота.

**II. Опертый конец:**  $u(a) = 0$ ,  $\partial_x^2 u(a) = 0$ . Прогиб и изгибающий момент на краю равны нулю.

**К.1.** Докажите, что в пространстве гладких функций, удовлетворяющих одному из наборов этих граничных условий на каждом из концов отрезка  $[0, L]$ , пространственный оператор

$$A = k \partial_x^2 - \beta \partial_x^4$$

самосопряжен и при  $k > 0$ ,  $\beta > 0$  строго отрицательно определен. Впрочем, условие  $k > 0$  не является необходимым для такой определенности.

Из **К.1.** следует, что спектр самосопряженного пространственного оператора  $A$  лежит на отрицательном луче.

**К.2.** Пусть  $\beta > 0$ . При каких  $k$  оператор  $A$  строго отрицательно определен?

Общее решение ОДУ  $AU = \lambda U$  зависит от четырех свободных параметров  $\{C_j\}_{j=1}^4$ :

$$Y(x) = C_1 \exp(\omega_1 x) + C_2 \exp(-\omega_1 x) + C_3 \exp(\omega_2 x) + C_4 \exp(-\omega_2 x),$$

где вещественный параметр  $\omega$  получается из отрицательного вещественного собственного числа  $\lambda$  решением биквадратного уравнения

$$k\omega^2 - \beta\omega^4 = \lambda, \quad (2.95)$$

из которого следует, что

$$\omega_1^2 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4\beta\lambda}}{2\beta}, \quad \omega_2^2 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4\beta\lambda}}{2\beta}.$$

Дискриминант биквадратного уравнения  $k^2 - 4\beta\lambda > k^2 > 0$ , поскольку  $\lambda < 0 < \beta$ . Поэтому для уравнения (2.95) корень  $\omega_1$  — вещественный, а корень  $\omega_2$  — мнимый. Положим  $\omega_3 = i\omega_2$ ;  $\omega_1, \omega_3 > 0$ .

Легко проверить соотношение (следствие теоремы Виета)

$$\omega_1\omega_3 = \frac{\sqrt{k^2 - 4\beta\lambda - k^2}}{2\beta} = \sqrt{\frac{-\lambda}{\beta}}. \quad (2.96)$$

Перейдем в представлении для общего решения от комплексных функций к вещественным:

$$Y(x) = D_1 \operatorname{sh}(\omega_1 x) + D_2 \operatorname{ch}(\omega_1 x) + D_3 \sin(\omega_3 x) + D_4 \cos(\omega_3 x). \quad (2.97)$$

Если подставить решение (2.97) в граничные условия типа **I**, то получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) 4-го порядка на свободные параметры:

$$D_2 + D_4 = 0,$$

$$D_1\omega_1 + D_3\omega_3 = 0,$$

$$D_1 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + D_2 \operatorname{ch}(\omega_1 L) + D_3 \sin(\omega_3 L) + D_4 \cos(\omega_3 L) = 0,$$

$$\omega_1 D_1 \operatorname{ch}(\omega_1 L) + \omega_1 D_2 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + \omega_3 D_3 \cos(\omega_3 L) - \omega_3 D_4 \sin(\omega_3 L) = 0.$$

Выразим из первых двух уравнений этой СЛАУ параметры  $D_4$  и  $D_3$  и подставим в два последних уравнения:

$$D_1 [\operatorname{sh}(\omega_1 L) - \omega_1 \omega_3^{-1} \sin(\omega_3 L)] + D_2 [\operatorname{ch}(\omega_1 L) - \cos(\omega_3 L)] = 0,$$

$$D_1 [\omega_1 (\operatorname{ch}(\omega_1 L) - \cos(\omega_3 L))] + D_2 [\omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + \omega_3 \sin(\omega_3 L)] = 0. \quad (2.98)$$

Значения собственного числа  $\lambda$  определяем из условия существования ненулевого решения  $\langle D_1, D_2 \rangle$  этой однородной СЛАУ 2-го порядка, а значит, равенства нулю ее определителя:

$$\begin{aligned} \Delta &= [\operatorname{sh}(\omega_1 L) - \omega_1 \omega_3^{-1} \sin(\omega_3 L)][\omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + \omega_3 \sin(\omega_3 L)] - \\ &\quad - [\omega_1 (\operatorname{ch}(\omega_1 L) - \cos(\omega_3 L))][\operatorname{ch}(\omega_1 L) - \cos(\omega_3 L)] = \\ &= -2\omega_3 + \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_3} \operatorname{sh}(\omega_1 L) \sin(\omega_3 L) + 2\omega_1 \operatorname{ch}(\omega_1 L) \cos(\omega_3 L), \end{aligned} \quad (2.99)$$

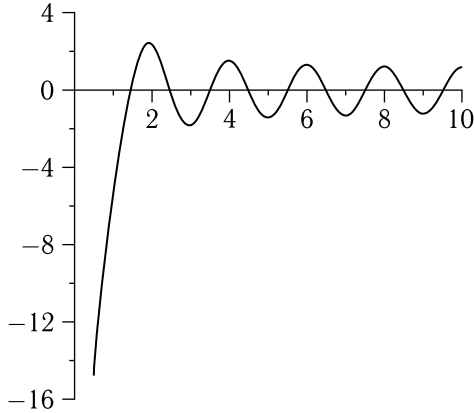
причем, используя равенство (2.96), можно выразить переменную  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = \omega_3^{-1} \sqrt{\frac{-\lambda}{\beta}} = \sqrt{\frac{k + \beta\omega_3^2}{\beta}}.$$

Определим нули функции  $\Delta(\omega_3)$ . Для удобства построения графика (см. рис. 2.6) мы делим эту функцию на нормировочную функцию  $\omega_3^2 \exp(\pi\omega_3)$ . В качестве примера рассмотрим задачу при  $k = 1, \beta = 1, L = \pi$ .

По найденным корням — значениям  $\omega_3$  определяем собственные значения:

$$\lambda_1 \approx -6,36070, \lambda_2 \approx -43,70863, \lambda_3 \approx -160,08052.$$



**Рис. 2.6.** График функции  $\Delta(r)/r^2 \exp(\pi r)$  при  $k = 1, \beta = 1, L = \pi$ . Первые корни функции:  $r_1 \approx 1,4391415, r_2 \approx 2,47591, r_3 \approx 4,48743$ . Это значения параметра  $\omega_3$ , отвечающие трем первым собственным числам задачи

Соответствующие значения параметра  $\omega_1$ :

$$1,75246, 2,67023, 3,62797.$$

Если  $\lambda$  — собственное число и матрица системы (2.98) вырожденная, то коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  в формуле (2.97) можно определить с точностью до общего множителя, например, положив

$$\begin{aligned} D_1 &= [\operatorname{ch}(\omega_1 L) - \cos(\omega_3 L)], \\ D_2 &= -[\operatorname{sh}(\omega_1 L) - \omega_1 \omega_3^{-1} \sin(\omega_3 L)]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Напомним, что  $D_3 = -\omega_1 D_1 / \omega_3, D_4 = -D_2$ .

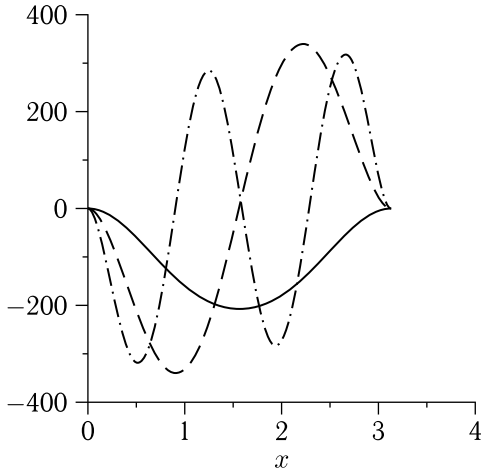
**К.2.** Постройте графики собственных функций для  $k = 1, \beta = 10, L = \pi$  и для  $k = 1, \beta = 0,1, L = \pi$  и сравните с рис. 2.7.

**Замечание А.** В этой задаче Штурма–Лиувилля имеется два безразмерных параметра:  $\mu_1 = kL^{-2}, \mu_2 = k^2/\beta$ . Однако параметр  $\mu_2$  влияет только на величину собственных чисел, но не на собственные функции.

**К.3.** Сколько безразмерных параметров у смешанной краевой задачи для уравнения (2.94) на отрезке  $[0, L]$  с граничными условиями типа **I** или **II**?

В частном случае  $k = 0$  (уравнение поперечных колебаний стержня (2.86), в котором исключено слагаемое со смешанной производной) получаем равенства:

$$\omega(j) = \omega_1(j) = \omega_3(j), \lambda_j = -\beta \omega^4(j)$$



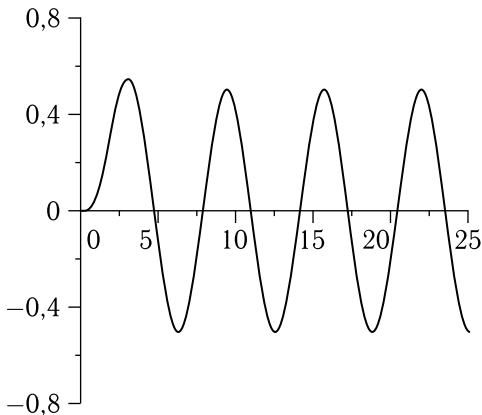
**Рис. 2.7.** Графики собственных функций для граничных условий типа **I** на обоих краях рояльной струны при  $k = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $L = \pi$ :  $Y_1$  с нормировкой (2.100) — —;  $Y_2$  с нормировкой (2.100), деленная на 10, — — —;  $Y_3$  с нормировкой (2.100), деленная на 200, — · —

и упрощенный вариант уравнения (2.99):

$$0 = -2\omega + 2\omega \operatorname{ch}(\omega L) \cos(\omega L)$$

или (см. рис. 2.8)

$$\operatorname{ch}(z) \cos(z) - 1 = 0, \quad z = \omega L. \quad (2.101)$$



**Рис. 2.8.** График функции  $\cos(z) \operatorname{ch}(z) - 1$ , поделенной на нормировочную функцию  $\exp(z)$ . Корни функции  $z_j$  определяют собственные частоты  $\omega(j) = z_j/L$  и собственные числа оператора  $\lambda_j = \beta\omega^4(j)$

**К.4.** Определите три первые собственные функции задачи при длине  $L = \pi$ .

**К.5.** Сколько безразмерных параметров у этой краевой задачи?

**К.6.** Докажите, что при  $j \rightarrow \infty$  для корней  $z_j$  уравнения (2.101) имеется асимптотическая оценка:  $z_j \approx \pi(1/2 + j)$ . Оцените погрешность этой формулы при  $j \rightarrow \infty$ .

Для рояльной струны при граничных условиях типа **II** линейные алгебраические уравнения на свободные параметры  $\{D_j\}_{j=1}^4$  определяются проще, чем для типа **I**:

$$\begin{aligned} D_2 + D_4 &= 0, \\ D_2\omega_1^2 - D_4\omega_3^2 &= 0, \\ D_1 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + D_2 \operatorname{ch}(\omega_1 L) + D_3 \sin(\omega_3 L) + D_4 \cos(\omega_3 L) &= 0, \\ D_1\omega_1^2 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + D_2\omega_1^2 \operatorname{ch}(\omega_1 L) - D_3\omega_3^2 \sin(\omega_3 L) - D_4\omega_3^2 \cos(\omega_3 L) &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что  $D_2 = D_4 = 0$ , и тогда два последних сводятся к системе второго порядка

$$\begin{aligned} D_1 \operatorname{sh}(\omega_1 L) + D_3 \sin(\omega_3 L) &= 0, \\ D_1\omega_1^2 \operatorname{sh}(\omega_1 L) - D_3\omega_3^2 \sin(\omega_3 L) &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = -\operatorname{sh}(\omega_1 L) \sin(\omega_3 L)(\omega_3^2 + \omega_1^2)$$

обращается в нуль только при выполнении условия  $\sin(\omega_3 L) = 0$ , т.е. при  $\omega_3 L = \pi j$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ . В этом случае  $D_1 = 0$ , а коэффициент  $D_3$  — произвольный ненулевой. Таким образом, для условий типа **II** собственные функции  $Y_j(x)$  — обычные синусы, хотя зависимость (2.95) собственных чисел  $\lambda_j$  от номера  $j$  более сложная, чем для обычной струны (сравните с разд. 2.3):

$$\lambda_j = -k \left( \frac{\pi j}{L} \right)^2 - \beta \left( \frac{\pi j}{L} \right)^4.$$

**К.7.** Определите собственные числа для струны с жесткостью, если на левом конце заданы условия типа **II**, а на правом — типа **I**. Постройте графики первых трех собственных функций для тех же параметров.

Во всех рассмотренных случаях для краевой задачи в области  $G$  (при условии  $0 \notin \operatorname{Spec} A$ ) солвер можно записать в виде интегрального оператора Фредгольма (см. разд. 6.18) с ядром (функцией Грина)

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \frac{Y_j(x)Y_j(s)}{\|Y_j\|_{\mathbf{L}^2[G]}^2}.$$

**К.8.** Для всех рассмотренных примеров граничных условий в задаче о положении рояльной струны или балки под распределенной нагрузкой  $f(x)$  постройте графики и изолинии функции Грина  $K(x, s)$ ,  $x, s \in [0, L]$ . Тот же вопрос для нагрузок, гармонической по времени:  $f(x) \exp(i\omega t)$ ,  $\omega = \operatorname{const}$ .

**К.9.** Постройте функцию Грина для этой задачи методом Лагранжа (разд. 2.3) и сравните графики и изолинии с полученными в **К.8**.

Собственные числа в задаче о свободных колебаниях струн имеют физический смысл квадратов частот. Сравнение полученных наборов частот  $\omega_j$  с экспериментальными данными см., например, [Fletcher, 1964; Fletcher, Rossing, 1998]. Там обсуждается вопрос: при каких граничных условиях для дифференциального уравнения (2.94) совпадение с экспериментом наилучшее. Этот же вопрос для струны с жесткостью, которая около одного края опирается на закругленную подпорку (а это влияет на граничное условие), рассмотрен в [Mandal, Wahi, 2014].

**Замечание Б.** Если акустики и музыканты смогли бы сформулировать критерий качества звучания струны, то решение вариационной задачи выбора оптимальных параметров  $\rho(x)$  и  $\beta(x)$ , в том числе задачу оптимизации спектра оператора  $A$ , можно попробовать решить имеющимися математическими и вычислительными средствами (см., например, [Gordin, 1998; Gordin, 20006]).

*Учебное издание*

*Серия «Учебники Высшей школы экономики»*

Гордин Владимир Александрович

**Прикладная математика  
Искусство и ремесло вычислений**

Зав. книжной редакцией *Е.А. Бережнова*

Редактор *Н.М. Дмуховская*

Дизайн обложек серии: *Д.Ю. Наумкин*

Художник *В.П. Коршунов*

Компьютерная верстка и графика: *Д.В. Горбачев*

Корректор *Н.М. Дмуховская*

Иллюстрация на обложке — изображение египетской лиры:

Encyclopaedia Biblica. 1903. Статья «Music», фрагмент рис. 14

(<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:C+B-Music-Fig14-PeopleWithEgyptianLyre.PNG>)

Все новости издательства — <http://id.hse.ru>

По вопросам закупки книг

обращайтесь в отдел реализации

Тел.: +7 495 772-95-90 доб. 15295, 15296, 15297

[bookmarket@hse.ru](mailto:bookmarket@hse.ru)

Подписано в печать 20.10.2024. Формат 70×100/16

Печать офсетная. Усл.-печ. л. 24,1. Уч.-изд. л. 19,2

Тираж 500 экз. Изд. № 2765

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Москва, ул. Мясницкая, 20

Тел.: +7 495 772-95-90 доб. 15285

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»

Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

[www.chpd.ru](http://www.chpd.ru), e-mail: [sales@chpd.ru](mailto:sales@chpd.ru)

Тел.: +7 499 270-73-59