Г. С. Дахно, Д. С. Малышев, Некоторые полные сложностные дихотомии для задачи о доминирующем множестве, *Матем. заметки*, 2025, том 117, выпуск 1, 62–78

DOI: 10.4213/mzm14308

Математические заметки

Том 117 выпуск 1 январь 2025

УДК 519.17

Некоторые полные сложностные дихотомии для задачи о доминирующем множестве

Г. С. Дахно, Д. С. Малышев

Наследственный класс – множество обыкновенных графов, замкнутое относительно удаления вершин; каждый такой класс задается множеством своих минимальных запрещенных порожденных подграфов. Задача о доминирующем множестве для заданного графа состоит в том, чтобы определить, а имеется ли в нем такое подмножество вершин заданного размера, что каждая вершина вне подмножества имеет хотя бы одного соседа в данном подмножестве. Известна полная классификация алгоритмической сложности этой задачи для семейства наследственных классов, определяемых 5-вершинными минимальными порожденными запретами. В данной работе получены полные сложностные дихотомии для множеств запрещенных порожденных подграфов, каждый не более чем с 6 вершинами, содержащих путь на 5 вершинах или результат однократного подразбиения ребра звезды с 3 листьями.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: вычислительная сложность, наследственный класс, доминирующее множество.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14308

1. Введение. В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т.е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. Класс обыкновенных графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Каждый наследственный класс $\mathcal{X}$ определяется множеством $\mathcal{Y}$ своих *минимальных запрещенных порожденных подграфов*, т.е. минимальных относительно удаления вершин графов, не принадлежащих $\mathcal{X}$, это принято записывать так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Если наследственный класс задается конечным множеством своих минимальных запрещенных порожденных подграфов, то он называется *конечно определенным*.

Пусть Π – какая-нибудь $\mathbb{NP}$-полная задача на графах. Наследственный класс с полиномиально разрешимой задачей Π называется Π-*простым*. Наследственный класс, для которого задача Π является $\mathbb{NP}$-полной, называется Π-*сложным*.

Разделы 1–3 и 5 подготовлены в ходе проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" (НИУ ВШЭ). Раздел 4 выполнен при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание) № 075-03-2024-107, номер проекта FSMG-2024-0025.

Наследственный класс $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \cdots$ из Π-сложных классов графов, что $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным*. Понятие граничного класса графов было введено Алексеевым в работе [1]. Значение этого понятия раскрывает следующая теорема (см. работы [1], [2]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathcal{X}$ – произвольный конечно определенный класс. Если $\mathcal{X}$ содержит какой-нибудь Π-предельный класс, то он является Π-сложным. Если $\mathcal{X}$ не содержит никакой Π-граничный класс, то он не является Π-сложным, иначе $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$.*

Заметим, что доказательство Π-предельности того или иного класса в форме предъявления сходящейся к нему последовательности из Π-сложных классов не использует предположения о том, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$. Поэтому утверждение о том, что конечно определенный класс, включающий какой-нибудь Π-предельный класс, является Π-сложным, не зависит от того равны ли классы сложности $\mathbb{P}$ и $\mathbb{NP}$. Вместе с тем, доказательство любого известного утверждения о том, что тот или иной класс является Π-граничным, всегда использует предположение $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$. Поэтому далее, говоря о граничности тех или иных классов, мы везде неявно предполагаем, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$. Интересующийся читатель может обратиться к обзорным работам [2], [3], в которых представлены последние на тот момент достижения в области граничных классов графов. В частности, возможны континуальность множества граничных классов (см. работу [4]) и достижение полного описания граничных классов для неискусственных задач на графах (см. работу [5]).

Доминирующим множеством графа $G = (V, E)$ называется такое подмножество $D \subseteq V$, что каждая вершина из $V \setminus D$ имеет соседа в D. Минимальное по мощности доминирующее множество называется *наименьшим*, а минимальное по включению называется *минимальным*. Мощность наименьшего доминирующего множества графа G называется его *числом доминирования* и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о доминирующем множестве* (кратко, *задача ДМ*) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, а выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leqslant k$ или нет?

К сожалению, на настоящее время не получено полного описания совокупности ДМ-граничных классов. До недавнего времени для задачи ДМ были известны только четыре граничных класса, см. работы [6], [7]. В недавней работе [8] конструктивным образом было показано, что совокупность ДМ-граничных классов является бесконечной. Тем не менее, иногда известных ДМ-граничных классов оказывается достаточно для получения полных классификаций сложности задачи ДМ в некоторых подсемействах семейства конечно определенных классов, см. работы [7], [9], [10]. Настоящая работа продолжает работу [10], в которой была получена полная сложностная дихотомия для задачи ДМ и всех наследственных классов, определяемых 5-вершинными запрещенными порожденными подграфами. В ней фигурируют три класса графов $\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{Q}$ и доказано следующее утверждение (см. [10; теорема 4]):

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{Y}$ – произвольное множество графов, каждый из которых имеет не более пяти вершин. Тогда класс $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$ является ДМ-простым, если $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{X}$, а иначе он является ДМ-сложным.*

Класс $\mathcal{T}$ определяется как множество лесов, каждая компонента связности которых имеет не более чем три листа. Класс $\mathcal{D}$ в точности состоит из графов, являющихся реберными к графам класса $\mathcal{T}$. Класс $\mathcal{Q}$ определяется как множество порожденных подграфов (не обязательно собственных) в графах $Q(G)$, где $G \in \mathcal{T}$ и

$$\begin{aligned} V(Q(G)) &= V(G) \cup E(G),\\ E(Q(G)) &= \{xy\colon x, y \in V(G),\, x \neq y\}\\ &\qquad \cup \{xe\colon x \in V(G),\, e \in E(G),\ \text{в графе } G \text{ вершина } x \text{ инцидентна ребру } e\}. \end{aligned}$$

На настоящее время не известно полной классификации алгоритмической сложности задачи ДМ для всего семейства наследственных классов, определяемых 6-вершинными запрещенными порожденными фрагментами. В данной работе делается первый шаг к получению этой классификации и рассматриваются два специальных подсемейства упомянутого семейства наследственных классов. Авторы надеются, что этот результат поможет получить полную дихотомию сложности задачи ДМ для наследственных классов с 6-вершинными запрещенными порожденными подграфами.

В данной работе рассматриваются два семейства, образованных классами вида $\mathcal{X}_1 = \mathrm{Free}(\{P_5\} \cup \mathcal{Y})$ и $\mathcal{X}_2 = \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\} \cup \mathcal{Y})$, где $\mathcal{Y}$ состоит из графов, каждый не более чем с 6 вершинами. Через P_5 обозначается порожденный путь на 5 вершинах, а через fork обозначается результат добавления вершины к порожденному пути на 4 вершинах и ребра между добавленной вершиной и второй вершиной этого пути. В этой работе доказывается, что $\mathcal{X}_1$ является ДМ-простым, если $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$, иначе он будет ДМ-сложным. В ней же доказывается что $\mathcal{X}_2$ является ДМ-простым, если $\mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$, иначе он будет ДМ-сложным.

Рассмотрение наследственных подклассов класса $\mathrm{Free}(\{P_5\})$ мотивировано тем обстоятельством, что задача ДМ для любого такого подкласса полиномиально сводится к той же задаче для его расщепляемых графов (см. лемму 2). Расщепляемые графы обладают несколькими полезными комбинаторными свойствами [11]. Рассмотрение наследственных подклассов класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$ мотивировано тем обстоятельством, что задача ДМ для любого такого подкласса полиномиально сводится к той же задаче без порожденной 3-вилки $K_{1,3}$ (см. лемму 5), а в работе [12] была получена полная дихотомия сложности задачи ДМ в семействе $\{\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})\colon |V(H)| \leqslant 6\}$.

2. Некоторые определения, обозначения и факты. Как обычно, через P_n, C_n, K_n обозначаются простой путь, простой цикл и полный граф на n вершинах соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и с q вершинами в другой доле.

Открытой окрестностью или просто *окрестностью* вершины x графа $G = (V, E)$ называется множество ее соседей, обозначаемое через $N(x)$. *Замкнутая окрестность* вершины x определяется как $N[x] = N(x) \cup \{x\}$. Для $V' \subseteq V$, $V'' \subseteq V$ множества $(\bigcup_{x \in V''} N(x)) \cap V'$ и $(\bigcup_{x \in V''} N[x]) \cap V'$ обозначаются через $N_{V'}(V'')$ и $N_{V'}[V'']$. Если $V' = V''$, то вместо $N_{V''}(V'')$ и $N_{V''}[V'']$ пишем $N(V'')$ и $N[V'']$. Через $G[V']$ обозначается подграф графа G, порожденный подмножеством V'. Пусть G' – подграф некоторого графа G. Через $N(G')$ обозначается $(\bigcup_{v \in V(G')} N(v)) \setminus V(G')$, через $N[G']$ обозначается $N(G') \cup V(G')$.

Операция дизъюнктного объединения графов применяется только к графам с непересекающимися множествами вершин. Для графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$ обозначим их дизъюнктное объединение. Через kG переобозначим дизъюнктное объединение k графов, каждый из которых изоморфен графу G.

Через $G_1 \cong G_2$ обозначается изоморфизм графов G_1 и G_2.

Независимым множеством графа называется произвольное подмножество его попарно несмежных вершин. Размер наибольшего независимого множества графа G называется его *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. *Кликой* графа называется произвольное подмножество попарно смежных его вершин. Клика с k вершинами называется *k-кликой*.

Расщепляемым графом G называется граф, множество вершин которого можно разбить на две части A и B, где A является кликой, а B – независимым множеством. Пара (A, B) называется *расщепляемым разложением* графа G. Ясно, что для любого связного расщепляемого графа существует его наименьшее доминирующее множество, целиком лежащее в A. Класс расщепляемых графов Split является наследственным и совпадает с множеством графов $\mathrm{Free}(\{2K_2, C_4, C_5\})$, причем некоторые их расщепляемые разложения могут быть найдены за полиномиальное время (см. работу [11]).

3. Полиномиальное сведение к графам без сложных модулей. *Модулем* графа G называется такое подмножество его вершин $M \subseteq V(G)$, что каждая вершина из $V(G) \setminus M$ либо смежна со всеми вершинами из M, либо несмежна ни с одной из них. Модуль M будем называть *простым*, если $|M| = 1$ или M состоит из двух несмежных вершин, причем $\gamma(G[N(M)]) \geqslant 2$. В противном случае M будем называть *сложным*. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого наследственного класса $\mathcal{X}$ задача ДМ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{X}$, все модули которых являются простыми.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{X}$. За линейное время можно найти все максимальные модули заданного графа [13]. Предположим, что G содержит сложный модуль M. Образуем по (G, M) обыкновенный граф G'. Если $\gamma(G[M]) = 1$, то G' получается удалением всех вершин из M, кроме доминирующей вершины v подграфа $G[M]$. Если $\gamma(G[N(M)]) = 1$, то G' получается удалением всех вершин из M, кроме произвольной вершины $v \in M$. Если $\gamma(G[M]) \geqslant 2$, то G' получается удалением всех вершин из M, кроме двух несмежных вершин, которые обязательно существуют. Ясно, что $G' \in \mathcal{X}$ и что G' вычисляется по G за полиномиальное время, так как проверка того, а содержит ли заданный граф доминирующую вершину, выполняется за полиномиальное время. Докажем, что выполнено равенство $\gamma(G) = \gamma(G')$, откуда будет следовать справедливость данной леммы.

Обозначим наименьшие доминирующие множества графов G и G' через D и D' соответственно. Так как M – модуль G, то можно предполагать, что $|D \cap M| \leqslant 1$, иначе можно рассмотреть произвольные $x, y \in D \cap M$, произвольного соседа $z \in V(G) \setminus M$ вершины y, образовать $(D \setminus \{y\}) \cup \{z\}$, которое также будет наименьшим доминирующим множеством G. По той же причине можно считать, что $|D' \cap M| \leqslant 1$ и что $D \cap M = D' \cap M = \varnothing$ при $\gamma(G[N(M)]) = 1$. Поэтому при $D \cap M = \varnothing$ (соответственно при $|D \cap M| = 1$) множество D (соответственно множество $(D \setminus$

$M) \cup \{v\})$ является доминирующим множеством G' и $\gamma(G) \geqslant \gamma(G')$. При $D' \cap M = \varnothing$ множество D' является доминирующим множеством G и поэтому $\gamma(G') \geqslant \gamma(G)$.

Предположим, что $|D' \cap M| = 1$. Если $\gamma(G[M]) = 1$, то $(D' \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ – доминирующее множество G, где u – доминирующая вершина подграфа $G[M]$, и поэтому $\gamma(G') \geqslant \gamma(G)$. Если же $\gamma(G[M]) \geqslant 2$, то D' – доминирующее множество G и, тем самым, выполнено $\gamma(G') \geqslant \gamma(G)$. Значит, выполнено $\gamma(G') = \gamma(G)$.

4. Класс $\mathrm{Free}(\{P_5\})$.

Лемма 2. *Задача ДМ в любом наследственном классе $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}(\{P_5\})$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе*

$$\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \cap \mathrm{Split} = \mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{2K_2, C_4, C_5\}).$$

Доказательство. Покажем, что задача ДМ для графов из $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}^*$. Отсюда будет следовать утверждение этой леммы. Пусть $G \in \mathcal{X}$. Можно считать, что $\gamma(G) \geqslant 6$ (иначе число доминирования графа G может быть найдено переборным алгоритмом за полиномиальное время) и G не содержит сложных модулей по лемме 1. Сначала предположим, что $G \notin \mathrm{Free}(\{C_4, C_5\})$.

Рассмотрим в G все порожденные подграфы C_4 и C_5 и их замкнутые окрестности. Множество таких подграфов не пусто. Поэтому в G существует такой его порожденный подграф G_1, изоморфный C_4 или C_5, что для произвольного его порожденного подграфа G_2, изоморфного C_4 или C_5, не выполняется строгое включение $N[G_1] \subset N[G_2]$. Этот подграф G_1 может быть найден за полиномиальное время.

Рассмотрим случай 1, когда $G_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cong C_5$. Пусть A – множество тех вершин из $N(G_1)$, которые не имеют соседей вне $N[G_1]$, $B = N(G_1) \setminus A$, $C = V(G) \setminus N[G_1]$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, каждая вершина из A имеет не менее двух соседей в G_1, которые несмежны, а каждая вершина из B имеет не менее трех соседей в G_1. Так как $\gamma(G) \geqslant 6$, то $B \neq \varnothing$.

Утверждение 1. *Любая вершина из B смежна со всеми вершинами из $V(G_1)$.*

Доказательство. Пусть b – произвольная вершина из B. Если b смежна ровно с тремя вершинами, можно считать, что это $\{x_1, x_2, x_4\}$. Тогда выполняется строгое включение $N[G_1] \subset N[G']$, где $G' = G[\{x_1, x_4, x_5, b\}] \cong C_4$. Значит, b смежна, по крайней мере, с четырьмя вершинами, можно считать, что это вершины $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Тогда выполняется строгое включение $N[G_1] \subset N[G'']$, где $G'' = G[\{x_1, x_4, x_5, b\}] \cong C_4$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Каждая вершина $b \in B$ смежна со всеми вершинами из $(A \cup B) \setminus \{b\}$.*

Доказательство. Предположим противное, что существуют несмежные вершины $b \in B$, $y_1 \in A \cup B$. Если y_1 имеет ровно два соседа из $V(G_1)$, то можно считать, что это вершины x_1 и x_3. Покажем, что $N[G_1] \subset N[G''']$, где $G''' = G[\{b, x_1, y_1, x_3\}] \cong C_4$. Пусть $y_2 \in N(G_1)$ и $y_2 \notin N(G''')$. Тогда y_2 смежна с вершинами $\{x_2, x_4\}$ или с вершинами $\{x_2, x_5\}$, из чего следует, что $G[\{x_1, y_1, x_3, x_4, y_2\}] \cong P_5$ или $G[\{x_3, y_1, x_1, x_5, y_2\}] \cong P_5$.

Предположим, что y_1 имеет ровно три соседа из $V(G_1)$; тогда она смежна либо с x_1, x_2, x_3, либо с x_1, x_2, x_4. Если y_1 смежна с x_1, x_2, x_3, то $N[G_1] \subset N[G''']$, иначе существует вершина y_2, которая имеет ровно три соседа в $V(G_1)$ (случай, когда соседей ровно два, был разобран ранее), а именно x_2, x_4, x_5; тогда

$$G[\{x_1, y_1, x_3, x_4, y_2\}] \cong P_5.$$

Предположим, что y_1 смежна с x_1, x_2, x_4. Тогда $N[G_1] \subset N[G'''']$, где $G'''' = G[\{x_1, x_4, y_1, b\}] \cong C_4$, иначе имеется вершина y_2, которая имеет ровно три соседа в $V(G_1)$, а именно, x_2, x_3, x_5. Тогда $G[\{y_1, x_1, x_5, y_2, x_3\}] \cong P_5$. Таким образом, любая вершина из B смежна со всеми вершинами из A, имеющими не более трех соседей из $V(G_1)$.

Предположим, что есть вершина $y \in A \cup B$, имеющая не менее четырех соседей из $V(G_1)$ и несмежная с b. Тогда имеются несмежные вершины $x', x'' \in V(G_1)$, причем $N[G_1] \subset N[G''''']$, где $G''''' = G[\{b, x', y, x''\}] \cong C_4$. Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 следует, что в случае 1 множество $V(G_1) \cup A$ является сложным модулем графа G. Рассмотрим случай 2, определяемый ситуацией, когда случай 1 не выполняется. Тогда $G_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cong C_4$. Множества A, B, C определяются точно так же, что и в случае 1. Так как $\gamma(G) \geqslant 6$, то $B \neq \varnothing$ и $C \neq \varnothing$.

Утверждение 3. *Можно считать, что существуют такие две смежные вершины из $V(G_1)$, что любая вершина из $N(G_1)$ смежна хотя бы с одной из них.*

Доказательство. Предположим, что ни одно из ребер цикла G_1 не доминирует все вершины из $N(G_1)$. Не уменьшая общности, можно считать, что среди ребер цикла G_1 именно ребро x_1x_2 доминирует наибольшее количество вершин из $N(G_1)$ и что для некоторой вершины $y'' \in N(G_1)$ выполнено

$$y''x_3 \in E(G), \qquad y''x_1 \notin E(G), \qquad y''x_2 \notin E(G).$$

Поскольку x_2x_3 доминирует не больше вершин, чем x_1x_2, существует такая вершина $y' \in N(G_1)$, что

$$y'x_1 \in E(G), \qquad y'x_2 \notin E(G), \qquad y'x_3 \notin E(G).$$

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, то $y'y'' \in E(G)$. По той же причине выполнено $N[G_1] \subseteq N[G_2]$, где $G_2 = G[\{x_1, y', y'', x_3, x_2\}] \cong C_5$. Этот случай был рассмотрен ранее. Получаем противоречие. Утверждение 3 доказано.

Пусть, для определенности, любая вершина из $N(G_1)$ смежна хотя бы с одной из вершин x_1 и x_2.

Утверждение 4. *Каждая вершина $b \in B$ смежна с x_1 и x_2, а также хотя бы с одной из вершин x_3 и x_4.*

Доказательство. Если $bx_1 \notin E(G)$ или $bx_2 \notin E(G)$, то можно считать, что $bx_1 \notin E$, $bc \in E$, $c \in C$; тогда b смежна с x_2 и x_4 (так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$) и $N[G_1] \subset N[G_3]$, где $G_3 = G[\{x_1, x_2, b, x_4\}] \cong C_4$. Получаем противоречие с выбором G_1. Если $bx_1 \in E(G)$, $bx_2 \in E(G)$, то $bx_3 \in E(G)$ или $bx_4 \in E(G)$, иначе $G \notin \mathrm{Free}(\{P_5\})$. Утверждение 4 доказано.

Разделим B на два подмножества: B' – множество вершин, смежных со всеми вершинами из A (если $A \neq \varnothing$), или $B' = B$ (если $A = \varnothing$), и $B'' = B \setminus B'$.

Утверждение 5. *Каждая вершина $b' \in B'$ смежна с каждой вершиной из $N[G_1] \setminus \{b'\}$.*

Доказательство. Предположим противное, что $b'b \notin E(G)$ для некоторой вершины $b \in N[G_1] \setminus \{b'\}$. Тогда $b \in B$. Действительно, вершина b' не может быть смежна ровно с тремя из вершин x_1–x_4 (скажем, с x_1, x_2, x_3), иначе $N[G_1] \subset N[G_4]$ и $G_4 = G[\{x_1, b', x_3, x_4\}] \cong C_4$. Существуют несмежные вершины $x' \in \{x_1, x_2\}$ и $x'' \in \{x_3, x_4\}$, одновременно смежные с b и b'. Тогда $N[G_1] \subset N[G_5]$, где $G_5 = G[\{b, b', x', x''\}] \cong C_4$. Утверждение 5 доказано.

Из утверждения 5 следует, что при $A = \varnothing$ граф G содержит сложный модуль. Поэтому далее считаем, что $A \neq \varnothing$. Можно также считать, что $B' = \varnothing$. Предположим, что $B' \neq \varnothing$, и положим $\widetilde{G} = G \setminus \{x_1, x_2\}$. Заметим, что по утверждению 5 в графах G и G' существуют наименьшие доминирующие множества, которые не содержат вершин из $V(G_1) \cup A \cup B''$. Тогда $\gamma(G) = \gamma(\widetilde{G})$, т.е. вместо графа G достаточно рассматривать граф $\widetilde{G}$. Поэтому далее считаем, что $B' = \varnothing$, т.е. $B = B''$.

Утверждение 6. *Для любых смежных вершин $b \in B$ и $c \in C$ выполнено*

$$N_C(c) \subseteq N_C(b).$$

Доказательство. Предположим противное: пусть $\exists\, c_1 \in N_C(c) \setminus N_C(b)$. Существует вершина $a \in A \setminus N(b)$. Тогда $G[\{a, x^*, b, c, c_1\}] \cong P_5$, где $x^* \in \{x_1, x_2\}$ и $ax^* \in E(G)$. Утверждение 6 доказано.

Разобьем $G[C]$ на компоненты связности, обозначим их через $C_1, C_2, \ldots, C_s$. Из утверждения 6 следует, что $V(C_i)$ – модуль графа G. Поэтому C – независимое множество графа G, иначе он содержит сложный модуль.

Утверждение 7. *Для любых несмежных $b_1, b_2 \in B$ либо $N_C(b_1) \subseteq N_C(b_2)$, либо $N_C(b_2) \subseteq N_C(b_1)$.*

Доказательство. Предположим противное: тогда существуют такие вершины $c_1 \in N_C(b_1) \setminus N_C(b_2)$ и $c_2 \in N_C(b_2) \setminus N_C(b_1)$. Из утверждения 6 следует, что $c_1c_2 \notin E(G)$. Имеем $G[\{x_1, b_1, b_2, c_1, c_2\}] \cong P_5$. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Существует такое наименьшее доминирующее множество D графа G, что $D \cap C = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть D – наименьшее доминирующее множество графа G. Предположим, что $c_1, c_2 \in D \cap C$. Образуем доминирующее множество D' графа G, для которого $|D' \cap C| < |D \cap C|$. Если $b \in N_B(c_1) \cap N_B(c_2)$, то $D' = (D \setminus \{c_1, c_2\}) \cup \{b, x_1\}$. Если $N_B(c_1) \cap N_B(c_2) = \varnothing$, то из утверждения 7 следует, что $\forall\, b_1 \in N_B(c_1)$, $\forall\, b_2 \in N_B(c_2)$ выполнено $b_1b_2 \in E(G)$. В этом случае положим $D' = (D \setminus \{c_1, c_2\}) \cup \{b_1, b_2\}$. Поэтому можно считать, что $|D \cap C| \leqslant 1$.

Предположим, что $c \in D \cap C$. Ясно, что $|D \cap (B \cup C)| \geqslant |D| - 2$, иначе $D \cap (B \cup C) \cup \{x_1, x_2\}$ – доминирующее множество G с количеством вершин, меньшим, чем $|D|$. Образуем доминирующее множество D'' графа G, для которого $|D'' \cap C| < |D \cap C|$. Если $N_B(c) \cap D \neq \varnothing$, то $D'' = (D \setminus \{c\}) \cup \{x_1\}$. Если все вершины из $N_B(c)$ имеют соседей в $D \setminus \{c\}$, то $D'' = (D \setminus \{c\}) \cup \{b\}$, где $b \in N_B(c)$. Если оба этих случая не выполняются, то $\exists\, b \in N_B(c)$, что $N(b) \cap D = \{c\}$. Тогда в $B \cap D$ есть, по крайней мере, еще две вершины b_1 и b_2, которые несмежны с b. Из утверждения 7 следует, что $(D \setminus \{b_1, b_2, c\}) \cup \{b, x_1\}$ – доминирующее множество графа G с числом вершин, меньшим, чем $|D|$. Утверждение 8 доказано.

Граф H_1 назовем *растяжением* расщепляемого графа H_2, если H_2 получается стягиванием в вершины некоторых модулей H_1, причем все эти модули H_1 соответствуют некоторым вершинам независимого множества B_{H_2} некоторого расщепляемого разложения (A_{H_2}, B_{H_2}) графа H_2. Распознавание того, что заданный связный граф H_1 является растяжением некоторого расщепляемого графа, выполняется за полиномиальное время. Для этого достаточно найти все максимальные модули графа H_1, стянуть каждый из них в вершину, проверить результат H_2 на расщепляемость. Затем, если H_2 окажется расщепляемым, то найти какое-нибудь его расщепляемое разложение (A_{H_2}, B_{H_2}). Рассмотрим подмножество $A' \subseteq A_{H_2}$, состоящее из вершин, которые соответствуют некл,иковым модулям графа H_1. Если $A' \cup B_{H_2}$ является независимым, то H_1 – растяжение расщепляемого графа, а иначе нет.

По утверждению 8 мы будем рассматривать только такие доминирующие множества D графа G, что $D \cap C = \varnothing$. Обозначим через $\mathfrak{S}_G$ совокупность таких подмножеств $S \subseteq V(G) \setminus C$, что

1) S содержит две смежные вершины $b_1, b_2 \in B$ и $|S| \leqslant 4$,
2) при удалении из G всех вершин из $S \cup N_{A\cup C}(S)$, а также всех вершин из $N_B(S)$, не имеющих соседа в $A \cup C$, для получившегося подграфа G'_S множество $B'_S = V(G'_S) \cap N_B(b_1) \cap N_B(b_2)$ является доминирующим.

Ясно, что $\gamma(G) \leqslant \gamma(G'_S) + |S|$ для любого $S \in \mathfrak{S}_G$. Докажем, что в определенном смысле верно и обратное неравенство. Для каждого $S \in \mathfrak{S}_G$ выберем в B'_S произвольное минимальное подмножество B^*_S вершин такое, что для каждого $b' \in B'_S$ существует вершина $b^* \in B^*_S$ с условием $N_{V'}(b') \subseteq N_{V'}(b^*)$, где $V' = V(G'_S) \setminus B'_S$. Порожденный подграф графа G'_S на множестве вершин $V' \cup B^*_S$ будем обозначать через G_S.

Утверждение 9. *Существует такое $S \in \mathfrak{S}_G$, что $\gamma(G) = |S| + \gamma(G_S)$, причем G_S является растяжением некоторого расщепляемого графа.*

Доказательство. Обозначим через D произвольное наименьшее доминирующее множество графа G. Через D_C обозначим произвольное минимальное подмножество множества D, доминирующее C. По утверждению 7 и ввиду минимальности D_C оно является кликой. Так как $D_C \cup \{x_1, x_2\}$ – доминирующее множество G, то $|D_C| \geqslant \gamma(G) - 2 \geqslant 4$. Поскольку D_C является минимальным, то для любой вершины $b \in D_C$ существует ее *частный сосед* из C, т.е. сосед, несмежный ни с одной вершиной из $D_C \setminus \{b\}$.

Пусть b_1, b_2 – произвольные элементы D_C, а c_1, c_2 – их частные соседи из C. Положим $S = (D \setminus D_C) \cup \{b_1, b_2\}$. Ясно, что $|S| \leqslant 4$ и что B'_S – доминирующее множество подграфа G'_S. Поэтому $S \in \mathfrak{S}_G$. Покажем, что для любых двух смежных вершин $a_1, a_2 \in V'$ выполнено $N_{B'_S}(a_1) = N_{B'_S}(a_2)$, из чего следует, что существует наименьшее доминирующее множество графа $G[V(G'_S) \cup \{b_1, c_1\}]$, целиком лежащее в B'_S. Предположим, что существует вершина $b \in B'_S$, смежная с a_1 и несмежная с a_2. Если a_2 смежна хотя бы с одной из вершин c_1 или c_2, то она одновременно смежна с c_1 и c_2, иначе $G \notin \mathrm{Free}(\{P_5\})$, и поэтому $G[\{c_2, a_2, c_1, b_1, b\}] \cong P_5$. Следовательно, $a_2c_1 \notin E(G)$ и $a_2c_2 \notin E(G)$. Если $a_1c_1 \in E(G)$, то $G[\{a_2, a_1, c_1, b_1, b_2\}] \cong P_5$, а если $a_1c_1 \notin E(G)$, то $G[\{a_2, a_1, b, b_1, c_1\}] \cong P_5$.

Множество B_S^* является кликой в графе G'_S (и, следовательно, в G_S). Действительно, если существуют несмежные вершины $b_1^*, b_2^* \in B_S^*$, то по определению B_S^* выполнено

$$N_{V'}(b_1^*) \setminus N_{V'}(b_2^*) \neq \varnothing, \qquad N_{V'}(b_2^*) \setminus N_{V'}(b_1^*) \neq \varnothing$$

и граф G содержит порожденный P_5. Тем самым, G_S является растяжением некоторого расщепляемого графа. Для каждой вершины $b \in D \setminus S$ существует вершина $b^* \in B_S^*$ такая, что $N_{V'}(b) \subseteq N_{V'}(b^*)$. Тем самым, существует подмножество $B^{**} \subseteq B_S^*$ мощности не более чем $|D \setminus S|$, которое является доминирующим в графе G_S. Тогда $\gamma(G_S) \leqslant |D| - |S| = \gamma(G) - |S|$. Утверждение 9 доказано.

По утверждению 9 выполнено

$$\gamma(G) = \min_{S \in \mathfrak{S}_G \colon G_S \text{ – растяжение расщепляемого графа}} (|S| + \gamma(G_S)).$$

Проверка принадлежности графа множеству растяжений расщепляемых графов выполняется за полиномиальное время. Множество $\mathfrak{S}_G$ вычисляется за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Поэтому из утверждения 9 и леммы 1 следует, что задача ДМ в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{C_4, C_5\})$. Далее будем считать, что $G \in \mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{C_4, C_5\})$.

Известно (см., например, работу [14]), что каждый связный граф из $\mathrm{Free}(\{P_5\})$ имеет либо доминирующий путь с тремя вершинами, либо доминирующую клику, причем данное доминирующее множество может быть найдено за полиномиальное время. Поэтому можно считать, что G содержит доминирующую клику A. Можно считать, что A не включена ни в какую другую клику, иначе можно выполнить пополнение A до большей клики. Положим $B = V(G) \setminus A$.

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{C_4\})$, то для любых смежных $b_1, b_2 \in B$ либо $N_A(b_1) \subseteq N_A(b_2)$, либо $N_A(b_2) \subseteq N_A(b_1)$. Вершину $b \in B$ назовем A-*хорошей*, если существует такой ее сосед $a \in A$, что $N[b] \subseteq N[a]$, и A-*плохой*, в противном случае.

Предположим, что b_1 – A-плохая вершина, тогда существует такой ее сосед $b_2 \in B$, что $N_A(b_2) \subset N_A(b_1)$. Тогда $A' = N_A(b_1)$ является доминирующим множеством графа G. Иначе существуют такие вершины $b_3 \in A \setminus A'$ и ее сосед $a' \in A \setminus A'$, что для произвольной вершины $a'' \in N_A(b_1) \setminus N_A(b_2)$ граф $G[\{b_3, a'a'', b_1, b_2\}]$ содержит либо P_5, либо C_4, либо C_5 в качестве порожденного подграфа. Из этого следует, что количество A^*-плохих вершин меньше количества A-плохих вершин, где A^* – произвольная максимальная клика G, содержащая $A' \cup \{b_1\}$. Продолжая описанную процедуру, мы за полиномиальное время получим максимальную доминирующую клику графа G, относительно которой нет плохих вершин.

Предположим, что все вершины из B являются A-хорошими. Это означает, что существует наименьшее доминирующее множество графа G, целиком лежащее в A. Значит, если $b_1, b_2 \in B$ – смежные вершины, причем $N_A(b_1) \subseteq N_A(b_2)$, то $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{b_2\})$. Тем самым, задача ДМ в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{C_4, C_5\})$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{2K_2, C_4, C_5\})$. Это доказывает справедливость леммы 2.

Расщепляемый граф с расщепляемым разложением (A, B) назовем *приведенным*, если он является связным и одновременно выполняются следующие условия:

$$\forall\, a \in A \quad [|N_B(a)| \geqslant 2], \qquad \forall\, b \in B \quad [|N(b)| \geqslant 2],$$
$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad \big[N_B(a_1) \nsubseteq N_B(a_2), N_B(a_2) \nsubseteq N_B(a_1)\big],$$
$$\forall\, b_1, b_2 \in B \quad \big[N(b_1) \nsubseteq N(b_2), N(b_2) \nsubseteq N(b_1)\big],$$
$$\exists\, a \in A \quad [|N_B(a)| \geqslant 3].$$

Задача ДМ в любом наследственном подклассе класса Split полиномиально сводится к той же задаче для его приведенных графов. Это очевидно относительно всех требований приведенности, кроме последнего. Если оно не выполняется, то задача ДМ разрешима за полиномиальное время, см. работу [15].

Графы gem_1 и gem_2 получаются из порожденного пути (x_1, x_2, x_3, x_4) добавлением вершин x, y и ребер $xx_1, xx_2, xx_3, xx_4, yx$ (для gem_1) или ребер $xx_1, xx_2, xx_3, xx_4, yx_3$ (для gem_2). Граф cat получается из полного графа на вершинах x_1, x_2, x_3, x_4 добавлением двух вершин y_1 и y_2 и ребер $y_1x_1, y_1x_2, y_2x_3, y_2x_4$. Граф bridge имеет вершины $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и ребра $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_6$. Граф snake получается из треугольника (x_1, x_2, x_3) добавлением вершин x_4, x_5, x_6 и ребер $x_1x_4, x_1x_5, x_2x_6, x_3x_6$. Графы $\mathrm{gem}_1, \mathrm{gem}_2, \mathrm{cat}, \mathrm{bridge}, \mathrm{snake}$ изображены на рис. 1.

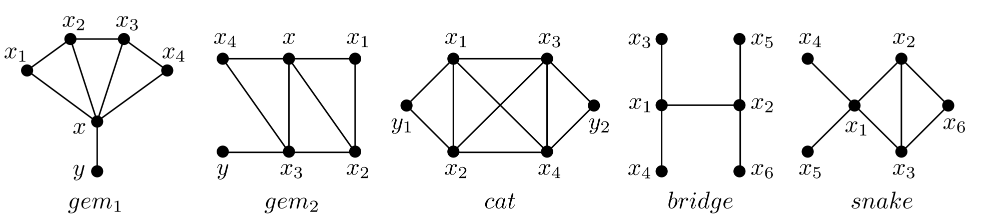

Рис. 1. Графы $\mathrm{gem}_1, \mathrm{gem}_2, \mathrm{cat}, \mathrm{bridge}, \mathrm{snake}$.

Лемма 3. *Классы*

$$\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{gem}_1\}), \quad \mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{gem}_2\}), \quad \mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{cat}\}),$$
$$\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{bridge}\}), \quad \mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{snake}\})$$

являются ДМ-простыми.

Доказательство. По лемме 2 можно рассматривать только приведенные графы из классов

$$\mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_1\}), \quad \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_2\}), \quad \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\}),$$
$$\mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{bridge}\}), \quad \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{snake}\}).$$

Пусть $G \in \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_1\})$ – приведенный граф и (A, B) – его расщепляемое разложение. Можно считать, что существуют вершины $b_1, b_2 \in B$, для которых множества

$$A_1 = N(b_1) \cap N(b_2), \qquad B' = \{b \in B \colon N_{A_1}(b) \neq \varnothing\} \setminus \{b_1, b_2\},$$

являются непустыми. Положим

$$A_2 = N(b_1) \cup N(b_2), \qquad A_3 = N(b_1) \setminus N(b_2), \qquad A_4 = N(b_2) \setminus N(b_1),$$
$$\forall\, b \in B' \quad [N_b = N(b) \setminus A_2].$$

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_1\})$, то $\forall\, b \in B'$ $[A_3 \subset N(b) \vee A_4 \subset N(b)]$, причем если $N_b \neq \varnothing$, то $A_3 \cup A_4 \subset N(b)$. Отсюда и ввиду приведенности графа G имеем $N_{A_1}(b) \subset A_1$ для любой вершины $b \in B'$.

Покажем, что если для некоторой вершины $b \in B'$ выполнено $N_b = \varnothing$, то для произвольной вершины $a \in A_1 \setminus N(b)$ выполнено $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{a\})$. Неравенство $\gamma(G) \leqslant \gamma(G \setminus \{a\})$ очевидно. Можно считать, что $a \in D$ для некоторого наименьшего доминирующего множества D графа G, иначе выполнено $\gamma(G) \geqslant \gamma(G \setminus \{a\})$. Так как $N_b = \varnothing$, существует вершина $a' \in D \cap A_2$, доминирующая b. Если $a' \in A_1$, то $(D \setminus \{a, a'\}) \cup \{a_1, a_2\}$ является доминирующим множеством G, где $a_1 \in A_3$, $a_2 \in A_4$ – произвольные элементы. Если $a' \in A_3$, то $(D \setminus \{a\}) \cup \{a_2\}$ является доминирующим множеством G. Если $a' \in A_4$, то $(D \setminus \{a\}) \cup \{a_1\}$ является доминирующим множеством G. Поэтому $\gamma(G) \geqslant \gamma(G \setminus \{a\})$ и $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{a\})$.

Предположим, что $\forall\, b \in B'$ $[N_b \neq \varnothing]$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_1\})$, то

$$\forall\, b', b'' \in B' \quad [N_{b'} \subseteq N_{b''} \vee N_{b''} \subseteq N_{b'}].$$

Выберем такую вершину $b^* \in B'$, что не существует вершины $b \in B'$, для которой $N_b \subset N_{b^*}$. Поэтому $\forall\, b \in B'$ $[N_{b^*} \subseteq N_b]$. Рассмотрим произвольную вершину $a^* \in A_1 \setminus N(b^*)$ и докажем, что $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{a^*\})$. Можно считать, что $a^* \in D$ для некоторого наименьшего доминирующего множества D графа G, иначе $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{a^*\})$, и что $D \cap A_2 = \{a^*\}$, иначе к D можно применить преобразования из предыдущего абзаца. Ввиду выбора b^*, вершина из D, доминирующая b^*, будет доминировать и B'. Тем самым, $(D \setminus \{a^*\}) \cup \{a^{**}\}$ – доминирующее множество G, где a^{**} – произвольный элемент из $A_1 \setminus \{a^*\}$.

Из наших рассуждений следует, что граф G можно редуцировать за полиномиальное время. Тем самым, класс $\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{gem}_1\})$ является ДМ-простым.

Пусть $G \in \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_2\})$ – приведенный граф и (A, B) – его расщепляемое разложение. Существуют вершины $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$, что

$$A_1' = N(b_1) \cap N(b_2) \neq \varnothing, \qquad a \in N(b_1) \setminus N(b_2).$$

Каждый сосед $b_1' \in B$ вершины a, отличный от b_1, имеет соседа в $A \setminus N(b_1)$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{gem}_2\})$, то b_1' либо смежен со всеми вершинами из N_1, либо смежен со всеми вершинами из $A_2' = N(b_2) \setminus N(b_1)$. Если некоторое доминирующее множество $D \subseteq A$ графа G содержит a, то оно содержит $a' \in N(b_2)$. Поэтому $(D \setminus \{a\}) \cup \{a''\}$ тоже является доминирующим множеством G, где $a'' \in A_1'$, если $a' \in A_2'$, и $a'' \in A_2'$, если $a' \in A_1'$. Поэтому $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{a\})$. Из наших рассуждений следует, что граф G можно редуцировать за полиномиальное время. Тем самым, класс $\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{gem}_2\})$ является ДМ-простым.

Пусть $G \in \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\})$ – приведенный граф, (A, B) – его расщепляемое разложение, $D = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ – наименьшее доминирующее множество графа G. Можно считать, что $k \geqslant 3$. Так как D является наименьшим, при любом i выполнено

$$B_i = \{b \in B \colon a_i b \in E(G),\ \forall\, j \neq i\ [b a_j \notin E(G)]\} \neq \varnothing.$$

Так как G является приведенным, для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ каждый элемент из B_i имеет в $A \backslash D$ хотя бы одного соседа. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\})$, то $N_{A\backslash D}(b_i) \subseteq N_{A\backslash D}(b_j)$ или $N_{A\backslash D}(b_j) \subseteq N_{A\backslash D}(b_i)$ для любых $i \neq j$ и $b_i \in B_i$, $b_j \in B_j$. Поэтому существуют вершина $a \in A \setminus D$ и такое i^*, что

$$N_B(a) \supseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \setminus B_{i^*}, \qquad N_{B_{i^*}}(a) \neq \varnothing.$$

Поскольку G является приведенным, существует вершина $b \in B$, несмежная с a, и для каждой такой вершины b существуют две разные вершины $a' \in D$, $a'' \in A$, одновременно смежные с b. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\})$, то $B \setminus N_B(b) \subseteq B_{i^*}$ для любой такой вершины b и $\{a_{i^*}, a\}$ – доминирующее множество графа G. Тем самым, не существует приведенных графов из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{cat}\})$ с числом доминирования не менее чем три и этот класс является ДМ-простым.

Пусть $G \in \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{bridge}\})$ – приведенный граф. Обозначения A, B, a_i, D, k, B_i имеют те же определения, что и в случае класса $\mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\})$. Можно считать, что $k \geqslant 3$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ через b_i обозначим произвольный элемент множества B_i. Множество $B' = B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$ не пусто, так как G является приведенным. Связный расщепляемый граф с расщепляемым разложением $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ назовем *забором*, если каждая вершина из $\widetilde{A}$ имеет не более одного соседа в $\widetilde{B}$. Очевидно, что число доминирования каждого забора равно количеству вершин в $\widetilde{B}$ и что принадлежность графа классу заборов проверяется за полиномиальное время. Для каждого подмножества $S \subseteq A$ через G_S обозначим граф $G[A \cup (B \setminus N_B(S))]$.

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{bridge}\})$, то $N_D(b_1') \subseteq N_D(b_2')$ или $N_D(b_2') \subseteq N_D(b_1')$ для любых $b_1', b_2' \in B'$. Следовательно, существует такой элемент $a_{i^*} \in D$, что каждый элемент из B' смежен с a_{i^*}. В графе $G_{a_{i^*}}$ никакие два элемента из $B \backslash N_B(a_{i^*})$ не имеют общего соседа $a \in A \backslash D$, иначе для некоторых индексов $i \neq j$ множество $(D \backslash \{a_i, a_j\}) \cup \{a\}$ является доминирующим, что невозможно, так как D является наименьшим. Значит, граф G_{a^*} является забором. Поэтому $\gamma(G) = \min_{a \in A\colon G_a \text{ – забор}}(1 + \gamma(G_a))$. Тем самым, класс $\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{bridge}\})$ является ДМ-простым.

Пусть $G \in \mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{snake}\})$ – приведенный граф. Обозначения A, B, a_i, D, k, B_i имеют те же определения, что и в случае класса $\mathrm{Split} \cap \mathrm{Free}(\{\mathrm{cat}\})$. Можно считать, что $k \geqslant 4$. Так как G является приведенным, существует сосед $a^* \in A \setminus D$ вершины $b_1 \in B_1$. Для любого $2 \leqslant i \leqslant k$ во множестве $B_i' = N_B(a_i) \setminus N_B(a_1, a^*)$ имеется не более одного элемента, иначе G содержит подграф snake, порождаемый a_1, b_1, a^*, a_i и произвольными двумя элементами из B_i'. Предположим, что существуют такие $i \neq j$, $i \neq 1$, $j \neq 1$, $a \in A \setminus D$, что a смежна с вершиной $b_i \in B_i$ и с вершиной $b_j \in B_j$. Тогда не существует такого $k \notin \{1, i, j\}$, что $b_k \in B_k$, $ab_k \notin E(G)$. Действительно, иначе ввиду приведенности G есть вершина $a^{**} \in A \setminus D$, смежная с b_k, и вершины $a^{**}, a_k, b_k, a, b_i, b_j$ порождают подграф snake. Поэтому $\{a_1, a^*, a\}$ – доминирующее множество графа G и D не является наименьшим. Следовательно, наше предположение было не верным и граф G_{a_1, a^*} является забором. Поэтому

$$\gamma(G) = \min_{a', a'' \in A\colon G_{a', a''} \text{ – забор}} (2 + \gamma(G_{a', a''})).$$

Тем самым, класс $\mathrm{Free}(\{P_5, \mathrm{snake}\})$ является ДМ-простым.

Пусть $H \in \mathrm{Split}$ и (A_H, B_H) – его расщепляемое разложение. Через H^+ обозначим расщепляемый граф с расщепляемым разложением (A_{H^+}, B_{H^+}), где

$$A_{H^+} = A_H \cup \{a\}, \qquad B_{H^+} = B_H \cup \{b\}, \qquad ab \text{ – ребро графа } H^+,$$

а также

$$H^+[A_H \cup B_H] \cong H, \qquad N_{B_H}(a) = N_{A_H}(b) = \varnothing.$$

Лемма 4. *Если класс* $\mathrm{Free}(\{P_5, H\})$, *где* $H \in \mathrm{Split}$, *является ДМ-простым, то* $\mathrm{Free}(\{P_5, H^+\})$ *также является ДМ-простым.*

Доказательство. По лемме 2 можно рассматривать только приведенные графы из $\mathrm{Free}(\{H^+\})$. Пусть G – такой граф, (A, B) – его расщепляемое разложение, $D \subseteq A$ – наименьшее доминирующее множество графа G. Можно считать, что $|D| \geqslant 2$. Ясно, что для любого $x \in D$ существует такая вершина $y_x \in B$, что $N(y_x) \cap D = \{x\}$. Вместе с тем, граф $G \setminus (N_B[x] \cup N[y_x])$ принадлежит классу $\mathrm{Free}(\{H\})$. Тем самым, выполнено

$$\gamma(G) = \min_{x \in A,\, y \in B,\, xy \in E(G)} \bigl(1 + \gamma(G \setminus (N_B[x] \cup N[y_x]))\bigr)$$

и $\gamma(G)$ может быть найдено за полиномиальное время. Поэтому $\mathrm{Free}(\{P_5, H^+\})$ является ДМ-простым.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{Y}$ *– произвольное множество графов, каждый из которых имеет не более шести вершин. Положим* $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\{P_5\} \cup \mathcal{Y})$. *Тогда класс* $\mathcal{X}$ *является ДМ-сложным, если* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{X}$, *а иначе он является ДМ-простым.*

Доказательство. По лемме 2 можно считать, что рассматриваются только расщепляемые графы из $\mathcal{X}$. По теореме 1 можно считать, что существует $H \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Q} \neq \varnothing$, иначе $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{D}$ и класс $\mathcal{X}$ является ДМ-сложным. Из определения класса $\mathcal{Q}$ следует, что граф H является расщепляемым с расщепляемым разложением (A, B), причем для любых $a \in A$, $b \in B$ выполнено $|N_B(a)| \leqslant 3$, $|N_A(b)| \leqslant 2$.

Если для некоторого графа $H_1 \in \mathcal{Q}$ с не более чем 5 вершинами граф H является порожденным подграфом (не обязательно собственным) графа H_1^+, то $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}' = \mathrm{Free}(\{P_5, H_1^+\})$. Отсюда, из теоремы 2 и из леммы 4 следует, что классы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$ являются ДМ-простыми. Если же такого графа H_1 не существует, то H является порожденным подграфом (не обязательно собственным) одного из графов $\mathrm{gem}_1, \mathrm{gem}_2, \mathrm{cat}, \mathrm{bridge}, \mathrm{snake}$. Поэтому по лемме 3 класс $\mathcal{X}$ является ДМ-простым. Это завершает доказательство этой теоремы.

5. Класс $\mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$**.** Напомним, что граф fork получается однократным подразбиением произвольного ребра графа $K_{1,3}$. Граф banner получается добавлением вершины к C_4 и ребра, инцидентного добавленной вершине и вершине этого 4-цикла. Графы fork и banner изображены на рис. 2.

Лемма 5. *Задача ДМ в любом наследственном классе* $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$ *полиномиально эквивалентна той же задаче в классе* $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$.

Доказательство. Сначала докажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 10. *Задача ДМ полиномиально разрешима в классе* $\mathcal{X}^{**}$ *– множестве графов из* $\mathcal{X} \setminus \mathrm{Free}(\{\mathrm{banner}\})$, *содержащих* $K_{1,3}$ *в качестве порожденного подграфа и не содержащих сложных модулей.*

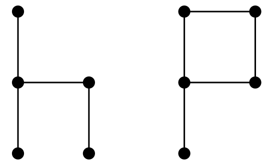

Рис. 2. Графы fork и banner.

Доказательство. Предположим, что $G \in \mathcal{X}^{**}$. В графе G выберем вершину x, на которой достигается $\max_{x' \in V(G)} \alpha(G[N(x')])$, а также некоторое наибольшее независимое множество $S = \{y_1, \ldots, y_k\}$ графа $G[N(x)]$. Это можно сделать за полиномиальное время, так как поиск наибольшего независимого множества в графах из класса Free($\{$fork$\}$) выполняется за полиномиальное время [16]. Ясно, что $k \geqslant 3$.

Обозначим через A множество вершин из $V(G) \setminus N[x]$, которые имеют хотя бы одного соседа в S, а через B обозначим множество вершин из $V(G) \setminus N[x]$, которые не имеют соседей в S и имеют соседа в $N(x) \setminus S$. Так как $G \in$ Free($\{$fork$\}$) $\setminus$ Free($\{$banner$\}$), каждый элемент из A смежен со всеми вершинами из S и каждый его сосед принадлежит $A \cup N(x)$. Поэтому если $B = \varnothing$, то $\gamma(G) \leqslant 2$. Если существует вершина $y \in B$, то она имеет соседа $z \in N(x) \setminus S$. Тогда, ввиду выбора x и принадлежности G классу Free($\{$fork$\}$) $\setminus$ Free($\{$banner$\}$), одновременно выполнены следующие свойства:

- z смежна ровно с $k-1$ вершиной из S,
- $N_B(y) \subseteq N_B(z)$,
- $N_{A \cup B}(z)$ является кликой,
- $A = \varnothing$,
- все вершины G отстоят от x на расстоянии не более чем 2.

Так как G не содержит сложных модулей, B является независимым множеством. Тем самым, существует наименьшее доминирующее множество графа G, не содержащее ни одной вершины из B. Так как $G \in$ Free($\{$fork$\}$), для любых $z_1, z_2 \in N(x)$, имеющих, соответственно, соседей $y'_1, y'_2 \in B$ выполнено $N_S(z_1) = N_S(z_2)$, независимо от смежности вершин z_1 и z_2. Отсюда следует, что $\gamma(G) = |B| + 1$. Утверждение 10 доказано.

По лемме 1 можно рассматривать только связные графы из $\mathcal{X}$, не имеющие сложных модулей. Пусть G – такой граф. Будем предполагать, что $\gamma(G) \geqslant 6$ и что множество его порожденных подграфов, изоморфных $K_{1,3}$, не пусто. Эти предположения, очевидно, не уменьшают общности. По утверждению 10 можно считать, что G содержит порожденный подграф banner. Среди всех порожденных подграфов графа G, изоморфных banner, выберем тот из них, чьи вершины в совокупности доминируют наибольшее количество вершин. Обозначим этот подграф через H, его 4-цикл обозначим через $C = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, а его лист обозначим через x'. Считаем, что $x'x_1 \in E(G)$.

Так как $G \in$ Free($\{$fork$\}$), каждая вершина G отстоит от C на расстоянии не более чем 2. Так как $\gamma(G) \geqslant 6$, то не пусто множество вершин G, отстоящих от C

в точности на расстоянии 2. Если $z \in N(C)$, $y \notin N[C]$, $yz \in E(G)$, то, поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$, выполнено

$$N_{V(C)}(z) = V(C), \qquad zx' \in E(G) \vee N_{V(C)}(z) = \{x_4, x_1, x_2\},$$
$$zx' \notin E(G) \vee N_{V(C)}(z) = \{x_2, x_3, x_4\}, \qquad zx' \notin E(G).$$

Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$, то

$$\exists\, y' \notin N[C] \quad [y'y \in E(G) \Longrightarrow zy' \in E(G)],$$

и поэтому множество $V(G) \setminus N[C]$ является независимым, так как G не содержит сложных модулей. По той же причине, если имеется сосед $y'' \notin N[C]$ вершины z, несмежный с y, то $N_{V(C)}(z) = V(C)$. Случай $N_{V(C)}(z) = \{x_2, x_3, x_4\}$ сводится к случаю $N_{V(C)}(z) = \{x_4, x_1, x_2\}$, так как ввиду выбора H существует вершина из $N(C)$, смежная в C только с x_3.

Предположим, что

$$W = \{z \in N(C) \colon \forall\, i\ [zx_i \in E(G),\, \exists\, y \notin N[C]\, yz \in E(G)]\} \neq \varnothing$$

и что $z \in W$, $y \notin N[C]$ – сосед вершины z. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$, каждый элемент из W смежен с каждой вершиной из $N(C)$, имеющей в C одного или двух соседей. Если $|N_{V(C)}(z')| = 3$, то $zz' \in E(G)$, иначе некоторый порожденный подграф графа G, изоморфный banner, доминирует больше вершин, чем H. По той же причине, если $|N_{V(C)}(z'')| = 4$ и $z'' \notin W$, то $zz'' \in E(G)$. Тем самым, существует вершина $z^* \in N(C)$, имеющая соседа вне $N[C]$ и ровно трех соседей на C, иначе G содержит сложный модуль. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$, для любого соседа $y^* \neq y$, $y^* \notin N[C]$ вершины z^* выполнено $zz^* \in E(G)$, $zy^* \in E(G)$. Но тогда граф G снова содержит сложный модуль.

Предположим, что $W = \varnothing$, $N_{V(C)}(z) = \{x_4, x_1, x_2\}$ и что z смежна с вершиной $y \notin N[C]$. Так как $\gamma(G) \geqslant 6$, каждое из наименьших доминирующих множеств графов G и $G \setminus \{x_2\}$ обязательно содержит элемент из $N(C)$, который имеет соседа вне $N[C]$. Так как $V(G) \setminus N[C]$ является независимым, достаточно рассматривать только наименьшие доминирующие множества этих графов, не содержащие ни одного элемента из $V(G) \setminus N[C]$. Поэтому каждое такое множество графа $G \setminus \{x_2\}$ будет доминирующим множеством графа G. Если существует вершина $z' \in N(C)$, несмежная с z, то

$$N_{V(C)}(z') = V(C) \vee N_{V(C)}(z') = \{x_4, x_1, x_2\} \vee N_{V(C)}(z') = \{x_2, x_3, x_4\},$$

так как $G \in \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\})$. Поэтому существует наименьшее доминирующее множество графа G, не содержащее x_2, которое будет доминирующим множеством графа $G \setminus \{x_2\}$. Тем самым, $\gamma(G) = \gamma(G \setminus \{x_2\})$ и вместо G достаточно рассматривать граф $G \setminus \{x_2\}$. Из утверждения 10 и справедливости данной редукции следует, что задача ДМ для графов класса $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{Y}$ – произвольное множество графов, каждый из которых имеет не более шести вершин. Положим $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\{\mathrm{fork}\} \cup \mathcal{Y})$. Тогда класс $\mathcal{X}$ является ДМ-сложным, если $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$, а иначе он является ДМ-простым.*

Доказательство. По теореме 1 можно считать, что $\mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$, иначе $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{D}$ и класс $\mathcal{X}$ является ДМ-сложным. По лемме 5 можно считать, что $K_{1,3} \in \mathcal{Y}$. В теореме 7.2 работы [12] была получена полная классификация сложности задачи ДМ для семейства $\{\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})\colon |V(H)| \leqslant 6\}$. В ней фигурирует некоторое множество $\mathcal{Z}$ (см. рис. 3) из семи графов такое, что если H содержит хотя бы один из элементов $\mathcal{Z}$ в качестве порожденного подграфа (не обязательно собственного), то класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ является ДМ-сложным, а иначе он является ДМ-простым.

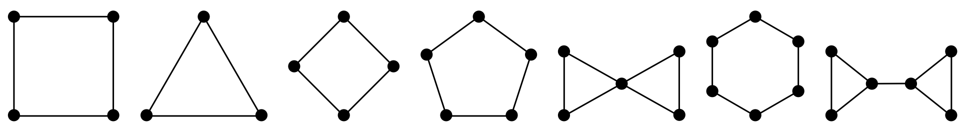

Рис. 3. Графы множества $\mathcal{Z}$.

Множество $\mathcal{Z}$ не пересекается с $\mathcal{D}$, поэтому для любого $H \in \mathcal{D}$, $|V(H)| \leqslant 6$ класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, H\})$ является ДМ-простым. Это завершает доказательство этой теоремы.

Недостатком представленного доказательства теоремы 4 является то обстоятельство, что оно опирается на результаты работы [12], которая является научным отчетом. Вместе с тем, доказательство полиномиальности для всех соответствующих случаев состоит в достаточно коротком доказательстве свойства 7.5 с использованием:

1) свойств 3.3 и 3.5, доказательства которых также являются короткими;
2) того факта, что класс $\mathcal{X}' = \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, P_8\})$ является ДМ-простым.

Анализ этих доказательств показывает их корректность, в чем может убедиться интересующийся читатель. Уточним, что доказательство свойства 7.5 использует дихотомию того, что граф либо принадлежит классу $\mathcal{X}'$, либо содержит порожденный k-путь, где $k \geqslant 8$. Скрупулезный его анализ показывает, что достаточно рассматривать $k \geqslant 7$ и установить ДМ-простоту класса $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}' \cap \mathrm{Free}(\{P_7\})$. К сожалению, доказательство ДМ-простоты класса $\mathcal{X}'$ представлено в работе [17], которая также является научным отчетом. Вместе с тем, доказательство ДМ-простоты класса $\mathcal{X}''$ содержится в свойствах 2.1–2.4 и леммах 3.1, 3.2, 4.1, 4.3 и 5.3. Интересующийся читатель может убедиться в корректности доказательств этих фактов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V. E. Alekseev, “On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem”, *Discrete Appl. Math.*, **132**:1–3 (2004), 17–26.

[2] V. E. Alekseev, R. Boliac, D. V. Korobitsyn, V. V. Lozin, “NP-hard graph problems and boundary classes of graphs”, *Theoret. Comput. Sci.*, **389**:1–2 (2007), 219–236.

[3] D. S. Malyshev, P. M. Pardalos, “Critical hereditary graph classes: a survey”, *Optim. Lett.*, **10**:8 (2016), 1593–1612.

[4] Д. С. Малышев, “Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске”, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **16**:5 (2009), 41–51.

[5] Д. С. Малышев, “Критические классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании”, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **20**:6 (2013), 59–76.

[6] V. E. Alekseev, D. E. Korobitsyn, V. V. Lozin, “Boundary classes of graphs for the dominating set problem”, *Discrete Math.*, **285**:1–3 (2004), 1–6.

[7] D. S. Malyshev, “A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem”, *J. Comb. Optim.*, **203** (2016), 226–243.

[8] Г. С. Дахно, Д. С. Малышев, “О счетном семействе граничных классов графов для задачи о доминирующем множестве”, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **30**:1 (2023), 28–39.

[9] Д. В. Коробицын, “О сложности определения числа доминированля в моногенных классах графов”, *Дискрет. матем.*, **2**:3 (1990), 90–96.

[10] D. S. Malyshev, “A dichotomy for the dominating set problem for classes defined by small forbidden induced subgraphs”, *Discrete Appl. Math.*, **203** (2016), 117–126.

[11] S. Földes, P. Hammer, “Split graphs having Dilworth number two”, *Canadian J. Math.*, **29**:3 (1977), 666–672.

[12] V. Bouquet, F. Delbot, C. Picouleau, S. Rovedakis, *On minimum dominating sets in cubic and* (claw, H)*-free graphs*, 2020, https://hal.science/hal-02493931.

[13] A. Cournier, M. Habib, “A new linear algorithm for modular decomposition”, *Trees in Algebra and Programming –CAAP ’*94 (Edinburgh, 1994), Lecture Notes in Comput. Sci., **787**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 68–84.

[14] G. Bacso, Z. Tuza, “Dominating cliques in P_5-free graphs”, *Period. Math. Hungar.*, **21**:4 (1990), 303–308.

[15] В. А. Замараев, Д. С. Малышев, Д. Б. Мокеев, “О сложности задачи о доминирующем множестве в подклассах класса расщепляемых графов”, *Вест. Нижегор. ун-та*, **6** (2010), 143–147.

[16] В. Е. Алексеев, “Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок”, *Дискретн. анализ и исслед. опер., сер.* 1, **6**:4 (1999), 3–19.

[17] V. Bouquet, C. Picouleau, *The minimum dominating set problem is polynomial for* $(claw, P_8)$*-free graphs*, 2019, https://hal.science/hal-02448239.

Г. С. Дахно
Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: dahnogrigory@yandex.ru

Д. С. Малышев
Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Московская область, г. Долгопрудный
E-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Поступило
01.03.2024
После доработки
05.07.2024
Принято к публикации
10.07.2024