Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О растягивающихся аттракторах произвольной коразмерности, *СМФН*, 2024, том 70, выпуск 3, 389–402

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 389–402
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9+513.8
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402
EDN: PPXEPN

О РАСТЯГИВАЮЩИХСЯ АТТРАКТОРАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Благодаря работам Р. В. Плыкина и В. З. Гринеса, наиболее изученными растягивающимися аттракторами являются ориентируемые аттракторы коразмерности один A-диффеоморфизмов многомерных замкнутых многообразий и одномерные аттракторы на замкнутых поверхностях. В статье доказывается, что существуют замкнутые многообразия любой размерности, начиная с трех, допускающие структурно устойчивые диффеоморфизмы и диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A Смейла, с растягивающимися аттракторами произвольной коразмерности. Для некоторых коразмерностей уточняется вид многообразий.

Ключевые слова: растягивающийся аттрактор, A-диффеоморфизм, замкнутое многообразие, притягивающая окрестность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», кроме доказательства теоремы 4, поддержанного Российским научным фондом (грант 22-11-00027). Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста.

Для цитирования: *Е. В. Жужома, В. С. Медведев.* О растягивающихся аттракторах произвольной коразмерности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 389–402. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402

1. Введение

Наиболее интересными инвариантными множествами динамических систем с точки зрения приложений являются аттракторы и репеллеры [12]. Среди нетривиальных аттракторов в гиперболической теории динамических систем наиболее известными являются соленоид Смейла, *ДА*-аттрактор и аттрактор Плыкина. Все эти аттракторы являются растягивающимися аттракторами. Мы будем рассматривать растягивающиеся аттракторы (для репеллеров все утверждения аналогичны) диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A Смейла, на замкнутых многообразиях. Напомним, что согласно аксиоме A Смейла, неблуждающее множество диффеоморфизма является замыканием множества периодических орбит и имеет гиперболическую структуру (основные определения даны в разделе 2). Для краткости диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A Смейла, мы будем называть A-диффеоморфизмом. Класс A-диффеоморфизмов представляет собой довольно широкий класс, содержащий все Ω-устойчивые и структурно устойчивые диффеоморфизмы, включая диффеоморфизмы Аносова и диффеоморфизмы Морса—Смейла (основные понятия и определения теории динамических систем см. в книгах [8, 17, 24, 35]).

Везде далее через M^n обозначается n-мерное гладкое связное замкнутое многообразие. *Аттрактором* A-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется базисное множество Λ такое, что существует окрестность $U(\Lambda) = U$ множества Λ, удовлетворяющая условиям

$$\overline{f(U)} \subset U, \quad \bigcap_{i \geqslant 0} f^i(U) = \Lambda,$$

где через $\overline{N}$ обозначается топологическое замыкание множества N. *Репеллером* называется аттрактор диффеоморфизма f^{-1}. Обычно свойства и понятия, связанные с аттрактором, легко переносятся для репеллера. Поэтому мы в основном будем рассматривать только аттракторы.

В 1967 году Смейл [37] ввел топологический соленоид в гиперболическую теорию динамических систем, построив диффеоморфизм, у которого соленоид был аттрактором. Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура, см. рис. 1. Специфика этого соленоидального аттрактора состояла в том, что его топологическая размерность совпадала с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Поскольку такой аттрактор представлял собой объединение неустойчивых многообразий своих точек, то Вильямс [38] предложил называть их *растягивающимися аттракторами.* Для изучения внутренней динамики растягивающихся аттракторов (т. е. динамики ограничений диффеоморфизмов на растягивающихся аттракторах) Вильямс ввел понятие обобщенного соленоида (см. обзор [23]). Подход Вильямса был развит в работах [20, 21, 27, 28], однако этот подход не учитывает вложение аттракторов в многообразие. Робинсон и Вильямс [36] привели пример диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами, которые не имели даже гомеоморфных окрестностей, но ограничения этих диффеоморфизмов на растягивающиеся аттракторы были сопряжены. В работах Гринеса [4–7, 22] (с соавторами) и Плыкина [13–15] были проклассифицированы растягивающиеся аттракторы коразмерности один относительно сопрягающих гомеоморфизмов, определенных на несущих многообразиях, т. е. была получена классификация, учитывающая вложение растягивающихся аттракторов в многообразие. Что касается растягивающихся аттракторов коразмерности два и больше, то авторам известны работы о классификации только одномерных растягивающихся аттракторов в трехмерных многообразиях, т. е. аттракторов коразмерности два [18, 26, 29, 30]. Классификация аттракторов коразмерности один существенно опиралась на описание окрестностей этих аттракторов и их вложений в несущее многообразие. Например, Плыкин [15] показал, что ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один в n-мерном многообразии, $n \geqslant 3$, имеет захватывающую окрестность, гомеоморфную n-мерному тору с конечным числом удаленных n-мерных шаров. Для растягивающегося аттрактора коразмерности два на трехмерном многообразии было показано существование захватывающей окрестности, гомеоморфной внутренности шара с конечным числом приклеенных ручек индекса один [18].

В данной работе мы рассматриваем вопросы существования A-диффеоморфизмов (в том числе структурно устойчивых диффеоморфизмов) замкнутых многообразий с растягивающимися аттракторами. Основной упор делается на вопросы существования растягивающихся аттракторов произвольной коразмерности. Из приведенных конструкций легко извлекаются топологическая структура возможных притягивающих окрестностей. Решение вопроса в полной общности о топологической структуре притягивающих окрестностей позволит начать рассматривать проблему классификации растягивающихся аттракторов коразмерности, отличной от единицы.

Основные результаты содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Для любых $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$, существуют n-мерное замкнутое многообразие M^n и структурно устойчивый диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ такие, что f имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности q. Кроме этого, существуют M^n и Ω-устойчивый диффеоморфизм $M^n \to M^n$ с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности q.*

Следующие два результата относятся к одномерным растягивающимся аттракторам.

Теорема 2. *На n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 3$, существует структурно устойчивый диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором.*

Теорема 3. *На любом замкнутом n-мерном ориентируемом многообразии существует A-диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором, т. е. с растягивающимся аттрактором коразмерности $(n-1)$.*

Следующий результат показывает, что одномерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма 4-мерной сферы может лежать на вложенной инвариантной 2-мерной сфере, образующей нетривиальный 2-узел.

Теорема 4. *Для любого нетривиального гладкого узла S^2 в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$ существует A-диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ с одномерным растягивающимся аттрактором на S^2.*

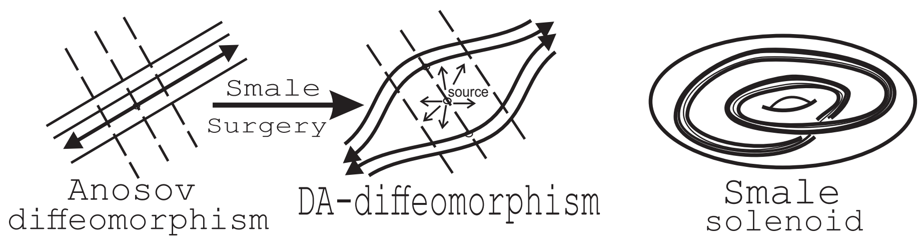

Рис. 1. *ДА*-диффеоморфизм и соленоид Смейла

Fig. 1. *DA*-diffeomorphism and Smale solenoid

В конце статьи формулируются и обсуждаются несколько гипотез, связанных с вопросами существования растягивающихся аттракторов.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводятся необходимые для дальнейшего определения и предварительные результаты. В разделе 3 доказываются основные утверждения.

2. Основные определения и предварительные сведения

В этом разделе даются основные определения и вводятся необходимые понятия.

A-диффеоморфизмы. Пусть f — диффеоморфизм замкнутого n-мерного ($n \geqslant 2$) многообразия $M = M^n$, снабженного некоторой римановой метрикой d. Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df-инвариантных подрасслоений E^s_Λ, E^u_Λ, $\dim E^s_x + \dim E^u_x = n$ $(x \in \Lambda)$, и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^n(v)\| \leqslant C_s \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s_\Lambda, \qquad \|df^{-n}(v)\| \leqslant C_u \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u_\Lambda, \qquad n > 0.$$

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geqslant N$, такое, что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме A* (или, что то же самое, является *A-диффеоморфизмом*), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

Гиперболическая структура на неблуждающем множестве влечет существование т. н. устойчивых и неустойчивых многообразий. Их существование и свойства исследовались во многих работах (см. напр. [1, 2, 25]). Пусть Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f : M \to M$. Тогда для любого $x \in \Lambda$ существует инъективная C^∞ иммерсия $J^s_x : \mathbb{R}^s \to M$, образ которой $J^s_x(\mathbb{R}^s) \stackrel{\text{def}}{=} W^s(x)$ называется *устойчивым многообразием точки* x, такая, что выполняются следующие свойства:

1. Точки $x, y \in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ при $n \to +\infty$.
2. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$, $T_x W^s(x) = E^s_\Lambda$.
3. Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \varnothing$.
4. Если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M, то $W^s(x)$, $W^s(y)$ близки на компактных множествах.

Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 2, устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Отметим, что с точки зрения дифференциальной топологии инвариантные многообразия не являются «настоящими» подмногообразиями. Однако они являются иммерсированными подмногообразиями, см. например, [35].

Обозначим через $W^{s(u)}_\varepsilon(x)$ ε-окрестность точки x в многообразии $W^{s(u)}(x)$ (в его внутренней топологии). Следующее утверждение, доказанное Смейлом [37], часто называют *теоремой о локальной структуре произведения*. Пусть диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых ε-близких точек $x_1, x_2 \in NW(f)$ пересечение $W^s_\varepsilon(x_1) \cap W^u_\varepsilon(x_2)$ состоит из единственной точки, принадлежащей $NW(f)$.

Смейл [37] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*. Пусть диффеоморфизм f компактного многообразия M удовлетворяет аксиоме A (коротко, является A-диффеоморфизмом). Тогда множество неблуждающих точек $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом многообразие M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Omega_i), \text{ где } W^{s(u)}(\Omega_i) = \bigcup_{x\in\Omega_i} W^{s(u)}(x).$$

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является изолированной периодической орбитой (в частности, не является неподвижной изолированной точкой).

Под размерностью $\dim \Omega$ базисного множества Ω мы понимаем топологическую размерность в смысле теории Урысона—Менгера [9]. Именно, топологическая размерность $\dim F$ компакта F определяется как наименьшее число k такое, что для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ данный F имеет замкнутое ϵ-покрытие кратности $k+1$. Эта же размерность может быть определена индуктивно следующим образом. Размерность пустого множества считается равной -1. Для непустого множества F размерность есть наименьшее целое k такое, что каждая точка из F имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой имеет размерность, меньшую, чем k. Отметим, что топологическая размерность является инвариантом относительно гомеоморфных преобразований.

Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Базисное множество А-диффеоморфизма f называется *сжимающимся репеллером*, если оно является растягивающимся аттрактором диффеоморфизма f^{-1} [38].

Если $\dim \Omega = n - q$, $1 \leqslant q \leqslant n - 1$, то Ω называется *базисным множеством коразмерности* q. Согласно [13, теорема 1], базисное множество Ω коразмерности один является либо аттрактором, либо репеллером. В этом случае неустойчивое (если Ω — аттрактор), либо устойчивое (если Ω — репеллер) многообразие любой точки $x \in \Omega$ принадлежит Ω. Согласно [13, теорема 2], растягивающийся аттрактор или сжимающийся репеллер коразмерности один имеет локальную структуру прямого произведения $(n-1)$-мерного евклидова пространства и канторова множества. В этом случае Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω — аттрактор), либо из устойчивых (если Ω — репеллер) $(n-1)$-мерных многообразий своих точек. Обратное также справедливо, т. е. если базисное множество Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω — аттрактор), либо из устойчивых (если Ω — репеллер) $(n-1)$-мерных многообразий своих точек и имеет вышеуказанную локальную структуру прямого произведения, то Ω есть либо растягивающийся аттрактор, либо сжимающийся репеллер коразмерности один.

Каждое инвариантное многообразие $W^s(x)$, $W^u(x)$ есть образ евклидового пространства относительно гладкой иммерсии (т. е. $W^s(x)$, $W^u(x)$ являются иммерсированными подмногообразиями). Поэтому открытые диски $W^s_\alpha(x)$, $W^u_\beta(x)$ являются ориентируемыми и нормально ориентируемыми иммерсированными подмногообразиями дополнительной размерности, $\dim W^s_\alpha(x) + \dim W^u_\beta(x) = n$, для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Следовательно, корректно следующее определение ориентируемости базисного множества. Будем говорить, что базисное множество Ω *ориентируемо*, если для любой точки $x \in \Omega$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же ($+1$ либо -1) [4,5]. В противном случае базисное множество Ω называется *неориентируемым*. Отметим, что в вышеприведенном определении ориентируемости базисного множества несущее многообразие может быть как ориентируемым, так и неориентируемым (об индексе пересечения подмногообразий в неориентируемом многообразии см. [16, с. 175]).

Структурная устойчивость. Обозначим через $\mathit{Diff}^1(M)$ пространство C^1-диффеоморфизмов многообразия M, наделенное равномерной C^1-топологией. Два диффеоморфизма f, $g \in \mathit{Diff}^1(M)$ называются (топологически) *сопряженными*, если существует гомеоморфизм

$$\varphi : M \to M \quad \text{такой, что} \quad \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Диффеоморфизм $f \in \mathit{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset \mathit{Diff}^1(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f.

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют сильным условием трансверсальности. Пусть W_1, $W_2 \subset M$ — два иммерсированных подмногообразия (иногда вместо иммерсии используют термин погружение), имеющие непустое пересечение. По определению, W_1, W_2 *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство T_xM порождается касательными подпространствами T_xW_1 и T_xW_2. В частности, если W_1, W_2 пересекаются трансверсально, то

$$\dim T_xW_1 + \dim T_xW_2 \geqslant \dim T_xM.$$

Говорят, что A-диффеоморфизм удовлетворяет *сильному условию трансверсальности*, если для любых точек x, $y \in NW(f)$ многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ имеют только трансверсальные пересечения. Известно [31, 34], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является A-диффеоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности.

2-узлы в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$. Под топологическим (гладким) вложением понимается гомеоморфизм (гладкая взаимно однозначная иммерсия) на образ, на котором топология (гладкая структура) индуцируется топологией (гладкой структурой) объемлющего пространства. Под топологическим (гладким) 2-узлом s^2 в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$ понимается образ топологического (гладкого) вложения

$$f : \mathbb{S}^2 \to f(\mathbb{S}^2) = s^2 \subset \mathbb{S}^4,$$

где $\mathbb{S}^k$ есть стандартная k-мерная сфера, которая задается равенством $x_1^1 + \dots + x_{k+1}^2 = 1$ в $(k+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$, $k \geqslant 1$. Говорят, что 2-узел s^2 в точке $x \in s^2$ *локально плоско вложен*, если существует окрестность $U(x) \subset \mathbb{S}^4$ и гомеоморфизм $h : U(x) \to \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ такие, что $h(s^2 \cap U(x)) = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Точка 2-узла s^2, в которой s^2 не является локально плоско вложенным, называется *точкой дикости*. Узел s называется *локально плоско вложенным*, если он локально плоско вложен в каждой своей точке. Топологически вложенный узел может, вообще говоря, иметь точки дикости. Ясно, что гладко вложенный узел локально плоско вложен.

3. Доказательство основных утверждений

Сперва докажем несколько вспомогательных утверждений. Для отображений $f_i : M_i \to M_i$, $i = 1, 2$, через $F_{12} = (f_1, f_2) : M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2$ обозначается отображение вида

$$F_{12}(x, y) = (f_1, f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y)), \quad x \in M_1, y \in M_2.$$

Лемма 1. *Пусть $f_i : M_i^{k_i} \to M_i^{k_i}$ — A-диффеоморфизм (структурно устойчивый диффеоморфизм) замкнутого k_i-мерного ($k_i \geqslant 1$) многообразия с неблуждающим множеством $NW(f_i)$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$(f_1, f_2) : M_1^{k_1} \times M_2^{k_2} \to M_1^{k_1} \times M_2^{k_2}$$

является A-диффеоморфизмом (структурно устойчивым диффеоморфизмом) с неблуждающим множеством $NW(f_1) \times NW(f_2)$. Более того, если базисные множества $\Omega_1^{(i)}, \ldots, \Omega_{l_i}^{(i)}$ составляют спектральное разложение диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$, то спектральное разложение диффеоморфизма (f_1, f_2) состоит из базисных множеств $\Omega_\alpha^{(1)} \times \Omega_\beta^{(2)}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant l_1$, $1 \leqslant \beta \leqslant l_2$.

Доказательство. Напомним, что в неблуждающем множестве $NW(f_i)$ всюду плотны периодические точки диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Поэтому сколь угодно близко к любой точке $(x, y) \in NW(f_1) \times NW(f_2)$ найдется точка (p_1, p_2), где p_i — периодическая точка диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Ясно, что $F^m(x, y) = (f_1^m(x), f_2^m(y))$, $m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, (p_1, p_2) — периодическая точка диффеоморфизма F_{12}. Таким образом, периодические точки F_{12} всюду плотны в $NW(f_1) \times NW(f_2)$.

Любая окрестность точки (x, y) содержит окрестность, равную произведению окрестностей точек x и y в M_1 и M_2, соответственно. Тогда если точка x или y является блуждающей, то (x, y) также будет блуждающей. Отсюда вытекает требуемое равенство $NW(F_{12}) = NW(f_1) \times NW(f_2)$.

Так как матрица Якоби $J(F_{12})$ в каждой точке $(x, y) \in NW(f_1) \times NW(f_2)$ имеет блочный вид $(J(f_1), J(f_2))$, то множество $NW(f_1) \times NW(f_2)$ имеет гиперболическую структуру, причем расслоение $\mathbb{E}^s_{F_{12}} \oplus \mathbb{E}^u_{F_{12}}$ имеет вид $\mathbb{E}^s_{F_{12}} = \mathbb{E}^s_{f_1} \oplus \mathbb{E}^s_{f_2}$, $\mathbb{E}^u_{F_{12}} = \mathbb{E}^u_{f_1} \oplus \mathbb{E}^u_{f_2}$, и дифференциал DF_{12} сохраняет структуру расслоения.

Пусть Ω_i — базисное множество диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Очевидно, $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_{12}$ является замкнутым инвариантным множеством. Для доказательства того, что оно является базисным множеством, осталось доказать наличие транзитивности ограничения F_{12} на Ω_{12}. Предположим сперва, что базисные множества Ω_1, Ω_2 — тривиальные, т. е. являются периодическими орбитами. Тогда Ω_{12} также является периодической орбитой, период которой есть наименьшее общее кратное периодов Ω_1 и Ω_2. Теперь предположим, что базисные множества Ω_1, Ω_2 — нетривиальные. Воспользуемся критерием Биркгофа. Пусть V_1, V_2 — произвольные относительно открытые множества в Ω_{12}. Не уменьшая общности, можно считать, что эти множества имеют вид $V_1 = V_{1x} \times V_{1y}$, $V_2 = V_{2x} \times V_{2y}$, где V_{1x}, V_{2x} — открытые множества в $M_1^{k_1}$, а V_{1y}, V_{2y} — открытые множества в $M_2^{k_2}$. Известно [3,19], что ограничение некоторой итерации A-диффеоморфизма на базисное множество является топологически перемешивающим преобразованием. Очевидно, достаточно доказать транзитивность относительно некоторой итерации. Поэтому будем считать, что ограничение f_i на Ω_i является топологически перемешивающим преобразованием, $i = 1, 2$. Так как f_1 является A-диффеоморфизмом, то существует n_1 такое, что $f_1^m(V_{1x}) \cap V_{2x} \neq \varnothing$ при всех $m \geqslant n_1$. Аналогично, $f_2^m(V_{1y}) \cap V_{2y} \neq \varnothing$ при всех $m \geqslant n_2$. Отсюда вытекает, что $F_{12}^{m_0}(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ для $m_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Согласно критерию Биркгофа, ограничение F_{12} на Ω_{12} является транзитивным отображением (на самом деле, из приведенного рассуждения фактически следует перемешиваемость отображения). Таким образом, (f_1, f_2) является A-диффеоморфизмом, и спектральное разложение диффеоморфизма (f_1, f_2) состоит из базисных множеств $\Omega_\alpha^{(1)} \times \Omega_\beta^{(2)}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant l_1$, $1 \leqslant \beta \leqslant l_2$. Для случая, когда одно базисное множество — допустим, Ω_1 — тривиальное, а Ω_2 — нетривиальное, рассуждение аналогично вышеприведенному.

Осталось рассмотреть случай, когда $f_i : M_i \to M_i$ является структурно устойчивым диффеоморфизмом, $i = 1, 2$. Для доказательства структурной устойчивости (f_1, f_2) достаточно проверить условие сильной трансверсальности. Предположим, что неустойчивое многообразие $W^u_{F_{12}}(p_1, q_1)$ пересекается с устойчивым многообразием $W^s_{F_{12}}(p_2, q_2)$ в некоторой точке $(x, y) \in M_1 \times M_2$. В силу структурной устойчивости $f_i : M_i \to M_i$, $i = 1, 2$, неустойчивое многообразие $W^u_{f_1}(p_1)$ пересекает трансверсально устойчивое многообразие $W^s_{f_1}(p_2)$ в точке x, а неустойчивое многообразие $W^u_{f_2}(q_1)$ пересекает трансверсально устойчивое многообразие $W^s_{f_2}(q_2)$ в точке y. Отсюда, а также из равенств

$$W^u_{F_{12}}(p_1, q_1) = W^u_{f_1}(p_1) \times W^u_{f_2}(q_1), \quad W^s_{F_{12}}(p_2, q_2) = W^s_{f_1}(p_2) \times W^s_{f_2}(q_2) \tag{3.1}$$

вытекает требуемое утверждение. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $f_i : M_i^{k_i} \to M_i^{k_i}$ *— A-диффеоморфизм замкнутого* k_i*-мерного* ($k_i \geqslant 2$) *многообразия с растягивающимся аттрактором* Λ_i *коразмерности* $m_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$F_{12} = (f_1, f_2) : M_1^{k_1} \times M_2^{k_2} \to M_1^{k_1} \times M_2^{k_2}$$

является A-диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ *коразмерности* $m_1 + m_2$.

Доказательство. В силу леммы 1 $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ является аттрактором диффеоморфизма F_{12}. Согласно определению растягивающегося аттрактора $\dim \Lambda_i = \dim W^u_{f_i}(x_i)$ для любой точки $x_i \in \Lambda_i$, $i = 1, 2$. Положим $k_i = \dim \Lambda_i$, $i = 1, 2$. Согласно [38, теорема C и лемма 4.3] растягивающийся аттрактор Λ_i локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}^{k_i} \times K_i$, где K_i — канторовское множество нулевой топологической размерности. Тогда $K_1 \times K_2$ является канторовым множеством нулевой топологической размерности, поскольку $\dim(K_1 \times K_2) \leqslant \dim K_1 + \dim K_2$. Поэтому аттрактор $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times K = \mathbb{R}^{k_1+k_2} \times K$, где K — канторовское множество нулевой топологической размерности. Следовательно,

$$\dim(\Lambda_1 \times \Lambda_2) = k_1 + k_2 = \dim \Lambda_1 + \dim \Lambda_2.$$

Напомним, что неустойчивое многообразие $W^u_{f_i}(x_i)$ гомеоморфно во внутренней топологии $\mathbb{R}^{k_i}$. Поэтому $W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)$ гомеоморфно во внутренней топологии $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Согласно (3.1) неустойчивое многообразие $W^u_{F_{12}}(x_1, x_2)$ есть $W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)$. Отсюда получаем

$$\dim(\Lambda_1 \times \Lambda_2) = \dim \Lambda_1 + \dim \Lambda_2 = \dim W^u_{f_1}(x_1) + \dim W^u_{f_2}(x_2) = \dim \left(W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)\right).$$

Следовательно, $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ является растягивающимся аттрактором диффеоморфизма F_{12}. Его коразмерность определяется прямым вычислением. □

Следствие 1. *Пусть* $f_i : M_i^n \to M_i^n$ *— A-диффеоморфизм замкнутого* n*-мерного* ($n \geqslant 2$) *многообразия с растягивающимся аттрактором* Λ_i *коразмерности один,* $i = 1, 2$. *Тогда*

$$(f_1, f_2) : M_1^n \times M_2^n \to M_1^n \times M_2^n$$

является A-диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ *коразмерности два.*

Следствие 2. *Пусть* $M^2_{p_i}$ *— замкнутая поверхность рода* p_i, $i = 1, 2$. *Тогда на* $M^2_{p_1} \times M^2_{p_2}$ *существует структурно устойчивый диффеоморфизм* (*следовательно, A-диффеоморфизм*)

$$f : M^2_{p_1} \times M^2_{p_2} \to M^2_{p_1} \times M^2_{p_2}$$

с растягивающимся аттрактором коразмерности два.

Замечание. Ясно, что аналогичные вышеприведенным леммам утверждения имеют место для произвольного конечного числа соответствующих множителей диффеоморфизмов.

При доказательстве основных результатов мы будем использовать известные примеры диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами коразмерности один. На рис. 1 (левая часть) приводится сценарий построения *ДА*-диффеоморфизма двумерного тора с одномерным ориентируемым растягивающимся аттрактором из диффеоморфизма Аносова. Аналогичным образом может быть построен A-диффеоморфизм многомерного тора с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один аттрактором из диффеоморфизма Аносова коразмерности один. Фазовый портрет A-диффеоморфизма неориентируемой поверхности с изолированным седлом и неориентируемым одномерным растягивающимся аттрактором представлен на рис. 2 (a). На рис. 2 (b) представлен фазовый портрет A-диффеоморфизма с изолированным седлом и двумя (неориентируемыми) аттракторами Плыкина.

Доказательство теоремы 1. Для $n = 2$ утверждение верно, поскольку имеются замечательные примеры структурно устойчивого *ДА*-диффеоморфизма с ориентируемым растягивающимся аттрактором на торе $\mathbb{T}^2$ (см. например, [35, 37]), и структурно устойчивый диффеоморфизм с неориентируемым растягивающимся аттрактором Плыкина на сфере $\mathbb{S}^2$ [14]. Поэтому далее считаем $n \geqslant 3$. Согласно [6, 7, 15, 22], на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм с растягивающимся аттрактором коразмерности один для любого $n \geqslant 3$. Поэтому для структурно устойчивых диффеоморфизмов далее будем считать $q \geqslant 2$.

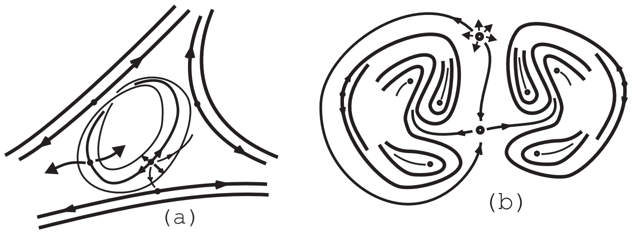

Рис. 2. (a) Изолированное седло и неориентируемый растягивающийся аттрактор на поверхности; (b) изолированное седло и два аттрактора Плыкина.

Fig. 2. (a) Isolated saddle and nonorientable stretching attractor on the surface; (b) isolated saddle and two Plykin attractors.

Пусть $f_1 : \mathbb{T}^{n-q+1} \to \mathbb{T}^{n-q+1}$ — структурно устойчивый диффеоморфизм с ориентируемым растягивающимся аттрактором Λ коразмерности один, т. е. размерность аттрактора Λ равна $(n-q)$. На сфере $\mathbb{S}^{q-1}$ размерности $(q-1)$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f_2 : \mathbb{S}^{q-1} \to \mathbb{S}^{q-1}$, неблуждающее множество которого состоит из изолированного источника α и изолированного стока ω. В силу леммы 2 структурно устойчивый диффеоморфизм

$$(f_1, f_2) : M^n = \mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1} \to \mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$$

имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор $\Lambda \times \{\omega\}$ размерности $(n-q)$, т. е. коразмерности q.

В работах [10, 32] было доказано существование замкнутого n-мерного многообразия N^n и Ω-устойчивого диффеоморфизма $g : N^n \to N^n$ с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один для любого $n \geqslant 3$. Дальнейшее рассуждение для доказательства существования неориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности q полностью аналогично случаю ориентируемого аттрактора. $\square$

Непосредственно из анализа доказательства теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 3. *Для любых* $2 \leqslant q \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$ *многообразие* $\mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$ *допускает структурно устойчивый диффеоморфизм с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности* q.

Доказательство теоремы 2. Сперва докажем утверждение для 3-мерной сферы $\mathbb{S}^3$. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ — структурно устойчивый диффеоморфизм с аттрактором Плыкина [14], который мы обозначим через Λ_a. Напомним, что Λ_a является одномерным растягивающимся аттрактором. Будем рассматривать $\mathbb{S}^2$ как экватор сферы $\mathbb{S}^3$. Тогда $\mathbb{S}^2$ разделяет $\mathbb{S}^3$ два замкнутых диска D_1, D_2, пересекающихся вдоль экватора $\mathbb{S}^2$. Каждый диск D_1, D_2 удобно рассматривать как единичный диск в пространстве с центром в начале координат. На каждом луче зададим поток g^t вида $\dot\rho = \rho(1-\rho)$, где точки с координатами $\rho = 1$ лежат на $\mathbb{S}^2$. Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока g^t определяет диффеоморфизм $g : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, множество неподвижных точек которого состоит из двух гиперболических источников $\alpha_1 \in D_1$, $\alpha_2 \in D_2$ и сферы $\mathbb{S}^2$. Существует трубчатая окрестность $T(\mathbb{S}^2)$ сферы $\mathbb{S}^2$, которая представляет собой тривиальное расслоение $\mathbb{S}^2 \times [-1;1]$ с базой $\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ и слоями, состоящими из дуг траекторий потока g^t. Диффеоморфизм f сохраняет ориентацию, и поэтому существует диффеотопия

$$f_\beta : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad \text{такая, что} \ \ f_0 = f,\ f_1 = id.$$

Обозначим через $\theta : \mathbb{R} \to [0;1]$ гладкую четную функцию, монотонно возрастающую на отрезке $[0;1]$, и такую, что $\theta(0) = 0$, $\theta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. Диффеотопия позволяет определить диффеоморфизм

$$\hat f : T(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2 \times [-1;1] \to \mathbb{S}^2 \times [-1;1]$$

по правилу $\hat f|_{\mathbb{S}^2 \times \{\beta\}} = f_{\theta(\beta)}$. Поскольку $f_{\theta(\pm 1)} = id$, то $\hat f$ продолжается на $\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^2)$ как тождественный диффеоморфизм. Зададим теперь диффеоморфизм $F : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ следующим образом:

$F = g$ на $\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^2)$ и $F = (f_{\theta(\beta)}, g)$ на $T(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2 \times [-1; 1]$. Из построения вытекает, что F является структурно устойчивым диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором Λ_a.

Далее, вложив $\mathbb{S}^3$ в $\mathbb{S}^4$ как экватор, аналогичным образом можно построить структурно устойчивым диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором Λ_a на $\mathbb{S}^4$. Продолжая этот процесс, можно построить требуемый диффеоморфизм на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ для любого $n \geqslant 3$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Покажем, что на любом замкнутом n-мерном многообразии ($n \geqslant 3$) существует A-диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором. Пусть M^n — произвольное n-мерное замкнутое многообразие. Известно что на M^n существует градиентно-подобный диффеоморфизм Морса—Смейла $g_0 : M^n \to M^n$, у которого имеется стоковая неподвижная точка ω_0. Согласно теореме 2, на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f_0 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, у которого имеется одномерный растягивающийся аттрактор Λ_a. Из построения f_0 следует, что f_0 имеет источниковую неподвижную точку α_0. Удалим шаровые окрестности точек ω_0, α_0 из M^n и $\mathbb{S}^n$, соответственно, и отождествим границы шаровых окрестностей с помощью обращающего ориентацию диффеоморфизма. Тогда получим многообразие $M^n \sharp \mathbb{S}^n$, диффеоморфное M^n. Так как ω_0 — сток, а α_0 — источник, то диффеоморфизмы g_0, f_0 можно согласовать на $M^n \sharp \mathbb{S}^n$ так, чтобы получить требуемый A-диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ с одномерным растягивающимся аттрактором Λ_a. $\square$

Доказательство теоремы 4. Пусть $S^2 \subset \mathbb{S}^4$ — гладкий нетривиальный 2-узел в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$. Тогда существует трубчатая окрестность $U(S^2)$ 2-узла S^2, которая является локально тривиальным расслоением $p : U(S^2) \to S^2$ над S^2 с двумерным диском в качестве слоя [16]. Более того, можно считать, что граница $\partial U(S^2)$ окрестности $U(S^2)$ является гладко вложенным 3-многообразием. Зададим на S^2 структурно устойчивый диффеоморфизм $f_0 : S^2 \to S^2$ с аттрактором Плыкина Λ_a. В силу построения f_0 диффеоморфизм f_0 сохраняет ориентацию сферы. Поскольку f_0 диффеотопен тождественному диффеоморфизму, а слой расслоения p есть двумерный диск, то f_0 можно продолжить до диффеоморфизма

$$f_1 : U(S^2) \to p(U(S^2)) \subset U(S^2),$$

у которого S^2 является притягивающим множеством. Многообразие $\mathbb{S}^4 \setminus U(S^2) = M^4$ допускает градиентно подобный поток Морса—Смейла, трансверсальный границе $\partial U(S^2)$ и направленный на этой границе наружу (т. е. внутрь трубчатой окрестности $U(S^2)$). Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока Морса—Смейла определяет диффеоморфизм $f_2 : M^4 \to \mathbb{S}^4$. Согласовав диффеоморфизмы f_1, f_2 на границе $\partial U(S^2)$, получим требуемый A-диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ с одномерным растягивающимся аттрактором Λ_a на S^2. $\square$

Обсуждение и формулировки гипотез. В силу конструкций примеров, применяемых в доказательствах основных утверждений, растягивающиеся аттракторы произвольной коразмерности строятся на многообразиях, которые представляются в виде произведений других многообразий (в основном тор $\mathbb{T}^n$ или сфера $\mathbb{S}^n$). Отметим, что из результатов работы [10] следует, что на $\mathbb{S}^n$ не существует A-диффеоморфизма с растягивающимся аттрактором коразмерности один. В связи с этим можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Для любых $n \geqslant 4$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$, на $\mathbb{S}^n$ не существует A-диффеоморфизма с растягивающимся аттрактором коразмерности q.*

Относительно ориентируемых аттракторов интересно было бы рассмотреть следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *На $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ не существует A-диффеоморфизма с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности $q = 2$.*

Отметим, что на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, в силу следствия 2, существует структурно устойчивый диффеоморфизм с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности $q = 2$.

Интересно было бы рассмотреть следующую более общую гипотезу, из которой следовали бы две предыдущие.

Гипотеза 3. *Пусть A-диффеоморфизм замкнутого n-мерного многообразия M^n, $n \geqslant 4$, имеет растягивающийся аттрактор коразмерности $2 \leqslant q \leqslant n-2$. Тогда гомотопическая группа $\pi_{n-q}(M^n)$ нетривиальна.*

Эта гипотеза верна для $n \geqslant 3$, $q = 1$ (см. [10]), но неверна для $n = 3$, $q = 2$, поскольку на $\mathbb{S}^3$ существуют A-диффеоморфизмы с соленоидом Смейла в качестве растягивающегося аттрактора [26].

Очевидно, что если узел S^2 в теореме 4 тривиальный, то можно построить структурно устойчивый диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$. В связи с теоремой 4 можно сформулировать следующую проблему.

Проблема. Классифицировать одномерные заузленные (поверхностные) растягивающиеся аттракторы в $\mathbb{S}^4$ (решение должно включать инварианты вложения и инвариант Плыкина—Гринеса).

Мы рассматривали в данной работе аттракторы диффеоморфизмов. Разумеется, аналогичное рассмотрение можно провести для растягивающихся аттракторов A-потоков (т. е. потоков, удовлетворяющих аксиоме A Смейла). Однако для потоков, видимо, труднее найти содержательные результаты о связи между коразмерностью аттракторов и топологической структурой несущего многообразия. Наш пессимизм основан на примере авторов A-потока на 3-мерной сфере с неблуждающим множеством, состоящим из изолированной периодической отталкивающей траектории и растягивающимся аттрактором коразмерности один [11] (на 3-мерных многообразиях растягивающихся аттракторов коразмерности два A-потоков не бывает). Отметим, что в этом примере аттрактор может быть как перемешивающим, так и неперемешивающим [33].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. — М.: Наука, 1967.
2. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*. — С. 3–210.
3. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// В сб.: «Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы». — Киев: Инст. мат. АН УССР, 1970. — С. 39–44.
4. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах// Усп. мат. наук. — 1974. — *29*, № 6. — С. 163-164.
5. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 1// Тр. ММО. — 1975. — *32*. — С. 35–60.
6. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один// Докл. РАН. — 2000. — *374*. — С. 274–276.
7. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 3–66.
8. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — М.—Ижевск: РХД, 2011.
9. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: ГИИЛ, 1948.
10. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 83–104.
11. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* О двумерных растягивающихся аттракторах A-потоков// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 787–790.
12. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике. — М.—Ижевск: Инст. комп. иссл., 2013.
13. *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла// Мат. сб. — 1971. — *84*. — С. 301–312.
14. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 1974. — *94*. — С. 243–264.
15. *Плыкин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов// Усп. мат. наук. — 1984. — *39*, № 6. — С. 75–113.
16. *Хирш М.* Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.

17. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
18. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds// Math. Nachr. — 1983. — *112*. — C. 69–102.
19. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *154*. — C. 337–397.
20. *Farrel F. T., Jones L. E.* New attractors in hyperbolic dynamics// Diff. Geom. — 1980. — *15*. — C. 107–133.
21. *Farrel F. T., Jones L. E.* Expanding immesions on branched manifolds// Am. J. Math. — 1981. — *103*, № 1. — C. 41–101.
22. *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — *357*. — C. 617–667.
23. *Grines V., Zhuzhoma E.* Expanding attractors// Regul. Chaotic Dyn. — 2006. — *11*, № 2. — C. 225–246.
24. *Grines V., Zhuzhoma E.* Surface Laminaions and Chaotic Dynamical Systems. — Izhevsk: R&C Dynam., Inst. Comp. Sci., 2021.
25. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1977.
26. *Jiang B., Ni Y., Wang Sh.* 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2004. — *356*. — C. 335–346.
27. *Jones L. E.* Locally strange hyperbolic sets// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *275*, № 1. — C. 153–162.
28. *Jones L. E.* Anosov diffeomorphisms and expanding immersions. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — *294*, № 1. — C. 197–216.
29. *Ma J., Bin Yu.* The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds// Topology Appl. — 2007. — *154*. — C. 3021–3031.
30. *Ma J., Bin Yu.* Genus two Smale—Williams solenoid attractors in 3-manifolds// J. Knot Theory Ramifications. — 2011. — *20*, № 6. — C. 909–926.
31. *Mañé R.* A proof of C^1 stability conjecture// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1988. — *66*. — C. 161–210.
32. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* On the existence of codimension one non-orientable expanding attractors// J. Dyn. Contr. Syst. — 2005. — *11*, № 3. — C. 405–411.
33. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on three-manifolds// Nonlinearity. — 2022. — *35*. — C. 2192–2205.
34. *Robinson C.* Structural stability of C^1 diffeomorphisms// J. Differ. Equ. — 1976. — *22*, № 1. — C. 28–73.
35. *Robinson C.* Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
36. *Robinson C., Williams R.* Classification of expanding attractors: an example// Topology. — 1976. — *15*. — C. 321–323.
37. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*. — C. 741–817.
38. *Williams R.* Expanding attractors// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1974. — *43*. — C. 169–203.

Е. В. Жужома

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: medvedev-1942@mail.ru

UDC 517.9+513.8
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402
EDN: PPXEPN

On expanding attractors of arbitrary codimension

E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev

National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia

Abstract. Thanks to the works by R. V. Plykin and V. Z. Grines, the most studied expanding attractors are orientable attractors of codimension one of A-diffeomorphisms of multidimensional closed manifolds and one-dimensional attractors on closed surfaces. In this paper, we prove that there exist closed manifolds of any dimension, starting with three, admitting structurally stable diffeomorphisms and diffeomorphisms satisfying Smale's axiom A, with expanding attractors of arbitrary codimension. For some codimensions the type of manifolds is obtained.

Keywords: expanding attractor, A-diffeomorphism, closed manifold, attracting neighborhood.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The article was prepared as a result of the research conducted within the framework of the project “International Academic Cooperation” of the National Research University “Higher School of Economics,” except for the proof of the theorem 4, which was supported by the Russian Science Foundation (grant 22-11-00027). The authors thank the reviewer for useful comments that contributed to improving the text.

For citation: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On expanding attractors of arbitrary codimension,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 389–402. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402`

REFERENCES

1. D. V. Anosov, *Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny* [Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
2. D. V. Anosov, “Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny” [Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **90**, 3–210 (in Russian).
3. D. V. Anosov, “Ob odnom klasse invariantnykh mnozhestv gladkikh dinamicheskikh sistem” [On a class of invariant sets of smooth dynamic systems], In: *Tpudy pyatoy mezhdunapodnoy konfepentsii po nelineynym kolebaniyam. T. 2. Kachestvennye metody* [Proc. of the Fifth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations. V. 2. Qualitative Methods], Inct. mat. AN USSP, Kiev, 1970, pp. 39–44 (in Russian).
4. V. Z. Grines, “O topologicheskoy soppyazhennosti diffeomopfizmov dvumepnogo mnogoobpaziya na odnomernykh bazisnykh mnozhestvakh” [On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional basis sets], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1974, **29**, No. 6, 163-164 (in Russian).
5. V. Z. Grines, “O topologicheskoy sopryazhennosti diffeomorfizmov dvumernogo mnogoobraziya na odnomernykh orientiruemykh bazisnykh mnozhestvakh, 1” [On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basis sets. 1], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1975, **32**, 35–60 (in Russian).
6. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, “O grubykh diffeomorfizmakh s rastyagivayushchimisya attraktorami i szhimayushchimisya repellerami korazmernosti odin” [On structurally stable diffeomorphisms with

expanding attractors and contracting repellers of codimension one], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2000, **374**, 274–276 (in Russian).
7. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, “Strukturno ustoychivye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin” [Structurally stable diffeomorphisms with basis sets of codimension one], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2002, **66**, No. 2, 3–66 (in Russian).
8. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu diffeomorfizmov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to the Topological Classification of Diffeomorphisms on Manifolds of Dimensions Two and Three], RKhD, Moscow–Izhevsk, 2011 (in Russian).
9. W. Hurewicz and H. Wallman, *Teoriya razmernosti* [Dimension Theory], GIIL, Moscow, 1948 (Russian translation).
10. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, “O neorientiruemykh dvumernykh bazisnykh mnozhestvakh na 3-mnogoobraziyakh” [On nonorientable two-dimensional basis sets on 3-manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 6, 83–104 (in Russian).
11. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, “O dvumernykh rastyagivayushchikhsya attraktorakh A-potokov” [On two-dimensional stretching attractors of A-flows], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 787–790 (in Russian).
12. S. P. Kuznetsov, *Dinamicheskiy khaos i giperbolicheskie attraktory. Ot matematiki k fizike* [Dynamic Chaos and Hyperbolic Attractors. From Mathematics to Physics], Inst. Komp. Issl., Moscow—Izhevsk, 2013 (in Russian).
13. R. V. Plykin, “O topologii bazisnykh mnozhestv diffeomorfizmov Smeyla” [On the topology of basis sets of Smale diffeomorphisms], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **84**, 301–312 (in Russian).
14. R. V. Plykin, “Istochniki i stoki A-diffeomorfizmov poverkhnostey” [Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **94**, 243–264 (in Russian).
15. R. V. Plykin, “O geometrii giperbolicheskikh attraktorov gladkikh kaskadov” [On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1984, **39**, No. 6, 75–113 (in Russian).
16. M. Hirsch, *Differentsial’naya topologiya* [Differential Topology], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
17. S. Aranson, G. Belitsky, and E. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
18. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds,” *Math. Nachr.*, 1983, **112**, 69–102.
19. R. Bowen, “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **154**, 337–397.
20. F. T. Farrel and L. E. Jones, “New attractors in hyperbolic dynamics,” *Diff. Geom.*, 1980, **15**, 107–133.
21. F. T. Farrel and L. E. Jones, “Expanding immesions on branched manifolds,” *Am. J. Math.*, 1981, **103**, No. 1, 41–101.
22. V. Grines and E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2005, **357**, 617–667.
23. V. Grines and E. Zhuzhoma, “Expanding attractors,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, **11**, No. 2, 225–246.
24. V. Grines and E. Zhuzhoma, *Surface Laminaions and Chaotic Dynamical Systems*, R&C Dynam., Inst. Comp. Sci., Izhevsk, 2021.
25. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1977.
26. B. Jiang, Y. Ni, and Sh. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2004, **356**, 335–346.
27. L. E. Jones, “Locally strange hyperbolic sets,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1983, **275**, No. 1, 153–162.
28. L. E. Jones, “Anosov diffeomorphisms and expanding immersions. II,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1986, **294**, No. 1, 197–216.
29. J. Ma and Yu. Bin, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds,” *Topology Appl.*, 2007, **154**, 3021–3031.
30. J. Ma and Yu. Bin, “Genus two Smale—Williams solenoid attractors in 3-manifolds,” *J. Knot Theory Ramifications*, 2011, **20**, No. 6, 909–926.
31. R. Mañé, “A proof of C^1 stability conjecture,” *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 1988, **66**, 161–210.
32. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, “On the existence of codimension one non-orientable expanding attractors,” *J. Dyn. Contr. Syst.*, 2005, **11**, No. 3, 405–411.
33. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, “Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on three-manifolds,” *Nonlinearity*, 2022, **35**, 2192–2205.
34. C. Robinson, “Structural stability of C^1 diffeomorphisms,” *J. Differ. Equ.*, 1976, **22**, No. 1, 28–73.
35. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.

36. C. Robinson and R. Williams, “Classification of expanding attractors: an example,” *Topology*, 1976, **15**, 321–323.
37. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 741–817.
38. R. Williams, “Expanding attractors,” *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 1974, **43**, 169–203.

E. V. Zhuzhoma
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

V. S. Medvedev
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: medvedev-1942@mail.ru