Несущие многообразия многомерных диффеоморфизмов Морса–Смейла с седлами коразмерности один

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, седла коразмерности один, топологическая структура.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14476

Введение. Системы Морса–Смейла суть структурно устойчивые динамические системы с нулевой топологической энтропией (основные определения теории динамических систем см. в книгах [1]–[3]). Замечательным свойством этих систем является наличие глубокой взаимосвязи между динамическими свойствами и топологической структурой несущих многообразий (по системам Морса–Смейла см. фундаментальную монографию [4] и сравнительно недавний обзор [5]), и то, что они существуют на любых замкнутых многообразиях [6], [7]. Системы Морса–Смейла делятся на диффеоморфизмы Морса–Смейла (динамические системы с дискретным временем) и потоки Морса–Смейла (динамические системы с непрерывным временем). Здесь мы рассматриваем диффеоморфизмы Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$ на замкнутых ориентируемых n-мерных многообразиях M^n, $n \geqslant 4$.

Для формулировки основного результата дадим необходимые определения. Обозначим через $\mathbb{D}^m$ m-мерный замкнутый шар, гомеоморфный шару $x_1^2 + \dots + x_m^2 \leqslant 1$ в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Далее рассматриваются шары размерности $m \geqslant 2$. Ясно, что $\mathbb{D}^m$ можно представить в виде произведения $H_k^m = \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{m-k}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, которое называется m-мерной ручкой индекса k. Такое представление позволяет выделить специальную часть $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{m-k}$ границы $\partial\mathbb{D}^m$ шара $\mathbb{D}^m$ (иногда ее называют подошвой ручки). Пусть N^m — гладкое m-мерное многообразие с непустой $(m-1)$-мерной границей ∂N^m, и пусть задано гладкое вложение $\psi\colon \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{m-k} \to \partial N^m$. Отождествляя посредством ψ множества $\mathbb{S}^{k-1} \times \{\cdot\}$, $\psi(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{D}^{m-k})$, получаем многообразие $H_k^m \cup_\psi N^m$. Говорят, что $H_k^m \cup_\psi N^m$ получается приклеиванием ручки H_k^m к многообразию N^m (при помощи отображения ψ). Например, m-мерный полноторий $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{m-1}$ получается приклеиванием одной m-мерной ручки индекса 1 к m-мерному шару. Если к шару $\mathbb{D}^n$ приклеить $r \geqslant 1$ n-мерных ручек индекса 1, то получим компактное многообразие, которое называется *n-мерным телом с r ручками индекса* 1.

В статье доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть на замкнутом ориентируемом n-мерном многообразии M^n, $n \geqslant 4$, задан диффеоморфизм Морса–Смейла с седловыми периодическими точками коразмерности один* (*т.е. каждая седловая периодическая точка имеет сепаратрису коразмерности один и одномерные сепаратрисы*). *Тогда M^n является объединением двух n-мерных тел с ручками индекса* 1, *при этом границы тел либо совпадают*, *либо граница каждого тела лежит внутри другого тела. Более того*, *одно n-мерное тело содержит все стоковые периодические точки и все седла с индексом Морса единица*, *а второе n-мерное тело содержит все источниковые периодические точки и все седла с индексом Морса $n-1$.*

Отметим, что если седловых периодических точек нет, то $M^n = \mathbb{S}^n$ есть n-мерная сфера [8]. Если число седловых периодических точек равно 1 или 2, то либо $M^n = \mathbb{S}^n$, либо M^n есть объединение двух экземпляров многомерных полноториев $\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ [9], см. также [10]. При отсутствии гетероклинических пересечений теорема 1 доказана в [11]. Таким образом, основное утверждение обобщает соответствующие результаты указанных работ.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Основные определения. Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм замкнутого гладкого n-мерного ($n \geqslant 1$) многообразия M^n. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N_0 найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N_0$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $\mathrm{NW}(f)$. Очевидно, периодическая точка является неблуждающей. Периодическая точка $x_0 \in \mathrm{Per}(f)$, $f^q(x_0) = x_0$, называется *гиперболической*, если производная $Df^q(x_0)\colon T_{x_0}M^n \to T_{x_0}M^n$, рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя, не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Для гиперболической точки x_0 существуют так называемые устойчивое $W^s(x_0)$ и неустойчивое $W^u(x_0)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M^n$ таких, что $\varrho_M(f^{qk}x_0, f^{qk}y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$ соответственно, где ϱ_M – метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(x_0)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1}. Известно, что $W^s(x_0)$ и $W^u(x_0)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^s(x_0)}$, $\mathbb{R}^{\dim W^u(x_0)}$ соответственно, и являются инъективными погружениями последних в M^n

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если $\mathrm{NW}(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа периодических точек и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in \mathrm{NW}(f)$.

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Неподвижная гиперболическая точка $p \in \mathrm{NW}(f)$ называется *узлом*, если либо $\dim W^s(p) = n$ (в этом случае p является *стоком*), либо $\dim W^u(p) = n$ (в этом случае p является *источником*). Гиперболическая неподвижная точка $\sigma \in \mathrm{NW}(f)$ называется *седлом*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Если $\dim W^u(\sigma) = i$, то каждую компоненту множества $W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ будем называть *i-мерной неустойчивой сепаратрисой*, а каждую компоненту множества $W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ будем называть *$(n-i)$-мерной устойчивой сепаратрисой*. Седло $\sigma \in \mathrm{NW}(f)$ называется *седлом коразмерности один*, если одна из его сепаратрис одномерная. Из того, что точка разбивает одномерное евклидово пространство, но не разбивает евклидово пространство большей размерности следует, что одномерное (устойчивое или неустойчивое) многообразие седловой периодической точки состоит из самой седловой точки и двух одномерных сепаратрис, а i-мерное многообразие при $i \geqslant 2$ состоит из седловой точки и одной i-мерной сепаратрисы.

Пусть $W^\tau(\sigma)$ – инвариантное многообразие седла σ размерности $i \geqslant 1$, где τ означает символ u или s. Если $i \geqslant 2$, то обозначим через $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ сепаратрису седла σ, принадлежащую $W^\tau(\sigma)$. Если $i = 1$ (т.е. инвариантное многообразие $W^\tau(\sigma)$ одномерное), то $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ означает одну из двух сепаратрис, которые при необходимости мы будем обозначать через $W^\tau_{\mathrm{sep},1}(\sigma)$, $W^\tau_{\mathrm{sep},2}(\sigma)$. Будем говорить, что сепаратриса $W^\tau_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ *не имеет гетероклинических пересечений*, если она не пересекается с другими сепаратрисами.

Известно, что на замкнутом многообразии диффеоморфизм Морса–Смейла имеет хотя бы один сток и хотя бы один источник [6]. Нам понадобятся следующие известные утверждения, см. [5]–[7].

Предложение 1. *Пусть $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ – d-мерная сепаратриса седла σ диффеоморфизма Морса–Смейла, не имеющая гетероклинических пересечений. Тогда $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ принадлежит области притяжения $W^s(p)$ (соответственно отталкивания $W^u(p)$) ровно одной стоковой (соответственно источниковой) периодической точки p. Более того, если $d \geqslant 2$, то топологическое замыкание $\operatorname{clos} W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ сепаратрисы $W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma)$ равно*

$$\operatorname{clos} W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma) = W^{u(s)}_{\mathrm{sep}}(\sigma) \cup \{p\}$$

и является топологически вложенной d-мерной сферой. Если $d = 1$ и каждая одномерная сепаратриса $W^{u(s)}_{\mathrm{sep},j}(\sigma)$, $j = 1, 2$, принадлежит области притяжения $W^s(p_j)$ (соответственно отталкивания $W^u(p_j)$) ровно одной стоковой (соответственно источниковой) *периодической точки* p_j, *то топологическое замыкание* $\operatorname{clos}\bigl(W^{u(s)}_{\mathrm{sep},1}(\sigma)\cup W^{u(s)}_{\mathrm{sep},2}(\sigma)\bigr)$ *есть либо топологически вложенный замкнутый сегмент при* $p_1\neq p_2$, *либо топологически вложенная окружность при* $p_1=p_2$.

Предложение 2. *Пусть* $f\colon M^n\to M^n$ *– диффеоморфизм Морса–Смейла. Тогда*

1) $M^n=\bigcup_{p\in \mathrm{NW}(f)}W^u(p)=\bigcup_{p\in \mathrm{NW}(f)}W^s(p)$;
2) *если* f *имеет хотя бы одну седловую точку, то для любого стока* ω *существует седло* σ *такое, что* $\omega\in\operatorname{clos}(W^u(\sigma))$;
3) $\operatorname{clos}(\ell^u_q)\setminus(\ell^u_q\cup q)=\bigcup_{p\in \mathrm{NW}(f)\colon \ell^u_q\cap W^s(p)\neq\varnothing}W^u(p)$ *для компоненты связности* ℓ^u_q *множества* $W^u(q)\setminus q$, $q\in \mathrm{NW}(f)$.

Обозначим $\alpha(f)$, $\omega(f)$ и $\sigma(f)$ источники, стоки и седла диффеоморфизма $f\colon M^n\to M^n$ соответственно. Далее считаем, что $\sigma(f)$ состоит только из седел коразмерности один. Разобьем $\sigma(f)$ на множество $\sigma_1(f)$ седел с индексом Морса 1 и множество $\sigma_{n-1}(f)$ седел индекса Морса $n-1$. Следуя [8], введем следующие множества:

$$A(f)=\omega(f)\bigcup_{\sigma\in\sigma_1(f)}W^u(\sigma),\qquad R(f)=\alpha(f)\bigcup_{\sigma\in\sigma_{n-1}(f)}W^s(\sigma).$$

В работе [8] доказано следующее утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем (на самом деле в [8] доказано более общее утверждение, но мы ограничимся требуемой нам частью).

Предложение 3. *Множества* $A(f)$, $R(f)$ *являются линейно связным аттрактором и линейно связным репеллером соответственно диффеоморфизма* f, *причем множество* $M^n\setminus(A(f)\cup R(f))$ *связное и состоит из блуждающих точек. Более того, топологические замыкания фундаментальных областей бассейнов множеств* $A(f)$, $R(f)$ *гомеоморфны, причем гомеоморфны кобордизму с двумя граничными компонентами, каждая из которых есть граница* n*-тела с ручками индекса* 1.

Напомним определение связной граничной суммы многообразий. Пусть M_1^n, M_2^n – n-мерные многообразия с непустыми границами ∂M_1^n, ∂M_2^n. Тогда их (обычная) связная сумма $\partial M_1^n\sharp\partial M_2^n$ представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие, которое получается отождествлением границ некоторых удаленных $(n-1)$-мерных дисков $d_1^{n-1}\subset\partial M_1^n$, $d_2^{n-1}\subset\partial M_2^n$ из ∂M_1^n, ∂M_2^n соответственно. Полученное после этого отождествления многообразие называется *связной граничной суммой* многообразий M_1^n, M_2^n, и обозначается через $M_1^n\natural M_2^n$.

Нам понадобится следующее (скорее всего, известное) утверждение.

Лемма 1. *Граничная связная сумма* n*-тел с ручками индекса* 1 *является* n*-телом с ручками индекса* 1.

Доказательство. Достаточно показать, что граничная связная сумма двух замкнутых n-мерных шаров $\mathbb{D}_1^n$, $\mathbb{D}_2^n$ является n-мерным шаром. Шар $\mathbb{D}_i^n$ можно представить в виде произведения $\mathbb{D}_i^{n-1}\times[0;1]$, $i=1,2$. Тогда граничная связная сумма шаров $\mathbb{D}_1^n$, $\mathbb{D}_2^n$ получается отождествлением дисков $\mathbb{D}_1^{n-1}\times\{1\}$, $\mathbb{D}_2^{n-1}\times\{0\}$. Нетрудно видеть, что такое отождествление гомеоморфно $\mathbb{D}^{n-1}\times[0;2]$, т.е. n-шару.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f\colon M^n\to M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого n-мерного многообразия M^n, $n\geqslant 4$, у которого все седловые периодические точки имеют сепаратрисы коразмерности один (следовательно, имеют одномерные сепаратрисы). Не уменьшая общности, можно считать, что все периодические седловые точки являются неподвижными точками, а диффеоморфизм f сохраняет ориентацию (в противном случае мы перейдем к некоторой итерации).

Рассмотрим сначала случай, когда существует седло, скажем σ, такое, что одномерные сепаратрисы седла σ не пересекаются с сепаратрисами других седел (т.е. не имеют гетероклинических пересечений) и топологическое замыкание этих сепаратрис образует сегмент. Тогда теорема доказывается методом математической индукции по числу седел следующим образом. Для числа седел 1 и 2 результат доказан в [9]. Предположим, что результат верен для числа седел $k \geqslant 2$. Сегмент l, образованный замыканием одномерных сепаратрис, имеет окрестность $U(l)$, гомеоморфную n-мерному шару. Предположим для определенности, что индекс Морса седла σ равен единице. Поскольку узлы, лежащие в концевых точках сегмента l, являются стоками, существует $U(l)$, являющаяся захватывающей областью. Тогда можно модифицировать f внутри $U(l)$ так, чтобы модифицированный f имел внутри $U(l)$ только один сток. Так как число седел уменьшилось на единицу, предположение индукции дает требуемый результат.

Осталось рассмотреть случай, когда не существует седла, у которого одномерные сепаратрисы не имеют гетероклинических пересечений и их топологическое замыкание образует сегмент. Другими словами, если одномерные сепаратрисы седла не имеют гетероклинических пересечений, то их замыкание образует окружность, содержащую данное седло и некоторый узел. Мы построим n-мерное тело, которое содержит все стоки и все седла с индексом Морса единица. Из конструкции будет вытекать, что это тело является захватывающей окрестностью инвариантного замкнутого аттрактора $A(f)$. Аналогичным образом строится n-мерное тело, которое содержит все источниковые периодические точки и все седла с индексом Морса $n-1$ (мы это построение опустим).

Разобьем седла с индексом Морса единица на следующие три группы Σ_0, Σ_1, Σ_2, где Σ_i – седла, у которых i одномерных сепаратрис имеют гетероклинические пересечения, $i=0,1,2$. Пусть $\omega_1,\dots,\omega_l$ – стоки диффеоморфизма f. В силу гиперболичности стоков, каждый сток ω_j имеет захватывающую окрестность U_j, $j=1,\dots,l$, гомеоморфную n-мерному шару. Не уменьшая общности, можно считать, что граница ∂U_j шара U_j является гладко вложенной $(n-1)$-сферой. Так как $n\geqslant 4$, топологическое замыкание любой одномерной сепаратрисы без гетероклинических пересечений является плоско вложенным отрезком. Поэтому одномерные неустойчивые сепаратрисы любого седла из Σ_0 образуют локально плоско вложенную окружность. Это позволяет построить сначала n-мерные тела $B_1,\dots,B_t$ для всех букетов окружностей, образованных замыканиями одномерных неустойчивых сепаратрис седел из Σ_0 таких, что $B_1,\dots,B_t$ являются замкнутыми захватывающими окрестностями соответствующих букетов.

Пусть $W^u(\sigma_0)$ – неустойчивое многообразие некоторого седла σ_0 из $\Sigma_1\cup\Sigma_2$. Тогда $W^u(\sigma_0)$ состоит из одномерных неустойчивых сепаратрис S_1, S_2. Из предложения 2 вытекает, что каждая сепаратриса S_1, S_2 пересекает границу одного из тел $B_1,\dots,B_t$. Обозначим через q_i первую точку пересечения S_i с границей одного из тел $B_1,\dots,B_t$, $i=1,2$. Не уменьшая общности, можно считать это пересечение в токах q_1, q_2 трансверсальным. Обозначим через $[q_1,q_2]^u$ дугу неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_0)$ между точками q_1, q_2. Предположим, что q_i принадлежит границе тела B_i. Поскольку седло σ_0 имеет устойчивое многообразие коразмерности 1, то $[q_1,q_2]^u$ имеет трубчатую окрестность T_{12}, гомеоморфную $\mathbb{D}^1\times\mathbb{D}^{m-1}$, и такую, что $B_1\cup T_{12}\cup B_2$ является захватывающей окрестностью. Отметим, что в силу построения захватывающая окрестность $B_1\cup T_{12}\cup B_2=B_{12}$ содержит неустойчивое многообразие $W^u(\sigma_0)$ седла σ_0. Из леммы 1 следует, что B_{12} является телом с ручками индекса 1. Продолжая это построение для всех седел из $\Sigma_1\cup\Sigma_2$, получим n-мерное тело, содержащее все стоки и все седла с индексом Морса единица, и являющееся притягивающей компактной окрестностью множества $A(f)$.

Аналогично строится n-мерное тело C_{12} с ручками индекса 1, которое содержит все источники и все седла с индексом Морса $n-1$, и которое является притягивающей компактной окрестностью множества $R(f)$. Согласно предложению 3 замыкания фундаментальных областей гомеоморфны, причем гомеоморфны кобордизму с двумя граничными компонентами, каждая из которых есть граница n-тела с ручками индекса 1. Поскольку бассейны множеств $A(f)$, $R(f)$ суть построенные n-тела с ручками индекса 1, отсюда вытекает требуемый результат.

Авторы благодарят А. Ноздринова за помощь при подготовке рукописи. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в лабораторном проекте “Развитие и применение методов теории динамических систем к физическим моделям”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, Transl. Math. Monogr., **153**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1996. **[2]** V. Grines, E. Zhuzhoma, *Surface Laminaions and Chaotic Dynamical Systems*, Moscow–Izhevsk, 2021. **[3]** C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999. **[4]** В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, РХД, М.–Ижевск, 2011. **[5]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, *УМН*, **74**:1 (445) (2019), 41–116. **[6]** S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49. **[7]** S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817. **[8]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Сборник статей, Труды МИАН, **271**, Наука, М., 2010, 111–133. **[9]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Матем. заметки*, **109**:3 (2021), 361–369. **[10]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386. **[11]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Порядок и хаос в динамических системах*, Сборник статей, Труды МИАН, **297**, Наука, М., 2017, 201–210.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило
15.07.2024
Принято к публикации
20.07.2024

В. С. Медведев
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: medvedev@uic.nnov.ru