Ультрарасширения инфинитарных функций

Н. Л. Поляков

Ультрарасширения унарных и бинарных функций и отношений рассматривались начиная с 30-х годов XX века. Результаты нашли применение в комбинаторике, модальной логике и др. Ультрарасширения моделей первого порядка изучались в [**1**]. Мы показываем, что операция ультрарасширения может быть распространена на непрерывные (относительно Бэровской топологии) функции $f : \omega^\omega \to \omega$. Конструкция имеет отношение к порядкам Рудин-Кейслера и Комфорта и может быть использована для получения результатов рамсеевского типа.

Множество $\mathcal{B}$ непрерывных функции $f : \omega^\omega \to \omega$ допускает следующую ординальную иерархию: $\mathcal{B}_0$ есть множество всех постоянных функций $f : \omega^\omega \to \omega$; и для каждого $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\mathcal{B}_{<\alpha} = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{B}_\gamma$ и $\mathcal{B}_\alpha = \{f \in \omega^{\omega^\omega} : (\forall x \in \omega)\, f_{(x)} \in \mathcal{B}_{<\alpha}\}$, где $f_{(x)}(x_1, x_2, \ldots) = f(x, x_1, x_2, \ldots)$ для всех $x, x_1, x_2, \ldots \in \omega$. Тогда $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$.

Для каждой функции $f \in \mathcal{B}$ ее ультрарасширение $\widetilde{f} : (\beta\omega)^\omega \to \beta\omega$ определяется так: если $f \in \mathcal{B}_0$ и $f(\mathbf{x}) \equiv n$, то $\widetilde{f}$ есть постоянная функция, значение которой есть главный ультрафильтр, порожденный n; если $0 < \alpha < \omega_1$, $f \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots \in \beta\omega$, то $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots) = \{S \subseteq \omega : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X)\, S \in \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots)\}$.

Следующая теорема развивает результаты из [**2**]. Ранг функции $f \in \mathcal{B}$ есть ординал $\operatorname{rank} f = \min\{\alpha < \omega_1 : f \in \mathcal{B}_\alpha\}$. Для каждого $\alpha > 0$ определим множество $\mathcal{BU}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\alpha$: $f \in \mathcal{BU}_1$ т.т.т. $f(x_0, x_1, \ldots) = g(x_0)$ для некоторой инъекции $g : \omega \to \omega$; $f \in \mathcal{BU}_\alpha$, $\alpha > 1$, т.т.т. (а) $f(x_0, x_1, \ldots) = f(y_0, y_1, \ldots) \Rightarrow x_0 = y_0$, (б) последовательность $\{\operatorname{rank} f_{(i)}\}_{i<\omega}$ не убывает и конфинальна в α и (в) $(\forall x \in \omega)\, f_{(x)} \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathcal{BU}_\gamma$.

Теорема. *Для любого $\mathfrak{u} \in \beta\omega \setminus \omega$ следующие условия равносильны:*
(i) $\mathfrak{u}$ есть RK-минимальный ультрафильтр,
(ii) для любого счетного ординала α и функции $f \in \mathcal{B}_\alpha$ существуют ординал γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, и функция $g \in \mathcal{BU}_\gamma \cup \mathcal{B}_0$, для которых $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots) = \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots)$.

Рангом непрерывной функции $\varphi : \omega^\omega \to \omega^\omega$ назовем ординал $\sup\{\operatorname{rank} \pi_i \circ \varphi : i < \omega\}$, где π_i есть i-ая проекция. Функцию $\varphi : \omega^\omega \to \omega^\omega$ назовем *сжимающей*, если $\varphi(\mathbf{x})$ есть подпоследовательность $\mathbf{x}$ для каждой последовательности $\mathbf{x} \in \omega^\omega$.

Следствие (каноническая теорема Рамсея для инфинитарных функций). *Для любого счетного ординала α и функции $f \in \mathcal{B}_\alpha$ существуют множество $X \in \mathfrak{u}$, ординал γ, $0 < \gamma \leq \alpha$, функция $g \in \mathcal{BU}_\gamma \cup \mathcal{B}_0$ и сжимающая непрерывная (относительно Бэровской топологии) функция $\varphi : \omega^\omega \to \omega^\omega$ ранга не более α, для которых $f(\mathbf{x}) = g(\varphi(\mathbf{x}))$ для любой возрастающей последовательности $\mathbf{x} \in X^\omega$.*

Литература

[1] Poliakov N.L., Saveliev D.I., On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic, v.60, 625–681 (2021).

[2] Polyakov N.L., On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters. Doklady Mathematics, to appear (2023).

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва (Россия)
E-mail: npolyakov@hse.ru