Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

13–17 ноября 2023 г.

Тезисы докладов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ

Международный математический центр
в Академгородке

Новосибирск • 2023

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 13–17, 2023

Collection of Abstracts

MATHEMATICAL
CENTER IN AKADEMGORODOK

International Mathematical Center
in Akademgorodok

Novosibirsk • 2023

Содержание

I. Пленарные доклады

Квантовые симметрии и поднятие локально отталкивающих объектов

А. С. Гордиенко

Когда аффинная алгебраическая группа действует на аффинном алгебраическом многообразии, алгебра регулярных функций на многообразии является коммутативной комодульной алгеброй над коммутативной алгеброй Хопфа регулярных функций на группе и модульной алгеброй над (являющейся кокоммутативной алгеброй Хопфа) универсальной обёртывающей алгебры Ли данной группы. Такие действия называются классическими симметриями. В случае же когда необязательно (ко)коммутативная алгебра Хопфа (ко)действует на необязательно коммутативной алгебре, можно говорить о квантовых симметриях (возможно, некоммутативного) многообразия. При классификации квантовых симметрий находят своё применение универсальная группа градуировки, введённая И. Патерой и Х. Цассенхаузом, универсальные алгебры Хопфа заданной (ко)модульной структуры, а также универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа Ю. И. Манина — М. Свидлера — Д. Тамбары. Все перечисленные объекты являются универсальными отталкивающими и притягивающими объектами в соответствующих категориях. Однако в общем случае такие объекты существуют далеко не всегда, и, чтобы обеспечить их существование, вводится понятие носителя, которое обобщает понятие носителя градуировки и используется для того, чтобы задать ограничение на рассматриваемые объекты. При этом сами задачи о существовании универсальных объектов становятся частными случаями задачи о поднятии локально отталкивающего объекта, которая несложно формулируется на чисто категорном языке. На этом же языке можно сформулировать и теорему двойственности между универсальными действующим и кодействующим объектами. Существование поднятия локально отталкивающего объекта также оказывается возможным доказать категорно, наложив на базовую заплетённую или симметрическую моноидальную категорию некоторые условия. В качестве следствий, когда базовая категория является категорией векторных пространств над полем, множеств или двойственной к ним, получаются уже известные результаты о существовании вышеперечисленных универсальных объектов и двойственности между ними. Разработанная теория применяется и в новых случаях, в частности, когда базовая категория сама является категорией модулей над кокоммутативной алгеброй Хопфа, комодулей над коммутативной алгеброй Хопфа, категорией модулей Йеттера — Дринфельда, градуированных множеств или множеств с действием группы. (Часть совместного проекта с А. Агоре и Й. Веркрёйссе.)

Московский государственный университет, Москва (Россия)

Предтабличность и интерполяция

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Мы рассматриваем интерполяционное свойство Крейга CIP в предтабличных логиках [**1**].

Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной алгеброй. Логика называется *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

Проблема табличности разрешима над интуиционистской логикой Int и ее позитивным фрагментом. Решение основано на описании предтабличных логик, т.е. максимальных нетабличных логик. В [**2**] Л.Л. Максимовой доказано, что существуют в точности три предтабличные суперинтуиционистские логики, причем все они разрешимы. Результат существенно использует теорему А.В. Кузнецова о финитной аппроксимируемости предтабличных суперинтуиционистских логик [**3**]; в этой же работе были введены термины *табличные* и *предтабличные* логики.

Все предтабличные позитивные логики были описаны М.И. Верхозиной [**4**]. Доказано, что существуют точно две предтабличные логики над Int^+.

В работе [**5**] решена проблема табличности и описаны все предтабличные расширения минимальной логики. Всего предтабличных логик над минимальной логикой оказалось семь, найдены их аксиоматизация и семантическая характеризация. Все они разрешимы и узнаваемы.

В классе модальных логик найдены все предтабличные логики над S4. Л.Л. Максимовой в [**6**] доказано, что существует точно пять предтабличных расширений модальной логики S4. Заметим для сравнения, что существует континуум предтабличных расширений модальной логики K4 [**7**], а проблема табличности в модальных логиках неразрешима [**8**].

Говорим, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга* CIP [**1**], если она удовлетворяет условию: если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ (здесь списки $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

В [**9**] Л.Л. Максимовой описаны все суперинтуиционистские и позитивные логики с интерполяционным свойством Крейга CIP. Точно две предтабличные суперинтуиционистские логики и точно одна предтабличная позитивная логика обладают CIP.

В классе модальных логик ровно три предтабличных расширений логики S4 обладают интерполяционным свойством Крейга [**10**].

Доказано, что пять из семи предтабличных логик над минимальной логикой обладают интерполяционным свойством Крейга CIP, и две не имеют CIP [**11, 12**].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0011).

Литература

[1] Craig W. Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory. J. Symbolic Logic, 22 (1957), 269–285.

[2] Максимова Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики. Алгебра и логика, 11, № 5 (1972), 558–570.

[3] Кузнецов А.В. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр. XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971, 255–256.

[4] Верхозина М.И. Промежуточные позитивные логики. Алгоритмические вопросы алгебраических систем. Иркутский госуниверситет, (1978), 13–25.

[5] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. Проблема табличности над минимальной логикой, Сибирский математический журнал, т. 57, 6 (2016), 1320–1332.

[6] Максимова Л.Л. Предтабличные расширения логики S4 Льюиса, Алгебра и логика, 14, № 1 (1975), 28–55.
[7] Blok W.J. Pretabular varieties of modal algebras. Studia Logica **39**(2–3), 101–124 (1980).
[8] Чагров А.В. Нетабличность – предтабличность, антитабличность, коантитабличность. Алгебро-логические конструкции : сб. науч. тр. / Калин. гос. ун-т. 1989, 105–111.
[9] Максимова Л.Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия. Алгебра и логика, 16, № 6 (1977), 643–681.
[10] Gabbay D.M., Maksimova L. Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics. Clarendon Press, Oxford, 2005.
[11] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. Предтабличность и интерполяционное свойство Крейга над минимальной логикой, СЭМИ, 20 (2023), № 1, 245–250.
[12] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. Интерполяционное свойство Крейга в предтабличных логиках, СМЖ, (2023).

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru; yun@math.nsc.ru

Ширина Бэра–Судзуки некоторых теоретико-групповых классов

Д. О. Ревин

Тематика доклада восходит к известной теореме Бэра–Судзуки: *если p -простое число, то p-радикал (т.е. наибольшая нормальная p-подгруппа) любой конечной группы состоит из таких элементов x, что любые два сопряженных с x элемента порождают p-подгруппу.* Эквивалентная формулировка дает полностью аналогичную характреризацию нильпотентного радикала конечной группы.

В [**1, 2**] независимыми группами математиков доказано, что в любой конечной группе разрешимый радикал состоит из таких элементов x, что любые *четыре* сопряженных с x элемента порождают разрешимую подгруппу. Уменьшить число *четыре* не только до *двух*, но даже до *трех* нельзя.

Такого рода аналоги теоремы Бэра–Судзуки имеет смысл изучать для радикалов конечных групп, соответствующих классам $\mathfrak{X}$ с определенными свойствами замкнутости, а именно, замкнутых относительно взятия изоморфных образов, подгрупп и произведений нормальных подгрупп. Для класса $\mathfrak{X}$ с перечисленными свойствами любая конечная группа G обладает $\mathfrak{X}$-*радикалом* — наибольшей нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппой $G_{\mathfrak{X}}$ ($\mathfrak{X}$-*группой* называют группы, принадлежащие $\mathfrak{X}$) и определена *ширина Бэра–Судзуки класса* $\mathfrak{X}$. Согласно [**3**] это ординал $\mathrm{BS}(\mathfrak{X}) \in \omega \cup \{\omega\}$, задаваемый следующим свойством: $\mathrm{BS}(\mathfrak{X}) \leqslant m$ для $m \in \omega$, если в любой конечной группе G выполнено равенство

$$G_{\mathfrak{X}} = \{x \in G \mid \langle x_1, \dots, x_m \rangle \in \mathfrak{X} \text{ для любых } x_1, \dots, x_m, \text{ сопряженных с } x\}. \qquad (1)$$

Если же для любого $m \in \omega$ найдется конечная группа G, для которой (1) нарушается, то по пределению $\mathrm{BS}(\mathfrak{X}) = \omega$.

Например, ширина Бэра–Судзуки класса всех конечных групп равна нулю, класса групп порядка 1 — единице, класса p-групп или класса нильпотентных групп — двойке, класса разрешимых групп — четверке и т.д. Н. Гордеев, Ф. Груневальд, Б. Кунявский и Е. Плоткин [**3**] предложили изучить классы конечных групп с конечной шириной Бэра–Судзуки. Основной результат доклада состоит в том, что *если*, подобно классу разрешимых групп или классу p-групп, *класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений, то* $\mathrm{BS}(\mathfrak{X}) < \omega$. Будут обсуждаться также уточнения этого результата применительно к конкретным классам конечных групп.

Литература

[1] Flavell P., Guest S., Guralnick R., Characterizations of the solvable radical, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:4 (2010), 1161–1170.

[2] Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E., From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical, *J. Algebra*, **323**:10 (2010), 2888–290.

[3] Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E., A description of Baer–Suzuki type of the solvable radical of a finite group, *J. Pure Appl. Algebra* **213**:2 (2009) 250–258.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: revin@math.nsc.ru

О проблеме соответствия Поста для свободных групп

В. А. Романьков

Проблема соответствия Поста (Post Correspondence Problem – PCP) — это вопрос о существовании алгоритма, который двум произвольным гомоморфизмам $\varphi, \psi : \Sigma_n \to \Sigma_m$ свободных моноидов определяет существование неединичного элемента $g \in \Sigma_n$ такого, что $\varphi(g) = \psi(g)$. PCP — это одна из наиболее известных и полезных для приложений в компьютерных науках алгоритмически неразрешимых проблем. Ее неразрешимость установлена Э. Постом в 1946 году. В настоящей работе рассматривается аналог PCP для свободных групп. Искомый алгоритм должен определить по произвольным гомоморфизмам $\varphi, \psi : F_n \to F_m$ свободных групп существование неединичного элемента $g \in F_n$ такого, что $\varphi(g) = \psi(g)$. В случае пары не инъективных гомоморфизмов φ и ψ легко доказывается существование такого решения g. В частном случае, когда $n = m$, а φ и ψ автоморфизмы, PCP сводится у случаю, когда один из автоморфизмов, скажем, ψ, тождественный и нужно определить нетривиальность группы фиксированных точек $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{g \in F_n | \varphi(g) = g\}$. Эта задача, как показано О. Богопольским и О. Маслаковой в [**1**], алгоритмически разрешима. Совсем недавно Ж.-П. Мутангуха [**2**] топологическими методами доказал вычислимость $\mathrm{Fix}(\varphi)$ для произвольного эндоморфизма φ группы $F_n, n \geq 2$. Отсюда следует разрешимость PCP, если $F_n = F_m$ и хотя бы один из эндоморфизмов φ, ψ — автоморфизм. Данная проблема для свободных групп хорошо известна и давно привлекает внимание исследователей. Аналоги PCP рассматривались также для различных классов групп. Разрешимость PCP установлена автором для конечно порожденных нильпотентных групп в [**3**], а также автором и А. Г. Мясниковым для конечно порожденных метабелевых и полициклических групп (см. [**4**]). Основным результатом доклада является

Теорема. *PCP алгоримически разрешима для любой пары инъективных (при $n = 2$ – любой пары) гомоморфизмов φ и ψ.*

Работа выполнена за счет РНФ (проект 22-21-00745).

Литература

[1] Bogopolski O., Maslakova O., An algorithm for finding a basis of the fixed point subgroup of an automorphism of a free group, Internat. J. Algebra Comput. 26(2016), no. 1, 29–67.

[2] Mutanguha J.-P., Constructing stable images, Max-Planck-Institut fur Mathematik, Preprint Series 2021 (41), Bonn, Germany.

[3] Romankov V.A., On the solvability of equations with endomorphisms in nilpotent groups, SEMR, 13 (2016), 716–725.

[4] Roman'kov V.A., The Post Correspondence Problem in metabelian and polycyclic groups, Materiali conf. "Algebra and math logic: theory and appl.", 32, Kazan, KFU, 2014, 176 p.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Омск (Россия)
E-mail: romankov48@mail.ru

Рекурсивная неотделимость в модальных и суперинтуиционистских предикатных логиках

М. Н. Рыбаков

Известно, что для многих естественных модальных и суперинтуиционистских предикатных логик результаты о неразрешимости получаются при одной-двух (иногда больше) одноместных предикатных буквах и двух-трёх предметных переменных в языке. При этом в случае двух и более одноместных предикатных букв или трёх предметных переменных часто остаётся открытым вопрос об алгоритмической сложности фрагментов с меньшим их числом.

Недавно В. Б. Шехтманом был задан вопрос о рекурсивной отделимости монадического фрагмента некоторой логики L и монадического фрагмента дополнения логики L_{wfin}, определяемой классом конечных шкал Крипке логики L (под L понимается прежде всего «естественная» логика, вроде **QInt**, **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4** и др.) Поиск ответа на этот вопрос привёл к общим результаты о неразрешимости монадических фрагментов многих модальных и суперинтуиционистских предикатных логик, причём во многих случаях при всего лишь одной унарной предикатной букве и двух предметных переменных в языке.

Пусть логики L и L' таковы, что $L \subseteq L'$; будем называть их *рекурсивно неразличимыми*, если не существует такого рекурсивного множества формул X, что $L \subseteq X \subseteq L'$. Несложно понять, что из рекурсивной неразличимости двух логик следует неразрешимость каждой логики, находящейся между ними.

Теорема 1. *Пусть L — одна из логик* **QGL.3.bf**, **QGrz.3.bf**, **S4.bd$_2$.bf**, **S5**. *Тогда фрагменты с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными логик* **QK** *и L_{wfin} рекурсивно неразличимы.*

Теорема 2. *Пусть L — одна из логик* **QGL.bf**, **QGrz.bf**, **QKTB**. *Тогда фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик* **QK** *и L_{wfin} рекурсивно неразличимы.*

Теорема 3. *Позитивные фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик* **QInt** *и* **QKC.cd$_{wfin}$** *рекурсивно неразличимы.*

Отметим также, что несложные рассуждения позволяют затем показать, что если L — одна из логик **QInt**, **QKC**, **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4**, **QGL**, **QGrz**, и др., то её фрагмент от одной унарной предикатной буквы и двух предметных переменных является Σ^0_1-полным, а аналогичный фрагмент логики L_{wfin} является Π^0_1-полным.

В докладе предполагается обсудить эти и некоторые близкие результаты, а также методы их получения.

ИППИ РАН, Москва (Россия)
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Диаметры конечных групп и связанных с ними графов

С. В. Скресанов

В 1992 году Л. Бабаи задал следующий вопрос о диаметрах графов Кэли (напомним, что диаметром называется наибольшее возможное расстояние между парой вершин графа):

Верно ли, что диаметр любого связного графа Кэли неабелевой простой группы G ограничен $(\log|G|)^C$, где C — универсальная константа, не зависящая от группы?

Долгое время вопрос не удавалось решить ни для одного бесконечного класса простых групп, пока в прорывной работе Г. Хельфоггта в 2008 году не был решён случай графов Кэли над простыми группами $\mathrm{PSL}_2(p)$. Эта работа открыла новое направление в теории групп, смежное с аддитивной комбинаторикой и теорией чисел, и имеющее многочисленные приложения. В докладе планируется дать краткий обзор текущего состояния области, будет рассказано о приложениях диаметров групп к теории чисел, теории моделей и теории групп подстановок. Будут даны и результаты автора в этом направлении.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск (Россия)
E-mail: skresan@math.nsc.ru

The spectra of almost simple exceptional groups of Lie type

M. A. Grechkoseeva

The spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of the orders of elements of G. About 15 years ago V.D. Mazurov posed the following conjecture: if L is a finite nonabelian simple group of Lie type of sufficiently large Lie rank and G is a finite group such that $\omega(G) = \omega(L)$, then, up to isomorphism, we have $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$, that is, G is an almost simple group with socle L. The proof of this conjecture was completed in 2015, and that naturally suggested the question of how to find the spectra of finite almost simple groups of Lie type.

The finite simple groups of Lie type are divided into two classes: the classical groups and the exceptional groups. The classical groups can be obtained from suitable matrix groups, and the geometry of the underlying vector space can be used to work with automorphisms and calculate their orders. In the talk, we discuss how to calculate the orders of elements in almost simple exceptional groups and, in particular, what one can use instead of the above geometry (based on joint work with A. A. Buturlakin).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

Identities of vector spaces and nonassociative linear algebras

A. V. Kislitsin

Let F be a field, A be an linear associative F-algebra and E is a subspace in A (but E not necessary subalgebra of A) which generates A as a linear F-algebra. In this case, we call E a *multiplicative vector space* (in short, an *L-space*) over the field F. The algebra A will be called *enveloping* for the space E, and the space E will be called *embedded* into the algebra A.

The identity of an L-space E over a field F (embedded into an F-algebra A) is an associative polynomial $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ which equal to zero in A if, instead of its variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ we substitute any elements from E. The identity of the multiplicative vector space E (with the enveloping algebra A) can be considered as a weak identity of the pair (A, E). The pair (A, E) in this case will be called a *multiplicative vector pair*.

Let $G \subseteq F\langle X\rangle$. The class of all multiplicative vector pairs of the form (A, E) satisfying all the identities of the set G is called an *L-variety* defined by the set of identities G. If G is a basis of identities in the space E, then the L-variety defined by the set of identities G called the L-variety *generated by the space E*.

In this report, the main results on multiplicative vector spaces, identities of multiplicative vector spaces and L-varieties are presented. We also present the consequences of the obtained results for non-associative linear algebras.

Altai State Pedagogical University, Barnaul (Russia); Dostoevsky Omsk State University, Omsk (Russia)
E-mail: kislitsin@altspu.ru

On computable presentations of metric spaces

R. Kornev

We discuss different approaches to computability on Polish metric spaces, topological and effective properties of representations of metric spaces and interplay between different representations of a given space.

We also discuss some first-order properties of the group of computable automorphisms of the order $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: kornevrus@gmail.com

Task approach in Artificial Intelligence: learning theory and knowledge hierarchy

A. V. Nechesov

The report will present a new learning theory and knowledge hierarchy in AI. This theory is based on the concept of the task approach proposed by A.N.Kolmagorov in the 1930s [**1**], and then quite fully formalized by Y.L.Ershov and K.F.Samohvalov in the 2000s [**2**]. Further, Goncharov, Sviridenko and Vityaev developed this direction in their work [**3**]. Carl Hempel's work on the requirement of maximum specificity also played an important role in the development of learning theory. [**4**].

By probabilistic knowledge we mean the next triple:

$$(F(x,y), t(x), p)$$

where $F(x,y)$ a task that has the following form:

$$F(x,y): \ \forall x \ \exists y \ \Phi(x,y) \to \Psi(x,y)$$

$t(x)$ is a special L*-program [**5, 6, 7**] which is solution to task $F(x,y)$ with probability p.

On a set of probabilistic knowledge, one can define a partial order

$$(F_1(x,y), t_1(x), p_1) \leq_\varphi (F_2(x,y), t_2(x), p_2)$$

which generates a hierarchy of knowledge.

References

[1] Kolmogoroff A. *Zur Deutung der intuitionistischen Logik* Mathematische Zeitschrift, 35(1), pp.58–65, 1932. https://doi.org/10.1007/bf01186549

[2] Ershov Yu.L., Samokhvalov K.F. *Modern philosophy of Mathematics: Ailments and treatment*, Novosibirsk, 2007.

[3] Vityaev E.E., Goncharov S.S., Sviridenko D.I. *On the task approach to artificial intelligence*, Siberian Journal of Philosophy, 17(4), pp.5-25. (In Russ.), 2019.

[4] Hempel C.G. *Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation, Philosophy of Science, v.35(2), pp. 116-133, 1968. http://www.jstor.org/stable/186482*

[5] Goncharov S., Nechesov A. Semantic programming for AI and Robotics, IEEE SIBIRCON, Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 810-815. https://doi.org/10.1109/SIBIRCON56155.2022.10017077

[6] Goncharov S., Nechesov A. Solution of the problem P = L. MDPI Mathematics **2021***, 12(17) 2102. https://doi.org/10.3390/math10010113*

[7] Goncharov S., Nechesov A. Polynomial analogue of Gandy's fixed point theorem. MDPI Mathematics **2021***, 9(17) 2102. https://doi.org/10.3390/math9172102*

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: Nechesov@math.nsc.ru

Temporal and multi-agent logics, common knowledge, satisfiability, unification, admissibility

V. V. Rybakov

In this talk we will report new recent results concerning non-classical logics and their possible applications for information sciences. In particular, we will consider temporal logics with distinct agents' valuations for propositional letters. In particular our analysis will concern distinct algorithms for computation truth values of formulas in such environment.

The case of multi-agent acting in local time, when the amount of available information will be restricted by only excising one in current local time will be considered. Thus approach will be modelled by clusters of time with agents accessibility to information latent inside. Besides, the rune of general time (which corresponds to the linear time computation run) will connect local time clusters. For this case we will consider possible modelling (interpretation) of the common knowledge, this concept was profoundly investigated by distinct researchers in past for standard understating of the time run, but the case with local common knowledge was not investigated in depth yet.

In pure logical terms we consider the multi-modal (or temporal) logics modelling this approach. We study (in suggested direction) most important problems concerning logical language - problems of satisfiability, unifiability and admissibility for inference rules. For the case of admissability we will also use technique of projective formulas and existence most general unifiers. Technique of enchanted filtration will be evolved also. By these instruments we will prove theorems stating existence of resolving algorithms.

This work is supported by the Russian Scientific Foundation (Project No.23-21- 00213) and by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02- 2023-936).

Institute of Mathematics and Fundamental Informatics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk (Russia)
Institute of Informatics Systems of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

On existence of PI-exponent of codimension growth

M. V. Zaicev

Given an algebra A, one can associate the sequence $c_n(A)$ of non-negative integers called *codimension sequence* that measures the number of polynomial identities of A. For many classes of algebras the sequence $\{c_n(A)\}$ is exponentially bounded. For example, if A is a finite dimensional algebra, $\dim A = d$, then $c_n(A) \le d^{n+1}$. Codimension sequence is also exponentially bounded for any associative PI-algebra, for any infinite dimensional simple Lie algebra of Cartan type, for any Novikov algebra, etc.

At the end of 1980's S. Amitsur conjectured that so-called PI-exponent

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

exists for any associative PI-algebra A. Amitsur's conjecture was confirmed not only for associative algebras but also for all finite dimensional Lie algebras, for all finite dimensional nonassociative simple algebras and many others. Unlike finite dimensional case, there are counterexamples to Amitsur's conjecture in the class of infinite dimensional nonassociative algebras.

In the present talk we discuss an existence of PI-exponent in distinct classes of algebras.

Work is partially supported by Russian Science Foundation, grant 22-11-00052.

Department of Algebra, Faculty of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow (Russia)
E-mail: zaicevmv@mail.ru

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Предварительная обработка данных для анализа эмоции в текстах узбекского языка

Э. Ю. Ахмедов

Как правило, комментарии, полученные из социальных сетей, не соблюдают правил грамматики, различных знаков, аббревиатур и т. д. Поэтому в таком случае предварительная обработка данных позволяет добиться хороших результато. Были исследованы алгоритм предварительной обработки данных для анализа тональности текста.

- Токенизация
- Приведение к нижнему регистру
- Удаление стоп-слов
- Лемматизация или стемминг
- Векторизация слов

Метод TF-IDF является одним из методов векторизации слов. Он преобразует слова или термины в числовые векторы, которые представляют их векторное представление в пространстве признаков.

$$tf(t,d) = \frac{n_t}{\sum_k n_k}$$

$$idf((t,D) = \log \frac{D}{d_i \in D \mid t \in d_i}$$

$$tf - idf(t,d,D) = tf(t,d) \star idf(t,D)$$

Здесь, D-число документо в коллекцийв, $\{d_i \in D \mid t \in d_i\}$ — число документов из коллекции D, в которых встречается t, n_t есть число вхождений слова t в документ, а в знаменателе — общее число слов в данном документе.

Идея метода дельта TF-IDF заключается в том, чтобы дать больший вес для слов, которые имеют не-нейтральную тональность, т.к. именно такие слова определяют тональность всего текста. Формула для расчета веса слова w следующая:

$$V_{t,d} = C_{t,d} \cdot \log \frac{N \cdot P_t}{P \cdot N_t}$$

Здесь, V — вес слова t в документе d, C — количество слова t в документе d, P — количество положительных документов, где встречается слово t, N — количество отрицательных документов, где встречается слово t.

Word2Vec — технология Google для анализа семантики текстовых данных, включающая алгоритмы расчета векторных представлений слов.

$$similarity = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i p_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_j^2}}$$

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.akhmedov@g.nsu.ru

Технология Q-эффективного программирования на основе логического анализа численных алгоритмов

В. Н. Алеева

Логический анализ численных алгоритмов на основе авторской концепции Q-детерминанта может применяться для повышения эффективности реализации алгоритмических проблем, что решает актуальную проблему — повышение производительности параллельных вычислительных систем.

Предположим, что для решения алгоритмической проблемы можно использовать множество численных методов $\mathcal{M}$. Также для каждого $M \in \mathcal{M}$ можно использовать класс численных алгоритмов $\mathcal{A}(M)$. Тогда следующий процесс дает возможность повысить эффективность реализации алгоритмической проблемы.

Выбор алгоритма $A^*(M) \in \mathcal{A}(M)$ для каждого $M \in \mathcal{M}$: с минимальной высотой с помощью Q-системы [1].

Выбор алгоритма $A \in \{A^*(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$: с минимальной высотой с помощью Q-системы.

Разработка: Q-эффективной программы для алгоритма A с помощью метода проектирования Q-эффективных программ [1] или с помощью системы автоматизированного проектирования и исполнения эффективных программ, например, описанной в [2].

Изложенный процесс можно назвать *Q-эффективным программированием в широком смысле*. Таким образом, основными положениями технологии Q-эффективного программирования в широком смысле являются следующие.

Описание: алгоритмической проблемы.

Описание: численных методов решения алгоритмической проблемы.

Описание: классов численных алгоритмов для реализации каждого из описанных методов.

Исследование: ресурсов параллелизма алгоритмов описанных классов с помощью Q-системы.

Выбор: алгоритма с минимальной высотой из всех описанных классов.

Разработка: Q-эффективной программы для выбранного алгоритма.

Литература

[1] Aleeva V., Aleev R. Investigation and Implementation of Parallelism Resources of Numerical Algorithms. ACM Transactions on Parallel Computing. 2023. Vol. 10. no. 2. Article number 8. P. 1–64. DOI: 10.1145/3583755.

[2] Алеева В.Н. Автоматизированное проектирование и исполнение эффективных программ для численных алгоритмов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12, № 3. С. 31–49. DOI: 10.14529/cmse230303.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинск (Россия)
E-mail: aleevavn@susu.ru

Методы извлечения знаний о ситуациях и событиях из текста естественного языка

В. И. Архипова

В настоящий момент в Интернете представлен колоссальный объем информации, которую трудно извлекать в структурированном виде. Целью работы является автоматизация извлечения информации, представленной в неструктурированных текстах естественного языка, для разработки онтологий различных предметных областей. В работе описаны методы извлечения знаний о ситуациях и событиях из текста естественного языка. Эти методы основаны на формальном представлении знаний при помощи фрагментов атомарных диаграмм алгебраических систем.

Извлечение знаний о ситуациях и событиях из текста основано на создании онтологических моделей, которые описывают семантические отношения между сущностями и событиями. Эти модели используют RDF для представления данных и OWL для определения семантических отношений и ограничений. Затем SPARQL применяется для выполнения сложных запросов к этим данным, позволяя точно извлекать информацию о ситуациях и событиях.

Результаты этой работы имеют потенциал повысить качество и эффективность интеллектуальных помощников, которые будут способными обогащать знания и предоставлять пользователю более точные и информативные ответы. Таким образом, с использованием семантических технологий и методов извлечения знаний о ситуациях и событиях, мы можем усовершенствовать процессы анализа и понимания текстовых данных, что имеет важное значение в современной информационной среде.

Литература

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

[2] Palchunov D.,Yakhyaeva G.,Yasinskaya O. Software system for the diagnosis of the spine diseases using case-based reasoning. In: Proceedings of the International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON / SibMedInfo — 2015), 28-30 October, 2015, Novosibirsk, p. 205-210. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2015.7361884

[3] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 13, вып. 3, 2015. С. 42-51.

[4] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.arkhipova1@g.nsu.ru

Извлечение эмоциональных оценок из текстов естественного языка

С. А. Балашова

Эмоции играют важную роль в жизни людей, как для одного человека, так и для группы людей, живущих или работающих вместе. Различные медиа предоставляют людям возможности поделиться своими эмоциями. Анализ эмоций может использоваться с целью прогнозирования политической ситуации, определения группы людей со сходными интересами, извлечения эмоционального отклика в отзывах различных потребителей, настраивания работы различных информационных систем и т.д.

Проблема распознавания эмоций в текстах является в настоящее время весьма важной и актуальной. Для ее решения используются различные методы и алгоритмы, в частности машинное обучение и обработка естественного языка, которая в первую очередь направлена на повышение качества машинного перевода и его анализ. Все они обладают своими достоинствами и недостатками, но комбинирование методов позволяет более точно извлекать эмоциональные окраски из текстов естественного языка, тем самым помогает настраивать информационные системы, а также передавать эмоциональные состояния в тексте.

На данный момент разрабатывается система на основе нейронных сетей, которая будет обрабатывать текст естественного языка, а также давать ему эмоциональную оценку. Данная система, в отличие от других, будет показывать то, что вызывает определенную эмоцию, а также рассматривать такие случаи, когда одна ситуация вызывает несколько различных эмоций.

Литература

[1] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016 Т. 14 N 3 С. 34-48.

[2] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

[3] Пазельская А., Соловьев А. Метод определения эмоций в текстах на русском языке, Москва, 2011С. 510 - 522

[4] Дворников С. В. Распознавание эмоций в текстовом сообщении // CYBERLENINKA: сайт. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/raspoznavanie-emotsiy-v-tekstovom-soobschenii/viewer (дата обращения 22.09.2023)

[5] Слапогузов А. П., Цопа Е. А. Извлечение эмоций из русскоязычных текстов // Конгресс молодых ученых: сайт. - URL: https://kmu.itmo.ru/digests/article/2329 (дата обращения 22.09.2023)

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.balashova@g.nsu.ru

Аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза некорректен

А. В. Бессонов

Аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза основывается на доказанной Гёделем первой теореме о неполноте. В этой теореме утверждается неразрешимость гёделевой арифметической формулы G, т.е. недоказуемость в формальной арифметике (PA) как G, так и $\neg G$. При этом, как считается, на неформальном уровне мы можем установить истинность формулы G. Аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза состоит в истолковании этой коллизии как свидетельства непреодолимого преимущества человеческого разума над любой достаточно богатой формализованной системой, из чего делается вывод о принципиальной невозможности создания искусственного интеллекта, равного по силе человеческому разуму.

Мы покажем, что из доказательства первой теоремы о неполноте однозначно не следует истинность G. В действительности Гёделем доказаны лишь истинность и неразрешимость G в конкретной фиксированной нумерации.

Но ведь определения доказуемости, разрешимости и истнности в PA нумерационно независимы: в них нет упоминания какой-либо нумерации. Поэтому для того, чтобы аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза был корректен, требуется доказать истинность G в PA независимо от какой-либо нумерации, что ни Гёделем и ни кем иным не доказано. При этом нетрудно привести пример формулы, построенной с использованием предиката «быть гёделевым номером какого-то выражения арифметики» (а гёделева формула именно такова), которая истинна и доказуема в одной нумерации, и ложна и недоказуема в другой.

В нумерации, используемой самим Гёделем, номер левой скобки равен 11, что в PA выразимо формулой $x = \mathbf{11}$. И в этой нумерации при подстановке на место x номера левой скобки мы получим истинную и доказуемую формулу $\mathbf{11} = \mathbf{11}$. Теперь перейдём к нумерации, применяемой Мендельсоном, где номер левой скобки рвен 3. Подставив в ту же самую арифметическую формулу $x = \mathbf{11}$ новый номер левой скобки, получим $\mathbf{3} = \mathbf{11}$, т. е. формулу, ложную и не доказуемую в PA (если PA непротиворечива).

Таким образом, у нас нет гарантии, что гёделева формула G, истинная в нумерации самого Гёделя, останется истинной в любой другой нумерации или что она будет арифметически истинной независимо от выбранной нумерации. Исходя из аксиом классической двузначной пропозициональной логики, мы можем знать только, что одна из формул G или $\neg G$ истинна. Но установить на основании теорем Гёделя о неполноте, какая именно из них истинна, мы не можем. Это полностью разрушает фундамент фатального теоретико-познавательного вывода о том, что «в любой достаточно богатой теории есть истинные (что может установить человеческий разум), но недоказуемые суждения». Таким образом, базирующийся на теоремах Гёделя о неполноте аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза безоснователен.

Институт философии и права СО РАН, Институт философии и права, Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: trt@academ.org

Совершенные раскраски гиперграфа подматриц

С. О. Бородин

Гиперграфом подматриц $G_{n\times m}$ назовем гиперграф, вершинами которого являются элементы матрицы размера $n \times m$, а гиперребрами – все возможные подматрицы порядка 2.

Раскраску f гиперграфа G назовем *совершенной*, если цветовой состав гиперребер, инцидентных вершине цвета i, зависит только от цвета вершины, а не от выбора конкретной вершины этого цвета.

Полупараметрами инцидентности совершенной k-раскраски гиперграфа $G_{n\times m}$ назовем матрицу V размера $k \times L$ такую, что элемент v_{ij} равен числу гиперребер цветового состава j, инцидентных вершине цвета i. Здесь

$$L = k + k(k-1) + \binom{k}{2} + k\binom{k-1}{2} + \binom{k}{4}$$

– число всех возможных цветовых составов гиперребер $G_{n\times m}$.

В работе рассматриваются совершенные раскраски гиперграфов $G_{n\times m}$ и свойства их полупараметров инцидентности.

Предложены конструкции двуцветных и многоцветных совершенных раскрасок гиперграфа $G_{n\times m}$.

Рассмотрена связь 2-схем с совершенными 2-раскрасками специального вида, называемые конфигурационно однородными.

Теорема. Матрица A инцидентности 2-схемы с параметрами (v, k, λ) соответствует совершенной конфигурационно однородной по строкам 2-раскраске гиперграфа $G_{v\times b}$ с конфигурацией строк

$$\left(\lambda\frac{(v-k)(v-k-1)}{k(k-1)}, \lambda\frac{v-k}{k-1}, \lambda\right).$$

Совершенные конфигурационно однородные по строкам 2-раскраски гиперграфов подматриц (отличные от раскрасок линиями) находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами инцидентности 2-схем.

Кроме того, описаны совершенные 2-раскраски гиперграфов $G_{2\times m}$ и $G_{3\times m}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00266, https://rscf.ru/project/22-11-00266/

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.borodin@g.nsu.ru

Анализ некоторых схем с тропическими циркулянтными матрицами

И. М. Бучинский, М. В. Котов, А. В. Трейер

Алгоритм Диффи–Хеллмана обмена ключами в своей исходной реализации использует мультипликативную группу целых чисел по модулю p. В [**1**] предложили метод обмена ключами, основанный на некоммутативных полугруппах. Общий анализ в случае групп был проведен в [**2, 3**].

В [**4**] предложили использовать тропические полугруппы, на выбор которых повлияли две причины: защита от атак линейной алгебры и быстрое и эффективное выполнение операций. В [**5**] был проанализирован этот протокол и произведена атака на него, ключевым моментом которой являются некоторые закономерности у последовательностей степеней тропических матриц в алгебре min-plus.

Недавно было предложено несколько протоколов, основанных на циркулянтных матрицах: в [**6**] — протокол обмена ключами, основанный на тропических upper-t-circulant матрицах, в [**7**] — протоколы, основанные на тропических lower-t-circulant и anti-t-p-circulant матрицах. В своей работе мы модифицируем атаку из [**5, 8**] и показываем, что протоколы [**6, 7**] не являются криптографически стойкими. В [**9**] был предложен протокол обмена ключами, использующий циркулянтные матрицы. Из [**10**] известно, что он не стойкий. В своей работе мы показываем, что он также не стойкий, когда степени полиномов не фиксированы. Вероятность успеха наших атак в данной работе составляет 100% на тестовых входах.

Работа поддержана фондом РНФ, проект №22-11-20019.

Литература

[1] Sidelnikov V. M. , Cherepnev M. A. , Yashchenko V. V., Systems of open distribution of keys on the basis of noncommutative semigroups, Dokl. Math., 48, 1994, No. 2, pp. 384-386.

[2] Myasnikov A. G. , Roman'kov V. A., A linear decomposition attack, Groups Complexity Cryptology, 7, 2015, No. 1, pp. 81-94.

[3] Roman'kov V. A. , Algebraic cryptology, Omsk: Omsk State University Press, 2020, ISBN 978-5-7779-2491-9.

[4] Grigoriev D., Shpilrain V., Tropical cryptography, Comm. Algebra, 42, 2014, No. 6, pp. 2624-2632.

[5] Kotov M., Ushakov A., Analysis of a key exchange protocol based on tropical matrix algebra, J. Math. Cryptol., 12, 2018, No. 3, pp. 137-141.

[6] Huang H., Li C., Deng L., Public-Key Cryptography Based on Tropical Circular Matrices, Appl. Sci., 12, 2022, No. 15, p. 7401.

[7] Amutha B., Perumal R., Public key exchange protocols based on tropical lower circulant and anti circulant matrices, AIMS Math., 8, 2023, No. 7, pp. 17307-17334.

[8] Muanalifah A., Sergeev S., Modifying the tropical version of Stickel's key exchange protocol, Appl. Math., 65, 2020, No. 6, pp. 727-753.

[9] Durcheva M. I., Tropical Encryption Scheme Based on Double Key Exchange, Eur. J. Inf. Tech. Comp. Sci., 2, 2022, No. 4, pp. 11-17.

[10] Jiang X., Huang H., Pan G., Cryptanalysis of Tropical Encryption Scheme Based on Double Key Exchange, J. Cyber Secur. Mobil., 12, 2023, No. 2, pp. 205–220.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск (Россия)
E-mail: buchvan@mail.ru, matvej.kotov@gmail.com, alexander.treyer@gmail.com

Реализация графического инструмента трассировки системных вызовов на основе gVisor

Э. А. Вартазарян

В современном мире скоростные параметры программного обеспечения играют немаловажную роль. Графический инструмент, позволяющий наглядно просматривать системные вызовы, несомненно представляет собой весомый вклад в развитие инструментария разработчика.

Предлагаемый инструмент будет встроен в gVisor, что позволяет ему маскироваться как запуск обычного контейнера, оставаясь при этом необнаруженным для злоумышленника, а также будет трассировать системные вызовы с возможностью анализа используемой ими памяти и парсинга структур данных, если вызов их подразумевает,а также возможность разворачивать числовые идентификаторы: дескрипторы, PID-ы, что в свою очередь позволит выявлять возможные ошибки и проводить оптимизацию кода.

Целью данной исследовательской работы является разработка графического инструмента, интегрированного в gVisor, для анализа и трассировки системных вызовов. Для достижения поставленной цели были выделены следующие задачи: исследование существующих решений, разработка прототипа описанного инструмента и его тестирование.

За время работы был разработан прототип данного инструмента, дающий возможность анализировать системные вызовы посредством веб-интерфейса. На данный момент он умеет подключаться к системе gVisor, для получения генерируемых им логов и имеет функциональные возможности для настройки фильтров для просмотра интересующих системных вызовов и их детального просмотра, например, получение возвращаемого значения.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.vartazaryan@g.nsu.ru

Разработка методов автоматизации анализа рисков с помощью теории нечетких моделей

А. Г. Галиева

Обеспечение управления рисками различных процессов на сегодняшний день остается довольно актуальной задачей, которую решают как отечественные, так и зарубежные ученые и разработчики [1-3]. Существующие системы управления рисками предназначены для автоматизации сбора, анализа и отслеживания информации о возможных рисках, а также создания и контролирования планов мероприятий по управлению этими рисками.

Одним из наиболее значимых недостатков существующих решений является замкнутость описываемых систем, что не позволяет моделировать не полностью детерминированные процессы. Для решения этой проблемы предлагается использование методов теории нечетких моделей при описании процессов [4-6]. Кроме того, существенной проблемой настоящих разработок часто является отсутствие объяснительной функции выведенных прогнозов, что может помешать пониманию процессов стейкхолдерами при дальнейшем согласовании принимаемых мер. Эту проблему предлагается разрешить семантическим подкреплением, выведенным на основе семантической модели рисков.

Целью работы является разработка методов автоматизации анализа рисков различных процессов на основе теории нечетких моделей.

В ходе работы был проведен анализ существующих методов и инструментов автоматизации анализа рисков, выявлены их проблемы. Разработаны автоматизированные методы анализа рисков с помощью теории нечетких моделей и построения вероятностной семантической модели рисков, которая будет обладать большей объяснительной силой, что отличает этот подход от существующих.

Литература

[1] Зайковский В.Э., Карев А.В. Автоматизация процесс управления рисками — важный шаг к цифровизации принятия управленческих решений // Проблемы анализа риска. 2021. № 2.

[2] Галиева А.Г., Пальчунов Д.Е. Методы автоматизации разработки смарт-контрактов при помощи моделей ситуаций бизнес-процессов // Материалы IX Международной конференции «Знания - Онтологии – Теории» (ЗОНТ-2023) Новосибирск, 2023. С. 56-61.

[3] Ying Lu, Le Yin, Yunxuan Deng, Guochen Wu, Chaozhi Li, Using cased based reasoning for automated safety risk management in construction industry // Safety Science, Volume 163, 2023, 106113, ISSN 0925-7535

[4] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечёткие логики и теория нечётких моделей. Алгебра и логика, 2015. Т. 54. № 1. С. 109-118.

[5] Palchunov D. Application of FCA for Domain Model Theory Investigation. In: Kovalev S.M., Kuznetsov S.O., Panov A.I. (eds) Artificial Intelligence. RCAI 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 12948. Springer, Cham, 2021, pp. 119-134

[6] Пальчунов Д.Е. Теория моделей предметных областей. II, Алгебра и логика, 61, № 4, 2022, с. 500-519, DOI: 10.33048/alglog.2022.61.408.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: galievayya@gmail.com

Интеграция логико-вероятностного искусственного интеллекта в bSystem

Д. Н. Гаврилин, Д. Э. Гаврилина

В докладе представлены первые результаты интеграции на базе платформы bSystem двух методов, базирующихся на семантическом моделировании, — логико-вероятностного вывода (ЛВВ) и объектных онтологий (ОО). bSystem — платформа для создания цифровых двойников организаций и процессов, нацеленная на разработку интеллектуальных систем управления. В bSystem уже реализована интеграция онтологического и операционно-транзакционного уровней, позволяющая соединять операционную деятельность с логико-аналитической надстройкой над ней. В **[1]** представлена концепция интеграции этих двух уровней с объясняющим ИИ на основе ЛВВ (концепция MAGI, развитая Е.Е. Витяевым, А.В. Манциводой и Д.И. Свириденко).

Нами разработан первый вариант интеграции в bSystem ЛВВ (в версии А.В. Демина) таким образом, что онтологии bSystem выполняют роль источника априорных знаний (эмпирической системы) для ЛВВ. Также был проведен ряд экспериментов. Таким образом, теперь в bSystem ОО образуют единое пространство знаний для всех уровней – операционного (как система типов данных), аналитического (как онтология) **[2]**, так и ЛВВ (как эмпирическая система).

Данные результаты – первый шаг к полнофункциональной интеграции ЛВВ и объектных онтологий в рамках bSystem. В дальнейшем будут развиваться как функции ЛВВ при решении задач управления, так и решаться внутренние проблемы ЛВВ, ориентированные на оптимизацию стратегий поиска, представления закономерностей, наработки кейсов. Кроме того, планируется использовать опыт **[3]** для развития low-code методологии формирования логических гипотез.

Литература

[1] Витяев Е.Е., Гончаров С.С., Гумиров В.Ш., Манцивода А.В., Нечесов А.В., Свириденко Д.И. Задачный подход: на пути к доверительному искусственному интеллекту (в печати).

[2] Гаврилин Д. Н., Кустова И. А, Манцивода А. В. Объектные модели как микросервисы: язык запросов. Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 121–137.

[3] Гаврилина Д. Э., Манцивода А. В. Low-code и объектные электронные таблицы. Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 40. С. 93–103.

Институт математики и информационных технологий, ИГУ, Иркутск (Россия)
E-mail: denis020611@gmail.com; gavrilinadar@ya.ru

Разработка высокопроизводительного парсера данных в формате Avro для платформы .NET

Т. Т. Гуляев

В современных системах обработки больших объемов данных, где производительность имеет решающее значение, формат Avro становится все более популярным. Avro представляет собой компактный бинарный формат сериализации данных, который обеспечивает эффективность хранения и передачи информации. Он широко используется в различных областях, таких как Big Data, стриминг данных и обмен сообщениями между микросервисами. Avro позволяет не использовать кодогенерацию при динамическом изменении схем, но только не в случае строго типизированных языков, таких как, например $C\#$. Существующие решения не всегда обеспечивают высокую скорость парсинга, а также способность обрабатывать данные при динамически изменяющихся схемах. Это ограничение формирует потребность в разработке оптимизированного десериализатора, который сможет обрабатывать данные в формате Avro с максимальной производительностью, независимо от природы объектов на платформе .NET

Цель работы: Разработка сервиса высокоскоростной десериализации данных любой структурной вложенности.

На данном этапе частично реализовано решение, позволяющее быстро десериализовать данные любой структурной вложенности. Был подключен компонент Apache Kafka, а именно Schema Registry - компонент, предоставляющий реестр схем Avro для однозначного преобразования данных, позволяющий работать с высокоуровневыми объектами независимо от их природы.

В дальнейшем планируется развитие работы, в частности, создание специального генератора, позволяющего на лету независимо от схем десериализовать данные.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: t.gulyaev@g.nsu.ru

Разработка методов определения эмоций пользователя на основе анализа текстовых и звуковых данных

О. А. Гуртуева

Речевая коммуникация - один из ключевых и непосредственных элементов взаимодействия между людьми. Она обеспечивает обмен не только текстовой информацией, но широким спектром эмоций между говорящими для более точного понимания диалога и контекста ситуации.

Анализ тональности текста, основанный на автоматическом распознавании интонации голоса (тона, громкости, темпа речи), а также выражения лица, привлекает все больше внимания исследователей, поскольку такие комплексные системы находят применение в самых различных областях и целях. Особенно актуально это стало с развитием автоматизации и широким использованием голосовых помощников. Применение методов сентимент-анализа в контексте взаимодействия интеллектуальных помощников с пользователями позволяет наиболее точно формировать сценарии общения, оценивать эффективность работы ботов, а также оценивать удовлетворенность пользователя в соответствии с различными метриками.

В работе рассматривается задача разработки программного интерфейса, обеспечивающего автоматическое распознавание эмоций пользователя, в контексте интеллектуального помощника, базирующегося на трехуровневой семантической модели (знания, текущая ситуация, намерения).

Литература

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

[2] Панг Б. Opinion Mining and Sentiment Analysis. Foundations and Trends in Information Retrieval / Б. Панг, Л. Ли. – Москва : Вильямс, 2008. – 235 с

[3] Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика: учеб. пособие / Большакова Е.И., Клышинский Э.С., Ландэ Д.В., Носков А.А., Пескова О.В., Ягунова Е.В. — М.: МИЭМ, 2011. — 272 с.

[4] Махина, Е.Д., Пальчунов, Д.Е. Программная система для определения речевых действий в текстах естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии, 2018. Т.16, №4 — 2018, № 4. — С. 96–102.

[5] Sumathi, C. P. Automatic facial expression analysis a survay / C. P. Sumathi, T. Santhanam, M. Mahadevi // International Journal of Computer Science and Engineering Survey (IJCSES). — 2012. — Vol. 3, No 6. — P. 47-57.

[6] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: o.gurtueva@g.nsu.ru

Разработка рекомендательной системы подбора линейки косметических средств

М. Е. Демчук

Основная задача рекомендательной системы - понять предпочтения пользователя и предложить ему самый подходящий товар или услугу [**1**]. Сегодня такие системы встречаются в каждой сфере. Так и в индустрии косметических и уходовых средств. Обычный человек теряется среди огромного многообразия косметических и уходовых товаров, поэтому тратит большое количество денег и времени на поиск подходящего продукта.

Современные рекомендательные системы основываются на семантическом анализе предметной области[**2, 3**]. Такие системы, предоставляют самый популярный продукт, однако эти системы не учитывают особенности человека и то, что совместное использование продуктов может быть гораздо эффективнее.

Данная работа посвящена разработке рекомендательной системы, которая разбивает различные уходовые средства на кластеры для повышения производительности системы, так при поиске определенного средства система будет ориентироваться на определенный кластер, а не на все продукты в базе. При поиске товара система воспользуется вектором пользователя, который был создан на основе опроса, и далее при помощи коэффициента корреляции Пирсона сравнит их с векторами других пользователей из этого кластера, и выберет самых близких соседей. Далее система посмотрит какие продукты высоко оценили “соседи” и еще раз проверит подходят ли эти продукты для решения проблем, которые указаны в векторе нашего пользователя. Также система подберет продукты, которые хорошо сочетаются вместе с выбранным средством основываясь на описании косметических средств о оценках похожих пользователей.

Таким образом, система полностью удовлетворит потребности пользователя и не порекомендует ему совершенно неподходящие средства.

Литература

[1] Francesco Ricci, Lior Rokach, Bracha Shapira, Paul B. Kantor, Recommender Systems Handbook. Springer New York, 2010.

[2] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, стр. 868–871.

[3] Yakhyaeva, G., Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning. 2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory, KNOTH 2021, 2021, pp. 40–44.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: m.demchuk@g.nsu

Разработка системы управления инфраструктурой общекорпоративных мероприятий в 3-х мерном пространстве на основе технологии контейнеризация серверных приложений

М. Н. Дубинин

Актуальность данной системы заключается в отсутствии систем оркестрации игровых серверов. В отличие от обычных приложений, для игровой индустрии требуется не только горизонтальное масштабирование, возможность поддержания большого числа одинаковых приложений, которые отличаются только параметрами запуска.

Целью работы является реализация системы оркестрации игровых серверов, позволяющей не только управлять независимыми приложениями, но и автоматически выбирать центры обработки данных для запускаемых приложений, что позволит создавать сервера в более близких для пользователя локациях, что сильно уменьшит время отклика серверных приложений. Планируется внедрение этой технологии в игровую индустрию, ведь она идеально подходит для игровых серверов.

Для достижения данной цели требуется выполнить следующие задачи:

(1) Определить основные компоненты системы и их взаимодействие. Разработать схему масштабирования оркестратора.Выбрать протокол коммуникации между компонентами оркестратора.
(2) Разработать API оркестратора. Реализовать механизмы масштабирования оркестратора. Написать код управления, используя выбранный протокол коммуникации.
(3) Собрать локальный кластер для тестирования.Проверить работу оркестратора на кластере. Выявить и устранить возможные проблемы в работе системы.

На данный момент результатом работы является написание архитектуры системы, которая будет управлять всей структурой серверов. Она состоит из трех уровней: нижний уровень - контейнера с серверами. Средний уровень - объединение контейнеров, которые были запущены на одной машине, верхний уровень - объединение машин, которые используются в системе. Пользователь при обращении к системе будет видеть только общедоступный для всех интерфейс(верхний уровень), а после этого по специальному ключу сможет подключиться к желаемому серверу. Верхний уровень обладает знанием о всех доступных серверах и по этой причине способен создавать информацию необходимую для подключения пользователей к требуемому серверу.

Работа выполняется в рамках СберЛаб-НГУ, при поддержке Сбер и СберТех.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: m.dubinin1@g.nsu.ru

О согласованности интервальных экспертных оценок

Н. А. Дымонт

Нечеткие вычисления представляют собой методологию для моделирования и решения проблем, связанных с неопределенностью и нечеткостью [**1, 2**]. Эти вычисления находят применение в различных областях, где требуется анализировать и обрабатывать нечеткую информацию, принимать решения на основе нечетких данных и создавать интеллектуальные системы [**3, 4**].

Часто информация о предметной области формулируется не только в форме объективной вероятности, но также в виде субъективных вероятностей [**5**]. Эксперты, которые дают субъективную оценку, могут иметь ограниченные знания, а оценки одного и того же события от разных экспертов могут различаться. Однако существует конечное множество событий, на которые эксперты могут дать оценки [**6**].

Работа посвящена разработке алгоритма проверки согласованности экспертных оценок, заданных интервалами. Предложен алгоритм, на вход которому подаются события, представленные в виде формул логики предикатов и их интервальные оценки. В ходе алгоритма формулы с кванторами заменяются на бескванторные, и все полученные формулы приводятся к СДНФ, на основе которых создается система интервальных линейных уравнений. Затем эта система анализируется на предмет совместимости с использованием алгоритмов интервального анализа [**7**]. Экспертные оценки считаются согласованными только в случае, если система интервальных уравнений также оказывается совместной.

Литература

[1] Yakhyaeva G., Logic of fuzzifications. Proceedings of the 4th Indian International Conference on Artificial Intelligence, IICAI 2009, 2009, pp. 222–239.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей. Алгебра и логика, 54, № 1, 2015, с. 109-118.

[3] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, pp. 868–871.

[4] Palchunov D., Yakgyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEUR Workshop Proceedings, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

[5] Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2021, 12948 LNAI, pp. 152–165.

[6] Малаева Е.Д., Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21. № 1. с. 32-45.

[7] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2021, 654 с.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: n.dymont@g.nsu.ru

Разработка системы администрирования программно-аппаратного комплекса для навигации внутри помещения людей с проблемами зрения

И. Э. Эпов

Ни для кого не секрет, что в Российской Федерации находится около 20,7 миллионов граждан с нарушениями зрения.

Одной из самых больших трудностей в жизни таких людей является передвижение в зданиях.

В рамках общего проекта выполняется данная работа, направленная на разработку клиент-серверного взаимодействия и создание инфраструктуры для администрирования программно-аппаратного комплекса. Таким образом данная работа обладает практической ценностью.

Целью данной работы является разработка системы администрирования программно-аппаратного комплекса для навигации внутри помещения людей с проблемами зрения.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи: сформулировать требования, разработать микросервесную архитектуру сервера для взаимодействия с клиентской частью, реализовать данную архитектуру, провести тестирование.

Решение данных задач и достижение поставленной цели позволяет реализовать программную систему, выполняющую администрирование программного-аппаратного комплекса для навигации внутри помещения.

На данный момент мы сформулировали требования, разработали план тестирования и ведётся разработка данного комплекса.

Литература

[1] Варламов С. Е. , Болотин Н. Б., Система ориентации в пространстве людей с нарушением зрительных функций.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: i.epov@g.nsu.ru

Методы разработки интеллектуальных помощников, основанные на онтологическом моделировании предметных областей

А. О. Зайцев

Зачастую каждый, кто сталкивался с работой интеллектуальных помощников, испытывал определенный ряд проблем с ними. Начиная возможности действий только по заранее заданному специалистом компании сценарию, заканчивая тем, что его ответы могут отличаться от объективного описания. Все эти факторы, вынуждая нанимать сотрудников технической поддержки, приносят компаниях убытки.

Для решения подобных проблем было принято решение начать разработку интеллектуального помощника, основанного на онтологической модели предметной области. Одним из ключевых отличий системы предполагается комбинация использования нейронных сетей и онтологических моделей.

Целью данной работы является разработка метода, выполняющего построение ответа на вопрос пользователя, на основании онтологической модели предметной области; реализация и внедрение модуля в платформу.

В рамках работы были рассмотрены подходы построения диалога с пользователем [**1**], найдены и проанализированы существующие методы извлечения знаний [**2, 3**], изучена предметная область, изучены существующие решения подобных задач, выбраны технологии для достижения поставленной цели, сформированы требования к сервису, разработана первоначальная версия алгоритма построения диалога с пользователем, подготовлена основа для будущего расширения алгоритма, произведена интеграция модуля в платформу. Также было проведено первичное тестирование работоспособности первичного алгоритма на реальных пользователях, собраны отзывы.

В качестве дальнейшего развития планируется разработка методов наполнения онтологической модели из различных открытых источников в сети Интернет; систематизация полученных результатов: расширение и дополнение разработанного метода.

Литература

[1] Юсупов И.Ф., Трофимова М.В., Бурцев М.С.Построение и использование диалогового графа для улучшения оценки качества в целенаправленном диалоге. Труды МФТИ. 2020. №3 (47).

[2] Болотова Л. С., Системы поддержки принятия решений. Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 250 с. — ISBN 978-5-9916-8251-0.

[3] Корсун И. А., Пальчунов Д. Е., Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, № 3. С. 34–48. ISSN 1818-7900.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.zaitsev3@g.nsu.ru

Разработка алгоритма рекомендации вакансий и резюме для формирования стартапов

Е. В. Казакова

В наше время много молодых специалистов разрабатывают свои проекты, занимаются стартапами и появляется необходимость в системе их формирования. Подобные существующие решения или имеют более обширную предметную область, создавая затруднения в концентрации на работе в конкретной области - стартапах, либо имеют недостаточно эффективную и удобную систему рекомендаций [**1, 2**].

Для решения этой проблемы ведется разработка системы-агрегатора стартапов. Она направлена на помощь в формировании стартапа не выходя из дома. Система осуществляет автоматизацию поиска специалистов для создания стартапа, а также поиск подходящей вакансии в стартапе для соискателей. Благодаря этому ускоряется процесс взаимодействия между рекрутером и соискателем.

Одним из модулей этой системы является модуль рекомендаций. В рамках данной работы разрабатывается алгоритм рекомендации на основе поиска минимального расстояния между данным вектором характеристик [**3**], полученных из резюме или вакансии пользователя, который будет использоваться в системе формирования стартапов, а также разработка собственной метрики, использующей онтологию специализаций.

Литература

[1] Ricci F., Rokach L., Shapira B., Kantor P.B. Recommender Systems Handbook. Springer, New York, 2011, 545 p.

[2] Рекомендательные системы: продвинутые алгоритмы. Школа больших данных : [сайт]. – 2023. – URL: https://bigdataschool.ru/blog/recommender-systems-advanced-algorithms.html

[3] Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2021, 12948 LNAI, pp. 152–165.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.kazakova3@g.nsu.ru

Применение машинного обучения к задаче выявления отклонений в работе распределенных систем

Д. А. Худяков

Многие из крупных современных программных систем являются распределенными, то есть, состоящими из самостоятельных, отдельно размещаемых компонент. Внешние клиенты системы взаимодействуют с ней с помощью запросов, осуществляемых посредством различных протоколов. Однако куда более важно, что компоненты системы взаимодействуют друг с другом по внутренним протоколам, закрытых для внешнего наблюдателя. Для решения сложных сценариев чаще всего требуется взаимодействие многих компонент, таким образом образуются последовательности запросов от компоненты к компоненте внутри распределенной системы.

Любая система предоставляет пользователю ограниченный набор видов запросов, по которым к ней можно обращаться. Современные серверные распределенные системы имеют микросервисную архитектуру и чаще всего предлагают пользователям внешний интерфейс в виде набора HTTP запросов. Каждый из микросервисов способен принимать некоторое подмножество из этих запросов. В процессе обработки запроса он может обращаться к другим микросервисам с помощью запросов по внутренней сети кластера. Благодаря существующим развитым средствам мониторинга микросервисов путь каждого запроса внутри распределенной системы можно отследить по его логам.

Логи фиксируют состояние системы в различных точках исполнения и крайне полезны при эксплуатации системы. Логи позволяют разбирать инциденты и искать причины возникновения ошибок. Все логи одного запроса можно отследить с помощью распределенной трассировки. Логи подписываются идентификатором трейса, который передается по цепочке внутренних вызовов. Сегодня активно развиваются различные средства автоматического анализа логов, использующие машинное обучение для выделения отклонений от нормального поведения системы [**1**]. Однако существующие решения не учитывают специфику работы распределенных систем – благодаря распределенной трассировке можно получить более интерпретируемое решение [**2**]. Данная работа посвящена поиску решения для автоматического анализа логов в серверных микросервисных приложениях с целью выявления в них непредвиденного поведения.

Литература

[1] Pang G., Shen C., Cao L., van den Hengel A. Deep Learning for Anomaly Detection: A Review. arXiv: 2007.02500. 2020.

[2] Худяков Д.А. Разработка системы выявления аномалий на основе распределенной трассировки логов. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2023;21(1):62-72.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: khudaikoff@gmail.com

Рассуждения на основе прецедентов: обзор методов и перспектив их применения.

Д. А. Копытков

В современном мире все большее количество задач требует принятия сложных решений на основе большого объема данных. В таких условиях стандартные методы анализа и обработки данных не всегда могут обеспечить требуемую точность и эффективность решений. Рассуждения на основе прецедентов – это метод, основанный на анализе и классификации предыдущих случаев решения аналогичных задач. В докладе рассмотрим основные принципы работы с прецедентами, а также методы их классификации и анализа. Рассмотрим перспективы применения рассуждений на основе прецедентов в медицине, праве и технологиях.

Метод искусственного интеллекта, называемый Case Based Reasoning (CBR), представляет собой алгоритм, который использует предыдущий опыт для решения новых проблем. CBR можно формально описать как процесс поиска наилучшего соответствия между задачей и ранее решенными случаями [**1**].

Задача T представляет собой набор свойств или признаков. В то же время, имеется множество кейсов C, каждый из которых состоит из набора свойств или признаков. Расстояние между задачей T и кейсом Ci определяется функцией расстояния d(T, Ci), которая может быть представлена различными метриками. Наилучшее соответствие между задачей T и кейсом Ci определяется как минимальное расстояние между ними, т.е. min d(T, Ci). Решение задачи T осуществляется путем использования решения, примененного ранее в кейсе Ci.

Прецедентный подход может быть также использован для улучшения программного обеспечения [**2**]. Применение прецедентов позволяет создавать программы, которые являются более точными, надежными и эффективными [**3**]. Они могут быть полезными для выявления ошибок и улучшения функциональности программного обеспечения. Однако, прецедентный подход имеет и свои недостатки. Описание прецедентов может потребовать большого количества времени и усилий, а также требует наличие качественной базы данных прецедентов.

Литература

[1] Palchunov D.,Yakhyaeva G.,Yasinskaya O., Software system for the diagnosis of the spine diseases using case-based reasoning. In: Proceedings of the International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON / SibMedInfo — 2015), 28-30 October, 2015, Novosibirsk, p. 205-210. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2015.7361884

[2] Teng Zhe; Chen Jian; Xia Huicheng (2015). Study on Case-Based Reasoning-Inspired Approaches to Machine-Learning. Halong Bay, Vietnam

[3] Heba Ayeldeen, Olfat Shaker, Osman Hegazy, Aboul Ella Hassanien (2015). Case-Based Reasoning: A Knowledge Extraction Tool to Use

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.kopytkov@g.nsu.ru

Разработка системы для создания и верификации автоматных программ

Г. В. Корогодов

В настоящее время аппаратные и программные системы играют важную роль в нашей жизни. Поэтому с увеличением размеров и сложности аппаратных и программных систем становится все более важным обеспечить процесс валидации с помощью методов и инструментов, которые могут автоматически анализировать и проверять корректность системы. Верификация системы и исправление ошибок на этапе ее проектирования экономически целесообразны, так как это позволяет экономить время и средства на производство системы, которая может работать некорректно. В то же время, ручное тестирование не всегда способно обеспечить полную проверку, и требует уже готового продукта для тестирования. Поэтому использование автоматических методов и инструментов для проверки корректности системы является более эффективным и экономически целесообразным подходом. Одним из самых популярных способов формальной верификации свойств программного обеспечения систем высокой надежности является метод проверки моделей (Model Checking) [**1, 2**]. При этом спецификация таких систем зачастую описывается на языке темпоральной логики (LTL или CTL).

Разрабатываемый в данной работе программный комплекс позволяет создавать схемы автоматных программ (графы переходов автоматов), верифицировать и транслировать их на язык C#. Для верификации используется функционал верификатора Boogie, который поддерживает Spec#, язык программирования с поддержкой особенностей языка спецификаций, расширяющих возможности языка программирования C# контрактным программированием.

Литература

[1] Вельдер С.Э., Шалыто А.А. О верификации простых автоматных программ на основе метода Model Checking. Информационно-управляющие системы. 2007. № 3. С. 27-38.

[2] Болдырева Ю.Ю., Хворостухина Е.В. Проектирование сервиса визуального программирования для трансляции на язык Promela. Вестник Саратовского государственного технического университета. 2021. № 2(89). С. 18-26. – EDN WKCIHL.

Саратовский Государственный Технический университет имени Ю. А. Гагарина, Саратов (Россия)
E-mail: korogodoff@yandex.ru

Разработка сервиса для автоматизированной рассылки электронных писем

О. А. Ковалевская

Интернет в современном мире является площадкой для передачи данных различными способами. Однако, электронная почта безусловно является самым популярным инструментом для этой цели. Исследования показывают, что 69% людей, опрошенных в различных возрастных группах, ежедневно используют электронную почту, что превосходит использование социальных сетей. Этот тренд только усиливается из года в год.

ВУЗы также активно вовлечены в использование электронной почты. Они используют этот инструмент для обмена информацией между преподавателями, студентами и администрацией. Каждый день им приходится рассылать огромное количество электронных писем, в связи с чем возникают сложности, которые требуют больших затрат человеческих и временных ресурсов. Для облегчения работы с электронной почтой существуют сервисы для автоматизации рассылки. Использование таких сервисов имеет ряд преимуществ, включая сокращение времени и усилий, затрачиваемых на рассылку, а также возможность массовой отправки сообщений большому числу адресатов. Это особенно актуально для ВУЗов, где требуется регулярная информационная поддержка студентов. Таким образом, разработка сервиса по автоматизированной рассылке электронных писем для ВУЗа является актуальной задачей, решение которой способно повысить эффективность коммуникации в учебном заведении.

Существует множество сервисов для автоматизации рассылки электронных писем, которые можно использовать в данной задаче. Brevo - сервис, предоставляющий широкий набор функций для автоматизированной рассылки писем. Позволяет создавать и настраивать шаблоны писем, управлять адресными списками, проводить A/B-тестирование и анализировать результаты проведения рассылки. MailChimp - один из самых популярных сервисов для рассылки электронных писем. Предоставляет широкий набор функций: возможность создания и настройки шаблонов писем, автоматическая персонализации писем и отслеживание результатов рассылки. MailerLite - сервис, который предлагает простой интерфейс для создания и отправки электронных писем. Он также предоставляет возможность управления адресными списками и отслеживания результатов. Функционал этих сервисов схож. У использования таких сервисов есть недостатки, например:

(1) Учебные заведения с большим количеством студентов и сотрудников могут столкнуться с проблемами из-за ограничений бесплатного плана. Ограничения функциональности в бесплатном плане могут ограничить возможности автоматизации и персонализации рассылки.
(2) Некоторые сервисы могут требовать специальных навыков для интеграции с другими системами, такими как CRM или учебная платформа.
(3) Возможные проблемы с доставкой писем. Иногда письма, отправленные через эти сервисы, попадают в спам, что может снизить эффективность рассылки.
(4) Необходимость предоставлять доступ к персональным данным сторонним лицам.

Архитектура сервиса для автоматизированной рассылки электронных писем может быть разной. Она может зависеть от требований и целей проекта, но основные компненты включают: фронтенд (интерфейс, через который пользователи могут настраивать шаблоны писем, создавать рассылки и просматривать статистику), серверную часть (отвечает за обработку запросов от фронтенда и выполнение необходимых операций), базу данных, где хранится информация о пользователях, которым необходимо доставить письма.

Основной целью проекта является реализация сервиса для автоматизированной рассылки электронных писем по адресам из базы данных с использованием языка программирования Python. Важно, чтобы разработанная архитектура была масштабируемой и гибкой, чтобы обеспечить возможность расширения функциональности и обработки большого количества подписчиков и писем. Анализ полноты отправленных писем и полученных ответов является следующим этапом реализации сервиса.

Литература

[1] Lapalme, G., Kosseim, L.: Mercure: Towards an automatic e-mail follow-up system. IEEE Computational Intelligence Bulletin, 14–18 (2003)

[2] Mailchimp [Электронный ресурс]. URL: https://mailchimp.com/marketing-glossary/email-automation/

[3] Brevo [Электронный ресурс]. URL: https://www.brevo.com/products/transactional-email/

[4] MailerLite [Электронный ресурс]. URL: https://www.mailerlite.com/features/

[5] Сервис автоматизации маркетинга для онлайн-бизнеса eSputnik. [Электронный ресурс] URL: https://esputnik.com/

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: o.kovalevskaya@g.nsu.ru

О логических нейронных сетях (LNN)

В. В. Лавринова

Логические нейронные сети (Logical Neural Networks, LNN) представляют собой особый класс нейронных сетей, основанных на булевой алгебре. В отличие от традиционных нейронных сетей в LNN все операции выполняются в рамках логических значений: истина (1) и ложь (0) и рассматриваются два типа нейронов: нейроны-конъюнкторы и нейроны-дизъюнкторы, реализующие логические функции. Эти нейроны объединяются связями, определенными на основе условий задачи.

Логические нейронные сети (LNN) предоставляют ряд значительных преимуществ в машинном обучении и интеллектуальном анализе данных. Во-первых, они обладают высокой адаптивностью к данным, что позволяет им находить сложные и нелинейные логические зависимости, а также анализировать информацию в реальном времени. Во-вторых, LNN способны обрабатывать нечеткие и неопределенные данные, что делает их полезными в ситуациях, где данные не всегда являются абсолютно точными.

По своей сути логическая нейронная сеть является системой логического вывода, что дает возможность использовать их при автоматическом доказательстве теорем, при построении систем принятия решения или решении задач прогнозирования [1].

Использование аппарата неклассических логик при конструировании LNN дает еще более широкие возможности для их применения, например, в инженерии знаний. Целью данной работы является решение задачи классификации временных рядов с применением логических нейронных сетей (LNN) и аппарата темпоральной логики.

Литература

[1] Фридман О.В. Логические нейронные сети: методы автоматического конструирования, редукции, извлечение правил // Труды Кольского научного центра РАН. 2019. Т. 10. № 99. С. 97-–108.

Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Саратов (Россия)
E-mail: lavrinova.valya@yandex.ru

Исследование методов защиты кода программного обеспечения от математических атак

Р. К. Лебедев

Авторы коммерческого программного обеспечения часто сталкиваются с проблемой обратной разработки — возможностью недобросовестных исследователей восстановить логику работы приложения по скомпилированному машинному коду. Одним из наиболее мощных инструментов в арсенале злоумышленников являются инструменты символьного исполнения, сводящие программную логику к системе уравнений и применяющие к ней SMT-решатели для достижения необходимых им путей в программе [**1**]. Это может приводить к таким нежелательным последствиям, как обход систем лицензирования и самозащиты кода от прочих методов исследования [**2**].

Для решения этой проблемы в работе были исследованы методы защиты программ от инструментов символьного исполнения. В процессе работы были изучены существующие слабости инструментов символьного исполнения, обусловленные фундаментальными ограничениями подхода, а не конкретными реализациями инструментов. Также было уделено внимание скрытности защиты: например, использование системных вызовов или функций библиотек может привлечь внимание атакующего и позволить легче искать и удалять защиту в машинном коде приложения в автоматическом режиме.

В результате исследований наиболее перспективной показала себя проблема символьных адресов памяти [**3**], так как она может приводить не только к ошибкам в процессе анализа, но и к тихому пропуску путей, ошибочно кажущихся анализатору недостижимыми. Был разработан метод защиты произвольных путей в программе, эксплуатирующий эту проблему, а также его практическая реализация для языка программирования Си. Эффективность метода была проверена на популярных инструментах символьного исполнения.

Литература

[1] Shoshitaishvili Y. et al. SOK: (State of) The Art of War: Offensive Techniques in Binary Analysis. Proc. IEEE Symposium on Security and Privacy (SP). IEEE, 2016. P. 138–157.

[2] Kan Z. et al. Automated deobfuscation of Android native binary code // arXiv, 2019. http://arxiv.org/abs/1907.06828.

[3] Schwartz E. J., Avgerinos T., Brumley D. All You Ever Wanted to Know About Dynamic Taint Analysis and Forward Symbolic Execution (but might have been afraid to ask). Proc. IEEE Symposium on Security and Privacy (SP). IEEE, 2010. P. 317–331.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: n0n3m4@gmail.com

Интеграция моделей машинного обучения в систему автоматического контроля за работой антикафе

Д. В. Леонтьев

Деятельность в антикафе обладает множеством шаблонных проблем, которые можно автоматизировать, но их решают традиционными способами, что является неэффективным. Поэтому использование IT позволит дать толчок к бурному развитию.

Внедрение технологий с использованием нейросетей и клиент-серверной архитектуры, способствующее дистанционному и централизованному управлению заведений в сфере досуга, является эффективным и современным подходом к решению организационных и финансовых проблем.

Целью данной работы является внедрение искусственного интеллекта в систему охраны и хозяйственного управления для автоматизации работы.

Для достижения цели была поставлены задачи разработать программу с нейросетью, которая отслеживает количество людей в комнате, и обучить нейросеть для проверки вендинговых автоматов на полноту.

В ходе решения проблемы были разработаны приложения для Raspberry pi, получающие информацию с камер и передающие ответ, полученный нейросетью, на сервер. Приложения можно внедрять как совместно, так и по отдельности.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: d.leontev@g.nsu.ru

Разработка системы динамической инструментации системных вызовов на основе gVisor

А. М. Мацько

Современные требования к высокопроизводительным вычислениям подразумевают создание гибких и надежных средств для запуска приложений. В данном контексте, разработка системы динамической инструментации системных вызовов на основе gVisor является важным шагом в решении данной проблемы.

Функционал системы включает возможность замены аргументов и результатов системных вызовов, а также интеграцию пользовательских скриптов с доступом к внутренним структурам gVisor. Это позволит разработчикам более точно управлять исполнением приложений. Например, при помощи данного инструмента можно будет реализовать принцип наименьших привилегий.

Целью работы является разработка системы динамической инструментации системных вызовов на базе gVisor. Для достижения этой цели были выделены следующие задачи: анализ уже существующих средств инструментации и используемых подходов, разработка прототипа, который предоставляет описанный ранее функционал, а также его тестирование на реальных сценариях.

На данный момент разработан прототип системы, который позволяет влиять на работу приложений. В частности, набор заранее определённых функций даёт возможность пользователям, используя скрипты, получать информацию о содержимом буферов, а также изменять это содержимое. Также можно получить переменные среды и аргументы командной строки процесса. При этом пользователь может вмешаться в выполнение системного вызова, изменяя возвращаемое значение и/или аргументы или вовсе отменяя его выполнение.

Возможность динамической инструментации системных вызовов представляет собой важный шаг в создании более гибких и безопасных средств для запуска приложений в вычислительных средах.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.matsko@g.nsu.ru

Метод оптимизации алгоритма проверки согласованности оценочных знаний

Е. Д. Малаева

В современном информационном мире проверка согласованности экспертных оценок играет ключевую роль в принятии обоснованных решений. Оценочные знания о предметной области часто формулируются в виде субъективной (экспертной) вероятности [**1, 2**]. Однако несогласованность и неоднозначность в этих оценках могут привести к искажению выводов и ошибочным решениям. Существующий алгоритм проверки согласованности оценочных знаний с помощью отрисовки графа для выявления и разрешения конфликтов в множестве вероятностных событий [**3**] сталкивается с проблемой неоптимизированности, что приводит к высокой вычислительной сложности и затратам времени. В данной работе представлен метод оптимизации данного алгоритма, нацеленный на решение этой проблемы.

Предлагаемый метод основывается на построении графов по совершенным дизъюнктивным нормальным формам (СДНФ), образованным из формул логики предикатов и соответствующих вероятностных значений [**4, 5**]. Оптимизация заключается в выделении групп независимых предикатов и построении отдельных графов для каждой группы, вместо попыток учесть все предикаты в одном графе. Эта стратегия минимизирует вычислительные ресурсы, так как решение нескольких небольших систем линейных уравнений оказывается вычислительно более эффективным, чем решение одной общей системы.

Таким образом, предлагаемый метод оптимизации обеспечивает более эффективное использование вычислительных ресурсов и повышение производительности программной системы в контексте анализа и проверки согласованности оценочных знаний.

Литература

[1] Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. Lecture Notes in Computer Science. 2021. T. 12948 LNAI. C. 152-165.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей. Алгебра и логика, 54, № 1, 2015, с. 109-118.

[3] Малаева Е.Д., Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии, 2023, Т. 21, №1, с. 32–45.

[4] Palchunov, D.E., Tishkovsky, D.E., Tishkovskaya, S.V., Yakhyaeva G.E. Combining logical and statistical rule reasoning and verification for medical applications. Proceedings - 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2017, 18-22 September 2017, Novosibirsk, Russia.

[5] Yakhyaeva G., Logic of fuzzifications. Proceedings of the 4th Indian International Conference on Artificial Intelligence, IICAI 2009, 2009, стр. 222–239.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.malaeva@g.nsu.ru

Извлечение эмоций из текстов естественного языка при помощи LogicText

В. С. Миронов

Интенсивный рост текстовых массивов за последние несколько десятилетий является причиной трудностей анализа этих данных. Данная проблема дополняется сложностью обработки эмоций, заложенных в тексте. Современные системы, работающие с текстовой информацией не рассчитаны на обработку эмоциональной составляющей текстовой информации, поскольку оперируют лишь словами текста, а не содержанием.

Таким образом возникает актуальность системы, позволяющей извлекать эмоции из текстов естественного языка. В результате извлечения эмоции приобретают явный вид и становятся пригодными для автоматизированной обработки что в свою очередь даст возможность автоматизировать переписку с клиентами, выстраивая диалог согласно эмоциональной составляющей полученного текста.

Целью работы является разработка системы, основывающейся на онтологическом подходе [**1**], для распознавания и формализации эмоций, содержащихся в текстах на естественном языке.

В данном исследовании было произведено усовершенствование системы LogicText. Для существующей системы был создан внешний модуль способный распознавать эмоции [**2**], содержащиеся в предложениях на русском языке, а также модуль, интегрирующий знания об эмоциях в атомарную диаграмму [**3**].

Литература

[1] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

[2] Целикова С.О. Использование нейросетевых технологий в задаче автоматического распознавания эмоций / С. О. Целикова, Я. П. Горожанкин, А. О. Иванов [и др.]. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2019. — № 26 (264). — С. 59-61. — URL: https://moluch.ru/archive/264/61173/

[3] Махасоева О. Г., Пальчунов Д.Е. Программная система построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619198, зарегистрировано 10.09.2014.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.mironov1@g.nsu.ru

Теоретико-модельный подход к формализации бизнес-процессов университетской кафедры

Ч. А. Найданов

В бизнес-процессах документооборота университетской кафедры большое количество задач являются однотипными и рутинными, но требующими от сотрудников тщательности и внимательности. При мельчайшей ошибке документ требуется переделывать, что может повлечь за собой большие временные и финансовые траты. Для решения данной проблемы предлагается автоматизация всех отчуждаемых бизнес-процессов документооборота университетской кафедры.

В рамках данной работы рассмотрен вопрос формализации бизнес-процессов документооборота университетской кафедры с целью их дальнейшей автоматизации. Для формализации был выбран теоретико-модельный подход и в частности 4-уровневая онтологическая модель, состоящая из онтологии, общих знаний, базы прецедентов и оценочных знаний [**1**]. Представление знаний в теоретико-модельном подходе одновременно через частичные модели и фрагменты атомарных диаграмм позволит использовать логические средства для обнаружения противоречий в регламентах и бизнес-процессах, порождения оценочного знания и ранее не сформулированного онтологического знания, для интеграции знаний, извлеченных из источников с разным уровнем достоверности и авторитетности.

Ключевые понятия предметной области для онтологии, а также знания об общих закономерностях предметной области для общих знаний предлагается извлекать из документов, регламентирующих деятельность университетской кафедры: федеральные законы, приказы Минобрнауки, образовательные стандарты, локальные акты и прочее. Конкретные прецеденты и ситуации, произошедшие на кафедре, формализуются в терминах онтологии частичными моделями и одновременно фрагментами атомарных диаграмм. Общие знания позволяют детализировать имеющиеся сведения о произошедших прецедентах и ситуациях. Бизнес-процессы документооборота университетской кафедры предлагается представлять в виде цепочек ситуаций, описанных частичными моделями, причем цепочки могут ветвиться в зависимости от условий выполнения бизнес-процесса [**2, 3**].

Литература

[1] Найданов Ч. А., Пальчунов Д. Е., Сазонова П. А. Теоретико-модельные методы интеграции знаний, извлеченных из медицинских документов. Вестн. НГУ. Серия: ИТ. 2015. Т. 13, вып. 3. С. 29–41.

[2] Галиева А.Г., Пальчунов Д.Е. Методы автоматизации разработки смарт-контрактов при помощи моделей ситуаций. Материалы IX Международной конференции «Знания - Онтологии – Теории» (ЗОНТ-2023). – Новосибирск, 2-6 октября 2023 г. – С. 60-65.

[3] Galieva A. G., Palchunov D. E., Automation of the Smart Contract Development Using Situation Models. 2022 IEEE 23rd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), Altai, Russian Federation, 2022, pp. 698-703.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: chimit-naydanov@yandex.ru

Разработка ВЕБ-приложения для управления регистрационными данными домашних животных

А. А. Осипов, К. Ю. Болотов

По данным ВЦИОМ, у 68% россиян в семье есть домашние животные, в основном — кошки и собаки [1]. Однако каждый день в России теряется от 300 до 1000 собак и кошек, и только 20% из них возвращается к хозяевам. Поиск потерявшегося питомца может занимать продолжительное время, а отсутствие единой базы идентификаторов домашних животных не позволяет сразу связаться с владельцем.

Важно также отметить, что часто владельцы питомцев не задумываются о возможной пропаже любимца: они не помещают «адресники» (небольшая подвеска для ошейника, на которой указана информация о кличке животного и о контактных данных хозяина), а также не чипируют своих животных.

Цель нашей работы заключается в разработке сервиса, предоставляющего владельцам домашних животных возможность добавлять своих питомцев в нашу базу данных, а пользователям, которые нашли потерянное животное с чипом или клеймом - способ быстро получить контактные данные для связи, оставленные владельцем питомца.

На сегодняшний день были решены следующие задачи: спроектирована структура базы данных, разработаны серверная часть и пользовательский интерфейс, которые позволяют владельцам животных регистрироваться на сайте, оставлять свои контакты и добавлять информацию о питомцах. Пример такой информации: кличка, порода, особенности ухода (это могут быть: аллергии, необходимые лекарства и т. д.). Неавторизованные пользователи, указав чип потерявшегося животного, способны найти важную информацию о нём, а также контактные данные хозяина.

В дальнейшем мы планируем развивать наш сервис: например, имплементировать REST API, реализовать элементы безопасности веб-приложения, поддерживать несколько пользовательских ролей, исследовать статистические данные, полученные с сайта, а также использовать blockchain-арбитраж для оформления сделок по смене владельцев питомца.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебнонаучной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского Государственного Университета.

Литература

[1] ВЦИОМ, «Россия — страна котов! 27.11.2019». URL: https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/rossiya-strana-kotov

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.osipov4@g.nsu.ru, k.bolotov@g.nsu.ru

Теоретико-модельные методы формализации рассуждений и рефлексии

Д. Е. Пальчунов

Доклад посвящён проблемам формализации и моделирования рассуждений, сознания и рефлексии для разработки интеллектуальных помощников. Данное исследование является продолжением работ [**1**] [**2**].

Методы формализации рассуждений основаны на использовании частичных моделей и их онтологических гомоморфизмов [**2**]. Для формального представления взаимодействия пользователя с интеллектуальным помощником используется онтологическая модель предметной области [**3**]. Знания, содержащиеся в онтологической модели, представляются при помощи атомарных диаграмм частичных моделей. Для обработки знаний и реализации диалога пользователя с интеллектуальным помощником применяются технологии семантических предметно-ориентированных языков [**4**].

В процессе взаимодействия с пользователем интеллектуальный ассистент выявляет его намерения и желания для того, чтобы помочь пользователю в решении его задач и удовлетворении его потребностей. Формализация рефлексии пользователя нужна выявления причин его намерений, выяснения того, как пользователь обосновывает свои цели исходя из его потребностей и классов решаемых им задач.

Литература

[1] Пальчунов Д. Е. Моделирование мышления и формализация рефлексии. Ч. 2: Онтологии и формализация понятий // Философия науки. 2008. № 2 (37). С. 62-99.

[2] Palchunov D. E., Modeling Reasoning and Argumentation for the Development of Intelligent Assistants, 2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 820-825. DOI: 10.1109/SIBIRCON56155.2022.10017050

[3] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

[4] Gumirov V. S., Matyukov P. Y., Palchunov D. E. Semantic Domain-specific Languages // In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 21-27 Oct. 2019. IEEE Press, 2019. P. 0955–0960. DOI: 10.1109/SIBIRCON48586.2019.8958237

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: palch@math.nsc.ru

Разработка алгоритма распознавания речевых ошибок

О. Д. Пальчунова

Нарушения в произношении речи могут быть барьером в обучении и коммуникации. Поэтому важно разрабатывать методы коррекции речевых ошибок, чтобы усовершенствовать навыки произношения и говорения, в особенности не на родном языке.

Разрабатываемый алгоритм распознования речевых ошибок основывается на технологиях автоматического распознавания речи (ASR) [**1**]. Процесс работы ASR включает в себя запись аудиосигнала, его предварительную обработку, извлечение акустических признаков, моделирование речи с использованием методов машинного обучения, включая скрытые марковские модели и нейронные сети. Языковая модель оценивает вероятность последовательности слов в контексте. В конечном итоге ASR выдаёт текстовое представление произнесенной речи, которое может быть использовано в различных приложениях, включая голосовых ассистентов, транскрибацию записей и анализ речи.

В разрабатываемом алгоритме будет происходить распознавание фразы пользователя и ее сравнение с эталоном (т.е. правильно произнесенной фразой) по средством нечеткой меры [**2**]. Таким образом, процесс определения ошибок в произношении может быть вероятностным и оценочным, где система учитывает вероятность различных вариантов произношения и предоставляет обратную связь на основе наилучшей оценки.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Литература

[1] Титов Ф.М. Обзор задачи автоматического распознавания речи. Научные исследования и инновации, no. 9, 2021, pp. 223-228.

[2] Яхъяева Г. Э., Пальчунова О. Д. Нечеткие модели как формализация оценочных знаний экспертов // Двадцатая Национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием, КИИ-2022 : Труды конференции. В 2-х томах, Москва, 21–23 декабря 2022 года. Том 2. – Москва: Национальный исследовательский университет "МЭИ". 2022. С. 97-109.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: o.palchunova@g.nsu.ru

Разработка алгоритма для определения качества расположения пользователя в видеопотоке

В. Е. Панова

В современном мире роль видеосвязи постоянно растет. Этим инструментом пользуются при дистанционном обучении, рабочих совещаниях, стриминговых мероприятиях и т.д [**1, 2**]. В процессе развития этого способа взаимодействия стало ясно, что при онлайн-общении важно уделять внимание не только технической части взаимодействия, но и визуальной. Качественное расположение человека в кадре помогает поддерживать эффективность общения на высоком уровне, удерживать внимание собеседников и создавать комфортную для взаимодействия атмосферу. Но в моменте этого взаимодействия трудно самостоятельно контролировать качество изображения. Для решения этой проблемы предлагается разработать алгоритм, анализирующий изображения пользователя в видеопотоке.

Этот алгоритм основан на результатах исследования, в котором был проведен опрос среди молодых людей. Участникам показывали изображение лица, смещенного в разные стороны относительно центра, увеличенного или уменьшенного относительно всего кадра. На каждом изображении нужно было оценить качество положения человека в кадре от 1 до 5. На основе собранных ответов удалось выявить статистически значимые данные, касающиеся интуитивно приятного расположения человека в кадре при онлайн-общении.

Алгоритм, применяющий эти данные, анализирует видеопоток и выявляет моменты, когда расположение пользователя не соответствовало оптимальным параметрам [**3**]. Обратная связь выдается в виде графика, отображающего качество расположения в кадре относительно времени видео. Таким образом пользователь может наблюдать, как изменения его позы влияют на общую эффективность визуального представления.

Литература

[1] Подкур Т.М., Шестакова Е.А., Яхъяева Г.Э., Модуль обработки контента системы дистанционного обучения ChooseYourCourse. // Материалы Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2021), Новосибирск, 2021, с. 237-247.

[2] G. Yakhyaeva and T. Podkur, Knowledge base for the system of distance education ChooseYourCourse, // 2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 860-864.

[3] Шилович О.Б., Гуляй В.Г., Марков А.И., Шаповалов Д.А. К вопросу улучшения качества анализа продукции путём применения алгоритмов компьютерного зрения // ЦИТИСЭ. 2023. № 1. С. 191-201.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.panova1@g.nsu.ru

Настройка среды для тестирования и развертывания смарт-контрактов и децентрализованного приложения на основе блокчейна NEO

С. Е. Петров

С ростом популярности блокчейн-технологий возникает задача обеспечения безопасной и эффективной разработки децентрализованных приложений и смарт-контрактов. Это требует создания изолированных сред разработки, отладки и тестирования для снижения рисков и обеспечения надежного функционирования смарт-контрактов на реальных блокчейн-платформах.

Целью работы является настройка среды для тестирования смарт-контрактов на платформе NEO [1] и автоматизация процесса разработки с использованием непрерывной интеграции и непрерывной доставки (CI/CD).

Для решения задачи обеспечения изоляции и безопасности смарт-контрактов на платформе NEO была разработана собственная приватная блокчейн сеть с использованием инструмента NEO-CLI. Этот процесс включал в себя настройку узлов сети и установку необходимых зависимостей для обеспечения консенсуса и доступа к RPC API. В результате созданная изолированная среда позволила проводить тестирование и отладку, минимизируя риски и обеспечивая надежное функционирование смарт-контрактов в реальных условиях.

Для решения задачи автоматизации процессов разработки и тестирования была внедрена непрерывная интеграция и непрерывная доставка (CI/CD) с использованием платформы GitLab. В рамках этой задачи был создан пайплайн, включающий несколько этапов, таких как сборка приложения, запуск тестов, развертывание смарт-контрактов и создание релизов. Это решение позволило автоматизировать весь процесс, сократить время развертывания с 1 часа до 3 минут и снизить вероятность человеческих ошибок.

Работа выполнена при поддержке АО "СберТех"и ПАО "СБЕРБАНК"на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Литература

[1] Coelho, Igor M., Vitor N. Coelho, Rodolfo P. Araujo, Wang Yong Qiang, and Brett D. Rhodes. 2020. "Challenges of PBFT-Inspired Consensus for Blockchain and Enhancements over Neo dBFT"Future Internet 12, no. 8: 129. https://doi.org/10.3390/fi12080129

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.petrov1@g.nsu.ru

Статистическое оценивание эвристических методик скрещивания признаков в структурированных данных

Н. А. Радеев

Исследование при помощи комбинации признаков является ключевой методикой в инженерии признаков [**1**]. Иногда объединение признаков, которые кажутся незначительными при отдельном рассмотрении, может привести к созданию признака с большей важностью. Однако определение наиболее важных комбинаций становится вычислительно трудоёмким из-за экспоненциального увеличения возможных комбинаций с учетом большего числа признаков [**2**]. На практике часто используются эвристические методы. Тут же мы сталкиваемся с двумя кажущимися противоречивыми правилами:

Только важные признаки содержат полезную информацию, так что другие можно исключить. Объединение менее важных признаков может создать очень значимый признак, поэтому их не следует исключать. Математически оба утверждения не могут быть верными одновременно, но в реальной практике с данными из реального мира это не так очевидно [**3**]. В нашей работе мы анализировали набор реальных данных, используя различные критерии оценки важности признаков и их комбинаций, чтобы понять, какое из эвристических правил чаще оказывается верным.

Литература

[1] Kanter J. M. , Veeramachaneni K., Deep feature synthesis: Towards automating data science endeavors. In: 2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA), Oct. 2015, pp. 1–10. doi: 10.1109/DSAA.2015.7344858.

[2] Upgini: Low-code feature search and enrichment library for machine learning. Viewed: 28 October 2022. [OS Independent]. Available on: https://upgini.com/

[3] Gijsbers P., LeDell E., Thomas J., Poirier S., Bischl B., Vanschoren J., An Open Source AutoML Benchmark. arXiv, 1 July 2019. doi: 10.48550/arXiv.1907.00909.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: n.radeev@g.nsu.ru

Система голосового распознования для мобильного помошника Talky Chef

В. Д. Садриев, О. Д. Пальчунова, А. С. Пашкова

Голосовые помощники значительно упрощают повседневную жизнь. Однако в кулинарной отрасли универсальные голосовые помощники ограничены и не всегда подходят. Talky Chef - мобильное приложение с голосовым ассистентом, созданное для оптимизации кулинарного опыта [**1**].

Talky Chef включает в себя базу данных, рекомендательную систему и голосовое управление. База данных содержит 18 таблиц, включая рецепты, шаги, коллекции, комментарии, оценки и пользователей. Эта база данных обеспечивает хранение и доступ к около 1000 рецептам.

Для предоставления персонализированных рецептов используется рекомендательная система, основанная на алгоритме коллаборативной фильтрации Slope One. Этот алгоритм анализирует предпочтения пользователей и предсказывает рецепты, которые могут им понравиться, основываясь на оценках других пользователей [**2, 3**].

Talky Chef позволяет взаимодействовать с приложением с помощью голосовых команд: «вперед», «назад», «таймер» и др. Система голосового распознавания использует нейронную сеть для анализа акустических сигналов и интерпретации команд пользователя. Этот голосовой компонент делает приложение доступным для использования даже в условиях, когда руки у пользователя могут быть грязные или мокрые.

Приложение предоставляет удобный интерфейс для пользователей. Главная страница предлагает рецепты, а страницы рецептов включают ингредиенты, описания и таймеры. Пользователи могут оценивать и комментировать рецепты, создавать свои собственные рецепты и категории.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Литература

[1] Садриев В. Д., Иванов А. И., Пальчунова О. Д., Пашкова А. С., Мобильное приложение рецептов с голосовым помощником Talky Chef, Материалы международной конференции Знания-Онтологии-Теории (ЗОНТ-2023). 2023. С. 407.

[2] Pu Wang, HongWu Ye, A Personalized Recommendation Algorithm Combining Slope One Scheme and User Based Collaborative Filtering, IIS ’09, 2009.

[3] DeJia Zhang, An Item-based Collaborative Filtering Recommendation Algorithm Using Slope One Scheme Smoothing, ISECS ’09, 2009.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.sadriev@g.nsu.ru, o.palchunova@g.nsu.ru, a.pashkova@g.nsu.ru

Эмоциональный искусственный интеллект, ведущий диалог

В. И. Саранин

Одной из ключевых проблем в мире искусственного интеллекта является отсутствие глубокого и эмоционального взаимодействия между машинами и людьми. Существующие ИИ, несмотря на свою невероятную интеллектуальную мощь, часто остаются холодными и лишенными чувств, что делает их менее доступными и симпатичными для пользователей.

Эмоциональный искусственный интеллект, способный задавать вопросы и анализировать эмоции в ответах пользователей, представляет собой уникальное направление развития в мире искусственного интеллекта. Он не только инициирует интересный диалог, но и способен воспринимать и передавать эмоциональную окраску в разговоре. Благодаря такому подходу, общение с ИИ становится более естественным и захватывающим. Этот искусственный интеллект может адаптировать свою манеру общения, чтобы соответствовать эмоциональной тональности разговора, делая диалог более глубоким и личным.

Разрабатывается программная система, которая будет реализовывать эмоциональный диалог с пользователем [**1**]. Она будет способна определять эмоции в текстовых сообщениях, анализировать их и на основе этого создавать ответы, соответствующие эмоциональному состоянию пользователя. Вдобавок, система будет обладать онтологической памятью, где будет храниться история общения и взаимодействия с пользователем [**2**]. Она будет способна самостоятельно определять, как двигаться дальше в диалоге, и вводить новые темы или вопросы для обсуждения. Таким образом, эта система освобождает пользователя от роли инициатора диалога.

Литература

[1] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей. Информационные технологии, Том 23, № 2, 2017, с. 97–106.

[2] Palchunov D., Yakgyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEUR Workshop Proceedings, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.saranin@g.nsu.ru

Разработка программного комплекса для организаций общественно-корпоративных мероприятий в виртуальном 3D пространстве

А. А. Сартаков

В современной среде разработки возникают серьезные проблемы, связанные с эффективностью команд из-за психоэмоционального выгорания отдельных сотрудников. Это состояние выгорания снижает внимание и способствует возникновению ошибок, что приводит к временным потерям. Согласно опросам, 78% сотрудников IT-индустрии сталкиваются с симптомами выгорания. Компании пытаются решить эту проблему, организуя развлечения для своих сотрудников. Однако для повышения эффективности таких мероприятий важно, чтобы каждый участник был заинтересован в участии.

Проект «Codestry» — кооперативная мультиплеерная игра, которая тесно переплетается со сферой IT для нахождение общих точек взаимодействия между разработчиками. Отличительными механиками выступают программирование на языке python и логические задачи с булевыми операциями, решение которых требует базового знания компьютерых наук. Основной упор при разработке делается на командное взаимодействие игроков для улучшения взаимодействия внутри команды в дальнейшем.

Новизна проекта заключается в проведении корпоративных мероприятий в 3D пространстве. Также новаторским является сочетание уникальных механик.

Цель работы: Разработка программного комплекса для организаций общественно-корпоративных мероприятий в виртуально 3D пространстве. Для достижения данной цели требуется выполнить следующие задачи:

1. Разработка клиента непосредственно для взаимодействия с игрой: скачивание, запуск

2. Разработка сайта с возможностью планирования и просмотра текущих запланированых сессий

3. Разработка сервера, который позволит подключаться к заранее выделенным серверам с запущенной игрой

Таким образом предложенное решение позволит реализовать мультиплеерную составляющую проекта «Codestry».

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.sartakov1@g.nsu.ru

Выборочное подключение процессов к VPN посредством перехвата системных вызовов в ОС Linux

П. Е. Смоляков

Идея выборочного подключения процессов к VPN может быть использована во многих прикладных задачах. В частности:

(1) многим в сфере IT нужно подключаться к корпоративным VPN сетям, при этом нельзя либо не хочется передавать через них весь трафик;
(2) у пользователя может не быть административных привилегий, нужна поддержка работы из пользовательского пространства;
(3) необходимо использование двух и более VPN-подключений параллельно.

Отсутствие возможности выборочно подключить ограниченное число процессов к VPN-туннелю в определенных ситуациях создаёт сложности для пользователей. В рамках работы предлагается использовать механизм перехвата системных вызовов для решения поставленной проблемы.

Вдохновителем работы является достаточно известный в области информационной безопасности инструмент, называющийся Proxychains и также позволяющий запускать дочерние процессы, осуществляя TCP-подключения через прокси (socks, http(s)) без возможности обнаружения со стороны запускаемого процесса (обнаруживает не сам процесс, в него просто заложена такая логика его автором-программистом).

Цель. *Разработка инструмента, позволяющего выборочно подключать процессы к VPN посредством перехвата системных вызовов.*

Для выполнения работы необходимо было выполнить следующие *задачи*:

(1) обеспечить перехват системных вызовов с помощью LD_PRELOAD (для программ с динамическим связыванием);
(2) написать подменяющую библиотеку (shared object) на языке C. Она отправляет сообщения в формате BSON с аргументами перехваченных вызовов IPC серверу;
(3) написать IPC (inter process communication) сервер на языке Go, принимающий аргументы перехваченных вызовов и осуществляющий общение с удалённым сервером;
(4) реализовать создание и общение через VPN-туннель в рамках процесса посредством gVisor netstack - userspace реализации сетевого стека, предоставляющей возможность создавать VPN-туннель в рамках процесса без создания псевдоустройств.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: p.smolyakov@g.nsu.ru

Формирование индивидуального меню питания на основе генетического алгоритма

А. Т. Тимофеев

В современном мире все больше людей осознают важность здорового питания. Учитывая уникальные потребности и особенности каждого человека, необходимо обратить внимание на индивидуализированные диетические подходы. Создание оптимального рациона питания, соответствующего потребностям и целям каждого человека, является важной задачей для поддержания общего благополучия и профилактики различных заболеваний.

Существующие сервисы по составлению диеты учитывают индивидуальные характеристики, такие как пол, возраст и физическая активность, но не всегда учитывают такие важные параметры, как количество приемов пищи в день, бюджет и кулинарные навыки. Из-за этого может возникать риск создания рационов, не учитывающих особенности и возможности конкретного человека [**1, 2**].

Генетический алгоритм представляет собой метод оптимизации, вдохновленный природными механизмами эволюции, который находит приближенно оптимальное решение в сложных многопараметрических задачах [**3**]. Он способен адаптироваться к различным вариантам диетических рационов, учитывая разнообразные факторы, влияющие на здоровье и благополучие человека.

Использование генетических алгоритмов в оптимизации рациона питания предоставляет возможность создания индивидуализированных диетических планов, стремящихся к наиболее точному соответствию множеству параметров каждого индивида. Эти параметры включают рост, вес, пол, возраст, уровень физической активности, цели питания, количество приемов пищи в день, предпочтения в пище, уровень кулинарных навыков и финансовые ограничения. Генетический алгоритм способен оптимизировать содержание макронутриентов и энергетической ценности в рационе с целью достижения конкретных результатов, например поддержание веса, улучшение физической формы или сохранение здоровья.

Литература

[1] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development
SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, pp. 868–871.

[2] Yakhyaeva, G., Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning
2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory, KNOTH 2021, 2021, pp. 40–44.

[3] Kramer O. Genetic Algorithm Essentials
Springer, Studies in Computational Intelligence, Volume 679, 2017.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.timofeev@g.nsu.ru

Разработка архитектуры локальной сети групповых велопоездок

С. Ж. Тлеубаев

Разработка различных умных помощников становится все более актуальным в современном мире, где технологии играют все более важную роль в повседневной жизни людей. Интеллектуальные помошники представляют собой инновационный способ улучшения пользовательского опыта и облегчения повседневной жизни людей [**1, 2**]. С развитием их функциональности и возможностей, умные помощники становятся все более неотъемлемой частью нашей цифровой жизни.

Проект "Бортовой компьютер для велосипедов"охватывает предметную область создания современных умных устройств, специально разработанных для улучшения опыта катания на велосипеде. Эти устройства интегрируют в себя высокотехнологичные датчики, программное обеспечение и возможности связи, чтобы предоставить велосипедистам информацию о их поездках и физической активности.

Умные велосипедные датчики оснащены сенсорами, которые измеряют различные параметры, такие как скорость, дистанция, наклон, пульс, каденс педалирования и многое другое. Эти данные позволяют велосипедистам отслеживать свой прогресс и оптимизировать свои тренировки.

Датчики могут быть связаны со смартфонами, сами устройства могут быть связаны через точку доступа Wi-Fi, что позволяет передавать и анализировать данные на смартфонах или других устройствах.

Проект "Бортовой компьютер для велосипедов"нацелен на улучшение велосипедистов, предоставляя им средства для более информированного и эффективного катания. В рамках этой предметной области, инновации в области сенсоров, связи и анализа данных продолжают изменять опыт велосипедистов и делают его более доступным и интересным для всех уровней навыков.

Литература

[1] Palchunov D., Yakgyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEUR Workshop Proceedings, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

[2] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, стр. 868–871.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.tleubaev@g.nsu.ru

Использование жадных методов в генетическом алгоритме при составлении туристических рекомендаций

А. К. Хорошавин

Одной из наиболее важных задач в туризме является планирование. Поскольку посетить все места невозможно, туристы стараются выбирать то, что им кажется наиболее привлекательным [**1**]. Каждый план имеет временные ограничения и предпочтения пользователей. Это является частным случаем задачи ориентирования — *«проблема планирования туристической поездки»* — получить наиболее привлекательный маршрут, соблюдая ограничения пользователя [**2**].

В данном случае мы имеем дело с NP-полной задачей, которую хорошо решают эвристические алгоритмы, в частности *генетический*. Однако, в общем случае генетический алгоритм может довольно долго сходиться к оптимальному решению, что нежелательно, когда мы хотим получить ответ в разумные сроки [**3**]. Решить данную проблему поможет применение жадных методов в генетических операторах алгоритма. Зададим для каждого места $duration$ — время нахождения в данном месте и $attr_{place} \in [0, 1]$ — *«коэффициент привлекательности»*, который отражает субъективную вероятность выбора того или иного продукта или услуги пользователем [**4**].

Формируя начальную популяцию маршрутов, мы будем сразу учитывать временные ограничения и исключать пути, которые в них не укладываются. При скрещивании двух маршрутов отбирать места таким образом, чтобы не было слишком много мест одной категории или с большим значением $duration$. Наконец, при мутации мы будем учитывать $attr_{place}$, заменяя самый худший «ген» на более привлекательный, либо меняя соседние. Такие модификации позволят в более сжатые сроки предложить пользователю оптимальный маршрут, удовлетворяющий его потребностям и ограничениям.

Литература

[1] Хорошавин А.К., Уменьшение влияния проблемы холодного старта при формировании туристических рекомендаций // Материалы IX Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2023), 2023.

[2] Paulavicius, Remigijus and Stripinis, Linas and Sutavičiūtė, Simona and Kočegarov, Dmitrij and Filatovas, Ernestas, A New Genetic Algorithm for Personalized Tourist Trip Design.

[3] Remigijus Paulavičius, Linas Stripinis, Simona Sutavičiute, Dmitrij Kočegarov, A novel greedy genetic algorithm-based personalized travel recommendation system, Expert Systems With Applications, volume 230, 2023.

[4] Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2021, 12948 LNAI, pp. 152–165

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.khoroshavin@g.nsu.ru

Разработка консольной версии программного обеспечения для формирования и первичного анализа выборок нуклеотидных последовательностей

Т. М. Цивинская

Для проведения сравнительного анализа генетических последовательностей и поиска гомологов в базах данных ранее секвенированных последовательностей наиболее широко на данный момент биоинформатиками используется компьютерная система BLAST – семейство компьютерных программ, разрабатываемых NCBI, служащих для поиска сходных аминокислотных или нуклеотидных последовательностей. Но существующие способы взаимодействия с ней обладают рядом недостатков и подразумевают значительные объемы ручного труда, приводящего к большим временным затратам и высокому уровню ошибок. Поэтому актуальна задача автоматизации работы с таким средством.

В данный момент BLAST можно использовать в веб-версии (не обладающей всеми необходимыми функциональными возможностями), локально с помощью BLAST+ (однако пользователю придётся постоянно хранить и обновлять у себя базы данных NCBI, иногда занимающие несколько терабайт), через облачный провайдер с помощью ElasticBlast (больше подходит для задач, где требуются значительные вычислительные мощности) или через один из доступных API: BLAST URL API (на данный момент самим NCBI отмечен как устаревший), либо NCBI C++ Toolkit. Последний, по моему мнению, является наиболее подходящим вариантом для данной работы.

На данный момент является актуальной задача локализации на геномной ДНК экспериментально полученных сайтов связывания транскрипционных факторов, содержащихся в базе данных TRRD, разрабатываемой в ИЦиГ, с последующим вырезанием флангов – участков последовательности, соседствующих с сайтом связывания и их дальнейший анализ. Для её решения, с применением NCBI C++ Toolkit мной была написана исходная версия программы, позволяющая пользователю сделать запрос к серверам NCBI, используя файл с последовательностью в формате FASTA, результатом обработки которого будет список сходных участков подобранных последовательностей с флангами указанной длины. Есть возможность уточнения поиска с указанием конкретного организма, вида молекулы и прочего, за счёт использования системы Entrez. В процессе дальнейшей работы будет добавлен пользовательский интерфейс (используется фреймворк Qt), а также проведён пробный анализ набора последовательностей для демонстрации работы программы.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: t.tsivinskaya@g.nsu.ru

Разработка цифрового ассистента для анализа финансовых продуктов

С. К. Чеболтасова

За последние несколько лет банковский сектор претерпел кардинальные изменения, связанные со стремительным переходом из традиционных отделений в мобильные и веб-приложения. Автоматизация предоставления банковских услуг была внедрена с целью упростить процесс их получения для пользователей. Однако, вместе с появившимися удобством и доступностью, остаются и проблемы. С ростом количества и сложности финансовых продуктов и их условий, поддержка банков может предоставлять неточные и неполные ответы на вопросы клиентов.

Еще одна проблема - это договоры. Пользователи, не имеющие специализированных знаний, не всегда могут понять текст договора, написанный с использованием юридических терминов. Также, несмотря на стремление банков предоставить клиентам как можно больше информации о своих продуктах, проблемой остается и то, что не всегда большой объем данной информации является гарантом ее правдивости.

Для решения перечисленных проблем необходимо создать систему, которая будет предоставлять пользователям возможность не только самостоятельно разбираться в деталях банковских продуктов, но и получать точные и прозрачные ответы на возникающие вопросы. В рамках данной работы разрабатывается сервис, который объединяет базу знаний, собранную из опубликованных в открытом доступе договоров, дополнительной информации от банков и отзывах от клиентов, и цифрового ассистента, способного отвечать на вопросы пользователей в режиме реального времени.

Литература

[1] Palchunov D. E. Modeling Reasoning and Argumentation for the Development of Intelligent Assistants, 2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON) / D. E. Palchunov // 2022, pp. 820-825

[2] Palchunov D., Vaganova A. Methods for Developing Digital Twins of Roles Based on Semantic Domain-Specific Languages, 2021 IEEE 22nd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) / D. Palchunov, A. Vaganova // 2021, pp. 515-519

[3] Пальчунов Д. Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка / Д. Е. Пальчунов // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: s.cheboltasova@g.nsu.ru

Разработка архитектуры децентрализованного приложения на основе блокчейна NEO

Я. Т. Черновская

В сфере метавселенных существует ограничение доступности и независимости пользователей, так как большинство метавселенных принадлежат отдельным организациям и корпорациям.

Целью работы была разработка архитектуры децентрализованного приложения на основе технологии блокчейн [1], которое позволит пользователям создавать и управлять своими виртуальными мирами и персонажами, а также установить новый стандарт прозрачности, независимости и безопасности в сфере метавселенных.

Для решения задачи с поддержкой актуальных данных и синхронизацией с блокчейн сетью был разработан модуль с обертками над смарт-контрактами. Изменения карты, сделанные игроком, фиксируются приложением на языке программирования Си и отправляются в очередь модуля, написанного на языке Java. Модуль отслеживает состояние очереди и, при необходимости, делает запрос модулю с смарт-контрактами для внесения изменений в блокчейн сеть. Также был разработан графический интерфейс лаунчера - загрузчика игровой части, который также соединяет пользователя с сетью. Для реализации модуля взаимодействия с блокчейн сетью и самой игрой была использована платформа JavaFX, которая обеспечивает простое написание кода и легковесность графической составляющей.

Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.

Литература

[1] Tharaka Hewa, Mika Ylianttila, Madhusanka Liyanage, Survey on blockchain based smart contracts: Applications, opportunities and challenges, Journal of Network and Computer Applications, Volume 177, 2021.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: y.chernovskaya@g.nsu.ru

Разработка методов осуществления сделок с динамическим дисконтированием на базе технологии блокчейн

К. М. Черпаков

В современном мире время является ценным ресурсом для людей. Существует необходимость проведения выгодных, безопасных и быстрых в подготовке сделок между двумя контрагентами. Для этого имеется возможность использовать современную технологию блокчейн, чтобы осуществлять запись данных об условиях и правилах осуществления сделок с динамическим дисконтированием.

Динамическое дисконтирование является современным финансовым инструментом. Инициатор сделки формирует правила расчёта величины дисконта в соответствии со сроком, на который будет осуществлена ранняя оплата счёта. Второй агент сделки соглашается на данные условия сделки или же отказывается, предлагая свои условия. Заключается договор ранней оплаты счетов, устанавливаются условия поставки или предоставления услуг взамен на скидку от поставщика. Заказчик получает скидку на заказ: чем раньше он оплатит счёт, тем большая будет выгода. Поставщик в свою очередь имеет выгоду за счет сокращения затрат на привлечение финансирования.

Целью научно-исследовательской работы является разработка программного обеспечения для осуществления сделок с динамическим дисконтированием, используя современную технологию блокчейн.

Для решения задачи разработано клиент-серверное веб-приложение на языках программирования Java и JavaScript, предоставляющее возможность поиска контрагента для дальнейшего установления условий, сроков, суммы оплаты сделки с динамическим дисконтированием. Внутренний сервер при обработке запросов от пользовательского интерфейса взаимодействует с базой данных и блокчейн сетью.

Особенность разработанной платформы — условия сделки и информация о контрагентах хранятся в смарт-контрактах, разработанных на языке программирования Solidity. Оплата производится с помощью криптовалюты Ethereum.

Пользователь имеет доступ к приложению из браузера, что упрощает взаимодействие с программной системой. После регистрации и заполнения анкеты о себе, пользователь получает доступ к сервису для поиска контрагента.

Разработанная блокчейн-платформа для заключения сделок с динамическим дисконтированием может применяться для поиска контрагентов большими компаниями, продающими товары и услуги; для поиска исполнителей задач по разработке программного обеспечения.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: k.cherpakov@g.nsu.ru

Разработка методов анализа пользовательских намерений для реализации виртуального помощника

А. Шабалин

Разработка методов анализа пользовательских намерений является ключевым этапом в создании эффективного виртуального помощника, способного понимать и удовлетворять потребности пользователей. В данном исследовании рассматриваются подходы и технологии для анализа пользовательских намерений с целью разработки более точных и контекстно-ориентированных виртуальных ассистентов, что может повысить их функциональность и практическую ценность.

В рамках работы, для получения достаточной точности анализа пользовательских намерений, планируется использовать языковую модель на основе архитектуры нейронных сетей transformer. Эта архитектура стала ключевой технологией для задач обработки естественного языка, включая машинный перевод, анализ тональности, генерацию текста и многое другое. Модели, основанные на архитектуре Transformer, достигли выдающихся результатов в ряде NLP-задач и продолжают развиваться, обеспечивая высокую точность в решении разнообразных задач в области обработки текста.

На текущем этапе разрабатывается архитектура модели, которая будет анализировать пользовательские намерения.

В дальнейшей работе планируется реализация и обучение модели, а также проведение тестирования модели на тестовых данных, чтобы оценить точность анализа, полноту и другие метрики производительности.

Литература

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

[2] Palchunov D.,Yakhyaeva G.,Yasinskaya O., Software system for the diagnosis of the spine diseases using case-based reasoning. In: Proceedings of the International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON / SibMedInfo — 2015), 28-30 October, 2015, Novosibirsk, p. 205-210. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2015.7361884

[3] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В., Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 13, вып. 3, 2015. С. 42-51.

[4] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е., Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.shabalin4@g.nsu.ru

Разработка голосового помощника для мобильных платформ в составе программно-аппаратного комплекса для навигации внутри помещения людей с проблемами зрения

К. О. Шадрин

В Российской Федерации проживает примерно 20,7 миллионов граждан с нарушениями зрения, и передвижение в зданиях является одной из главных проблем, с которой они сталкиваются.

В рамках общего проекта выполняется работа, направленная на разработку мобильного приложения для взаимодействия с программно-аппаратным комплексом. Это придает данной работе практическую ценность.

Цель данной работы заключается в разработке голосового помощника для мобильных платформ в составе программно-аппаратного комплекса, который предназначен для навигации внутри помещений для людей с проблемами зрения. Для достижения этой цели был разработан следующий план работы:

(1) Сформулировать требования
(2) Разработать архитектуру мобильного приложения
(3) Реализовать данную архитектуру
(4) Провести тестирование

Выполнение данных задач и достижение цели приведут к реализации голосового помощника для мобильных платформ в программно-аппаратном комплексе, предназначенном для улучшения навигации внутри помещений для людей с нарушениями зрения.

В настоящее время мы установили требования, разработали план тестирования и осуществляем разработку данного комплекса.

Алгоритм персонализации йога-тренировок

А. И. Шатрова

Сегодня все больше людей активно заботятся о своем здоровье, следят за питанием, сном и регулярно выполняют физические упражнения. Вместе с тем, они также предпочитают заниматься спортом в удобных для них местах, например, в домашних условиях или в парке. Среди популярных направлений занятий выделяется йога, которая привлекает все больше людей своим осознанным подходом к физическому здоровью и гармонии с телом. Однако большинство йога-тренировок существуют в готовом виде, что может стать проблемой для обычного человека. Для решения этой проблемы предлагается разработать систему, которая поможет пользователю заменять упражнения в йога-тренировках на схожие по эффекту, что даст возможность адаптировать тренировки к своему уровню подготовки и целям, позволяя получить максимальную пользу от занятий йогой в домашних условиях.

Для разработки системы необходимо выбрать способ замены упражнений, а также способ составления йога-тренировок. Тренировки будут составляться с помощью обработки готовых вариантов, они разделены на основе направлений. Каждая тренировка в зависимости от длительности динамически делится на части: начальная, основная, завершающая. И в зависимости от направления и желаемой длительности тренировка будет формироваться из совокупности упражнений, которые были в определенных частях готовых тренировок. Упражнения решено классифицировать с помощью ключевых слов [**1**]. Чтобы получить ключевые слова, была создана и наполнена база данных йога-упражнений, в которой содержится название, описание, техника выполнения, противопоказания и изображение каждого упражнения. Описания упражнений преобразованы в начальную форму, а затем подсчитывается частота встречаемости каждого слова без учета предлогов, союзов, служебных частей речи, частиц и слов, которые часто используются в речи, но не имеют смыслового значения [**2**] для классификации. Далее составляется словарь ключевых слов на основе метода кумулятивной суммы, с помощью которого будут классифицироваться упражнения. У всех упражнений выделяются ключевые слова, на их основе формируются вектора и с помощью их сопоставления будет осуществляться замена упражнений в йога-тренировках.

Литература

[1] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, стр. 868–871.

[2] Ignatow G., Mihalcea, R. An introduction to text mining. SAGE Publications, 2018.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.shatrova@g.nsu.ru

Оценка соответствия вакансии и опыта соискателя с помощью нейронных сетей

А. А. Шишкин

Задача автоматической оценки кандидатов на данный момент широко исследуется. Причина - в постоянной потребности работодателей в новых сотрудниках, а также в частой смене требуемых знаний в рамках профессиональных отраслей. Использование же человеческих ресурсов для оценки кандидатов приводит к высоким временным и финансовым затратам, что негативно влияет на эффективность процесса.

В рамках работы, для получения достаточной точности предсказаний, предлагается использовать обучающий набор данных, построенный с помощью генеративно - состязательной нейронной сети [**1**]. Это относительно новая архитектура, которая уже показала высокие результаты в обработке изображений [**2**]. Кроме того, с ее помощью удается получить многообещающие результаты и в задачах генерации предложений на естественном языке, связанных отношением логической выводимости [**3**].

Целью работы является разработка системы для оценки соответствия вакансии и опыта соискателя с помощью нейронных сетей.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: разработана архитектура генеративно-состязательной сети для построения набора данных с описаниями опыта соискателя, разработана архитектура системы для проведения оценки соответствия вакансии и опыта соискателя.

В дальнейшей работе планируется реализация и обучение сетей, а также проверка их работоспособности на тестовой задаче.

Литература

[1] Taeksoo K. Learning to Discover Cross-Domain Relations with Generative Adversarial Networks / K. Taeksoo, C. Moonsu, K. Hyunsoo, Lee J. K. , K. Jiwon, 2017.

[2] Radfort A. Unsupervised representation learning with deep convolutional generative adversarial networks/ A. Radford, L. Metz, S. Chintala // ICLR, 2016.

[3] Шишкин А.А. Применение генеративно-состязательных нейронных сетей для порождения предложений, связанных отношением логической выводимости / А. А. Шишкин, А. С. Трегубов// Материалы IX международной конференции «Знания - Онтологии - Теории», 2023. – С. 291–298.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.shishkin3@g.nsu.ru

Исследование влияния методов дообучения глубоких нейронных сетей на их интерпретируемость

А. С. Щербин

После оптимизации нейронных сетей путем изменения их вычислительного графа [**1**] зачастую требуется дообучить выбранную архитектуру на целевой задаче. Для оптимального дообучения могут использоваться методы оптимизации гиперпараметров [**2**], специальные алгоритмы оптимизации [**3**], методы дистилляции знаний [**4**].

Целью данной работы является исследование влияния методов, используемых при дообучении нейронных сетей после оптимизации архитектуры на метрику интерпретируемости моделей. В качестве метрики интерпретируемости используется Integrated gradients [**5**]. Вычислительный эксперимент проводился на наборе данных ImageNet 2012 [**5**]. В качестве базовой архитектуры нейронной сети использовалась MobileNetV2 [**7**], количество операций сложения и умножения в которой было уменьшено вдвое в процессе оптимизации.

Результаты вычислительного эксперименты показали, что использование дистилляции в сочетаниисочитании с методом Sharpness aware minimization увеличивает интерпретируемость итоговой модели. Полученные значения метрики интерпретируемости для дообучения с использованием и без использования этих методов равны соответственно 0.316 и 0.293, при интерпретируемости базовой модели 0.34.

Литература

[1] Щербин А. С. Проблемы оценки качества архитектур нейронных сетей и алгоритмов поиска архитектур //Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. – 2023. – Т. 21. – №. 2. – С. 51-62.

[2] Bergstra J., Yamins D., Cox D. Making a science of model search: Hyperparameter optimization in hundreds of dimensions for vision architectures //International conference on machine learning. – PMLR, 2013. – С. 115-123.

[3] Foret P. et al. Sharpness-aware minimization for efficiently improving generalization //arXiv preprint arXiv:2010.01412. – 2020.

[4] Hinton G., Vinyals O., Dean J. Distilling the knowledge in a neural network //arXiv preprint arXiv:1503.02531. – 2015.

[5] Lundstrom D. D., Huang T., Razaviyayn M. A rigorous study of integrated gradients method and extensions to internal neuron attributions // International Conference on Machine Learning. – PMLR, 2022. – С. 14485-14508.

[6] Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks //Advances in neural information processing systems. – 2012. – Т. 25.

[7] Sandler M. et al. Mobilenetv2: Inverted residuals and linear bottlenecks //Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2018. – С. 4510-4520.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.shsherbin@g.nsu.ru

Организация семантического хранения прецедентов для аргументативной диалоговой системы

А. А. Якобсон

В настоящее время в сфере оказания консультационных услуг, таких как банки и интернет-магазины, используются виртуальные ассистенты, предназначенные для помощи пользователю в поиске подходящего решения или товара. Однако, зачастую, эти системы работают по заранее определенному скрипту и при возникновении новой или не предусмотренной скриптом операции переводят клиента на звонок консультанта-человека.

В рамках разработки аргументативной диалоговой системы [**1**], рассматривался вопрос организации хранения прецедентов. Под прецедентом, в первую очередь, мы понимаем результат работы предыдущего сеанса программной системы – некоторый артефакт взаимодействия с пользователем. При этом, таким артефактом могут быть разные вещи: объект предметной области, сам диалог, конкретные слова пользователя и прочее. Для работы программной системы следует структурировать эти возможные варианты в единую систему. Рассмотрим некоторые виды прецедентов.

1) Объект предметной области. В данном случае имеется ввиду конкретный объект, который был выведен системой как решение пользовательской задачи. Это – результат работы программной системы, но несет лишь информацию о себе самом.

2) Объект предметной области + класс решаемой задачи. Мы расширяем прецедент, добавив к нему класс решаемой задачи, которую ставит перед собой пользователь, ставя этому классу в соответствие решение, выработанное системой в ходе диалога. Важно отметить, что свойства объекта предметной области четко определены в базе знаний и независимы от восприятия пользователя. С другой стороны, класс решаемой задачи, которую пользователь намерен решить зависит только от конечной цели пользователя. Как можно заметить, класс решаемой задачи определяет пользователь, при этом подбираемый объект предметной области может и не быть «наилучшим» решением.

3) Объект предметной области + класс решаемой задачи + намерения пользователя. Последней частью информации, необходимой для анализа полученного прецедента являются намерения пользователя. Имея данные о цели пользователя, решаемой задаче и конечном результате работы системы, мы можем построить частичную модель прецедента.

4) В итоге, имея тройку «Объект-класс задачи-намерения» мы можем выстроить цепочку из подобный прецедентов, отражающих конкретную часть диалога Добавив в каждый элемент этой цепочки частичную модель, поясняющую переход или основную «Тройку» мы получим верхнеуровневую модель прецедента [**2**].

Литература

[1] Palchunov D., Yakobson A. Automated methods for conducting an argumented dialogue with the user //2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). – IEEE, 2022. – С. 880-885.

[2] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка // Философия науки. 2009. № 4 (43). С. 70-90.

[3] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. № 2. С. 34-46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.yakobson@g.nsu.ru

Критерий сепарабельности нечеткой модели

Г. Э. Яхъяева

Одним из направлений применения теории нечетких моделей [**1, 2**] является теоретико модельная формализация квантовых вычислений. В квантовых вычислениях минимальным, неделимым носителем информации является кубит. Кубит, в отличие от бита, может принимать континуум различных значений, которые и формализуются с помощью нечеткого означивания [3-5].

Центральным понятием квантовых вычислений является квантовая запутанность. Оно отличает квантовую теорию от классического описания мира и вызывает большой интерес из-за своего резкого расхождения с нашей повседневной интуицией. Одной из основных характеристик этого явления является отсутствие локализации измерения. Система считается незапутанной или сепарабельной, если результаты измерения одних элементов системы не зависят от измерения других элементов. Другими словами, система считается сепарабельной, если процедура измерения элементов коммутативна.

Таким образом, рассматривая нечеткую модель как обобщение квантовой системы, представляет интерес теоретико-модельного описания свойства сепарабельной нечеткой модели.

Определение. *Нечеткую модель* $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \mu, \sigma \rangle$ *будем называть сепарабельной моделью, если для любых атомарных предложений* $\varphi_1, ..., \varphi_k \in S_a(\sigma_A)$ *(для любого* $k \in \mathbb{N}$*) выполняется* $\mu(\varphi_1 \& ... \& \varphi_k) = \mu(\varphi_1) \cdot ... \cdot \mu(\varphi_k)$.

Теорема 1. *В классе атомарно эквивалентных нечетких моделей существует единственная сепарабельная модель.*

Теорема 2. *Рассмотрим нечеткую модель* $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \mu, \sigma \rangle$ *и распределение* $\nu : \mathbb{K}_A \cup \{\emptyset\} \to [0, 1]$*, порождающее модель* $\mathfrak{A}_\mu$*. Тогда если модель* $\mathfrak{A}_\mu$ *является сепарабельной, то найдется такое число* $k \in [0, \frac{1}{2^2 n}]$*, что для любой контрарной пары моделей* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathbb{K}_A$ *выполняется условие* $\nu(\mathfrak{A}_1) \cdot \nu(\mathfrak{A}_2) = k$.

Литература

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей. Алгебра и логика, 54, № 1, 2015, с. 109-118.

[2] Yakhyaeva G., Logic of fuzzifications. Proceedings of the 4th Indian International Conference on Artificial Intelligence, IICAI 2009, 2009, стр. 222–239

[3] Yakhyaeva G.E. Application of Boolean Valued and Fuzzy Model Theory for Knowledge Base Development. SIBIRCON 2019 - International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings, 2019, pp. 868–871.

[4] Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2021, 12948 LNAI, pp. 152–165.

[5] МалаеваЕ.Д., Яхъяева Г.Э. Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов. Вестник Новосибирского государственного университета.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: gul_nara@mail.ru

Методы частичного исполнения для специализации интерпретатора на языке WebAssembly

А. С. Янин

Затраты на разработку оптимизирующего компилятора для нового языка программирования высоки. Нередко исследователи в области языков программирования реализуют только интерпретатор: это позволяет задать семантику языка, но производительность такого решения невысока.

Существуют распространённые способы уменьшить затраты на разработку: трансляция в язык C или C++, компиляция в байт-код виртуальной машины Java (JVM) или использование LLVM, которые отчасти решают проблему. Однако каждое из этих решений рассчитано на определённый класс языков: например, LLVM разрабатывается для C-подобных языков программирования, а JVM сильно связана с особенностями языка Java.

Иной, более новый подход к созданию оптимизирующего компилятора — использование проекций Футамуры–Ершова. При помощи частичного исполнения возможно специализировать интерпретатор для программы на исходном языке программирования, что позволяет получить скомпилированную программу. Этот подход реализуют системы Truffle (вместе с GraalVM) и RPython, но они требуют реализации интерпретатора на определённом языке программирования: Java и Python соответственно.

В то же время в 2017 году был опубликован WebAssembly (сокращённо Wasm). Это байт-код, не привязанный к конкретному языку и предоставляющий набор инструкций, приближенный к процессорным, что позволяет достичь высокой производительности. На текущий момент уже созданы компиляторы в Wasm для таких популярных языков, как C, C++, Rust. Кроме того, для его исполнения существуют оптимизирующие компиляторы: как встроенные в современные веб-браузеры, такие как Chrome, Firefox, Safari, так и не привязанные к ним, например Wasmtime.

Таким образом, перспективной выглядит разработка частичного специализатора для WebAssembly. Это позволит реализовать интерпретатор на любом языке программирования, транслируемом в WebAssembly, и компилировать при помощи интерпретатора программу на исходном языке в Wasm.

Целью работы является адаптировать методы частичного исполнения для WebAssembly, для чего поставлены следующие задачи: разработать на Rust интерпретатор языка SOM, реализовать частичный специализатор для Wasm, применить его к интерпретатору, после чего сравнить производительность полученного решения. На текущий момент работа над интерпретатором завершена; частичный специализатор находится в разработке.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.yanin@g.nsu.ru

On boolean models of gene networks with non-linear degradation

V. P. Golubyatnikov, L. S. Minushkina

The following non-linear dynamical system simulates functioning of a gene network with non-linear degradation of its components.

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_3) - \Gamma_1(x_1); \quad \frac{dx_2}{dt} = L_2(x_1) - \Gamma_2(x_2); \quad \frac{dx_3}{dt} = L_3(x_2) - \Gamma_3(x_3). \tag{1}$$

Here, non-negative variables denote concentrations of these components, monotonically decreasing smooth functions L_j describe negative feedbacks in the gene network, and monotonically increasing (in general) nonlinear smooth functions Γ_j describe the degradations, see **[1]** for examples. All these functions are non-negative.

Lemma. *If* $\sup \Gamma_j > L_j(0)$ *for all* $j = 1, 2, 3$, *then the system* (1) *has a unique equilibrium point* $S_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ *in its phase portrait.*

We construct an invariant domain $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ in the positive octant $\mathbb{R}^3_+$ such that $S_0 \in Q$. The planes $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$ decompose Q to 8 subdomains which we call *blocks* and enumerate by boolean multi-indices, as in **[2]**: $\varepsilon_j := 0$ if $x_j \le x_j^0$ in this block, otherwise $\varepsilon_j := 1$.

Let $q_j > 0$, $-p_j < 0$ be derivatives of the monotonic functions Γ_j, respectively L_j, calculated at the point S_0.

Theorem. *If conditions of the Lemma hold, and*

$$\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3} > 8 + \left(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} - \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{q_2}{q_3}} - \sqrt{\frac{q_3}{q_2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{q_1}{q_3}} - \sqrt{\frac{q_3}{q_1}}\right)^2$$

then the system (1) *has at least one cycle* $\mathcal{C}$. *This cycle is contained in the union* W *of the following six blocks and travels from block to block according to the arrows of the circular diagram*

$$\ldots \to \{001\} \to \{011\} \to \{010\} \to \{110\} \to \{100\} \to \{101\} \to \{001\} \to \ldots$$

The domain W *contains also an invariant surface* Σ *such that* $\mathcal{C} \subset \Sigma$ *and* $S_0 \in \Sigma$.

Similar constructions and results can be obtained for some higher-dimensional systems of the type (1).

Supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-21-00019.

References

[1] Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system. Journal of Diff. Equations. 1977. V. 25, p. 39–64.

[2] Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V., Minushkina L.S. On existence of a cycle in one asymmetric gene network model. Siberian Journ. of Pure and Appl. Mathematics. 2018. V. 18, N 3, p. 27–35.

Novosibirsk state university, Novosibirsk (Russia)
E-mail: golubyatn@yandex.ru; l.minushkina@g.nsu.ru

On cycles in one symmetric gene network model

V. P. Golubyatnikov, E. P. Volokitin

Consider 3D dynamical system as a model of a gene network regulated by negative feedback described by monotonically decreasing multi-step function L, see **[1]**.

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3. \qquad (1)$$

Non-negative variables denote concentrations of the components, L is defined by

$L(w) = 2a$ if $0 \le w < a - \varepsilon$; $L(w) = a + \varepsilon$ if $a - \varepsilon \le w < a$;

$L(w) = a - \varepsilon$ if $a \le w < a + \varepsilon$; $L(w) = 0$ if $a + \varepsilon \le w < \infty$.

Consider a cube $Q = [0, 2a] \times [0, 2a] \times [0, 2a]$ in the positive octant $\mathbb{R}^3_+$. The planes $x_j = a - \varepsilon$, $x_j = a$, $x_j = a + \varepsilon$, $j = 1, 2, 3$, decompose Q to 64 subdomains which we call *blocks* and enumerate by 4-letters alphabet $A, 0, 1, B$: $i_j := A$ if $x_j < a - \varepsilon$ in this block, $i_j := 0$ if $a - \varepsilon \le x_j < a$ in this block, $i_j := 1$ if $a \le x_j < a + \varepsilon$ in this block, otherwise $i_j := B$. Let $\widehat{Q} := [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. The multi-indices which enumerate blocks of $\widehat{Q}$ are equal either 1, or 0, as in **[2, 3]**.

Lemma. *The cubes Q and $\widehat{Q}$ are invariant with respect to positive shifts along trajectories of the system* (1).

Theorem. *If $10\varepsilon < a$, and $a > 1$ then the system* (1) *has at least two cycles C_1 and $C_2 \subset \widehat{Q}$. The cycle C_1 is contained in the union of 18 blocks which are incident to edges $\{x_1 = 2a, x_3 = 0\}$; $\{x_1 = 2a, x_2 = 0\}$; $\{x_2 = 0, x_3 = 2a\}$; $\{x_1 = 0, x_3 = 2a\}$; $\{x_1 = 0, x_2 = 2a\}$; $\{x_2 = 2a, x_3 = 0\}$ of the cube Q, and travels through these blocks according to the arrows of the circular diagram*

$$\ldots \to \{BBA\} \to \{B1A\} \to \{B0A\} \to \{BAA\} \to \{BA0\} \to \{BA1\} \to \{BAB\} \to \ldots$$

This diagram is continued by cyclic permutations of the indices.

The cycle C_2 is stable and unique in $\widehat{Q}$, it travels from block to block according to the arrows of the circular diagram

$$\ldots \to \{001\} \to \{011\} \to \{010\} \to \{110\} \to \{100\} \to \{101\} \to \{001\} \to \ldots$$

Numerical experiments illustrate existence of these cycles.

Supported by the Programs for Fundamental Scientific Research of Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, projects FWNF-2022-0009 and FWNF-2022-0005.

References

[1] Galimzyanov A.V., Stupak E.E., Tchuraev R.N. Epigene Networks: Theory, Models, Experiment. Biology Bulletin Reviews. 2019. V. 9, p. 484–490.

[2] Glass L., Pasternack J.S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems. Journal of Mathematical Biology. 1978. V. 8, p. 207–223.

[3] Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V. Cycles in the odd-dimensional models of circular gene networks. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. V. 12, N 4, p. 648–657.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: golubyatn@yandex.ru; volok@math.nsc.ru

Application of reproducibility analysis to MRI data processing

S. E. Druzhinin

In functional magnetic resonance imaging studies, there might exist activation regions routinely involved in experimental sessions, but modest in response magnitude. These regions may not be easily detectable by the conventional p-value approach using a rigid threshold. With particular reference to the reproducibility analysis method proposed in PhD Liou and her colleagues, discovered method of within- and between-subject brain-activation patterns that are replicable between experimental modalities, and robust to the method used for generating the patterns.

There is a neurophysiological basis behind these reproducible patterns, and the conventional p-value approach using averaged data across subjects might not suggest the complete patterns.The increased responses localize in specific regions with differentially distributed patterns for individual subjects and for different experimental tasks.

Based on the obtained method, it is possible to develop an algorithm that can automatically determine regular reproducibility, which will lead to the further development of research and analysis of diseases of the brain.

References

[1] MICHELLE LIOU, HONG-REN SU, ALEXANDER N. SAVOSTYANOV, JUIN-DER LEE, JOHN A. D. ASTON, CHENG-HUNG CHUANG, and PHILIP E. CHENG, *: Beyond p-values: Averaged and reproducible evidence in fMRI experiments.* Society for Psychophysiological Research, Wiley Periodicals, 2009.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: s.druzhinin1@g.nsu.ru

Construction of p-hypergraphs using Artificial Bee Colony algorithm

E. V. Khvorostukhina, V. A. Shcherbatov

A hypergraph is an algebraic system $H = (X, L)$, where X is a non-empty vertex set and L is a family of subsets of the set X called hypergraph edges (or hyperedges). Let p be some natural number. A hypergraph H is a p-hypergraph if it satisfies the following axioms: every edge of such a hypergraph contains at least $p + 1$ vertices; any p vertices of such a hypergraph are incident to exactly one edge; there is an unbounded set consisting of $p + 1$ vertices.

For example, if we consider planes [1] as hypergraphs with plane points as vertices and plane lines as edges, then any projective plane and any affine plane containing more than 4 points are p-hypergraphs. Thus, the p-hypergraph is a generalization of the concept of the plane.

The problem of construction of p-hypergraphs is nontrivial. Previously some attempts were made to solve this problem (see[2],[3]). However, the solutions were found only for the p-hypergraphs of small orders. In this study, we continued our research in this direction: here we developed a method for constructing p-hypergraphs based on the Artificial Bee Colony (ABC) algorithm [4]. It is an optimization technique that simulates the foraging behavior of honey bees. This algorithm was successfully applied to various practical problems [4]. In our case, the solution is an incidence matrix (a two-dimensional array), and a fitness value is a number of violations of the axioms. The algorithm was implemented in C Sharp.

References

[1] Hartshorne R., Foundations of projective geometry, W.A. Benjamin Inc., New York, 1967.

[2] Kurbatov M. S., Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. Razrabotka algoritma postroeniya p-gipergrafov [Development of an algorithm for constructing p-hypergraphs], Matematika. Mekhanika, 2019, № 21, pp. 38–41 (in Russian). – EDN LXISER.

[3] Naumov I. E., Khvorostukhina E. V. P-HYPERGRAPH DESIGN WITH SIMULATED ANNEALING, Intellektual'nye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya, 2022, Vol. 26, № 1, pp. 107–111 (in Russian). – EDN AEITTN.

[4] Pham D.T., Castellani M., The Bees Algorithm: Modelling foraging behaviour to solve continuous optimization problems, Journal of Mechanical Engineering Science, 2009, vol. 223, iss. 12, pp. 2919–2938.

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya street, Saratov (Russia)
E-mail: khvorostukhina85@gmail.com

Construction of projective planes Using HGASA

I. E. Naumov

This paper focuses on the design and analysis of algorithms for constructing projective planes[1] based on intelligent (heuristic) methods. We developed an implementation of the HGASA (Hybrid Genetic Algorithm Simulated Annealing) , which combines the core concepts of simulated annealing [2] and genetic algorithms [3].

The genetic algorithm covers a large search space, allowing for exploration of a wide range of solutions. On the other hand, the simulated annealing method is effective in determining the minimum value by gradually reducing the temperature. The hybridization approach belongs to the category of strong hybridization, where the result of the genetic algorithm, which is the main component in this case, serves as the initial state for the simulated annealing method.

Projective plane of the order q is characterized by the following axioms:

(1) Each line contains q+ 1 points;
(2) Each point is incident with q+1 lines;
(3) Any two distinct lines intersect in exactly one point;
(4) Any two points incident exactly with one line.

Objective function is one of the most crucial aspects of the algorithm. It has a significant impact on overall performance. In the case of our designed objective function, it counts the number of violations for axioms of a projective plane. As a result, if the objective function returns zero, it means that a projective plane has been successfully found.

Simulated Annealing algorithm solves the discrete problem during each iteration, consequently the objective function evaluates two states of the system: the current state and the state derived from it. The next state of the system becomes the one with a lower value, for a minimization problem. With a certain probability, quality of the objective function value for the next state of the system may decline in comparison with the current state. This depends on the temperature of the system (a special parameter), which does not increase after each iteration of the algorithm, and differences between values of the two considered states of the system. We implemented this algorithm in software.

References

[1] Hartshorne R., Foundations of projective geometry, W.A. Benjamin Inc., New York, 1967.

[2] Naumov I.E., Khvorostukhina E.V. P-HYPERGRAPH DESIGN WITH SIMULATED ANNEALING, Intellektual'nye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya (Intelligent Systems. Theory and Applications), 2022, Vol. 26, № 1, pp. 107–111 (in Russian). – EDN AEITTN.

[3] Naumov I.E., Khvorostukhina E.V. Projective plane design with Genetic algorithm, Problemy teoreticheskoi kibernetiki. Materialy XIX mezhdunarodnoi konferentsii, Kazanskii federalnyi universitet, 2021, C.112-115, (in Russian).

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov (Russia)
E-mail: ilya.naumov.99@mail.ru

III. Секция «Неклассические логики и универсальная алгебра»

К вопросу об определении эквивалентности унификаторов

С. И. Башмаков, Е. В. Брылякова

В настоящее время актульной задачей в области неклассических логик является теория унификации. Однако существующие методы доказательства унифицируемости и построения подстановок не представляют собой наглядных и эффективных процедур.

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ *называется унифицируемой в логике* $\mathcal{L}$*, если существует подстановка* $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i \; \forall p_i$ *такая, что* $\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{L}$*. В этом случае, подстановка* σ *называется унификатором формулы* φ*.*

Унификатор σ *формулы* $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ *называется более общим, чем другой* σ^1 *для формулы* φ *в* $\mathcal{L}$ *(*$\sigma^1 \preceq \sigma$*), если существует подстановка* σ^2 *такая, что для любой переменной* $p_i \in Var(\varphi)$*:* $\sigma^1(p_i) \equiv_{\mathcal{L}} \sigma^2(\sigma(p_i))$*.*

В 2019 году С.И. Башмаков предложил представление множества всех унификаторов произвольной формулы φ в логике $\mathcal{L}$ в виде модельной структуры $\langle AU_\varphi, \preceq \rangle$ с особыми свойствами, где AU_φ — множество всех унификаторов формулы φ, а $\preceq$ — отношение предпорядка «более общий» на множестве, [1].

В продолжение этих исследований нами изучаются структурные вопросы диаграмм для конкретных унифицируемых формул предтабличных суперинтуиционистских логик. В литературе известно следующее определение эквивалентности унификаторов, [2]: *два унификатора* σ *и* σ^1 *эквивалентны, если они образуют симметричную пару относительно отношения* $\preceq$*:* $\sigma \preceq \sigma^1 \& \sigma^1 \preceq \sigma$. Отсюда следует, что эквивалентные унификаторы должны быть *более общими* по отношению к одному и тому же набору *менее общих* унификаторов. Нами найден класс эквивалентных, в соответствии с введенным выше определением, унификаторов формулы в предтабличной логике $L2$ имеющих при этом различные наборы предшественников в диаграмме.

Литература

[1] Башмаков С.И., Структурные вопросы дерева унификаторов. Тезисы докладов Международной конференции «Мальцевские чтения», 2019, 50–55.

[2] Jerabek E., Blending margins: The modal logic K has nullary unification type. Institute of Mathematics of Academy of Sciences, 2013, p. 4.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: krauder@mail.ru, lbrylyakovv@bk.ru

Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений $\mathcal{CTLK}$

С. И. Башмаков, К. А. Смелых

Комбинирование временных логик и логики знания является эффективным средством для формальной верификации программных систем с участием нескольких агентов. Это позволяет создавать модели различных сценариев взаимодействия агентов и проверять соответствующие свойства системы, что потенциально способствует улучшению качества и надежности программного обеспечения [**4**].

Логика деревьев вычислений $\mathcal{CTL}$ и логика ветвящегося времени BTL [**3**] являются разновидностями временной логики, применяемой для описания систем, в которых вычислительный процесс развивается во времени с возможностью ветвления и выбора альтернативных путей. Семантика $\mathcal{CTL}$ обычно представляется с помощью семантики бесконечных недетерминированных автоматов, которые графически представляются в виде древовидной структуры, где каждая ветвь представляет собой альтернативный вычислительный путь — вычислительный маршрут. Фактически, дерево вычислений представляет все возможные способы реализации вычислительного процесса. Для решения каждой задачи, описываемой определенным деревом вычислений, существует эквивалентная реляционная модель, которая также включает все возможные вычислительные альтернативы и может быть конечной или потенциально бесконечной для каждого маршрута. Логика $\mathcal{CTL}$ позволяет выразить различные свойства системы, такие как корректность, безопасность и логическую эквивалентность. Она используется для формальной верификации программных систем с целью обеспечения их надежности и безопасности, [**1**].

Добавление операторов знания к языку логики $\mathcal{CTL}$ приводит к логике $\mathcal{CTLK}$, которая, как установлено в [**4**], полностью сохраняет структуру недетерминированных автоматов, используемых в $\mathcal{CTL}$, при этом вычислительные маршруты получают интерпретацию в терминах агентов: каждое новое ветвление, возникающее в любой момент времени вычислительного процесса, приводит к созданию нового агента. Каждый агент представляет собой владельца собственного вычислительного маршрута внутри модели, то есть определенной последовательности вычислений. Агент знает только о том, что происходит в его собственном временном маршруте, и не имеет доступа к информации, доступной другим агентам, за исключением общих участков маршрута. Если возможное число ветвлений модели не определено заранее, то число агентов в системе может быть потенциально счетным.

Нами предложена альтернативная заданной ранее семантике недетерминированных автоматов — реляционная семантика, позволившая характеризовать исследуемую логическую систему $\mathcal{CTLK}^{Rel}$. Описаны и доказаны свойства таких моделей, доказана финитная аппроксимируемость и разрешимость логики.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Литература

[1] Karpov Yu.G., Model checking. Verification of parallel and distributed program systems. BHV-St. Petersburg, 2010, 560 p.

[2] Chagrov A., Zacharyaschev M., Modal Logic, Oxford University Press, 1997, 605 p.

[3] Clarke E.M., Emerson E.A., Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic. *Logics of Programs. Logic of Programs 1981. Lecture Notes in Computer Science*, v.131, 1982, 52–71. https://doi.org/10.1007/BFb0025774.

[4] Dima C., Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall. *Computational Logic in Multi-Agent Systems. CLIMA 2008. Lecture Notes in Computer Science, 2008, v.5405, 117–131. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02734-5_8.*

[5] *Halpern J.Y., Vardi M.Y., The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds. J. Computer and System Sciences, 1989, v.38, no.1, 195–237.* https://doi.org/10.1016/0022-0000(89)90039-1.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: lastth@yandex.ru

Модальная логика первого порядка с поссибилистскими кванторами и равенством

Е. В. Борисов, И. И. Мухаметшина

Пусть $\Diamond\Diamond P(a)$ – формула некоторой модальной логики первого порядка (a – константа). Оценим эту формулу в мире Γ некоторой модели $\mathcal{M}$ с нежесткой интерпретацией констант:

$$\mathcal{M}, \Gamma \vDash \Diamond\Diamond P(a) \iff (\exists\Delta : \Gamma\mathcal{R}\Delta)\,(\exists\Sigma : \Delta\mathcal{R}\Sigma)\,\mathcal{I}(a,\Sigma) \in \mathcal{I}(P,\Sigma),$$

где $\mathcal{R}$ – отношение достижимости, $\mathcal{I}$ – интерпретация предикатов и констант в $\mathcal{M}$.

Как видим, в полученных истинностных условиях используется $\mathcal{I}(a,\Sigma)$, т.е. денотат a в Σ. Это обусловлено тем, что мы оцениваем атомарную формулу $P(a)$ относительно Σ.

Как получить истинностные условия, в которых вместо $\mathcal{I}(a,\Sigma)$, учитывается $\mathcal{I}(a,\Gamma)$ или $\mathcal{I}(a,\Delta)$, т.е. денотат a в Γ или Δ?

Иначе говоря, как получить три интерпретации константы a:

(1) $(\exists\Delta : \Gamma\mathcal{R}\Delta)\,(\exists\Sigma : \Delta\mathcal{R}\Sigma)\,\mathcal{I}(a,\Sigma) \in \mathcal{I}(P,\Sigma)$ (*de dicto*),
(2) $(\exists\Delta : \Gamma\mathcal{R}\Delta)\,(\exists\Sigma : \Delta\mathcal{R}\Sigma)\,\mathcal{I}(a,\Gamma) \in \mathcal{I}(P,\Sigma)$ (*de re*),
(3) $(\exists\Delta : \Gamma\mathcal{R}\Delta)\,(\exists\Sigma : \Delta\mathcal{R}\Sigma)\,\mathcal{I}(a,\Delta) \in \mathcal{I}(P,\Sigma)$ (промежуточная интерпретация).

Для решения поставленной проблемы необходимы специальные лингвистические средства. Фиттинг и Мендельсон в [**1**] используют λ-оператор. Мы исследуем альтернативное решение, основанное на использовании поссибилистских кванторов и предиката равенства. Исследуемая нами логика – MLPQ (modal logic with possibilist quantifiers) – была предложена в [**2**].

В докладе будут представлены язык, семантика и выразительные возможности логики Фиттинга – Мендельсона; язык, семантика и выразительные возможности MLPQ в сравнении с семантическими возможностями логики Фиттинга – Мендельсона и табличная теория доказательства MLPQ.

Литература

[1] Fitting M., Mendelsohn R.L., First-Order Modal Logic, New York : Springer-Science+Business Media, B.Y., 1998.
[2] Мухаметшина И.И., Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка. Analytica, 2023, т.8, 90–103.

Институт философии и права СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com
Томский государственный университет, Томск (Россия)
E-mail: mukhametshina.indira@gmail.com

Модальность неслучайности для FDE

Л. К. Вашенцева, Д. А. Кожемяченко

В докладе предполагается изложить результаты, полученные авторами относительно расширения логики первоуровневого следования FDE Данна и Белнапа с модальностью неслучайности (неконтингентной) $\blacktriangle\phi$, которая интерпретируется как «ϕ имеет одно и то же истинностное значение во всех достижимых мирах» или же «все источники дают одну и ту же информацию об истинностном значении ϕ».

Новое модальное расширение FDE, получившее название $\mathbf{K}^{\blacktriangle}_{\mathbf{FDE}}$, было наделено фреймовой семантикой, а также авторами было продемонстрировано, как модели с двумя оценками могут быть интерпретированы в качестве взаимосвязанных сетей белнаповских баз данных с оператором $\blacktriangle$, моделирующим поиск противоречий в предоставляемой информации.

Для логики $\mathbf{K}^{\blacktriangle}_{\mathbf{FDE}}$ строится исчисление с аналитическим сечением, доказываются его корректность и полнота.

В работе также доказывается, что $\blacktriangle$ не определим через модальный оператор необходимости $\Box$ из $\mathbf{K}_{\mathbf{FDE}}$, как и $\Box$ не определим через $\blacktriangle$.

Теорема 4. *Не существует формулы $\phi \in \mathcal{L}_{\Box}$, определяющей $\blacktriangle p$ на классах всех шкал, всех рефлексивных шкалах, всех транзитивных шкалах, всех симметричных шкалах и всех евклидовых шкалах.*

Теорема 5. *Не существует $\phi \in \mathcal{L}_{\blacktriangle}$, которая бы определяла $\Box p$ над классами всех, рефлексивных, симметричных, транзитивных и евклидовых шкал.*

В заключение было установлено, что в отличие от классической логики неслучайности (неконтингентной), можно определить несколько свойств первого порядка на шкалах, наиболее важными из которых являются рефлексивные, предупорядоченные (**S4**) и **S5** шкалы.

Теорема 6. *Классы шкал с отношением R, удовлетворяющим перечисленным ниже свойствам, являются определимыми в $\mathbf{K}^{\blacktriangle}_{\mathbf{FDE}}$:*

(a) *R является рефлексивным;*
(b) *R транзитивно и рефлексивно;*
(c) *R является отношением эквивалентности;*
(d) *R является частично-функциональным:*
$\forall x : \exists y, z(R(x,y)\&R(x,z)) \Rightarrow y = z$;
(e) $R = \varnothing$;
(f) *R является корефлексивным:*
$\forall x, y : R(x,y) \Rightarrow x = y$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва (Россия)
E-mail: vashentsevaliubov@gmail.com

Об обобщениях слабой о-минимальности на частичные порядки

В. В. Вербовский

Понятие слабой о-минимальности основано на понятии выпуклого множества, или промежутка. Вспомним, что подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых элементов $a, b \in A$ и $c \in M$ неравенство $a < c < b$ влечет, что $c \in A$. Линейно упорядоченная структура называется *слабо о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество есть конечное объединение выпуклых множеств. При переходе от линейных порядков к частичным прямолинейный перенос понятия выпуНклого множества несет в себе такие неудобства, что любая антицепь является выпуклым множеством, что делает класс слабо о-минимальных частичных порядков чрезмерно большим для исследования.

Мы предлагаем два других варианта обобщения понятия выпуклого множества на частичные порядки.

Определение. *Подмножество A частично упорядоченного множества M называется* $\cup$-выпуклым, *если оно является объединением вложенных в друг друга отрезков,* $\cap$-выпуклым, *если оно является пересечением вложенных в друг друга отрезков, и.* ∇-выпуклым, *если оно является $\cup$-выпуклым или $\cap$-выпуклым.*

Определение. *Частично упорядоченная структура M называется* $*$-слабо о-минимальной, *если любое ее формульное подмножество является конечным объединением $*$-выпуклых множеств, где $* \in \{\cup, \cap, \nabla\}$.*

Теорема. *Понятия $\cup$-слабой и $\cap$-слабой о-минимальности независимы, классы таких структур являются собственными подклассами класса ∇-слабо о-минимальных структур, который, в свою очередь, является собственным подклассом класса слабо о-минимальных структур.*

Теорема. *Если одноместная функция f определима в слабо о-минимальной структуре и область ее значения является цепью, то f является локально монотонной функцией.*

Теорема. *Если одноместная функция f определима в $*$-слабо о-минимальной структуре, то f является локально монотонной функцией, где $* \in \{\cup, \cap, \nabla\}$.*

Работа была выполнена при поддержке гранта BR20281002 КН МНВО РК.

Казахстанско-Британский технический университет, Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)
E-mail: verbovskiy@math.kz

О степенях элементов в l-арной группе $\langle A^k, \eta_{s,(12\ldots k)}, k\rangle$

А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко

Согласно Э. Посту [**1**], ν-ой n-адической степенью элемента a n-арной группы $\langle A, \eta\rangle$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{ если } \nu = 0;$$

$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a \ \ldots \ a}_{\nu(n-1)+1}), \text{ если } \nu > 0;$$

$$a^{[\nu]} - \text{решение уравнения } \eta(x\underbrace{a \ \ldots \ a}_{-\nu(n-1)}) = a, \text{ если } \nu < 0.$$

В [**2**] и [**3**] получены результаты, позволяющие для каждого элемента $\mathbf{a}$ l-арной группы $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k}\rangle$ находить его степени $\mathbf{a}^{[\nu]}$, компоненты которых выражаются через компоненты элемента $\mathbf{a}$ с помощью n-арной операции η n-арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.

Для цикла $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ k) \in \mathbf{S}$ в случае $\nu < 0$ имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \eta\rangle$ - n-арная группа ($n \geq 3$), $l = tk + 1$ для некоторого натурального t, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ произвольный элемент l-арной группы $\langle A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k}\rangle$,*

$$\alpha_{j0} = \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}, \alpha_{j1} = \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{j+1}}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(k-j)} = \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3},$$

$$\alpha_{j(k-j+1)} = \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}, \ldots, \alpha_{j(k-1)} = \underbrace{a_{j-1} \ldots a_{j-1}}_{n-3}.$$

$$\beta_j = \alpha_{j(k-1)}\overline{a_{j-1}} \ldots \alpha_{j(k-j+1)}\overline{a_1}\alpha_{j(k-j)}\overline{a_k} \ldots \alpha_{j1}\overline{a_{j+1}}.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1\underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-t\nu-1}), \ldots, \eta(\beta_k\underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-t\nu-1})).$$

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \eta\rangle$ - n-арная группа ($n \geq 3$), $n = pk + 1$ для некоторого натурального p, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $\langle A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k}\rangle$. Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1\underbrace{\overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1 \ldots \overline{a_1}\alpha_{10}\beta_1}_{-sp\nu-1}), \ldots, \eta(\beta_k\underbrace{\overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k \ldots \overline{a_k}\alpha_{k0}\beta_k}_{-sp\nu-1})),$$

где последовательности β_j и α_{j0}, α_{j1},…,$\alpha_{j(k-1)}$ определяются также, как в теореме 1.

Из теорем 1 и 2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [**4**].

Литература

[1] Post E.L., Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1940, v.48, no.2, 208—350.

[2] Гальмак А.М., Степени элементов в l-арных группах специального вида. I. Проблемы физики, математики и техники, 2023, no.2, 47–51.

[3] Гальмак А. М. Степени элементов в l-арных группах специального вида. II. Проблемы физики, математики и техники, 2023, no.3. 38–43.

[4] Гальмак А. М. О косых элементах в полиадических группахспеиального вида, определяемых иклической подстановкой. Проблемы физики, математики и техники, 2020, no.3, 55–60.

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв (Белоруссия); Белорусский государственный университет транспорта, Гомель (Белоруссия)
E-mail: halm54@mail.ru

Минимальные решётки, не близкие к дистрибутивным

А. Г. Гейн, К. В. Селиванов

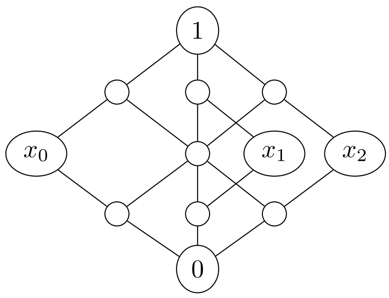
Определение. *Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы*

$$[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z] \text{ и } [(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

В [**1**] показано, что любая 3-порождённая решётка, близкая к дистрибутивной, конечна, как и модулярная 3-порождённая решётка. Однако открытым оставался естественный вопрос, существует ли модулярная решётка, которая не является близкой к дистрибутивной. Такая решётка не может быть 3-порождённой, ибо любая 3-порожденная модулярная решётка близка к дистрибутивной. В то же время в [**2**] показано, что решётка, минимальная в классе решёток, не близких к дистрибутивным, является 4-порождённой.

Теорема. *Существует модулярная решётка (рис. 1), не близкая к дистрибутивной, содержащая 12 элементов.*



Литература

[1] Гейн А.Г., Маслинцын И.Д., Рабой К.Э., Селиванов К.В., Конечность 3-порождённой решётки, близкой к дистрибутивной. Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 20–24 ноября 2021 г. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2021, с.149.

[2] Гейн А.Г., Селиванов К.В. Минимальные решётки, не близкие к дистрибутивным. Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 14–19 ноября 2022 г. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2022, с.157.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru, ckirill2000@mail.ru

Проблема разрешимости для логики $\mathcal{L}^{\mathcal{MC}}$

К. В. Грекович

В работе будет рассматриваться логика с языком $L = \{\wedge^2, \vee^2, \to^2, \neg^1, \Box^1, \diamond^1\}$. Фрейм это пара $\mathcal{F}^{\mathcal{MC}} = \langle W, R \rangle$, где W это некоторое бесконечное множество кластеров, которые связаны между собой линейно. R - бинарное отношение на W причем оно рефлексивно симметрично и транзитивно. Модели это структуры вида $\mathcal{M}^{\mathcal{MC}} = \langle W, R, V \rangle$ Основной целью является доказательство разрешимости данной логики.

Определение 1. *Логика $\mathcal{L}^{MC}$ это множество формул, которые истинны во всех моделях вида $\mathcal{M}^{MC}$.*

Определение 2. *множество $C \subseteq W$ называется сгустком, если:1) для любых $x, y (x \neq y)$ из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy \& yRx) \to y \in C$.*

Пусть дана некоторая формула f, которая состоит из конечного числа пропозициональных переменных, пусть x некоторая точка нашей модели, тогда $Th(x) = \{\varphi | \varphi \in Form(f) \ \ (\mathcal{M}^{MC}, x) \models_V \varphi\}$ это множество будем называть множеством теорий точки.

Пусть $A_1, A_2, ...$ - сгустки. Рассмотрим A_i тогда пусть $g_i \subset sub(f)$, формулы, которые выполнимы в какой-либо точке сгустка.

Лемма 1. *Существует сгусток A_i такой, что для всех сгустков A_k, таких что $k > i$, верно следующее для каждого такого сгустка существует модально эквивалентный сгусток A_j, где $j \leq i$.*

Лемма 2. *Для моделей типа $\mathcal{M}^{MC}$ существует некоторая модель $\mathcal{M}_1$, которая обладает следующими свойствами:*
(1) $\mathcal{M}^{MC} \equiv_{ML} \mathcal{M}_1$
(2) Мощность базисного множества модели $\mathcal{M}_1$ конечна.

Теорема 1. *Логика $\mathcal{L}^{MC}$ разрешима.*

Научный руководитель: д. ф.-м. наук, профессор В.В. Рыбаков. Работа поддержана Российским Научным Фондом (проект 23-21-00213).

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: propro879@gmail.com

О кванторной версии модальной логики Белнапа–Данна

А. В. Грефенштейн, С. О. Сперанский

Доклад будет посвящен кванторным обогащениям пропозициональной модальной логики Белнапа–Данна, обозначаемой через BK и введённой в [**1**].

Логика BK тесно связана с понятием «сильного отрицания», $\sim$, первоначально появившегося в работе Нельсона по интуиционистской арифметике; см. [**2**]. Интуитивно, сильное отрицание отвечает за процедуру фальсификации. Обогащение кванторной интуиционистской логики QInt посредством добавления сильного отрицания приводит нас к системе, которая ныне известна как логика Нельсона QN3. Позже было описано её полезное расширение QN4, которое позволяет работать с противоречивыми данными; см. [**3**].

Поскольку весьма важную роль в понимании QInt играет трансляция МакКинси–Гёделя–Тарского из QInt в QS4, хотелось бы иметь аналогичное понимание QN3 и QN4. В пропозициональном случае эта задача была решена С. П. Одинцовым и Х. Вансингом в [**1**]:

- они доказали сильную полноту BK и некоторых её естественных расширений относительно подходящей семантики возможных миров;
- обогащая пропозициональную версию трансляции МакКинси–Гёделя–Тарского, они показали, что пропозициональные логики Нельсона N3 и N4 точно вкладываются в белнаповскую версию S4, которая расширяет BK.

Тем не менее, до сих пор ничего не было известно о ситуации в кванторном случае, несмотря на то что конструктивные теории формулируются именно в кванторном языке.

В докладе будет представлена кванторная версия модальной логики Белнапа–Данна, обозначаемая через QBK. Доказано, что QBK и некоторые её естественные расширения сильно полны относительно подходящей семантики возможных миров. С помощью установленной полноты получено кванторное обобщение результата С. П. Одинцова и Х. Вансинга о точном вложении пропозициональных логик Нельсона. Наконец, получен ряд результатов об интерполяционных свойствах QBK и её расширений.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00104; см. https://rscf.ru/project/23-11-00104/.

Литература

[1] Odintsov S. P., Wansing H., Modal logics with Belnapian truth values. Journal of Applied Non-Classical Logics, **20**:3 (2010), 279–301.

[2] Nelson D., Constructible falsity. Journal of Symbolic Logic, **14**:1 (1949), 16–26.

[3] Almukdad A., Nelson D., Constructible falsity and inexact predicates. Journal of Symbolic Logic, **49**:1 (1984), 231–233.

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва (Россия)
E-mail: aleksandrgrefenstejn@gmail.com
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва (Россия)
E-mail: katze.tail@gmail.com

Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий зиг-заг произведений

Д. Ю. Емельянов

В работе продолжается изучение алгебр распределений бинарных изолирующих формул [**1**], описываются такие алгебры для теорий зиг-заг произведений графов.

Определение [**2**]**.** В теории графов зиг-заг произведение регулярных графов G, H берёт большой граф G и маленький граф H и создаёт граф, примерно наследующий размер большого графа, но степень малого. Кроме того, степень первого соответствует количеству вершин второго.

Грубо говоря, зиг-заг произведение G и H заменяет каждую вершину графа G копией (облаком) графа H и соединяет вершины, делая малый шаг (zig) внутри облака, а затем большой шаг (zag) между двумя облаками, и ещё один малый шаг внутри конечного облака.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул для теорий зиг-заг произведений. Эти произведения рассмотрены для правильных многогранников на ребро. Для данных теорий описаны таблицы Кэли.

Получена алгебра $\mathfrak{Zig}$ описывающая зиг-заг произведение правильного многогранника на ребро.

Теорема. *Если T — теория зиг-заг произведения графов, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается алгеброй: $\mathfrak{Zig}$.*

Автор был поддержан грантом РФФИ No 22-21-00044.

Литература

[1] Sudoplatov S.V., Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk : NSTU, 2014.
[2] Reingold O., Vadhan S., Wigderson A., Proc. 41st IEEE Symposium on Foundations of Computer Science[en] (FOCS), 2000, 3–13, doi:10.1109/SFCS.2000.892006.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Строение связного конгруэнц-перестановочного полигона над коммутативным моноидом

Е. Л. Ефремов

Конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$ называется отношение эквивалентности на $\mathfrak{A}$, сохраняющее операции. Алгебры, для которых умножение конгруэнций коммутативно, называются *конгруэнц-перестановочными*. В работе рассматривается строение связных конгруэнц-перестановочных полигонов над коммутативным моноидом и некоторые свойства их решёток конгруэнций.

Все необходимые сведения можно найти, например, в **[1, 2]**. Если ${}_SB$ — подполигон полигона ${}_SA$, то через $\mathcal{R}({}_SB)$ будем обозначать конгруэнцию полигона ${}_SA$, определяемую следующим образом: $\langle a, b\rangle \in \mathcal{R}({}_SB)$ тогда и только тогда, когда $a, b \in B$ или $a = b$.

Всюду дальше S — коммутативный моноид.

Теорема 1. *Связный полигон ${}_SA$ конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда ${}_SA$ — линейно упорядоченный полигон и для любой конгруэнции $\rho \in Con({}_SA)$ и любых $a, b \in A$*

$$ {}_SSb \subsetneq {}_SSa \quad \text{и} \quad \langle a, b\rangle \in \rho \quad \Longrightarrow \quad \rho \supseteq \mathcal{R}({}_SSa). $$

Как известно, решётка конгруэнций любой конгруэнц-перестановочной алгебры (в т.ч. и полигона) модулярна. Намного сложнее дело обстоит с дистрибутивностью этой решётки.

Пример. *Пусть $S = \{1, s, t, r\}$, где $s^2 = t^2 = r^2 = 1$, $st = ts = r$, $sr = rs = t$, $rt = tr = s$. Полигон ${}_SS$ конгруэнц-перестановочен, но его решётка конгруэнций недистрибутивна.*

Теорема 2. *Решётка $Con({}_SA)$ связного конгруэнц-перестановочного полигона ${}_SA$ линейно упорядочена тогда и только тогда, когда*

(1) *если ${}_SA$ имеет наименьший относительно $\subseteq$ подполигон ${}_SSa$, то $Con({}_SSa)$ линейно упорядочена,*

(2) *для любой $\rho \in Con({}_SA)$ и любых $b, c \in A$*

$$ {}_SSc \subsetneq {}_SSb \quad \text{и} \quad |b/\rho| \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \rho \supseteq \mathcal{R}({}_SSc). $$

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-946 от 16 февраля 2023 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Литература

[1] Степанова А.А., Чеканов С.Г., Конгруэнц-перестановочные полигоны. Сиб. матем. журн., 63:1 (2022), 202—208.

[2] Пинус А. Г., Основы универсальной алгебры: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005, 137 с.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)
E-mail: efremov-el@mail.ru

О сложности расширений неассоциативного исчисления Ламбека субэкспоненциальными модальностями

М. И. Канович, С. Л. Кузнецов, А. О. Щедров

Неассоциативное мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека FNL [**1**] можно сформулировать в виде генценовского пропозиционального исчисления интуиционистского типа, в котором отсутствуют все структурные правила: сокращение, ослабление, перестановка и даже ассоциативность. В связи с этим, левые части (антецеденты) секвенций исчисления FNL представляют собой бинарные деревья, в листьях которых находятся формулы. Формулы строятся из переменных с помощью бинарных операций: $\to$ и $\leftarrow$ (две импликации); $\otimes$ и & (две версии конъюнкции); $\oplus$ (дизъюнкция). Наличие двух импликаций связано с некоммутативностью мультипликативной конъюнкции $\otimes$.

В работе [**2**] введено расширение исчисления FNL с помощью субэкспоненциальных модальностей, под знаком которых разрешены определённые структурные правила (для каждой модальности — свой набор правил). При этом правило сокращения вводится в нелокальной форме: сокращаемые формулы не обязательно должны быть соседними. Субэкспоненциальные модальности обозначаются знаком $!^i$ (где i — индекс, отличающий одну модальность от других). В работе [**2**] доказаны результаты об алгоритмической неразрешимости задачи выводимости для данной системы, обозначаемой acLL_Σ.

В этом докладе представлены уточнённые результаты о неразрешимости для фрагментов acLL_Σ.

Теорема 1. *Фрагмент acLL_Σ с операциями $\otimes$, $\to$, $\oplus$, $!^c$, где $!^c$ допускает правило сокращения, алгоритмически неразрешим.*

Теорема 2. *Фрагмент acLL_Σ с операциями $\to$, $!^a$ и $!^c$, где $!^c$ допускает правило сокращения, а $!^a$ — только правило ассоциативности, алгоритмически неразрешим.*

Литература

[1] Buszkowski W., Farulewski M., Nonassociative Lambek calculus with additives and context-free languages. In: Languages: From Formal to Natural, LNCS, v.5533, Springer, 2009. 45–58.

[2] Blaisdell E., Kanovich M., Kuznetsov S. L., Pimentel E., Scedrov A., Non-associative, non-commutative multi-modal linear logic. In: Automated Reasoning, IJCAR 2022, LNCS, v.13385, Springer, 2022, 449–467.

University College London (UK)
E-mail: mkanovich@ucl.ac.uk
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва (Россия)
E-mail: sk@mi-ras.ru
University of Pennsylvania, Philadelphia (USA)
E-mail: scedrov@math.upenn.edu

О наследственно X-чистых алгебрах с выделенным идемпотентом

О. В. Князев

В [1] указывается развернутый план по изучению структурных свойств универсальных алгебр. И одна из задач этого плана звучит так: (проблема 3.17) *«Описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр»*.

Мы продолжаем изучать наследственно чистые алгебры в в классе алгебр с выделенным идемпотентом. К таким классам, например, относятся многообразия всех групп, всех моноидов, всех полугрупп с нулем. Напомним, что элемент алгебры называется идемпотентом, если порождаемая им подалгебра одноэлементная.

Пусть $\mathbf{V}$ — произвольное фиксированное многообразие (универсальных) алгебр, в сигнатуру которых входит нульарная операция — выделение идемпотента. $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом «алгебра» понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на алгебре A $(\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-алгебры по которым принадлежат $\mathbf{X})$, являющимся подалгеброй алгебры A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают этот класс через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* алгебры A. Подалгебру B алгебры A называют $\mathbf{X}$-*чистой* в A, если $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$. Алгебру, у которой все подалгебры являются $\mathbf{X}$-чистыми, называют *наследственно* $\mathbf{X}$-*чистой*. Если имеет место равенство $\mathbf{X}(A) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(A))$, то говорят, что алгебра A $\mathbf{1}$-ступенно $\mathbf{X}$-достижима.

Теорема. *Для наследственной* $\mathbf{X}$*-чистоты алгебры из многообразия алгебр с выделенным идемпотентом необходимым, но недостаточным условием является* $\mathbf{1}$*-ступенная* $\mathbf{X}$*-достижимость любой ее подалгебры.*

Литература

[1] Мартынов Л.М., Полнота, редуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы. Сиб. электрон. матем. изв., 2016, т. 13, 181–241.

Омский государственный педагогический университет, Омск (Россия)
E-mail: knyazev50@rambler.ru

Интегральная классификация эндоморфизмов алгебр с операциями конечной арности

А. В. Литаврин

Данная работа является продолжением исследований [**1**] и [**2**]. Для каждого натурального числа $n > 1$ и произвольного n-группоида строятся *базовые множества эндоморфизмов с индексом* j, где $j = 1, ..., n$. Базовые множества эндоморфизмов с фиксированным индексом j параметризуются отображениями специального вида, которые получают название *биполярный тип эндоморфизма*.

Теорема 1. *Пусть $n > 1$. Тогда для любого индекса $j \in \{1, ..., n\}$ множество всех эндоморфизмов произвольного n-группоида является объединением всевозможных базовых множеств эндоморфизмов с индексом j. Кроме того, базовые множества эндоморфизмов с индексом j различных биполярных типов имеют пустое пересечение.*

Теорема 1 приводит к *биполярной классификации с индексом* j эндоморфизмов произвольного n-группоида, где $j = 1, 2, ..., n$ и $n > 1$. Биполярная классификация с индексом $j = n$ получает название *левой биполярной классификации* эндоморфизмов n-группоида. Левые биполярные классификации эндоморфизмов n-группоидов при $n = 0$ и $n = 1$ строятся отдельно (независимо от теоремы 1).

С помощью левых биполярных классификаций эндоморфизмов n-группоидов для каждой алгебры (т.е. алгебраической системы без отношений) с операциями конечной арности строятся *интегральные базовые множества эндоморфизмов* (эти множества состоят из эндоморфизмов данной алгебры). Интегральные базовые множества эндоморфизмов параметризуются отображениями специального вида, которые получают название *интегральный тип эндоморфизма*.

Теорема 2. *Множество всех эндоморфизмов произвольной алгебры с операциями конечной арности – это объединение всевозможных интегральных базовых множеств эндоморфизмов. Кроме того, пересечение двух интегральных базовых множеств эндоморфизмов различных интегральных типов – это пустое множество.*

Приведенный результат позволяет построить *интегральную классификацию* эндоморфизмов произвольной алгебры с операциями конечной арности. Теоремы 1 и 2 выражают основной результат данной работы.

Литература

[1] Litavrin A.V., On the element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid and one classification of endomorphisms of a groupoid. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, 2023, v.29, no. 1, 143–159.

[2] Litavrin A.V., On Anti-endomorphisms of Groupoids. The Bulletin of Irkutsk state university. Series Mathematics, 2023, v.44.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: ALitavrin@sfu-kras.ru

О предгеометриях теорий унаров

С. Б. Малышев

Приводится описание видов предгеометрий [**1**] для теорий унаров. Напомним, что *унарной алгеброй* [**2**] называется универсальная алгебра, все операции которой унарны. *Унаром* называют унарную алгебру с одной операцией.

Заметим, что для систем $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ в теориях унаров T не всегда выполняется свойство замены. Например, когда модель содержит граф состоящий только из ∞-вершин. Тогда любые три различных элемента, лежащие на одном пути, будут нарушать свойство замены.

Поэтому вводится понятие u-предгеометрии, u-размерности и u-модулярности.

Определение. Для теорий унаров T в качестве u-размерности $dim_u(A)$, где $A \subseteq M \models T$, рассматривается значение $\mu_A + \sum_{G'} \nu_{A\cap G'}$, где μ_A – число конечных компонент связности $G \subseteq M$ с условием $A \cap G \neq \emptyset$, а $\nu_{A\cap G'}$ – число вершин наименьших остовных деревьев K бесконечных компонент связности $G' \subseteq M$ с условием $A \cap G' \subseteq K$.

Определение. u-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется u-модулярной, *если для любых конечномерных* acl-*замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:*

1) если существует бесконечная компонента связности G, для которой $X \cap Y \cap G = \emptyset$, $X \cap G \neq \emptyset$, $Y \cap G \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\dim_u(X \cap G) + \dim_u(Y \cap G) + \rho(X \cap G, Y \cap G) = \dim_u((X \cup Y) \cap G),$$

где $\rho(X \cap G, Y \cap G)$ — число вершин кратчайшего пути между вершинами $x \in X \cap G$ и $y \in Y \cap G$ (не считая вершины этих множеств);

2) в остальных случаях для компонент связности G выполняется равенство:

$$\dim_u(X \cap G) + \dim_u(Y \cap G) - \dim_u(X \cap Y \cap G) = \dim_u((X \cup Y) \cap G).$$

Теорема. *Пусть T — теория унаров. Тогда для любой модели $\mathcal{M} = \langle S, R\rangle$ теории T верно:*

1) *для любых компонент связности модели $\mathcal{M}$ u-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная;*

2) *для бесконечных компонент связности модели $\mathcal{M}$ u-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ u-модулярная.*

Настоящее исследование поддержано Российским научным фондом, проект No 22-21-00044.

Литература

[1] Pillay A. Geometric Stability Theory. Oxford : Clarendon Press, 1996.
[2] Мальцев, А. И. Алгебраические системы. — М. : Наука, 1970.

Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

О новой концепции нормального вывода в системе натуральной дедукции

О. А. Охотников

Задача моделирования естественных способов рассуждений решается с помощью построения натуральных исчислений предикатов [**1, 2, 3**]. С прикладной точки зрения решение такой задачи имеет значение прежде всего для разработки компьютерных помощников построения доказательств [**4**]. В данной работе мы определяем систему натуральной дедукции в стиле [**1, 2**], которая ранее была описана в статье [**5**] как язык конкретной прикладной системы автоматизации дедукции. Построенная теория включает формулировку для первопорядкового языка логики предикатов трех систем натуральной дедукции: классической, интуиционистской и минимальной.

В последнее время в области автоматизации поиска натурального логического вывода достигнуты значительные успехи [**5, 6, 7, 8, 9**]. Многие алгоритмы поиска натурального вывода находят только нормальные выводы. При этом понятие нормальности может определяться по разному [**3, 8, 9**]. Нормальные выводы обладают свойством подформульности, которое играет принципиальную роль для решения задач автоматизации дедуктивных построений. В данной работе дается определение новой концепции нормального натурального вывода и доказывается теорема о нормализации. Такие нормальные выводы порождаются алгоритмом поиска вывода, который рассматривается в статьях [**5, 6, 7**].

Литература

[1] Смирнов В.А., Логические методы анализа научного знания, М.: Эдиториал УРСС, 2002, 220 с.

[2] Смирнов В.А., Маркин В.И., Новодворский А.Е., Смирнов А.В., Доказательство и его поиск. Курс логики и компьютерный практикум, Логика и компьютер, Вып. 3, М.: Наука, 1996.

[3] Troelstra A., Schwichtenberg H., Basic Proof Theory, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2012.

[4] Robinson A., Voronkov A. eds., Handbook of Automated Reasoning, Elsevier and MIT Press, 2001.

[5] Вторушин Ю.И., О поиске вывода в системе натуральной дедукции логики предикатов. Интеллектуальные системы, 2009, Т. 13, С. 263–288.

[6] Охотников О.А., О поиске натурального классического логического вывода с использованием частичной скулемизации, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, 2019, т. 23, вып. 4, 39–90.

[7] Okhotnikov O., About proof-search in intuitionistic natural deduction calculus using partial Skolemization. Journal of Physics: Conference Series, 2020, v.1680.

[8] Sieg W., Byrnes J., Normal natural deduction proofs (in classical logic). Studia Logica, 60(1), 1998, 67–106.

[9] Sieg W., Cittadini S,. Normal natural deduction proofs (in non-classical logic). Mechanizing Mathematical Resoning. Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2005, 169–191.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com

Инъективные унары

И. А. Сахаров

Унаром называется алгебра, сигнатура которой состоит из одного символа унарной операции [**1**]. Унар является частным случаем полигона над моноидом, т.е. множества, на котором действует моноид, причём единица действует тождественно. Инъектинвые полигоны играют важную роль в теории полигонов. Это обусловлено тем, что любой полигон вкладывается в некоторый инъективный [**2**]. Для некоторых специальных случаев описание инъективных полигонов получено. Слабо инъективные полигоны — это полигоны, инъективные относительно вложений в циклические полигоны. В данной работе приводится описание инъективных и слабо инъективных унаров. Псевдоинъективные полигоны изучались в [**3**]. В этой статье приводится характеризация псевдоинъективнх унаров.

Унар Q называется *инъективным*, если для любого гомоморфизма $\varphi : A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha : A \to B$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : B \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$. Унар P называется *слабоинъективным*, если для любой полуцепи B, любого гомоморфизма $\varphi : A \to Q$ и для любого мономорфизма $\alpha : A \to B$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : B \to Q$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Унар Q называется *псевдоинъективным*, если для любых мономорфизмов $\varphi, \alpha : A \to Q$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi} : Q \to Q$ такой, что $\varphi = \bar{\varphi}\alpha$.

Теорема 1. *Унар Q инъективен тогда и только тогда, когда он содержит петлю и для каждого элемента Q есть прообраз.*

Теорема 2. *Унар слабоинъективен тогда и только тогда, когда любой его элемент имеет прообраз.*

Теорема 4. *Унар $Q = \coprod_{i \in I} Q_i$, где Q_i связный для любого $i \in I$, псевдоинъективен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) если Q_i содержит подунар, являющийся полуцепью, то любой элемент Q_i имеет прообраз;

2) если Q_i, Q_j содержат циклы равной длины, то глубина любого элемента из Q_i не превосходит глубины любого элемента без прообразов из Q_j.

Литература

[1] Скорняков Л.А., Элементы общей алгебры, Наука, 1983.
[2] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Monoids, acts and categories: With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers, Walter de Gruyter, 2000, 539 p.
[3] Abbas M.S., Shaymaa A., Pseudo injective and pseudo QP-injective S-systems over monoids. International Journal of Pure and Engineering Mathematics. 2015, v.3, no.2, 33–49.

Дальневосточный Федеральный Университет, Владивосток
E-mail: igorsaharov00@gmail.com

Ультрарасширения инфинитарных функций

Н. Л. Поляков

Ультрарасширения унарных и бинарных функций и отношений рассматривались начиная с 30-х годов XX века. Результаты нашли применение в комбинаторике, модальной логике и др. Ультрарасширения моделей первого порядка изучались в [**1**]. Мы показываем, что операция ультрарасширения может быть распространена на непрерывные (относительно Бэровской топологии) функции $f:\omega^\omega\to\omega$. Конструкция имеет отношение к порядкам Рудин-Кейслера и Комфорта и может быть использована для получения результатов рамсеевского типа.

Множество $\mathcal{B}$ непрерывных функции $f:\omega^\omega\to\omega$ допускает следующую ординальную иерархию: $\mathcal{B}_0$ есть множество всех постоянных функций $f:\omega^\omega\to\omega$; и для каждого $\alpha\in\mathrm{Ord}$, $\mathcal{B}_{<\alpha}=\bigcup_{\gamma<\alpha}\mathcal{B}_\gamma$ и $\mathcal{B}_\alpha=\{f\in\omega^{\omega^\omega}:(\forall x\in\omega)\,f_{(x)}\in\mathcal{B}_{<\alpha}\}$, где $f_{(x)}(x_1,x_2,\ldots)=f(x,x_1,x_2,\ldots)$ для всех $x,x_1,x_2,\ldots\in\omega$. Тогда $\mathcal{B}=\bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathcal{B}_\alpha$.

Для каждой функции $f\in\mathcal{B}$ ее ультрарасширение $\widetilde{f}:(\beta\omega)^\omega\to\beta\omega$ определяется так: если $f\in\mathcal{B}_0$ и $f(\mathbf{x})\equiv n$, то $\widetilde{f}$ есть постоянная функция, значение которой есть главный ультрафильтр, порожденный n; если $0<\alpha<\omega_1$, $f\in\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_1,\ldots\in\beta\omega$, то $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0,\mathfrak{u}_1,\ldots)=\{S\subseteq\omega:(\forall X\in\mathfrak{u}_0)(\exists x\in X)\,S\in\widetilde{f_{(x)}}(\mathfrak{u}_1,\mathfrak{u}_2,\ldots)\}$.

Следующая теорема развивает результаты из [**2**]. Ранг функции $f\in\mathcal{B}$ есть ординал $\operatorname{rank}f=\min\{\alpha<\omega_1:f\in\mathcal{B}_\alpha\}$. Для каждого $\alpha>0$ определим множество $\mathcal{BU}_\alpha\subseteq\mathcal{B}_\alpha$: $f\in\mathcal{BU}_1$ т.т.т. $f(x_0,x_1,\ldots)=g(x_0)$ для некоторой инъекции $g:\omega\to\omega$; $f\in\mathcal{BU}_\alpha$, $\alpha>1$, т.т.т. (а) $f(x_0,x_1,\ldots)=f(y_0,y_1,\ldots)\Rightarrow x_0=y_0$, (б) последовательность $\{\operatorname{rank}f_{(i)}\}_{i<\omega}$ не убывает и конфинальна в α и (в) $(\forall x\in\omega)\,f_{(x)}\in\bigcup_{\gamma<\alpha}\mathcal{BU}_\gamma$.

Теорема. *Для любого $\mathfrak{u}\in\beta\omega\setminus\omega$ следующие условия равносильны:*
(i) $\mathfrak{u}$ есть RK-минимальный ультрафильтр,
(ii) для любого счетного ординала α и функции $f\in\mathcal{B}_\alpha$ существуют ординал γ, $0<\gamma\le\alpha$, и функция $g\in\mathcal{BU}_\gamma\cup\mathcal{B}_0$, для которых $\widetilde{f}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots)=\widetilde{g}(\mathfrak{u},\mathfrak{u},\ldots)$.

Рангом непрерывной функции $\varphi:\omega^\omega\to\omega^\omega$ назовем ординал $\sup\{\operatorname{rank}\pi_i\circ\varphi:i<\omega\}$, где π_i есть i-ая проекция. Функцию $\varphi:\omega^\omega\to\omega^\omega$ назовем *сжимающей*, если $\varphi(\mathbf{x})$ есть подпоследовательность $\mathbf{x}$ для каждой последовательности $\mathbf{x}\in\omega^\omega$.

Следствие (каноническая теорема Рамсея для инфинитарных функций). *Для любого счетного ординала α и функции $f\in\mathcal{B}_\alpha$ существуют множество $X\in\mathfrak{u}$, ординал γ, $0<\gamma\le\alpha$, функция $g\in\mathcal{BU}_\gamma\cup\mathcal{B}_0$ и сжимающая непрерывная (относительно Бэровской топологии) функция $\varphi:\omega^\omega\to\omega^\omega$ ранга не более α, для которых $f(\mathbf{x})=g(\varphi(\mathbf{x}))$ для любой возрастающей последовательности $\mathbf{x}\in X^\omega$.*

Литература

[1] Poliakov N.L., Saveliev D.I., On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic, v.60, 625–681 (2021).

[2] Polyakov N.L., On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters. Doklady Mathematics, to appear (2023).

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва (Россия)
E-mail: npolyakov@hse.ru

Проблема разрешимости для логики $\mathcal{L}_{MV}^{T}$

Н. А. Проценко

Будем рассматривать временную логику с языком $L = \{\wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2, \neg^1, \Box^1, \diamond^1, \mathcal{N}^1\}$. Шкалы логики $\mathcal{L}_{MV}^{T}$ - это структуры вида $\mathcal{F}_{MV}^{T} = \langle \mathbf{N}, \leq \rangle$, модели логики имеют вид $\mathcal{M}_{MV}^{T} = \langle \mathcal{F}_{MV}^{T}, V_1, ..., V_n \rangle$ Выполнимость формул в точках модели определяется так (приведу для примера только часть, остальное определяется по аналогии):

- $(\mathcal{M}, x) \models_{V_i} \alpha \wedge \beta \iff ((\mathcal{M}, x) \models_{V_i} \alpha)\ AND\ ((\mathcal{M}, x) \models_{V_i} \beta)$
- $(\mathcal{M}, x) \models_{V_i} \Box\beta \iff (\forall y \geq x) \Rightarrow (\mathcal{M}, y) \models_{V_i} \beta$
- $(\mathcal{M}, x) \models_{V_i} \mathcal{N}\alpha \iff (\mathcal{M}, x+1) \models_{V_i} \alpha$

Определение 1. Логика $\mathcal{L}_{MV}^{T}$ это множество формул, которые истинны во всех моделях вида $\mathcal{M}_{MV}^{T}$.

В центре внимания находится проблема разрешимости этой логики.

Пусть дана некоторая формула f, которая состоит из конечного числа пропозициональных переменных, пусть x некоторая точка нашей модели, тогда $Th_i(x) = \{\varphi | \varphi \in Sub(f) \quad (\mathcal{M}_{MV}^{T}, x) \models_{V_i} \varphi\}$ это множество будем называть множеством теорий точки оценки i. Возможностью точки при оценке i назовем множество $Pos_i(x) = \{Th_i(y) | x \leq y\}$.

Теорема 1. *Для каждой произвольной модели вида $\mathcal{M}_{MV}^{T}$ существует конечная, модально эквивалентная ей модель $\mathcal{M}_{line+circle}$.*

Лемма 1. *В исходной модели вида $\mathcal{M}_{MV}^{T}$ для каждой оценки V_i существует множество точек $x \in \mathbf{N}$ таких что $\forall y \geq x$ верно следующее $|Pos_i(x)| = |Pos_i(y)|$.*

Доказательство ведется от противного. Полагаем, что такой точки нет и приходим к противоречию, так как мощность каждого Pos_i в отдельности может либо уменьшаться, либо быть постоянной.

Следствие 1. *В моделях такого типа существует точка $stable \in \mathbf{N}$ для которой верно следующее $(\forall i \in [1; n])(\forall p > stable)(|Pos_i(stable)| = |Pos_i(p)|)$*

Используя этот результат модель можно свести к модели типа $\mathcal{M}_{line+circle}$. Выбрав при этом в качестве точки склеивания точку для которой верно следующее : $(\forall i \in [1; n])(Th_i(stable) = Th_i(x))$.

Теорема 2. *Мощность базисного множества модели $\mathcal{M}_{line+circle}$ можно сжать до размера не превышающего $2^{|Sub(f)|}n$.*

В части *circle* модели удаляем все точки с одинаковыми оценками т.е. в случае если в модели существуют точки x и y такие, что $(\forall i \in [1; n])(Th_i(x) = Th_i(y))$, то удаляем одну из этих точек. Аналогично для *line*

Теорема 3. *Логика $\mathcal{L}_{MV}^{T}$ разрешима.*

Научный руководитель: д. ф.-м. наук, профессор В.В. Рыбаков. Работа поддержана Российским Научным Фондом (проект 23-21-00213).

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: nikitaprotsenko2003@gmail.com

Замыкающий ординал оператора непосредственной выводимости в инфинитарной логике действий

Т. Г. Пшеницын

Нами исследуются доказательства в инфинитарной логике действий ACTω, введенной в [**1**] — исчислении, соответствующем *-непрерывным алгебрам Клини с делениями. Для итерации Клини в ACTω вводятся следующие правила вывода:

$$\frac{(\Gamma, A^n, \Delta \Rightarrow B)_{n \in \mathbb{N}}}{\Gamma, A^*, \Delta \Rightarrow B}(^*L) \qquad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \ \ldots \ \Gamma_n \Rightarrow A}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow A^*}(^*R)$$

В [**3**] изучается оператор непосредственной выводимости $\mathcal{D}$, который множество секвенций S отображает в объединение S с множеством секвенций, которые получаются из элементов S применением одного из правил ACTω. Множество теорем ACTω определяется трансфинитной рекурсией: T_0 — множество аксиом ACTω; $T_{\alpha+1} = \mathcal{D}(T_\alpha)$; $T_\lambda = \cup_{\alpha<\lambda} T_\alpha$ для предельных λ. Замыкающий ординал — наименьшее α, такое, что $T_\alpha = T_{\alpha+1}$. В [**3**] показано, что замыкающий ординал для ACTω не превосходит ω^ω. Нами показывается, что данная оценка точна:

Теорема 1. *Замыкающий ординал для* ACTω *равен* ω^ω.

Для доказательства определяются следующие формулы: $A_0 = (q \bullet p)/q$; $A_{k+1} = (A_k^* \bullet q)/q$. Устанавливается, что для $\alpha = \omega^n \cdot 2 + 1$ секвенция $A_n, q \Rightarrow q \bullet p^*$ принадлежит $T_{\alpha+1} \setminus T_\alpha$, причём она имеет единственное доказательство в ACTω.

Теорему 1 можно адаптировать для коммутативной инфинитарной логики действий CommACTω, в которой антецеденты суть мультимножества формул:

Теорема 2. *Замыкающий ординал для* CommACTω *равен* ω^ω.

Доказательство также состоит в построении подходящего семейства секвенций, однако требует использования более тонких и громоздких техник, в частности, проверок на отсутствие определенных формул в антецедентах секвенций. При построении используются методы из [**2**].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00104, https://rscf.ru/project/23-11-00104/.

Литература

[1] Palka E., An infinitary sequent system for the equational theory of *-continuous action lattices. Fundamenta Informaticae, 2007, v.78, no.2, 295—309.

[2] Kuznetsov S. L., Commutative action logic. Journal of Logic and Computation, 2023, v.33, no.6, 1437–1462.

[3] Kuznetsov S. L., Speranski S., Infinitary action logic with exponentiation. Annals of Pure and Applied Logic, 2022, v.173, no.2.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва (Россия)
E-mail: tpshenitsyn@mi-ras.ru

Прямые произведения циклических моноидов, допускающие [обобщенные] внешнепланарные графы Кэли

Д. В. Соломатин

Из циклической полугруппы S, заданной для фиксированных натуральных r и m копредставлением $\langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, можно сформировать циклический моноид S^1 путём присоединения единицы, либо моноид S^{+1} в результате операции внешнего присоединения единицы к полугруппе S. В первом случае единица присоединяется к полугруппе S только когда единица отсутствовала в полугруппе S, а во втором случае новая единица присоединяется всегда. В обозначениях из [**1**], доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Конечный моноид S, являющийся произведением неодноэлементных циклических моноидов допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $S = \left\langle a \mid a^3 = a \right\rangle \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^1$, *где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$*;

2) $S = \left\langle a \mid a^{1+m} = a \right\rangle^{+1} \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^i$, *где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений*: 2.1) $m = 1$, $t \leq 2$; 2.2) $i = 1$, $m \leq 2$, $h = 1$, $t = 2$; 2.3) $i = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t \leq 2$;

3) $S = \left\langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0 \right\rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \left\langle a_i \mid a_i^2 = a_i \right\rangle^{+1}$, *где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$ или $n - 1 = r = m = 1$ или $n = m - 1 = 1$.*

Теорема 2. *Конечный моноид S, являющийся произведением неодноэлементных циклических моноидов допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $S = \left\langle a \mid a^{r+m} = a^r \right\rangle^1 \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^1$, *где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$*;

2) $S = \left\langle a \mid a^{1+m} = a \right\rangle^{+1} \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^i$, *где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений*: 2.1) $m = 1$, $t \leq 2$; 2.2) $i = 1$, $m \leq 2$, $h = 1$, $t = 2$; 2.3) $i = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t \leq 2$; 2.4) $i = +1$, $m = 2$, $h = 1$, $t = 2$;

3) $S = \left\langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0 \right\rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \left\langle a_i \mid a_i^2 = a_i \right\rangle^{+1}$, *где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$ или $n - 1 = r = m = 1$ или $n = m - 1 = 1$.*

Заметим, что полученный результат открывает перспективы исследования рангов внешнепланарности и рангов обобщенной внешнепланарности многообразий моноидов.

Литература

[1] Соломатин Д.В., Прямые произведения циклических моноидов и полугрупп с нулем, допускающие планарные графы Кэли. Математика и информатика: Наука и образование, 5 (2006), 51–64.

Омский государственный педагогический университет, Омск (Россия)
E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

Псевдоконечные полигоны

А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов, С. Г. Чеканов

Структура $\mathfrak{M}$ языка L *псевдоконечна*, если любое предложение языка L, истинное в $\mathfrak{M}$, истинно в некоторой конечной структуре языка L. Теория моделей псевдоконечных структур, благодаря теореме Лося, тесно связана с теорией конечных моделей. Работы ряда авторов посвящены описанию псевдоконечных моделей классических теорий. В [1], например, описаны псевдоконечные поля, в [2] — простые группы, в [3] — ациклические графы.

Алгебраическая система $\langle A; L_S\rangle$ сигнатуры $L_S = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$ называется *(левым) полигоном над моноидом* S, если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; L_S\rangle$ будем обозначать через ${}_SA$. Полигон ${}_SA$ называется *циклическим*, если $A = Sa$ для некоторого $a \in A$.

Конгруэнцией полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности θ на A, сохраняющее действие моноида, т.е. для любых $a_1, a_2 \in A$ и $s \in S$

$$a_1\theta a_2 \Longrightarrow sa_1\theta sa_2.$$

Конгруэнция θ полигона ${}_SA$ называется *порождённой множеством* $X \subseteq A^2$, если θ — наименьшая относительно $\subseteq$ конгруэнция полигона ${}_SA$, содержащая X.

Теорема. *Пусть число типов изоморфизмов конечных циклических полигонов над моноидом S конечно и полигон ${}_SA$ псевдоконечен. Тогда любой циклический подполигон полигона ${}_SA$ конечен.*

Следующий пример показывает, что условие конечности любого циклического подполигона полигона в теореме не является достаточным для псевдоконечности полигона.

Пример 1. *Пусть $(S;\cdot)$ — моноид, где $S = \{1, s, t, r\}$, 1 — единица S, $u \cdot v = r$ для любых $u, v \in S \setminus \{1\}$, ${}_SS_i$ — копии полигона ${}_SS$, u_i — копии элементов $u \in S$ в полигоне ${}_SS_i$ $(i \in \omega)$, ${}_SA = \bigcup_{i\in\omega} {}_SS_i/\theta$, где θ — конгруэнция полигона $\bigcup_{i\in\omega} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{(s_i, t_{i+1}) \mid i \in \omega\}$. Тогда полигон ${}_SA$ не псевдоконечен.*

Полигон, приведённый ниже, является примером псевдоконечного полигона над конечным моноидом, все циклические подполигоны которого конечны.

Пример 2. *Пусть $(S;\cdot)$ — моноид из примера 1, ${}_SS_i$ — копии полигона ${}_SS$, u_i — копии элементов $u \in S$ в полигоне ${}_SS_i$ $(i \in \mathbb{Z})$, ${}_SA = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} {}_SS_i/\theta$, где θ — конгруэнция полигона $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{(s_i, t_{i+1}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Тогда полигон ${}_SA$ псевдоконечен.*

Литература

[1] Ax J., The elementary theory of finite fields. Ann. Math., 88, 239—271 (1968).

[2] Wilson J.S., On pseudofinite simple groups. J. Lond. Math. Soc., 51(2), 471—490 (1995).

[3] Markhabatov N.D., Approximations of Acyclic Graphs. Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», 2022, т.40, 104—111.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)
E-mail: stepltd@mail.ru, efremov-el@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru

О преобразованиях функций α-пополнения одной системы трехзначной логики

Л. В. Шабунин

Пусть P_3 — множество всех функций трехзначной логики, X — множество символов переменных со значениями из $E_3 = \{0, 1, 2\}$, $F \subseteq P_3$ — непустое множество функций. Определим по индукции понятие *α-терма над F от множества переменных* X: 1) переменная x из X есть α-терм; 2) если символ f обозначает n-местную функцию из F $(n \geq 1)$, Φ есть α-терм и x_2, ..., x_n — переменные из X (не обязательно различные), то $f(\Phi, x_2, \dots, x_n)$ есть α-терм.

Если α-терм не является переменной, то он называется *α-формулой* (см. [**1**]).

Множество всех функций из P_3, реализуемых α-формулами над F, называется *α-пополнением* множества F и обозначается через $[F]_\alpha$. Если $[F]_\alpha = P_3$, то F называется *α-полной системой.*

Пусть $V_3(x, y) = \max(x, y) + 1$ — функция Вебба из P_3, $F = \{V_3\}$, $F' = [F]_\alpha$, $F'' = [F']_\alpha$, $F'(n)$ — множество всех n-местных функций из F'.

На множестве E_3^n зафиксируем линейный порядок $<$: $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $a_i < b_i$ при некотором i и $a_j = b_j$ при всех $j \geq i + 1$.

При указанном линейном порядке любое отображение f множества E_3^n в произвольное множество Y однозначно определяется своим табличным заданием, то есть строкой $f = (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_m))$, где $m = 3^n$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$. Определим одноместные функции: $\alpha = (120)$, $h = (220)$, $0 = (000)$, $j_0 = (100)$, $J_1 = (020)$.

Пусть Π — полная полугруппа преобразований множества E_3, Π^m — m-я декартова степень этой полугруппы. Предполагаем, что элементы полугруппы Π^m действуют на элементы из E_3^m покоординатно. Положим

$$g_1 = (\alpha, h, 0, \dots, \alpha, h, 0), \quad g_2 = (\alpha, \dots, \alpha, h, \dots, h, 0, \dots, 0).$$

Векторы g_1 и g_2 имеют длину 3^n и отображают множество $F'(n)$ на себя. Для $n \geq 2$ определим преобразование $\pi_n = g_1 g_2 g_1 g_2^2 g_1$.

Если функция $f \in F'(n-1)$, то функция $f^+ = (fff) \in F'(n)$. При записи функций из F' будем использовать сокращения: символ α понимаем как последовательность 120, а выражение α^k — как повторение 120 k раз. Среди функций множества $F'(n-1)$ выделим функции вида $f_0 = (\alpha^k, J_1, \alpha^s)$ и $f_1 = (\alpha^k, j_0, \alpha^s)$. Пусть $f_0^+ = (f_0 f_0 f_0)$, $f_1^+ = (f_1 f_1 f_1)$.

Предложение 1. *Преобразование π_n переводит функцию f_0^+ в функцию $(\alpha^k, J_1, \alpha \dots \alpha)$, а функцию f_1^+ — в функцию $(\alpha^m \alpha^k, j_0, \alpha^s \alpha^m)$, где $m = 3^{n-1}$.*

Предложение 2. *При $n \geq 3$ n-местная функция вида $(120 \dots 120abc)$, где $a, b, c \in E_3$, принадлежит $F'(n)$ тогда и только тогда, когда $(abc) = (120)$.*

Литература

[1] Глухов М.М., Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики. Дискретная математика. 1989. т. 1, no.1. 16–21.

Чебоксары (Россия)
E-mail: lvsh@mail.ru

«Ложь» как новая константа в позитивной логике

А. Д. Яшин

Рассматривается позитивная логика Pos в языке со связками $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ и интуиционистская логика Int в языке со связками $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \perp\}$ как расширение Pos с точки зрения подхода П.С. Новикова к понятию *новой* логической связки. Описание этого подхода — в [**1**].

Профессор С.Н. Артемов предлагал «сдвинуть» ситуацию на один шаг вниз, т.е. рассмотреть примеры, когда одна из известных связок рассматривается как дополнительная по отношению к остальным.

Предложение. *Логика Int определяет новую константу $\perp$ по П. С. Новикову в позитивной логике.*

Литература

[1] Сметанич Я.С., Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией. ДАН СССР, 1961, т.139, no.2, 309–312.

Удмуртский государственный университет, Ижевск (Россия)
E-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

Johansson's logic with Dummett's axiom and its extensions

D. Anishchenko, S. Odintsov

Logic of chains LC is an intermediate logic obtained by adding Dummett's linearity axiom $(p \to q) \vee (q \to p)$ to intuitionistic logic Int. It is one of three pretabular superintuitionistic logics [**2**]. Moreover, LC is one of first non-classical logics, whose lattice of extensions $\mathcal{E}\mathsf{LC}$ was completely described [**1**]. This lattice is linearly ordered with order type $(\omega+1)^*$, where $(\cdot)^*$ is the operation that inverts order, or, equivalently, $\mathcal{E}\mathsf{LC}$ is isomorphic to the lattice of cones of the linear order of type ω^*.

We consider the logic JC obtained by adding Dummett's axiom to Johansson's minimal logic J, which is the natural paraconsistent analog of the logic of chains, and describe its lattice of extensions. It turns out that $\mathcal{E}\mathsf{JC}$ is isomorphic to the lattice of cones of partial order $(\omega^*)^2$, which means that its structure is rather complicated as compared to $\mathcal{E}\mathsf{LC}$. However, we prove that every element of $\mathcal{E}\mathsf{JC}$ is finitely axiomatized and decidable. Finally, we notice that JC has exactly two pretabular extensions, one of which is LC and the second is $\mathsf{NegC} = \mathsf{JC} + \{\bot\}$, i.e., the least negative extension of JC, and that their intersection equals $\mathsf{LC} \cap \mathsf{NegC} = \mathsf{GC}$, where $\mathsf{G} = \mathsf{J} + \{\neg\neg(\bot \to p)\}$ – Glivenko's logic, $\mathsf{GC} = \mathsf{G} + \{(p \to q) \vee (q \to p)\}$.

S. Odintsov's research has been carried out within the framework of State Contracts of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF-2022-0012).

References

[1] Dunn J.M., Meyer R.K., Algebraic completeness results for Dummett's *LC* and its extensions. Zeitschrift für Mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik, 1971, v.17, 225–230.

[2] Maximova L.L., Pretabular superintuitionistic logics. Algebra and Logic, 1972, v.11, 558–570.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: d.anishchenko@g.nsu.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

On conjunctive operations on relations

D. A. Bredikhin

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra, called an *algebra of relations*, and each such algebra can be considered to be partially ordered by the relation of set-theoretic inclusion. We will consider algebras of relations with one binary operation, i.e., groupoids of relations. As a rule, operations on relations are defined by formulas of the first-order predicate calculus. These operations are called *logical*. A logical operation is called *primitive positive* [**1**] (in other terminology – *Diophantine* operations [**2**]) if it can be defined by a formula containing in its prenex normal form only existential quantifiers and conjunctions. An primitive positive operation is called *conjunctive* if it can be defined by a quantifier-free formula [**3**].

We say that the conjunctive operation F has *rank* k if it can be defined by a formula containing k conjunctive members and cannot be determined by formulas with a smaller number of them. There are only six operations (up to dual and conjugate) of rank 2. Axiomatic characteristics of the corresponding classes of groupoids are obtained in [**3, 4, 5**]. We concentrate attention on the associative operation of rank 4 that is defined as follows: for any relations ρ_1 and ρ_2, put $\rho_1 * \rho_2 = \{(u,v) : (u,u) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_1 \wedge (u,v) \in \rho_2 \wedge (v,v) \in \rho_2\}$.

A *partially ordered groupoid* is an algebraic system $(A, \cdot, \leq)$, where $(A, \cdot)$ is a groupoid and $\leq$ is a partial order relation on A that is compatible with multiplication, i.e., $x \leq y$ implies $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$.

Denote by $R\{*\}$ (respectively, $R\{*, \subseteq\}$) the class of all groupoids (partially ordered groupoids) isomorphic to groupoids (partially ordered groupoids) of relations with the operation $*$.

Theorem. *A partially ordered groupoid belongs to the class* $R\{*, \subseteq\}$ *if and only if it satisfies the following conditions:* $(xy)z = x(yz)$ (1), $x^3 = x^2$ (2), $x^2y^2 = y^2x^2$ (3), $xyz = xy^2z$ (4), $xy \leq x$ (5), $xy \leq y$ (6), $(x \leq yz \wedge x \leq wt) \Rightarrow x \leq yt$ (7).

Corollary. *A partially ordered groupoid belongs to the variety generated by the class* $R\{*, \subseteq\}$ *in the class of all partial ordered groupoids if and only if it satisfies identities* (1) – (6)*. A groupoid belongs to the variety generated by the class* $R\{*\}$ *if and only if it satisfies identities* (1) – (4).

Note that the characterization problem for the class $R\{*\}$ remains open.

References

[1] Böner P., Pöschel, F.R., Clones of operations on binary relations. Contributions to general algebra, 1991, v.7, 50–70.

[2] Bredikhin D.A. On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations. Sib. Math. J., 1997, v.38, 23–33.

[3] Bredikhin D.A., On algebras of binary relations with conjunctive operations. Algebra Universalis, 2021, v.82, Article 39.

[4] Bredikhin D.A., On generalized subreducts of Tarski's algebras of relations with the operation of bi-directional intersection. Algebra Universalis, 2018, v.79, 77–92.

[5] Bredikhin D.A., On Groupoids of Relations with One Conjunctive Operation of Rank 2. Studia Logica, 2022, v.110, 1137–1153.

Saratov State University, Saratov (Russia)
E-mail: bredikhin@mail.ru

On abstract characterization of universal graphic automata

R. A. Farakhutdinov, V. A. Molchanov

A semigroup automaton $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ is called graphic if its set of states X_1 and set of output signals X_2 are equipped with structures of graphs $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ such that for every input signal $s \in S$ a transition function $\delta_s = x \star s$ $(x \in X_1)$ is an endomorphism of G_1 and an output function $\lambda_s = x \diamond s$ $(x \in X_1)$ is a homomorphism of G_1 in G_2. Such automaton is denoted by $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$. The graphic automaton $\mathrm{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ with the input signal semigroup $S = \mathrm{End}\, G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, consisting pairs $s = (\varphi, \psi)$, $\varphi \in \mathrm{End}\ G_1$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, is universally attracting object in the category of graphic automata [**1**], that is why it is called universal graphic automaton.

Denote by $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ the class of all automata isomorphic to universal graphic automata $\mathrm{Atm}(G_1, G_2)$ for graphs $G_1 \in \mathbf{K_1}$ and $G_2 \in \mathbf{K_2}$. We investigate the following problem of abstract characterization of automata from the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ for graph classes $\mathbf{K_1}$ and $\mathbf{K_2}$ [**2**]: under what conditions will an abstract automaton be isomorphic to some automaton from the class $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$? The main result of our work is the proof of axiomatization impossibility by means of the restricted predicate calculus language of automaton classes $\mathrm{Atm}(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ for some wide classes of graphs $\mathbf{K_1}$ and $\mathbf{K_2}$.

Theorem. *Let* $\mathbf{Gr}$ *be the class of all graphs. For the following classes of graphs* $\mathbf{K}$, *the classes of universal graphic automata* $Atm(\mathbf{K}, \mathbf{Gr})$ *cannot be elementary axiomatizable:*

1) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{tr}}$ *of all trivial reflexive graphs;*
2) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{r}}$ *of all reflexive graphs;*
3) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rs}}$ *of all reflexive symmetric graphs;*
4) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{qo}}$ *of all quasi-order graphs;*
5) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{ra}}$ *of all reflexive acyclic graphs;*
6) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{re}}$ *of all reflexive graphs, having an edge, that does not belong to any cycle;*
7) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{rqa}}$ *of all reflexive quasi-acyclic graphs;*
8) *the class* $\mathbf{K} = \mathbf{K_{lo}}$ *of all linear order graphs.*

References

[1] Plotkin B.I., Gringlaz L.Ya., Gvaramiya A.A., Elements of Albebraic Theory of Automata, Vysshaya Shkola, Moscow, 1994 [in Russian].

[2] Jonsson B., Topics in Universal Algebras, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Saratov State University, Saratov (Russia)
E-mail: renatfara@mail.ru
Saratov State University, Saratov (Russia)
E-mail: v.molchanov@inbox.ru

The completeness of an infinitary analytic calculus for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic

A. S. Gerasimov

First-order infinite-valued Łukasiewicz logic Ł∀ is one of the fundamental mathematical fuzzy logics and serves as a formal basis for approximate reasoning; see [**2**]. The set of all valid Ł∀-formulas (over a rich enough signature) is not recursively enumerable. Hence, for Ł∀, there are no complete calculi that are finitary, i.e., have a recursive set of axioms and a finite number of recursive inference rules.

The paper [**1**] presents a finitary analytic hypersequent calculus GŁ∀ for Ł∀ and an infinitary calculus that extends GŁ∀ with the infinitary rule:

$$\frac{\bar{0} \Rightarrow [A]^k \quad \textit{for all positive integers } k}{\Rightarrow A},$$

where $\bar{0}$ is the zero truth constant, A is an Ł∀-formula, and $[A]^k$ is the multiset consisting of k copies of A. Also in [**1**], the following theorem is claimed to hold.

Theorem 1. *Let A be an Ł∀-sentence. Then A is valid iff A is provable in* GŁ∀ *extended with the above rule.*

However, the proof of this theorem in [**1**] contains serious gaps and an error, which G. Metcalfe (an author of [**1**]) acknowledged. In [**4**], we established Theorem 1 for prenex Ł∀-sentences A as a corollary of the following theorem.

Theorem 2 [**4**]**.** *Let A be a prenex Ł∀-sentence. Then A is valid iff, for all positive integers k, the (hyper)sequent $\left(\bar{0} \Rightarrow [A]^k\right)$ is provable in* GŁ∀.

Now we prove Theorem 2 for arbitrary Ł∀-sentences A (and hence Theorem 1) without using the cut rule, which is not admissible for GŁ∀. A byproduct of our proof is that an Ł∀-formula is provable in GŁ∀ if its (purely syntactically defined) prenex form is.

The above theorems extend to first-order rational Pavelka logic (an expansion of Ł∀ by rational truth constants) and several calculi for it from [**3, 4, 5**].

References

[1] Baaz M., Metcalfe G., Herbrand's theorem, skolemization and proof systems for first-order Łukasiewicz logic. Journal of Logic and Computation, 2010, v.20, no.1, 35–54.

[2] Cintula P., Hájek P., Noguera C., eds. Handbook of Mathematical Fuzzy Logic, Vol. 1 and 2, London, College Publications, 2011.

[3] Gerasimov A.S., Infinite-valued first-order Łukasiewicz logic: hypersequent calculi without structural rules and proof search for sentences in the prenex form. Siberian Advances in Mathematics, 2018, v.28, no.2, 79–100.

[4] Gerasimov A.S., Repetition-free and infinitary analytic calculi for first-order rational Pavelka logic. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2020, v.17, 1869–1899.

[5] Gerasimov A.S., Comparing calculi for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic and first-order rational Pavelka logic. Logic and Logical Philosophy, 2022, v.32, no.2, 269–318.

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg (Russia)
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

Cross lemmas in some preabelian categories

Ya. A. Kopylov

The so-called cross lemmas play an important part in the theory of various classes of additive categories (see, e.g., [**1, 2, 3**]). In its typical statement, a cross lemma is an assertion of the following form in a preabelian category:

Suppose that in the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & E \\ & F & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{im}\beta = \ker p$, $\operatorname{im} f = \ker q$, *the morphism* $q\beta$ *is strict and some additional conditions are fulfilled. Then the composition* pf *is also strict.*

In [**1**], a cross lemma was used for proving that a left- or right quasi-abelian semi-abelian category is in fact quasi-abelian. In [**2**], a more general cross lemma was used as a tool for proving the strictness of some morphisms in the Ker-Coker-sequence in a quasi-abelian category. In [**3**], Crivei considered some general theorem he called the "square-cross lemma" in a Quillen exact category and proved that in an abelian category, the diagrams of the kind involved in his theorem are in one-to-one correspondence with cross diagrams of a certain form.

We deal with cross-lemmas in one-sided semi- and quasi-abelian categories. Such categories are not uncommon, for example, in functional analysis.

Theorem. *Suppose that in the commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, "f"'] & \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & E \\ & F & \end{tikzcd}$$

in a left semi-abelian category, $p = \operatorname{coker}\beta$, $q = \operatorname{coker} f$, f, β, $q\beta$ *are strict,* p *and* $\operatorname{coim}(q \operatorname{im}\beta)$ *are semi-stable cokernels. Then* pf *is strict. The dual assertion holds.*

References

[1] Kuz'minov V. I., Cherevikin A. Yu., Semiabelian categories. Sib. Math. J., v.13, no.6, 895–902 (1972).

[2] Kopylov Ya. A., Kuz'minov V. I., On the Ker-Coker sequence in a semiabelian category. Sib. Math. J., v.41, no.3, 509–517 (2000).

[3] Crivei S., The square-cross lemma. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., Nouv. Sér., v.57(105), no.3, 261–269 (2014).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: yakop@math.nsc.ru

On algorithmic problems for quasivarieties

A. V. Kravchenko, M. V. Schwidefsky

As is proven in a recent joint article of the authors and Nurakunov, if a quasivariety $\mathbf{K}$ admits a finite B-class then there exist 2^ω subquasivarieties of $\mathbf{K}$ with independent bases for their quasi-identities such that the quasi-equational theory of $\mathbf{K}$ is undecidable and the membership problem is undecidable for finite structures in $\mathbf{K}$.

The notion of a B*-class introduced by the second author generalises the notion of a B-class.

We prove that existence of a finite B*-class implies existence of 2^ω subquasivarieties with independent bases for their quasi-identities and the same list of undecidable problems. We also find a connection with relatively ff-universal quasivarieties and illustrate the undecidability result with applications to quasivarieties of semigroups.

The authors were supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00104).

Novosibirsk State University of Economics and Management; Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.v.kravchenko@edu.nsuem.ru
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: semenova@math.nsc.ru

On algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories: piecewise monotonic case

B. Sh. Kulpeshov

Algebras of binary isolating formulas (**[1, 2]**) are a tool for describing relationships between elements of the sets of realizations of a type at the binary level. The notion of *weak circular minimality* was studied initially in [**3**].

Theorem 1 [4]. *(piecewise monotonic case) Let M be an $\aleph_0$–categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structure of convexity rank greater than 1 having a non-trivial piecewise (non-strictly) monotonic function so that $dcl(a) \neq \{a\}$ for some $a \in M$. Then M is isomorphic up to binarity to $M_{s,m,k} := \langle M, K, f^1, E_1^2, \ldots, E_s^2, E_{s+1}^2\rangle$, where M is a circularly ordered structure, M is densely ordered, $s \geq 1$, $k \geq 2$, k is even, k divides m, $m \geq 4$; E_{s+1} is an equivalence relation partitioning M into m infinite convex classes without endpoints, for every $1 \leq i \leq s$ the relation E_i is an equivalence relation partitioning every E_{i+1}–class into infinitely many infinite convex E_i–subclasses without endpoints so that the induced order on E_i–subclasses is dense without endpoints; f is a bijection on M so that $f^k(a) = a$ for any $a \in M$, for every $1 \leq i \leq s+1$ $f(E_i(M,a)) = E_i(M, f(a))$ and $\neg E_i(a, f(a))$, and f is piecewise monotonic-to-left on M, i.e. f is monotonic-to-left on each E_{s+1}–class and f is monotonic-to-right on M/E_{s+1}.*

The following theorem describes the algebra of binary isolating formulas for an $\aleph_0$–categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structure of convexity rank greater than 1 having a non-trivial piecewise (non-strictly) monotonic function:

Theorem 2. *The algebra $\mathfrak{P}_{M_{s,m,k}}$ of binary isolating formulas having a piecewise monotonic-to-left function on M has $2k(s+1)+m$ labels, is strictly $(2s+3)$-deterministic and is not commutative.*

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

References

[1] Sudoplatov S.V., Classification of countable models of complete theories, Novosibirsk: NSTU, 2018.

[2] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V., Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2014, v.14, 380–407.

[3] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D., Minimality conditions on circularly ordered structures. Mathematical Logic Quarterly, 2005, v.51, no.4, 377–399.

[4] Kulpeshov B.Sh., Definable functions in the $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures. Siberian Mathematical Journal, 2009, v.50, no.2, 282–301.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan); Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

On variations of rigidity for ordered theories

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

Let L be a countable first-order language. Here we consider L-structures and their complete elementary theories, and assume that L contains a symbol of binary relation $<$, which is interpreted as a linear order in these structures.

Definition. [**1**] For a set A in a structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ is called *semantically A-rigid* or *automorphically A-rigid* if any A-automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ is identical. The structure $\mathcal{M}$ is called *syntactically A-rigid* if $M = \mathrm{dcl}(A)$. A structure $\mathcal{M}$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically n-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically n-rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$. The least n such that $\mathcal{M}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / Q-syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg^{Q\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$ and $\deg^{Q\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$, respectively. Here if a set A produces the value of Q-semantical / Q-syntactical degree then we say that A *witnesses* that degree. If such n does not exist we put $\deg^{Q\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = \infty$ and $\deg^{Q\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = \infty$, respectively.

Following [**1**] for a structure $\mathcal{M}$ we denote by $\deg_4(\mathcal{M})$ the tetrad

$$\deg_4(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg^{\exists\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\exists\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})\right).$$

The following theorem describes all the possibilities for degrees of semantical and syntactical rigidity for an infinite countable linear ordering:

Theorem. *Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite countable linear ordering. Then only the following values for $\deg_4(\mathcal{M})$ are possible:*

(1) $(0, 0, 0, 0)$;
(2) $(0, m, 0, \infty)$, *where* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(3) $(0, \infty, 0, \infty)$;
(4) $(1, 1, m, m)$, *where* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(5) $(1, \infty, m, \infty)$, *where* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(6) (m, n, ∞, ∞), *where* $m, n \in \omega \setminus \{0\}$ *with* $m \leq n$;
(7) $(m, \infty, \infty, \infty)$, *where* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(8) $(\infty, \infty, \infty, \infty)$.

This research has been funded by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850), and it was also carried out in the framework of the State Contract of Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

References

[1] Sudoplatov S.V., Variations of rigidity. arXiv:2307.13228 [math.LO], 2023. 13 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.13228.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Approximations of strongly minimal unars

N. D. Markhabatov

We continue to study structural approximations using the method developed in [**1**].

As usual, we will use the standard terminology. A unar is a structure $\mathcal{U} = \langle U; f^{(1)} \rangle$, whose language consists of one single operation f. For any $u \in U$, let $f^0(u) = u, f^{n+1}(u) = f(f^n(u))$ for all $n \in \omega$, $f^{-1}(u) = \{w \in U | f(w) = u\}$. A unar $\mathcal{U}$ is called a *cycle* of length $n \in \mathbb{N}$ if there exists $u \in U$ such that $U = \{f^i(u) | 0 \leqslant i < n\}, f^n(u) = u, f^i(u) \neq f^j(u)$ for all different $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. The set $\{u_i | i \in \omega\} \subseteq U$ is called a *semichain* if $f(u_i) = u_{i+1}$ and $u_i \neq u_j$ for all distinct $i, j \in \omega$. The set $\{u_i | i \in \omega\} \subseteq U$ is called an infinite *antichain* if $f(u_{i+1}) = u_i$ and $u_i \neq u_j$ for all distinct $i, j \in \omega$. If $|f^{-1}(u)| = k$, we say that u is a *k-branching point*.

A theory T is said to be *limited* if there exists a natural number N such that the following formula is true in T: $(\forall u)[\bigvee_{n,m=1}^{N}(f^n(u) = f^{n+m}(u))]$.

Theorem. *There is a theory T of unlimited strongly minimal non-injective non-surjective pseudofinite unar.*

Remark. Consider the unary function

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{if } x \text{ is even} \\ 3x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

.

Let's call the structure $\langle \mathbb{Z}^+, f \rangle$ as $3x+1$-*model* or *Collatz model*. It is easy to see that any point in this model is 1-branching or 2-branching. Therefore, the $3x+1$ model is unlimited strongly minimal and has an infinite number of antichains. Moreover, the $3x+1$-model is a surjective unar. By [**2**] is not pseudofinite.

Corollary 1. *The theory $T = Th(\mathcal{U})$ of unlimited strongly minimal injective unar $\mathcal{U}$ is pseudofinite if and only if $\mathcal{U}$ is bijective.*

Corollary 2. *Any theory $T = Th(\mathcal{U})$ of limited strongly minimal unar $\mathcal{U}$ is pseudofinite.*

By the classical results of Zilber and Cherlin, Harrington, Lachlan say that strongly minimal (in fact ω-stable) ω-categorical theories are pseudofinite.

The study was partially supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (AP19674850, AP19677451).

References

[1] Sudoplatov S.V., Approximations of theories. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2020, v.17, 715–725. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049.

[2] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V., On approximations of unars, Mal'tsev meeting: abstracts of international conf. (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, September 20–24, 2021), P. 168.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana (Kazakhstan)
E-mail: markhabatov@gmail.com

On approximations of directed acyclic graph theories

N. D. Markhabatov

We continue to study structural approximations using the method developed in [**1**]. An infinite graph $\Gamma = \langle G, R\rangle$ of the form $G = \{g_i | i \in \omega\}, (g_i, g_{i+1}) \subseteq R$ is called a *ray*, and $(g_{i+1}, g_i) \subseteq R$ is called an *antiray*, $g_i \neq g_j$ for all distinct $i, j \in \omega$.

Theorem 1. *Any DAG theory T of bounded diameters is pseudofinite.*

Theorem 2. *Let T be a DAG theory of unbounded diameters with n rays and m antirays. Then*
i) If $n = m$, then T is pseudofinite;
ii) There is a pseudofinite DAG theory T with $n \neq m$.

The study was partially supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (AP19674850, AP19677451).

References

[1] Sudoplatov S.V., Approximations of theories. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2020, v.17, 715–725. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049.

[2] Markhabatov N.D., Approximations of Acyclic Graphs. Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, 2022, v.40, 104–111.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana (Kazakhstan)
E-mail: markhabatov@gmail.com

On degrees of algebraization for finite structures

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov

We study possibilities for degrees of algebraization $\deg_{\rm acl}(\cdot)$ [**1**] adapted for theories of finite structures. Let $\mathcal{M}$ be a structure. Recall [**2**] that for an element $a\in M$, the *orbit* $O(a/A)$ with respect to the automorphism group ${\rm Aut}(\mathcal{M})$ is the set of all elements $b\in M$ connected with a by A-automorphisms $f\in{\rm Aut}(\mathcal{M}/A)$: $f(a)=b$ and $f(a')=a'$ for any $a'\in A$. We write $O(a)$ instead of $O(a/\emptyset)$. For a finite structure $\mathcal{M}$ we denote by $o(\mathcal{M})$ the maximal cardinality of orbits $O(a)$, for elements $a\in M$. Since all models of $T={\rm Th}(\mathcal{M})$ are pairwise isomorphic, the value $o(\mathcal{M})$ does not depend on the choice of a model of T and it is denoted by $o(T)$.

Proposition 1. $\deg_{\rm acl}(T)=\deg_{\rm acl}(\emptyset)=o(T)$.

Proposition 2. *For any theories T_i of pairwise disjoint predicate languages Σ_i, and of finite structures $\mathcal{M}_i$, $i<\lambda$, $\deg_{\rm acl}\left(\bigsqcup\limits_{i<\lambda}T_i\right)=\max\limits_{i<\lambda}o(T_i)$.*

Recall [**3**] that the Euler function $\varphi(n)$ is defined as follows: $\varphi(n)=|\{m\in\mathbb{Z}_n\mid(m,n)=1\}|$.

Theorem. *For any finite abelian group $\mathcal{S}=\oplus_{p,n}\mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$,*

$$\deg_{\rm acl}({\rm Th}(\mathcal{S}))=\prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}}-(p^n-\varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

Following [**4**] theories T with $\deg_{\rm acl}(T)=1$, i.e., with ${\rm acl}(A)={\rm dcl}(A)$ for any set A of T, are called *quasi-Urbanik*, and the models $\mathcal{M}$ of T are *quasi-Urbanik*, too.

Corollary. *A finite abelian group $\mathcal{G}$ is quasi-Urbanik iff $\mathcal{G}$ is either a singleton or isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.*

The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Grant No. AP19677451.

References

[1] Sudoplatov S.V., Algebraic closures and their variations. arXiv:2307.12536 [math.LO], 2023. 16 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.12536.

[2] Kargapolov M.I., Merzljakov J.I., Fundamentals of the Theory of Groups, New York : Springer, 2011. 221 p.

[3] Vinogradov I.M., Elements of Number Theory, Mineola, New York : Dover Publications, Inc., 1954. 230 p.

[4] Zil'ber B.I., Hereditarily transitive groups and quasi-Urbanik structures. American Mathematical Society Translations: Series 2, 1999, v.195, 165–186.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Structural completeness of reflexive temporal tomorrow – logic

V. V. Rimatskiy

Let a frame $\mathcal{F}_n$ be defined as follows. For any given $n \geq 1$, $[1, n]$ is the standard interval of natural numbers situated between 1 and n. The temporal frame $\mathcal{F}_n = \langle [1, n]; T\rangle$ has the base set $[1, n]$ and the accessibility relation T. This relation is intransitive reflexive binary relation defined as $mTk \iff k = m + 1 \vee m = k$. We define also the temporal frame $\mathcal{F}_\infty = \langle [1, 2, \ldots, n, \ldots]; T\rangle$ with the same relation T on the set of all natural numbers.

Now we define the temporal tomorrow-logic $\mathcal{L}^r = L(\{\mathcal{F}_\infty)\}$ as the set of all formulas which are valid on the frame $\mathcal{F}_\infty$. The main properties of this logic are following:

Lemma. *The class of frames $\{\mathcal{F}_n,\ n \in N\}$ is characteristic for logic $\mathcal{L}^r$. If a temporal degree of formula α is equal n and $\mathcal{F}_\infty \not\models \alpha$, then $\mathcal{F}_{n+1} \not\models \alpha$.*

Theorem. *Logic $\mathcal{L}^r$ is finite axiomatizable, decidable and has finite model property.*

The construction of n-characterizing model $Ch_n(\mathcal{L}^r)$ for logic $\mathcal{L}^r$ can be described as follow. The first slice of this model consists of reflexive elements (one-element clusters) $c_1, c_2, \ldots, c_{2^n}$ with all possible valuation of propositional letters $p_1, p_2, \ldots, p_n$. The second one we construct in the next way. Choose any element (cluster) c_i of first slice and put any cluster c_j from the set $\{c_1, c_2, \ldots, c_{2^n}\}$ which is not isomorphic (as model) to c_i, assuming c_j to be R-immediate predecessor for c_i. Iterating this procedure, we get as the result the model $Ch_n(\mathcal{L}^r)$.

Theorem. *The model $Ch_n(\mathcal{L}^r)$ is n-characterizing model for logic $\mathcal{L}^r$ and each element of this model is definable.*

Main results are next theorems:

Theorem. *Any $\mathcal{L}^r$-frame is p-morphic image of frame of $Ch_n(\mathcal{L}^r)$, and hence a variety $Var(\mathcal{L}^r)$ coincides with quasi-variety $\mathcal{F}_w^Q$ generated by free algebra of countable rang from $Var(\mathcal{L}^r)$.*

Theorem. *Logic $\mathcal{L}^r$ is structurally complete: any admissible in $\mathcal{L}^r$ inference rule is derivable in $\mathcal{L}^r$.*

The research was financially supported by the Russian Scientific Foundation (Project No.23-21-00213).

Siberian Federal University, Krasnoyarsk (Russia)
E-mail: Gemmeny@rambler.ru

Dualities for categories of bounded lattices

M. V. Schwidefsky

We present the categorical duality between certain categories of finitely generated varieties of $(0, 1)$-lattices and those of topological spaces with additional structure. The results presented were obtained in a joint work with W. Dziobiak.

The author was supported by the state contract of Sobolev Institute of Mathematics, project no. FWNF-2022-0012, as well as by the Russian Science Foundation (project 22-21-00104).

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS; Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: m.schwidefsky@g.nsu.ru

On conditional characteristics of rigidity

S. V. Sudoplatov

We continue to study degrees $\deg^{Q\text{-}s}_{\rm rig}(\mathcal{M})$ of rigidity **[1, 2]** applying them for Δ-restrictions, i. e. restrictions relative to special conditions Δ.

Definition. A structure $\mathcal{M}$ is called $(\forall,\Delta)$-*semantically* / $(\forall,\Delta)$-*syntactically* n-*rigid* (respectively, $(\exists,\Delta)$-*semantically* / $(\exists,\Delta)$-*syntactically* n-*rigid*), for $n\in\omega$, if $\mathcal{M}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A\subseteq M$ with $|A|=n$ and $\models\Delta(A)$.

The least n such that $\mathcal{M}$ is (Q,Δ)-semantically / (Q,Δ)-syntactically n-rigid, where $Q\in\{\forall,\exists\}$, is called the (Q,Δ)-*semantical* / (Q,Δ)-*syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg^{Q\text{-sem},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})$ and $\deg^{Q\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})$, respectively. Here if a set A produces the value of (Q,Δ)-semantical / (Q,Δ)-syntactical degree then we say that A *witnesses* on that degree. If such n does not exist we put $\deg^{Q\text{-sem},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\infty$ and $\deg^{Q\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\infty$, respectively.

We assume that $\deg^{Q\text{-}s,\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\deg^{Q\text{-}s}_{\rm rig}(\mathcal{M})$, for $Q\in\{\forall,\exists\}$, $s\in\{\text{sem},\text{synt}\}$, and for $\Delta=\emptyset$ or if Δ consists of tautologies.

Theorem 1. *If $\mathcal{M}$ is a homogeneous structure and $\Delta=\Delta(X)$ is a complete type then $\deg^{\exists\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\deg^{\forall\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})$ and $\deg^{\exists\text{-sem},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\deg^{\forall\text{-sem},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})$.*

Proposition. *If $\mathcal{M}$ is an infinite structure, $\Delta=\Delta(X)$ and $\deg^{\exists\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=n\in\omega$ then there are infinitely many $(n+1)$-types over $\emptyset$: $|S^{n+1}(\emptyset)|\geq\omega$.*

Corollary. *If $\mathcal{M}$ is an ω-categorical structure then for any type $\Delta=\Delta(X)$ we have $\deg^{\exists\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\deg^{\forall\text{-synt},\Delta}_{\rm rig}(\mathcal{M})=\infty$.*

Theorem 2. *Any countable structure $\mathcal{M}$ has a countable elementary extension $\mathcal{N}$ with $\deg^{\exists\text{-synt}}_{\rm rig}(\mathcal{N})=\infty$.*

The work was carried out in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850).

References

[1] Sudoplatov S. V., Variations of rigidity. arXiv:2307.13228 [math.LO], 2023. 13 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.13228.

[2] Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V., Variations of rigidity for ordered theories. Preprint. Almaty, Novosibirsk, 2023. 17 p.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

IV. Секция «Теория вычислимости»

Структурные свойства 2-в.п. конъюнктивных и дизъюнктивных степеней

Р. Р. Багавиев

Иерархия Ершова, покрывающая в точности все $\emptyset'$-вычислимые множества, представляет собой естественное обобщение понятия вычислимо перечислимых (в.п.) множеств, при котором на вычислимую аппроксимацию характеристической функции множества накладываются определённые ограничения. Наиболее активно исследуются конечные уровни иерархии и структуры, индуцированные множествами из конечных уровней.

Так, для n-в.п. тьюринговых (или T-)степеней неразрешимости получен целый ряд структурных свойств (см. [**1**]). Однако теоретико-модельные свойства изучены мало. Нерешённой остаётся проблема элементарной эквивалентности структур n-в.п. T-степеней при $n \geq 3$, а также неизвестно, определимы ли в.п. T-степени в 2-в.п. T-степенях.

Структуры, индуцированные более сильной m-сводимостью, подробно изучались для в.п. степеней. Структура n-в.п. m-степеней, включая вопросы об элементарных различиях и определимости, в последние годы исследована М.М. Ямалеевым и К.М. Нг.

Естественным продолжением исследований в данном направлении является изучение структур n-в.п. степеней относительно сводимостей, промежуточных между m- и T-сводимостями. К таковым относятся сводимости табличного типа, в которых сводящая процедура основана на построении булевой формулы на наборе аргументов. Подробнее о табличных сводимостях и структурах в.п. табличных степеней см. [**2**].

Доклад посвящен структурам степеней, индуцированных двумя из сводимостей табличного типа, а именно конъюнктивной и дизъюкнтивной (или c- и d-) сводимостями. Рассматриваются структурные свойства 2-в.п. c- и d-степеней, а также вопросы, связанные с элементарными различиями и определимостью в.п. и 2-в.п. уровней.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Литература

[1] Арсланов М. М., Ямалеев М. М., Тьюрингова вычислимость: структурная теория. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **157** (2018), 8–41.

[2] Дёгтев А. Н., Рекурсивно перечислимые множества и сводимости табличного типа. Москва, Наука: Физматлит, 1998.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)
E-mail: ramilbagaviev@mail.ru

Пунктуальные представления 1-линейных порядков

М. В. Зубков, А. Н. Фролов

И. Калимуллин, А. Мельников и К. Нг [**1**] предложили систематически изучать проблему примитивно-рекурсивной представимости алгебраических структур из естественных классов. Основным изучаемым понятием здесь является пунктуально вычислимая структура [**2**], которая определяется следующим образом. Мы говорим, что бесконечная счетная структура пунктуально вычислима, если ее область определения *множество всех натуральных чисел* ω и все операции и предикаты *примитивно рекурсивны*. Благодаря тому, что основной областью определения является множество натуральных чисел, нетрудно построить универсальное перечисление всех пунктуальных структур конечной сигнатуры.

В работе М. Зубкова, И. Калимуллина, А. Мельникова и А. Фролова [**3**], среди прочего, показано, что существует существует $\mathbf{0}^{(3)}$-равномерная процедура, которая по индексу вычислимого линейного порядка дает индекс его пунктуальной копии. При этом показано, что оценка сложности процедуры является оптимальной. И там же показано, что любой бесконечный вычислимый линейный порядок $\mathbf{0}''$-изоморфен пунктуальному порядку и $\mathbf{0}''$ — оптимальная оценка.

В этой работе мы рассматриваем линейные порядки, сигнатура которых дополнена отношением соседства. Другими словами, мы рассматриваем структуры вида $\mathcal{L} = (\omega, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}})$, где $S_{\mathcal{L}}$ — отношение соседства на линейном порядке $\mathcal{L} = (\omega, <_{\mathcal{L}})$. Назовем такие структуры 1-линейными порядками.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *1) Существует $\mathbf{0}''$-равномерная процедура, которая по индексу вычислимого* 1*-линейного порядка возвращает индекс его пунктуальной копии, причем $\mathbf{0}''$ является оптимальной оценкой. 2) Любой бесконечный вычислимый* 1*-линейный порядок $\mathbf{0}'$-изоморфен пунктуальному и $\mathbf{0}'$ оптимальная оценка.*

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект № 23-21-00245). Работа второго автора выполнена в рамках программы развития Поволжского математического центра (договор № 075-02-20223-944).

Литература

[1] Kalimullin I., Melnikov A., Ng K. M., Algebraic structures computable without delay. *Theoret. Comput. Sci.*, **674** (2017), 73–98.

[2] Downey R., Harrison-Trainor M., Kalimullin I., Melnikov A., Turetsky D., Graphs are not universal for online computablility. *Journal of Computer and System Sciences*, **112** (2020), 1–12.

[3] Zubkov M. V., Kalimullin I. Sh., Frolov A. N., Melnikov A. G., Punctual Copies of Algebraic Structures. *Siberian Mathematical Journal*, **60**: 6 (2019), 993–1002.

КФУ, Казань (Россия)
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru
Университет Иннополис, Иннополис (Россия)
E-mail: a.frolov.kpfu@gmail.com

Селекторные функции и относительная вычислимая категоричность

И. Ш. Калимуллин

В докладе будет обсуждаться связь между селекторными функциями для вычислимых последовательностей разностей вычислимо перечислимых множеств и относительной вычислимой категоричностью алгебраических структур. Будет показано, что степенная сложность вычисления таких селекторных функций может быть эквивалентна вычислению одного из нескольких вычислимо перечислимых множеств. Кроме того, можно доказать, что степенная сложность селекторных функций может быть эквивалентна не вычислимо перечислимой степени.

Казанский федеральный университет, Казань (Россия)
E-mail: ikalimul@gmail.com

О бесконечных прямых суммах однозначных нумераций функциональных семейств

Ш. Д. Нодиров, М. Х. Файзрахманов

В докладе рассматриваются два подхода к определению вычислимости нумераций семейств всюду определенных функций. Рассматривается как классическое определение вычислимой нумерации семейства вычислимых функций, согласно которому по номеру функции в этой нумерации эффективно определяется ее геделевский номер, так и, расширяющее предыдущее, определение, основанное на равномерном применении понятия вычислимо перечислимого слева элемента бэровского пространства. Излагаемые в докладе результаты посвящены вопросу о возможности порождения всех вычислимых нумераций семейства относительно сводимости и прямых сумм его однозначных нумераций.

Каршинский государственный университет, Карши (Узбекистан)
E-mail: shoh0809@mail.ru
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Пунктуальные нумерации для семейств множеств

Д. Нурланбек, А. Аскарбеккызы, Р. Багавиев, В. Исаков, Б. Калмурзаев, Ф. Ракымжанкызы, А. Слобожанин

Баженов, Мустафа и Оспичев в статье **[1]** рассмотрели пунктуальные нумерации семейств функций. В данном докладе будут рассматриваться исследование пунктуальных нумераций семейств множеств.

Будем говорить, что нумерация ν семейство множеств S является пунктуальной, если существует примитивно рекурсивная функция $g_\nu(x,y)$ такая, что

- $\nu(x) = \mathrm{range}(g_\nu(x,\cdot))$;
- Если $g_\nu(x,y_1) = g_\nu(x,y_2)$ для $y_1 < y_2$, тогда

$$\mathrm{range}(g_\nu(x,\cdot)) = \{g_\nu(x,0), g_\nu(x,1), \ldots, g(x,y_2)\}.$$

Через $\mathcal{R}_{pr}(S)$ обозначим полурешетку Роджерса пунктуальных нумераций семейства S относительно сводимости по примитивно рекурсивной функции.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{S} = \{A, B\}$, где A, B – различные пунктуальные множества:*

- *Если A или B конечно, то $|\mathcal{R}_{pr}(\mathcal{S})| = 1$.*
- *Если A и B бесконечны, $A \cap B$ конечно и одно из множеств примитивно рекурсивно, то $|\mathcal{R}_{pr}(\mathcal{S})| = 1$.*
- *Если $A \subset B$, то $|\mathcal{R}_{pr}(\mathcal{S})| = \infty$ с главным элементом.*

Теорема 2. *Существуют множества A и B такие, что*

- *$|A \cap B| < \infty$ и в $\mathcal{R}_{pr}(\{A, B\})$ нет универсальной нумерации.*
- *$|A \cap B| < \infty$ и $|\mathcal{R}_{pr}(\{A, B\})| = 1$.*
- *$|A \cap B| = \infty$ и $|\mathcal{R}_{pr}(\{A, B\})| = \infty$ без главного элемента.*

Теорема 3. *Если бесконечное семейство $\mathcal{S}$ обладает фридберговой нумерацией, то*

(1) *$\mathcal{R}_{pr}(\mathcal{S})$ не обладает наименьшим элементом,*
(2) *$|\mathcal{R}_{pr}(\mathcal{S})| = \infty$.*

Литература

[1] Bazhenov N., Mustafa M., & Ospichev S., Rogers semilattices of punctual numberings. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2022, 1–25.

Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: d.nurlanbek@kbtu.kz
Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: a.askarbekkyzy@kbtu.kz
Казанский Федеральный Университет, Казань (Россия)
E-mail: ramilbagaviev@mail.ru
Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: v.isakov@g.nsu.ru
Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: b.kalmurzaev@kbtu.kz
Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: f.rakhymzhankyzy@kbtu.kz
Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.slobozhanin@g.nsu.ru

Минимальные нумерации семейств функционалов конечного типа

С. С. Оспичев

В работе рассматриваются вычислимые нумерации семейств частично вычислимых функционалов из класса $\mathcal{C}^*_{20}$([**1**]). Данный класс является естественным, например, функционалы, построенные над семейством всех вычислимо перечислимых множеств или всех частично вычислимых функций, будут именно такими.

Пусть T – множество типов и для каждого $\sigma \in T$ определим семейство функционалов типа σ:

(1) в качестве C_0 возьмем любое семейство из класса $\mathcal{C}^*_{20}$;
(2) $C_{\sigma\times\tau} = C_\sigma \times C_\tau$ – декартово произведение классов;
(3) $C_{\sigma|\tau} = \mathfrak{Mor}(C_\sigma, C_\tau)$ – семейство вычислимых морфизмов из C_σ в C_τ.

С точки зрения теории нумераций, интересным является вопрос о сохранении алгебраических и структурных свойств полурешеток Роджерса при переходе к более высоким типам функционалов. В работе [**2**] были исследованы свойства фридберговых нумераций семейств из C_σ. Данная работа продолжает эти исследования и обращается к минимальным нумерациям.

Литература

[1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
[2] Оспичев С. С., Фридберговы нумерации семейств частично вычислимых функционалов. *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 331–339.

ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: ospichev@gmail.com

О длине невыполнимой подформулы

А. В. Селиверстов

Через $\bot$ и $\top$ обозначены булевы константы: ложь и истина, соответственно. Для двух чисел $\alpha < \beta$ множество α-or-β-in-SAT состоит из КНФ, для которых существует такая $(\bot, \top)$-оценка переменных, что в каждой элементарной дизъюнкции истинными оказались либо ровно α, либо ровно β литералов. Для $k < \alpha < \beta$ множество α-or-β-in-SAT не содержит ни одной k-КНФ. Некоторая 2-КНФ φ принадлежит множеству 1-or-2-in-SAT тогда и только тогда, когда φ выполнима. Некоторая 3-КНФ φ принадлежит множеству 1-or-2-in-SAT тогда и только тогда, когда φ принадлежит множеству NAE-3-SAT. Оно состоит из тех 3-КНФ, для которых существует такая $(\bot, \top)$-оценка переменных, что в каждой дизъюнкции некоторый литерал ложный и некоторый литерал истинный. Принадлежность 3-КНФ $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ к NAE-3-SAT равносильна выполнимости формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_n) \wedge \varphi(\neg p_1, \ldots, \neg p_n)$. Задача распознавания принадлежности 3-КНФ к NAE-3-SAT, как известно, NP-полная. Длина формулы служит естественным параметром для оценки вычислительной сложности [1]. Поэтому интересна возможность замены исходной 3-КНФ на подформулу.

Теорема. *Дана пропозициональная КНФ $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ с m элементарными дизъюнкциями от n переменных. Если φ не принадлежит к α-or-β-in-SAT и выполнено условие $m > 2n + 2$, то существует КНФ, которая не принадлежит к α-or-β-in-SAT и получена удалением из φ некоторой элементарной дизъюнкции.*

Полученная граница для числа элементарных дизъюнкций невыполнимой подформулы в 2-КНФ близка к оптимальной. Существует невыполнимая 2-КНФ с $m = 2n$ элементарными дизъюнкциями от n переменных, для которой выполнима подформула, полученная удалением любой элементарной дизъюнкции. Примером служит 2-КНФ

$$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge \cdots \wedge (\neg p_{n-1} \vee p_n) \wedge (p_{n-1} \vee \neg p_n) \wedge (p_n \vee p_1) \wedge (\neg p_n \vee \neg p_1),$$

где каждая переменная дважды входит позитивно и дважды — негативно. С другой стороны, граница для уменьшения числа элементарных дизъюнкций лежит в области, где почти любая 2-КНФ невыполнима [2].

Литература

[1] Peng J., Xiao M., Further improvements for SAT in terms of formula length. *Information and Computation*, 105085 (2023), https://doi.org/10.1016/j.ic.2023.105085

[2] Goerdt A., A threshold for unsatisfiability. *Journal of Computer and System Sciences*, **53**: 3 (1996), 469–486. https://doi.org/10.1006/jcss.1996.0081

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва (Россия)
E-mail: SLVSTV@iitp.ru

Вычислимые модели интенсиональной логики

А. И. Стукачев

Рассматриваются алгоритмические свойства моделей интенсиональной логики Монтегю, используемых в математической лингвистике для формализации и представления семантики предложений естественного языка. Функционалы конечных типов играют важную роль в структуре таких моделей [**2**]. Построены несколько вычислимых (в смысле [**1**]) моделей пространств функционалов конечных типов, свойства которых зависят от выбора трех базовых пространств: для сущностей, для истинностных значений, и для состояний. Данная работа продолжает исследования, начатые в [**3, 4, 5, 6**], и выполнена в рамках государственноого задания ИМ СО РАН, номер проекта FWNF-2022-0012.

Литература

[1] Ershov Yu. L., Definability and computability. Plenum, New York, 1996.

[2] Dowty D. R., Wall R. E., Peters S., Introduction to Montague semantics. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1989.

[3] Stukachev A. I., Approximation spaces of temporal processes and effectiveness of interval semantics. *Advances In Intelligent Systems and Computing*, **1242** (2021), 53–61.

[4] Stukachev A. I., Interval extensions of orders and temporal approximation spaces. *Siberian Mathematical Journal*, **62**: 4 (2021), 730–741.

[5] Burnistov A. S., Stukachev A. I., Generalized computable models and Montague semantics. *Studies in Computational Intelligence*, **1081** (2023), 107–124.

[6] Burnistov A. S., Stukachev A. I., Computable functionals of finite types in Montague semantics. *Lecture Notes in Computer Science*, in print.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: aistu@math.nsc.ru

Линейные порядки, порождающие вычислимые булевы алгебры

А. Н. Фролов

В монографии С.С. Гончарова “Счетные булевы алгебры” приводится результат о том, что если линейный порядок L имеет вид $\omega \cdot L'$ для некоторого порядка L', то булева алгебра, порожденная порядком L является атомной. Обратное в общем неверно. Можно показать, что булева алгебра $\mathcal{B}_L$ является атомной тогда и только тогда, когда L не содержит плотного подинтервала.

Для начала мы покажем, что если булева алгебра атомная, то всегда найдется такой L', что алгебра порождается порядком, $\omega \cdot L'$.

Основным же результатом доклада является следующий. Каждая булева алгебра порождается линейным порядком $\omega \cdot L_1 + \sum\limits_{i \in L_2} (\eta + \omega \cdot R_i) + L_3$, где L_1, L_2, R_i – некоторые линейные порядки, L_3 – либо η, либо пустой. Причем, если булева алгебра X-вычислимая, то все вышеперечисленные порядки могут быть равномерно построены с помощью оракула $\mathbf{0}'''$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00078).

Университет Иннополис, Иннополис (Россия)
E-mail: a.frolov.kpfu@gmail.com

Разрешимость предельных моделей эренфойхтовых теорий

Е. И. Хлестова

Морли поставил вопрос: будут ли все модели эренфойхтовых теорий с разрешимыми типами разрешимы [**1**]? Ослабление условия было предложено Эшем и Милларом: будут ли все модели эренфойхтовых теорий с арифметическими типами арифметически разрешимы [**2**]? Судоплатов [**3**] показал что все модели эренфойхтовых теорий будут либо почти простыми, либо предельными над типом $p(\bar{x})$. Пусть $p(c_1, \ldots, c_n)$ - полная теория сигнатуры $\sigma \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. Если у неё есть простая модель $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}$, то ее обеднение до σ называется почти простой (п.п.) моделью над типом $p(\bar{x})$ и она единственна с точностью до изоморфизма. Если модель $\mathcal{M}$ эренфойхтовой теории не п.п., тогда существует п.п. модель $\mathcal{N}_p$ т.ч. $\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{N}_i$, где $\mathcal{N}_0 \preceq \ldots \mathcal{N}_i \preceq \ldots$ элементарная цепь структур и $\mathcal{N}_i \preceq \mathcal{N}_p$ для всех $i \in \omega$. $\mathcal{M}$ предельная модель над типом $p(\bar{x})$. Было показано что оба вопроса имеют положительный ответ для п.п. моделей [**4**]. Получен результат: для эренфойхтовой теории с арифметическими типами, хотя бы одна счетная модель в каждом классе эквивалентности будет арифметически разрешима [**5**]. Новые результаты получены о разрешимости предельных моделей. Из конечного набора типов $\{q_0(\bar{y}), \ldots, q_n(\bar{y})\}$, для каждого типа $q_i(\bar{y})$ добавим в сигнатуру s-местный предикат $P_i(\bar{y})$, так что $\sigma^* = \sigma \cup \{P_1, \ldots, P_r\}$. Если $\mathcal{A}$ - структура сигнатуры σ, $\mathcal{A} \models P_i(\bar{y}) \iff \mathcal{A} \models q_i(\bar{y})$. $P_i(\bar{y})$ эквивалентен $\wedge_{\Phi \in q_i(\bar{y})} \Phi(\bar{y})$. Φ^* — предложение сигнатуры σ^*.

Теорема. *Пусть $p(\bar{x}) \in S(T)$ - полный тип в теории T и существует арифметически разрешимая п.п. модель $\mathcal{M}_{p(\bar{x})}$. Предположим, что $\Phi^* = \forall \bar{y} \exists \bar{z} \Psi^*(\bar{y}, \bar{z})$ - предложения сигнатуры σ^*, где $\Psi^*(\bar{y}, \bar{z})$ бескванторная формула. Если у теории T есть предельная модель $\mathcal{A}$ над типом $p(\bar{x})$ т.ч. $\mathcal{A} \models \Phi^*$, то есть и арифметически разрешимая модель $\mathcal{B}$ с тем же свойством: она предельна над $p(\bar{x})$ и $\mathcal{B} \models \Phi^*$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00170.

Литература

[1] Morley M., Decidable models. *Israel Journal of Mathematics*, **25** (1976), 233–240.

[2] Ash C. J., and Millar T. S., Persistently finite, persistently arithmetic theories. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **89**: 3 (1983), 487–492.

[3] Судоплатов С. В., Полные теории с конечным числом счетных моделей. I. *Алгебра и логика*, **43**: 1 (2004), 110–124.

[4] Khlestova E., Arithmetical Decidability of Homogeneous and Almost Prime Countable Models of Ehrenfeucht Theories with Arithmetical Types. *Journal of Mathematical Sciences*, **267**: 4 (2022), 483–486.

[5] Хлестова Е., Арифметическая разрешимость моделей эрефойхтовых теорий с разрешимыми типами: тез. докл. МНСК (Новосибирск, 12 апр. 2022 г.).

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: e.khlestova@g.nsu.ru

On $\mathbf{\Delta^0_2}$ Polish spaces

N. Bazhenov, A. Melnikov, K. M. Ng

We consider some classical notions of effective presentability for Polish spaces (up to homeomorphism).

A *Polish presentation* of a Polish space M is given by a countable metric space $X = ((\alpha_i)_{i\in\omega}, d)$ such that the completion of X is *homeomorphic* to M. A presentation X is called:

- *computable* if there exists a computable function $f\colon \omega^3 \to \mathbb{Q}$ such that for all $i, j, n \in \omega$,
$$|d(\alpha_i, \alpha_j) - f(i, j, n)| < 2^{-n};$$
- Δ^0_2 if the function f above can be chosen $\mathbf{0}'$-computable;
- *right-c.e.* if the sets $\{r \in \mathbb{Q} : d(\alpha_i, \alpha_j) < r\}$ are c.e., uniformly in i, j.

Notice that every right-c.e. presentation is Δ^0_2.

A *computable topological presentation* of a topological space M is given by a sequence $(B_i)_{i\in\omega}$ of non-empty basic open sets of M and a c.e. set W such that
$$B_i \cap B_j = \bigcup\{B_k : \langle i, j, k\rangle \in W\}, \text{ for all } i, j \in \omega.$$

It is known that every right-c.e. Polish space admits a computable topological presentation (see, e.g., [**1**]). The paper [**2**] proves that every computable topological, locally compact Polish group G has a right-c.e. Polish presentation (note that here one assumes that the group operations of G must be effective). On the other hand, the paper [**3**] shows that there is a Polish space S such that S admits a computable topological presentation, but S is not homeomorphic to a hyperarithmetical Polish space.

We obtain the following result:

Theorem. *If a Polish space M has a Δ^0_2 presentation, then M admits a computable topological presentation.*

References

[1] Bazhenov N., Harrison-Trainor M., and Melnikov A., Computable Stone spaces. *Annals of Pure and Applied Logic*, **174**: 9 (2023), article id 103304.

[2] Koh H. T., Melnikov A. G., and Ng K. M., Computable topological groups. *Journal of Symbolic Logic*, published online, doi: 10.1017/jsl.2023.67.

[3] Melnikov A. G. and Ng K. M., Separating notions in effective topology. *International Journal of Algebra and Computation*, published online, doi: 10.1142/S0218196723500649.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Victoria University of Wellington, Wellington (New Zealand)
E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com
Nanyang Technological University, Singapore (Republic of Singapore)
E-mail: kmng@ntu.edu.sg

Undecidability of the theory of the primitive recursive many-one degrees of recursive sets

A. M. Iskakov, N. A. Bazhenov, B. S. Kalmurzayev

It is well known that computable sets form an upper semilattice under many-one reducibility. A natural question is whether the theory of the given structure is decidable or not. Downey and Nies [**1**] showed that first-order theory of polynomial many-one degrees of recursive sets is hereditarily undecidable.

The talk is dedicated to the primitive recursive many-one (pr-m) reducibility on computable sets. A set A is *pr-m reducible* to the set B if there is a primitive recursive function f, such that $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Following the outline of [**1**] we were able to show that:

Theorem. *The first-order theory of the primitive recursive many-one degrees of recursive sets is undecidable.*

As a consequence of this fact we also get that elementary theories of computably enumerable linear preorders and computably enumerable preorders are also undecidable.

References

[1] Downey R. and Nies A., Undecidability results for low complexity time classes.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan), Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: bheadr73@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

On diagonal functions for equivalence relations

B. S. Kalmurzayev, S. A. Badaev, N. A. Bazhenov, M. Manat

Let E be an equivalence relation on the set of natural numbers ω, having at least two classes. A total function f is a diagonal function for E if for every x, the numbers x and $f(x)$ are not E-equivalent. It is known that in the case of c.e. relations E, the weakly precompleteness of E is equivalent to the lack of computable diagonal functions for E. We prove that this result fails already for Δ^0_2 equivalence relations, starting with the Π^{-1}_2 level.

In the talk we will also focus on the Turing degrees of possible diagonal functions. For a complexity class Γ, by $\mathbf{DiagER}(\Gamma)$ we denote the following set of Turing degrees. The set $\mathbf{DiagER}(\Gamma)$ contains all Turing degrees $\mathbf{d}$ such that every equivalence relation $E \in \Gamma$ with at least two classes has a $\mathbf{d}$-computable diagonal function. We prove that

$$\mathbf{DiagER}(\Delta^0_2) = \mathbf{DiagER}(\Pi^{-1}_2) = \{\mathbf{d} : \mathbf{d} \geq \mathbf{0}'\}.$$

A total function $f : \omega \to \omega$ is diagonally noncomputable (or DNC, for short) if f satisfies the following:

$$\forall e[f(e) \neq \varphi_e(e)].$$

A Turing degree $\mathbf{d}$ is *DNC* if there exists a *DNC* function f such that $f \leq_T \mathbf{d}$. A Turing degree d is a *PA* degree if there exists a set $X \leq_T \mathbf{d}$ such that

$$\{e : \varphi_e(e) \downarrow = 1\} \subseteq X, \text{ and } \{e : \varphi_e(e) \downarrow = 0\} \subseteq \overline{X}.$$

By **PA** we denote the class of all *PA* degrees. **DNC** denotes the class of *DNC* degrees.

Theorem. $\mathbf{PA} \subseteq \mathbf{DiagER}(\Sigma^0_1) \subseteq \mathbf{DNC}$.

Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: s.badaev@kbtu.kz
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Nazarbayev University, Astana (Kazakhstan)
E-mail: manat.mustafa@nu.edu.kz

Systems of Diophantine equations over finite configurations

N. T. Kogabaev

In studying model-theoretic and algorithmic problems in various classes of projective planes, it is often necessary to solve systems of equations over their finite fragments, i.e., over finite configurations in projective planes.

On the other hand, studying the systems of equations over arbitrary algebraic systems has recently evolved into an independent area of algebraic geometry [**1**]. Algorithmically stated problems arise naturally in this area, including those for systems of equations over predicate structures. In [**2**], complexity is computed of the algorithms for verifying consistency, calculating the radical, and finding general solutions to systems of Diophantine equations in various classes of finite graphs. Also, there are distinguished polynomially solvable cases.

Recall that a *configuration* is an algebraic system $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ with a partition of the universe A into two subsets $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$, and a symmetric binary relation $I \subseteq A^2$ satisfying the following conditions:

(1) If $\langle a, b \rangle \in I$, then $a \in A^0$ and $b \in {}^0A$, or $a \in {}^0A$ and $b \in A^0$;

(2) If $\langle a, c \rangle \in I$, $\langle b, c \rangle \in I$, $\langle a, d \rangle \in I$, $\langle b, d \rangle \in I$, then $a = b$ or $c = d$.

We consider first-order formulas in the signature $\sigma_A = \langle A^0, {}^0A, I, c_a \rangle_{a \in A}$ assuming that the constant symbol c_a, $a \in A$, is always interpreted in the configuration $\mathfrak{A}$ as the element a.

Let X be a finite set of variables. Following [**1**], we refer to an arbitrary atomic formula of signature σ_A over the variables in X as a *Diophantine equation of signature σ_A over X*.

In the present paper, we investigate finite systems of Diophantine equations over finite configurations. Basing on the methods of [**2**], we construct an efficient procedure for verifying the consistency of an arbitrary such system over an arbitrary finite configuration. The output of the procedure enables us to find the solution set of the system of equations. The running time of the procedure for a system of equations in k variables over a configuration of n elements is $O(n^k(k+n)^4)$. We distinguish the class of systems for which the procedure solves the consistency problem in the polynomial time $O((k+n)^4)$.

This work was carried out within the framework of the state contract for Sobolev Institute of Mathematics (project FWNF-2022-0011).

References

[1] Daniyarova E. Yu., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N., Algebraic geometry over algebraic structures. SB RAS, Novosibirsk, 2016.

[2] Il'ev A. V., Il'ev V. P., Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs. *Prikl. Diskr. Mat.*, **53** (2021), 89–102.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

Index sets for order positive fields

M. V. Korovina, O. V. Kudinov

The computability notion based on numberings is well established [**4, 2**] with a number of prominent results. Nevertheless applied to ordered fields it fails to capture some natural properties and there are many natural structures which are not computable in this sense. In [**1**] we did show that there are no computable copies neither for the field of primitive recursive real numbers nor for smaller fields of $\mathcal{E}^n$-computable real numbers, where $\mathcal{E}^n$ is a level in Grzegorczyk hierarchy, $n \geq 3$. Another prominent example is given in [**3**] where a computable real closed field is built, all maximal archimedean subfields of which have no computable presentations. From our point of view, in the case when the language of a structure contains the order and the structure has a negative numbering [**5**] it makes sense to add the following requirements: computable enumerability of strict ordering and partial computability of the inverse function. Thus, we propose to consider order positive fields which satisfy these requirements. We show that order positive fields have interesting properties in particular, order positive real closed fields are closed under taking the archimedean part. We present a general criterion when an archimedean field is order positive. Using this criterion we prove that the field generated by primitive recursive functions and the fields of $\mathcal{E}^n$-computable real numbers are order positive and also study complexity of index sets of subclasses of archimedean order positive fields such as real closed, algebraic, computable fields.

References

[1] Korovina M., Kudinov O., On computability of ordered fields. *Siberian mathematical reports*, accepted, 2023.

[2] Malcev A. I., Constructive algebras. *Uspechi mat. nauk*, **16**: 3 (1961), 3–60 (in Russian, English translation in: The Metamathematics of Algebraic Systems, North Holland, Amsterdam, 1971, 148–214).

[3] Miller R., Gonzales V. O., Degree spectra of real closed fields. *Archive for Mathematical Logic*, **58** (2019), 387–411.

[4] Rabin M. O., Computable algebra, general theory and theory of computable fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95**: 2 (1960), 341–360.

[5] Stoltenberg-Hansen V. and Tucker J.V., Computable rings and fields. In: E Griffor (ed.), Handbook of Computability Theory, Elsevier, 1999, 363–447.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk (Russia)
E-mail: rita.korovina@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: kud@math.nsc.ru

On the complexity of infinitary action logic with multiplexing

S. L. Kuznetsov, S. O. Speranski

Let ACT_ω denote infinitary action logic. It corresponds to so-called $*$-*continuous action lattices* — or $*$-*continuous residuated Kleene lattices* — and can be given by a suitable infinitary sequent calculus; see [**1, 6, 2**] for more information. As has been shown in [**1, 6**], the derivability problem for this logic is Π^0_1-complete — hence there exists no finitary calculus for ACT_ω.

Next, ACT_ω can naturally be expanded by adding so-called *subexponentials*; see [**4**]. In particular, we have proved that if at least one of these subexponentials allows non-local contraction, then: a) the derivability problem becomes Π^1_1-complete; b) the closure ordinal of the corresponding derivability operator turns out to be ω_1^{CK}.

Instead of contraction, one may add the so-called *multiplexing* operator to ACT_ω (cf. [**3**]). This operator is somewhat similar to contraction, but it behaves in a more controlled way. Like in [**3**], it is convenient to also add a permutation operator. We prove that the complexity of the derivability problem for the resulting calculus lies between complete first-order arithmetic and the ω^ω level of the hyperarithmetical hierarchy. Here the upper bound proof is based on the fact that the closure ordinal of the corresponding derivability operator is at most ω^ω.

This talk is based on [**5**].

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 20-41-05002, https://rscf.ru/en/project/20-41-05002/.

References

[1] Buszkowski W., On action logic: equational theories of action algebras. *Journal of Logic and Computation*, **17**: 1 (2007), 199–217.

[2] Buszkowski W., Palka E., Infinitary action logic: complexity, models and grammars. *Studia Logica*, **89**: 1 (2008), 1–18.

[3] Kanovich M., Kuznetsov S., Nigam V., Scedrov A., Soft subexponentials and multiplexing. In N. Peltier, V. Sofronie-Stokkermans (eds.), *International Joint Conference on Automated Reasoning 2020 (IJCAR 2020)*, LNAI 12166, 500–517. Springer, 2020.

[4] Kuznetsov S. L., Speranski S. O., Infinitary action logic with exponentiation. *Annals of Pure and Applied Logic*, **173**: 2, 103057.

[5] Kuznetsov S. L., Speranski S. O., Infinitary action logic with multiplexing. *Studia Logica*, **111**: 2 (2023), 251–280.

[6] Palka E., An infinitary sequent system for the equational theory of $*$-continuous action lattices. *Fundamenta Informaticae*, **78** (2007), 295–309.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow (Russia)
E-mail: sk@mi-ras.ru
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow (Russia)
E-mail: katze.tail@gmail.com

The lower bound of the computational complexity of decidable theories

I. V. Latkin

Let $\mathcal{T}$ be a theory whose signature contains a symbol of an equivalence relation σ; in particular, σ may be an equality relation. We will name this theory *σ-nontrivial* if $\mathcal{T}$ is consistent with the formula $\exists x, y(\neg\sigma(x, y))$. If it does not matter which equivalence relation is meant, we will apply the term "*equivalency-nontrivial* theory."Nearly all decidable theories mentioned in the surveys [**1, 3**] are nontrivial regarding equality or equivalence, i.e., they are equational-nontrivial or equivalency-nontrivial.

Theorem [2]. *The recognition complexity of each equivalency-nontrivial decidable theory $\mathcal{T}$, in particular, equational-nontrivial, has the non-polynomial lower bound; more precisely, there is a constant D such that $\mathcal{T} \notin DTIME[\exp(D \cdot n^{\delta})]$, where $\delta = (2+\varepsilon)^{-1}$ for every preassigned $\varepsilon > 0$.*

We recall that the expression $\mathcal{T} \notin DTIME[\exp(D \cdot n^{\delta})]$ means as follows. For each Turing machine P, which recognizes the theory $\mathcal{T}$, there exist infinitely many input strings X, on which P run at least $\exp(D \cdot n^{\delta})$ steps provided that the length of X is n. It is supposed in [**2**] that recognizing machines have one tape, while the length n of the "labor-intensive"input strings, which the machine operates for a long time, and ε are related by the inequality $n^{\varepsilon} > \log^2 n$.

The above theorem can be strengthened; namely, it is valid for the Turing machines having two tapes. However, the constant D increases by less than one and a half times, and the ε parameter even decreases in this case — now, it and the lengths of the "labor-intensive"inputs satisfy the inequality $n^{\varepsilon} > \log n$.

Certainly, even this refined assessment of the recognition complexity is very far from the real one for many decidable theories; numerous examples confirming this are contained in [**3**], and the theory described in [**4**] generally has fantastic complexity. Nevertheless, the above estimate is close to exact for theories of one equivalence relation, pure equality, and true quantified Boolean formulae. Apparently, it is also almost exact for the theory of any finite algebra having at least two elements.

References

[1] Ershov Y. L., Lavrov I. A., Taimanov A. D., and Taitslin M. A., Elementary theories. *Russian Math. Surveys*, **20** (1965), 35–100 (English translation).

[2] Latkin I. V., The recognition complexity of decidable theories. *Eurasian Math. J.*, **13**: 1 (2022), 44–68.

[3] Rabin M. O., Decidable theories. in: Handbook of mathematical logic, Part C., Ch III, Ed. J. Barwise, Elsevier, Amsterdam, New York, Eighth impression: 1999, 596–629.

[4] Vorobyov S., The most nonelementary theory. *Information and Computation*, **190**: 2 (2004), 196–219.

East-Kazakhstan Technical University, Ust'-Kamenogorsk (Kazakhstan)
E-mail: lativa@yandex.kz

Invertible mixed-dimensional interpretations versus the notion of a model-theoretic property

M. G. Peretyat'kin

By $\approx_a$, we denote an algebraic isomorphism of theories, $T\langle\varkappa\rangle$ is the Cartesian extension of theory T via a tuple of formulas $\varkappa = \langle\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_s^{m_s}\rangle$, moreover, a record $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$ indicates that these formulas are $\exists \cap \forall$-presentable in T, $\mathcal{ACL}$ is the layer of model-theoretic properties preserved by all algebraic Cartesian interpretations, $\equiv_{\mathcal{ACL}}$ is the relation of semantic similarity under ACL, [2]. Furthermore, $T \simeq_a S$ means that there is a sequence of complete theories $T = H_0, H_1, ..., H_k = S$ such that, for all $i < k$, either $H_i \approx_a H_{i+1}$, or $H_i = H_{i+1}\langle\varkappa_i\rangle$, or $H_{i+1} = H_i\langle\varkappa_i\rangle$, with some $\varkappa_i \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$.

An interpretation I of a theory T in a theory S is said to be *mixed-dimensional* if its domain is formed by tuples of mixed finite dimensions in S in order to present elements and relations of the input theory T. Mixed-dimensional interpretations implement maximum general method of representing one theory in another using first-order logic with a one-sorted universe. Therefore, the fact of existence of an invertible mixed-dimensional interpretation between two complete theories can be considered as the most common equivalence relation between theories based on the coincidence of their semantic content.

Theorem 1. *Let T and S be arbitrary complete theories of enumerable signatures. The following assertions are equivalent with each other*

(a) $T \simeq_a S$,

(b) $T \approxeq_a S$, i.e., $(\exists \varkappa_1 \varkappa_2 \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall})\,\big[\,T\langle\varkappa_1\rangle \approx_a S\langle\varkappa_2\rangle\,\big]$,

(c) $T \equiv_{\mathcal{ACL}} S$,

(d) *there is a pair of algebraic mixed-dimensional interpretations $I : T \rightarrowtail S$ and $J : S \rightarrowtail T$, which are mutually inverse to each other.*

Theorem 1 adds new details to the formal definition of the semantic layer *AreaL* of all real model-theoretic properties [1]. From the relation *AreaL* = *ACL*, [1,(11)], it follows that the semantic similarity of theories $T \equiv_{ACL} S$ is equivalent to the coincidence of their real model-theoretic properties. Thus, each of parts (a)-(d) in Theorem 1 is equivalent to the condition $T \equiv_{AreaL} S$. In particular, $T \equiv_{AreaL} S$ is equivalent to the existence of a virtual algebraic isomorphism between the theories, [2], as well as to the existence of an invertible mixed-dimensional interpretation between these theories. Obtained results provide an additional confirmation of the fundamental significance of the layer *AreaL*, [1], of all real model-theoretic properties.

References

[1] Peretyat'kin M. G., First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications. Algebra and Model Theory 11, Conference: Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory, Novosibirsk–Erlagol, 2017, 86–101.

[2] Peretyat'kin M. G., Virtual algebraic isomorphisms between predicate calculi of finite rich signatures. *Algebra Logic*, **60**: 6 (2022), 389–406.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: peretyatkin@math.kz

Rogers semilattices of Grzegorczyk hierarchy

A. V. Slobozhanin

Let $\mathcal{S}$ be a countable set. A surjective map from the natural numbers ω to $\mathcal{S}$ are called a numbering of $\mathcal{S}$. Two numberings can be compared using notion of reducibility: a numbering ν reduce to a numbering μ if there is total function $f(x)$ such that $\nu(x) = \mu(f(x))$).

Consider a countable family $\mathcal{S} \subset P(\omega)$ with computable numbering, and reducibility are done via computable functions. Set of all computable numberings with this reducibility relation forms a Rogers semilattice. Properties of this semilattices are well presented in classical studies such as [**1**]. In a similar way semilattice can be defined for subclasess of computable numberings with the corresponding reducibility (subclass of computable numbering may be, for example, polynomial numberings).

In the talk, I will present results about structural properties of Roggers semilattice for classes like **P**, **NP**, **PSPACE** and Grzegorczyk hierarchy. We will discuss the similarity between these cases. Absence of minimal element, existence of infinite antichain will be shown in this classes.

References

[1] Ershov Yu. L., Theory of numberings. Nauka, Moscow, 1994.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.slobozhanin@g.nsu.ru

Non-uniformity and downwards density in the Turing degrees

M. M. Yamaleev

In 1993, R. Downey and M. Stob [**1**] showed that the downwards density of computably enumerable (c.e.) Turing degrees in the partial order of 2-c.e. Turing degrees cannot be proved by a uniform construction. A construction is *uniform* if by given index of a c.e. set W_e we effectively find index of the desired c.e. set $W_{f(e)}$ (also the notion can be applied to several indices), where f is a computable function. In our work we generalize and extend the result of R. Downey and M. Stob. First, exploiting the ideas from [**1**] we obtain (in a joint work with A.I. Talipova) the following result, for $n \geq 2$.

Theorem 1. *There is no a uniform procedure for searching for index of a noncomputable* $(n-1)$ *-c.e. set* V *by given index of a noncomputable* n*-c.e. set* A *such that* $V \leq_T A$.

With an additional modification of the proof of Theorem 1 we obtain the extension as follows, for $n \geq 2$.

Theorem 2. *There is no a uniform procedure for searching for index of a noncomputable* n*-c.e. set* V *by given index of a noncomputable* n*-c.e. sets* A *such that* $V <_T A$.

As a corollary from Theorem 2 we obtain the result of B.Cooper and A.Li [**2**], which states that the there is no a uniform construction for splitting of a noncomputable 2-c.e. Turing degree.

In our talk we will discuss these and other non-uniformity issues of different constructions in the degree theory.

The work is supported by the Russian Science Foundation and the Cabinet of Ministers of the Republic of Tatarstan (project No. 22-21-20024) and performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (project No. 075-02-2023-944).

References

[1] Downey R., Stob M., Splitting theorems in recursion theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, **65** (1993), 1–106.

[2] Cooper B., Li A., Non-Uniformity and Generalised Sacks Splitting. *Acta Mathematica Sinica, English*, **18**: 2 (2002), 327–334.

Kazan Federal University, Kazan (Russia)
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

V. Секция «Теория групп и ее приложения»

Единицы целочисленных групповых колец циклических p-групп

Р. Ж. Алеев

В работе [**1**] были изучены единицы целочисленных групповых колец циклических групп простых порядков. Следующим шагом является изучение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков p^{n+1}, где p — простое число и $n \geq 1$.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений.

(1) p — простое число.
(2) $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка p^{n+1} и $P = \langle x^p \rangle$ — её подгруппа порядка p^n.
(3) α — примитивный корень из 1 степени p^{n+1}.
(4) Для любых $j, k \in \{0, 1, \dots, p^{n+1} - 1\}$ характер $\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}$.
(5) $e(\chi)$ — минимальный идемпотент, определяемый характером χ группы G.

Согласно [**2**] для характера χ и элемента $\mu \in \mathbf{Q}(\chi)$ определим элемент рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$

$$u_\chi(\mu) = 1 + \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\chi))} (\varphi(\mu) - 1)\, e(\varphi(\chi)),$$

где $e(\varphi(\chi))$ — минимальный идемпотент, соответствующий характеру $\varphi(\chi)$.

Пусть g — примитивный (первообразный) корень по модулю p^{n+1} для нечётного p, и $g = 3$ для $p = 2$. Обозначим

$$\lambda = \frac{1 - \alpha^g}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{g-1} \text{ и } r = (p-1)p^{2n+1}.$$

Теорема. *Для* $m \in \{1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)p^n - 2\}$ *обозначим через* φ_m *такой автоморфизм поля* $\mathbf{Q}(\chi_1)$, *что* $\varphi_m(\alpha) = \alpha^{g^m}$. *Пусть* $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}P)$ *— группа единиц целочисленного группового кольца подгруппы* P. *Тогда*

$$\langle x \rangle \mathrm{Un}(\mathbf{Z}P) \times \prod_{k=0}^{\frac{1}{2}(p-1)p^n - 2} \langle u_{\chi_1}(\varphi_{g^k}(\lambda^r)) \rangle$$

является подгруппой конечного индекса в $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$.

Литература

[1] Алеев Р. Ж., Круговые единицы в групповых кольцах конечных абелевых групп. *Алгебра и логика: Материалы международного российско-китайского семинара.* Иркутск: Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 11–14.

[2] Алеев Р. Ж., Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. *Матем. труды*, **3**: 1(2000), 3–37.

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинский государственный университет, Челябинск (Россия)
E-mail: aleevrifhat@gmail.com

Минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, конечных простых неабелевых групп

М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин

Для конечной группы G, порожденной инволюциями, обозначим через $n(G)$ минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1. Вопрос о нахождении числа $n(G)$ для каждой конечной простой неабелевой группы G записан Я. Н. Нужиным в Коуровской тетради [**1**, вопрос 14.69а)], и он является ослаблением вопроса Г. Малле, Дж. Саксла и Т. Вайгеля [**2**], в котором дополнительно требуется сопряженность порождающих инволюций. Далее мы считаем, что список всех конечных простых групп известен (см. [**3**]).

Если G — конечная простая неабелева группа, то $n(G) \geq 5$ [**4**, стр. 13], [**5**, лемма 4], а если она еще и порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, то $n(G) = 5$ [**5**, лемма 5]. Все конечные простые неабелевы группы, которые не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны, известны, и они с точностью до изоморфизма исчерпываются следующими:

- знакопеременные группы A_6, A_7, A_8;
- спорадические группы $M_{11}, M_{22}, M_{23}, McL$;
- классические группы $PSL_3(q)$, $PSU_3(q^2)$, $PSL_4(2^m)$, $PSU_4(2^{2m})$, $PSU_4(3^2)$, $PSU_5(2^2)$.

К настоящему времени число $n(G)$ не было известно только в случаях, когда G есть $PSL_4(2^m)$ или $PSU_4(2^{2m})$ [**6**].

Основным результатом является

Теорема 1. $n(PSL_4(2^m)) = n(PSU_4(2^{2m})) = 6.$

Литература

[1] The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory, Eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2022, № 20.

[2] *Malle G., Saxl J., Weigel T.*, Generation of classical groups, Geom. Dedicata, **49** (1994), 85–116.

[3] *Горенстейн Д.*, Конечные простые группы. Введение в их классификацию, Москва, Мир, 1985.

[4] *Ward J. M.*, Generation of simple groups by conjugate involutions, Queen Mary college, University of London, Thesis of Doctor of Philosophy, 2009.

[5] *Нужин Я. Н.*, О порождающих множествах инволюций простых конечных групп, Алгебра и логика, **58**, 3 (2019), 426–434.

[6] *Gvozdev R. I., Nuzhin Ya. N.*, The minimum number of generating involutions whose product is 1 for the groups $PSL_3(2^n)$ and $PSU_3(q^2)$, International Conference on Group Theory in honor of Victor Mazurov on the occasion of his 80th birthday, July 2–8, 2023, Collection of Abstracts, Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2023.

[7] *Scott L. L.*, Matricies and cohomology, Ann. of Math., **5** (1977), 473–492.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru

Разрешимые периодические группы конечного нормального ранга

О. Ю. Дашкова, О. А. Шпырко

Л.А.Курдаченко ввел определение нормального ранга группы [**1**].

Определение. Говорят, что группа G имеет конечный нормальный ранг r, если r – наименьшее число с тем свойством, что для любого конечного множества элементов $g_1, g_2, \cdots, g_n$ группы G найдутся элементы $h_1, h_2, \cdots, h_m$ из G такие, что $m \leq r$ и

$$\langle g_1, g_2, \cdots, g_n\rangle^G = \langle h_1, h_2, \cdots, h_m\rangle^G.$$

В случае, когда такого числа r не существует, нормальный ранг группы G считается бесконечным.

В работах [**1**], [**2**], [**3**] начато исследование периодических двуступенно разрешимых групп конечного нормального ранга. Было получено доказательство конечности нормального ранга периодической двуступенно разрешимой группы при некоторых ограничениях.

В настоящей работе изучаются периодические разрешимые группы произвольной ступени разрешимости. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \cdots \times G_{p_i} \times \cdots$, p_i – некоторые простые числа, и для любого $i = 1, 2, \cdots$ подгруппа G_{p_i} разрешима ступени разрешимости $m_i, m_i \leq m$, и обладает нормальным рядом $E = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_{m_i-1} \leq G_{p_i}$, таким, что каждый фактор $A_j/A_{j-1}, j = 1, \cdots, m_i-1$, является периодической абелевой p_i-группой периода $p_i^{t_i}, t_i \leq t$, и фактор-группа G_{p_i}/A_{m_i-1} изоморфна прямому произведению l_i подгрупп, каждая из которых либо квазициклическая p_i-группа, либо циклическая группа порядка $p_i^{k_i}$, $l_i \leq l$. Если каждый фактор $A_j/A_{j-1}, j = 1, \cdots, m_i - 1$, может быть порожден как G-группа n_i элементами, т.е. $A_j/A_{j-1} = \langle a_1A_{j-1}, a_2A_{j-1}, \cdots, a_{n_i}A_{j-1}\rangle^G$, $n_i \leq n$, то нормальный ранг группы G конечен и не превосходит числа $ntm + l$.*

Литература

[1] Dashkova O. Yu., On groups of finite normal rank. *Algebra Discrete Math.*, **1**: 1 (2002), 64–68.

[2] Дашкова О. Ю., О некоторых разрешимых группах конечного нормального ранга. *Тезисы докладов Международной конференции "Алгебра и динамические системы Нальчик*, (2022), 44.

[3] Дашкова О. Ю., Двуступенно разрешимые периодические группы конечного нормального ранга. *Международная конференция "Мальцевские чтения". Тезисы докладов, Новосибирск*, (2022), 97.

Филиал Московского гоусадрственного университета им. М.В. Ломоносова в городе Севастополе, Севастополь (Россия)
E-mail: odashkova@yandex.ru

О вложениях частично коммутативных нильпотентных групп

А. Л. Евтягин, В. А. Романьков

Исследуется возможность изоморфного вложения одной группы в другую в классе конечно порожденных частично коммутативных нильпотентных групп данной ступени.

Приведем определения. Пусть $\Gamma = \langle X; E\rangle$ обозначает ненаправленный граф без кратных ребер и петель с множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством ребер $E \subseteq X \times X$. *Частично коммутативная группа многообразия* $\mathfrak{W}$ относительно графа Γ определяется заданием через порождающие элементы и определяющие соотношения в многообразии $\mathfrak{W}$, как

$$F(\Gamma; \mathfrak{W}) = \langle X : xy = yx, \{x, y\} \in E; \mathfrak{W}\rangle.$$

Наибольшее внимание уделяется многообразиям $\mathfrak{N}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) всех нильпотентных групп ступени не больше чем k и многообразию всех метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$. Также привлекают внимание многообразия $\mathfrak{A}^l$ ($l \in \mathbb{N}$) всех разрешимых групп ступени не больше чем l и многообразия $\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{A}^l$, в частности, многообразия нильпотентных метабелевых групп $\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{A}^2$.

Теорема 1 [1]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – одно из многообразий вида $\mathfrak{N}_k$ или $\mathfrak{N}_k \cap \mathfrak{A}^2$. Пусть $F = F(\Gamma; \mathfrak{M})$ – частично коммутативная группа для $\mathfrak{M}$. Тогда существует алгоритм, определяющий возможность вложения любой свободной группы G многообразия $\mathfrak{M}$ в группу F.*

Теорема 2. Существует алгоритм, определяющий возможность вложения одной группы в другую в классе конечно порожденных частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2.

Теорема 3. Существует алгоритм, определяющий возможность вложения конечно порожденной частично коммутативной нильпотентной группы $F(\Gamma; \mathfrak{N}_k)$ произвольной ступени k относительно графа Γ ненулевого радиуса в свободную нильпотентную группу $N_{r,k}$ ранга r ступени k.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Литература

[1] Романьков В. А., Вложение свободных нильпотентных (метабелевых) групп в частично коммутативные нильпотентные (метабелевы) группы. Математические заметки. Том 114, №5 (2023).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Омск (Россия)
E-mail: a.l.evtyagin@gmail.com, romankov48@mail.ru

Об отображениях решеток классов Фиттинга

Е. Н. Залесская, У. А. Попова

В настоящей работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям: (1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; (2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$ всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Решение многих задач описания строения классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта «*» и «$_*$» [**1**].

Напомним, что секцией Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначаемой $Locksec(\mathfrak{F})$ [**1**], называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$, где класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Следуя [**2**], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \tag{1}$$

из $Locksec(\mathfrak{H})$ в $Locksec(\mathfrak{F})$. В работе [**1**] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (1) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. В дальнейшем эта проблема стала известна как «гипотеза Локетта» [**1**].

Первоначально гипотеза Локетта была подтверждена Брайсом и Косси [**3**] для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. Также гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств классов Фиттинга: разрешимых локальных вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [**4**]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев [**5**]), произвольных локальных (Галледжи [**6**]).

Напомним, что если $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией.

Пусть $LR_\omega(f) = \{G | G^\omega \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^\omega = G^{\mathfrak{E}_\omega}, F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_\omega$ – класс всех ω-групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω-локальным [**7**], если существует некоторая ω-локальная H-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{H}$ – насыщенная радикальная формация, $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, тогда отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $Locksec(\mathfrak{X}_*\mathfrak{H})$ сюръективно.*

Литература

[1] Lockett P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd. 137, N 2. S. 131–136.

[2] Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups // Walter de Gruyter. 1992. New York, Berlin. 891 p.

[3] Bryce R.A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. 1975. V. 141. N 2. P. 99–100.

[4] Beidleman J.C., Hauck P. Uber Fittingklassen und die Lockett-Vermutung // Math. Z. 1979. V. 167. N 2. P. 161–167.

[5] Воробьев Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. Т. 43, № 2. 1988. С. 161–168.

[6] Gallego M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra. 1996. V. 24, N 6. P. 2011–2023.

[7] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)
E-mail: zalesskayaen@yandex.by, ulyana.popova.01.01@mail.ru

О классе Леви квазимногообразия правоупорядочиваемых групп

А. В. Зенков

Напомним, что группа G называется *правоупорядочиваемой*, если на ней можно ввести отношение линейного порядка $\geq$, устойчивое относительно умножения справа, т.е.

для любых $x, y, z \in G$ *неравенство* $x \geq y$ *влечет* $xz \geq yz$.

Непосредственно из определения правоупорядочиваемой группы вытекает, что она не имеет кручения.

Хорошо известно, что класс $\mathcal{D}_r$ всех правоупорядочиваемых групп есть квазимногообразие ([**1**], с. 181).

Пусть G — произвольная группа и $x \in G$. Через $G_x = (x^G)$ обозначим нормальное замыкание элемента x в группе G. Для произвольного класса групп $\mathcal{K}$ определим его *класс Леви* $L(\mathcal{K})$ следующим образом: *группа* $G \in L(\mathcal{K})$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $x \in G$ *выполнено* $G_x \in \mathcal{K}$.

Непосредственно из определения класса Леви следует включение $\mathcal{K} \subseteq L(\mathcal{K})$, если только класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп. Стало быть, имеет место $\mathcal{D}_r \subseteq L(\mathcal{D}_r)$.

Мы покажем, что здесь имеет место строгое включение. Именно, существует не правоупорядочиваемая группа без кручения, нормальное замыкание каждого элемента которой правоупорядочиваемо. Указанная группа имеет следующее представление

$$G = \langle x, y \mid [x^2, y] = x^{-4}, [y^2, x] = y^{-4} \rangle.$$

Эта группа упомянута в книге [**2**].

Литература

[1] Копытов В. М., Медведев Н. Я., Правоупорядоченные группы (Сиб. школа алгебры и логики),Новосибирск, Науч. книга, 1996.

[2] Botto Mura R., Rhemtulla A. H., Orderable groups (Lecture notes in Pure and Applied mathematics; 27), Marcel Dekker, New-York and Basel, 1977.

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Существование спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах с условием на граф Грюнберга–Кегеля (граф простых чисел)

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

Мы рассматриваем следующую задачу: может ли конечная группа с графом Грюнберга–Кегеля как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе.

Мы продолжаем исследование, начатое в **[1]**, и получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть G – конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является знакопеременной или конечной простой группой лиева типа; S – спорадический композиционный фактор группы G; $\pi(G) = \pi(S)$. Тогда выполнен один из следующих случаев:*

1) $(H, S) \in \{(A_9, J_2), (A_{10}, J_2), (A_{11}, M_{22}), (A_{11}, McL), (A_{12}, M_{22}), (A_{12}, McL), (A_{13}, Suz), (A_{14}, Suz), (A_{15}, Suz), (A_{15}, Fi_{22}), (A_{16}, Suz), (A_{16}, Fi_{22})\}$;

2) $(H, S) \in \{(L_2(11), M_{11}), (U_5(2), M_{11}), (U_5(2), M_{12}), (U_6(2), M_{22}), (U_6(2), HS), (S_8(2), He), (O_8^+(2), J_2), (C_3(2), J_2)\}$

Литература

[1] Зиновьева М. Р. Несуществование спорадического композиционного фактора, изоморфного группам F_1 и F_2, в конечных группах с графом Грюнберга—Кегеля как у конечной неабелевой группы исключительного лиева типа. XIII школа-конференция по теории групп. http://group.imm.uran.ru/conf-group/group/Сборник тезисов XIII школы-конференции по теории групп.pdf P.41

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

О p-длине конечной факторизуемой группы с заданными условиями перестановочности подгрупп из сомножителей

Е. В. Зубей

В последние десятилетия большой популярностью пользуется направление исследований, связанное с изучением строения групп $G = AB$, у которых некоторые системы подгрупп из сомножителей A и B перестановочны, см. [**1**]. Среди множества результатов этой тематики отдельное место занимают работы, которые посвящены нахождению зависимости между числовыми инвариантами факторизуемых групп и числовыми инвариантами их сомножителей, связанных между собой заданными условиями перестановочности, см. [**2**]–[**4**].

В работе [**5**] было введено следующее определение: подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой* в G, если существует подгруппа T группы G такая, что $G = AT$ и для любого $X \leq A$ и для любого $Y \leq T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. В работе [**6**] были исследованы производная и нильпотентная длины группы $G = AB$, где A и B — разрешимые *tcc*-подгруппы группы G. Кроме того, для p-разрешимых подгрупп A и B доказано, что также G p-разрешима и

$$l_p(G) \leq \max\{c(A_p), c(B_p)\} + 1 \text{ и } l_p(G) \leq \max\{g(A_p), g(B_p)\} + 1.$$

Здесь $l_p(G)$, $c(G_p)$ и $g(G_p)$ — p-длина группы G, ступень нильпотентности и число образующих силовской p-подгруппы G_p группы G соответственно.

Данные оценки уточнены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $G = AB$ — произведение tcc-подгрупп A и B. Если A и B p-разрешимы, то G p-разрешима и справедливы следующие утверждения:*

(1) $l_p(G) \leq max\{c(A_p), c(B_p)\}$;

(2) $l_p(G) \leq max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467)

Литература

[1] Ballester-Bolinches A., Estaban-Romero R., Asaad M. Products finite groups. Berlin. 2010.

[2] Cossey J., Li Y. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups. Arch. Math. 2018. Vol. 110. P. 533–537.

[3] Jabara E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups. Acta Math. Hungar. 2019. Vol. 159. P. 206–210.

[4] Murashka V. I., Vasil'ev A. F. On the lengths of mutually permutable products of finite groups. Acta Math. Hungar. 2023.

[5] Trofimuk A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups. Journal of Algebra and Its Applications. 2021. Vol. 20, № 2. P. 2150020-1–2150020-18.

[6] Trofimuk A. A. On numerical invariants of a finite group factorized by tcc-subgroups. Quaestiones Mathematicae. 2023.

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: ekaterina.zubey@yandex.by

Конечные группы с заданной системой наследственно G-перестановочных подгрупп

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

В работе рассматриваются только конечные группы.

Определение. *Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда A называется:*

1) *наследственно G-перестановочной с B, если $AB^x = B^x A$ для некоторого элемента $x \in < A, B >$;*

2) *наследственно G-перестановочной в G, если A наследственно G-перестановочна со всеми подгруппами из G.*

Концепция наследственно G-перестановочной в G подгруппы предложена А.Н. Скибой в работе [**1**].

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G-перестановочными в G. Тогда G разрешима.*

Следствие. *Пусть G — $3^{'}$-группа, у которой все подгруппы порядка 2, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G-перестановочными в G. Тогда G разрешима.*

Отметим, что в [**2**] исследовалось строение группы G, у которой каждая минимальная подгруппа является наследственно G-перестановочной, и доказано, что G разрешима и обладает сверхразрешимой холловой $2^{'}$-подгруппой (под минимальной подгруппой группы G понимается любая подгруппа простого порядка).

Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ-237).

Литература

[1] Skiba A. N., H-permutable subgroups. *Изв. Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины*, 4 (2003), 37–39.

[2] Каморников С. Ф., Тютянов В. Н., Конечные группы с наследственно G-перестановочными минимальными подгруппами. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **29**:1 (2023), 102–110.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”, Гомель (Беларусь)
E-mail: vtutanov@gmail.com

О пересечении тройки Ф-изоляторов конечной разрешимой группы

С. Ф. Каморников, О. Л. Шеметкова

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Определение 1. *Если H — подгруппа группы G и A/B — ее нормальная секция, то говорят, что*

1) *H покрывает A/B, если $HA = HB$;*
2) *H изолирует A/B, если $H \cap A = H \cap B$.*

Определение 2. *Подгруппа H группы G называется Φ-изолятором, если H покрывает каждый фраттиниев главный фактор группы G и изолирует каждый дополняемый главный фактор группы G.*

Концепция Φ-изолятора предложена в [**1**]. Как следует из [**2**], каждая префраттиниева подгруппа группы G является Φ-изолятором. В то же время в [**3**] построен пример, показывающий, что G может содержать несколько классов сопряженных Φ-изоляторов.

Следующая теорема дает ответ на вопрос 19.38 из [**4**].

Теорема. *Пусть H — Φ-изолятор конечной разрешимой группы G. Тогда существуют элементы $x, y \in G$ такие, что $H \cap H^x \cap H^y = Core_G(H)$.*

Так как $Core_G(H) = \Phi(G)$, то, по сути, в теореме идет речь о возможности представления подгруппы Фраттини группы G в виде пересечения трех сопряжённых Φ-изоляторов группы G.

Отметим еще, что в [**5**] теорема доказана в случае, когда H — префраттиниева подгруппа группы G.

Литература

[1] Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Shemetkova O. L., Yi X., On subgroups of finite groups with a cover and avoidance property. *Sib. Electr. Math. Rep.*, **13** (2016), 950–954.
[2] Gaschütz W., Praefrattinigruppen. *Arch. Math.* **13** (1962), 418–426.
[3] Gillam J. D., Cover-avoid subgroup in finite solvable group. *J. Algebra* **29** (1974), 324–329.
[4] Mazurov V. D., Khukhro E. I., Unsolved Problems in Group Theory: The Kourovka Notebook. Novosibirsk: Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of Mathematics, 2018.
[5] Kamornikov S. F., Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups. *Int. J. Group Theory* **6**:2 (2017), 1–5.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Москва (Россия)
E-mail: ol-shem@mail.ru

Диэдральные и кватернионные подгруппы автотопизмов полуполевых проективных плоскостей

О. В. Кравцова

Гипотеза Д. Хьюза о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой проективной плоскости привлекает внимание исследователей с 1959 года (вопрос 11.76 Н.Д. Подуфалова в Коуровской тетради). Предлагается подход, основанный на классификации конечных простых групп и теореме Дж. Томпсона о минимальных простых группах. Метод регулярного множества позволяет выявлять условия существования полуполевой плоскости, обладающей заданной подгруппой автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник). Исключая из числа возможных подгрупп автотопизмов определенные простые неабелевы группы, мы будем получать существенное продвижение в решении проблемы.

Пусть π — недезаргова полуполевая проективная плоскость порядка p^N, где p — простое число, Λ — группа автотопизмов плоскости π. Автором доказано, что при $p \equiv 1 \pmod 4$ подгруппа автотопизмов, изоморфная группе кватернионов Q_8 или группе диэдра D_8, обязательно содержит центральную коллинеацию и поэтому не может содержаться ни в какой простой неабелевой подгруппе автотопизмов [**1, 2**]. Результаты уточнены, а также дополнены для случая $p = 2$.

Теорема 1. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, p простое, $p \equiv 1 \pmod 4$. Группа автотопизмов Λ содержит подгруппу $H \simeq D_8$ тогда и только тогда, когда Λ содержит подгруппу $F \simeq Q_8$. В этом случае $N = 2n \geq 4$, подгруппы H и F содержат инволюторную гомологию с осью $[\infty]$, плоскость π допускает бэровскую инволюцию.*

Теорема 2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 2^N. Если группа автотопизмов Λ содержит подгруппу $H \simeq D_8$ или $F \simeq Q_8$, то N делится на 8, плоскость π допускает бэровскую инволюцию.*

Матричное представление регулярного множества позволяет рассчитывать на построение примеров, в дополнение к указанным в [**1**].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Литература

[1] O.V.Kravtsova, Semifield planes admitting the quaternion group Q_8, *Algebra and Logic*, **59** (2020), is. 1, 71–81.

[2] Kravtsova O. V., Dihedral group of order 8 in an autotopism group of a semifield projective plane of odd order, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **15** (2022), no. 3, 21–27.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: ol71@bk.ru

Собственные значения транспозиционного графа

А. В. Кравчук

В этой работе исследуются собственные значения транспозиционного графа Кэли T_n, $n \geqslant 2$, который определяется на симметрической группе Sym_n относительно порождающего множества всех транспозиций. Известно, что все собственные значения этого графа являются целыми числами [**1, 2**]. Кроме этого, в работе [**1**] доказано, что наибольшее собственное значение $\frac{n(n-1)}{2}$ имеет кратность 1, второе собственное значение $\frac{n(n-3)}{2}$ имеет кратность $(n-1)^2$. Поскольку транспозиционный граф является двудольным, для любого его собственного значения λ верно, что $-\lambda$ также является собственным значением с той же кратностью, что и λ. Таким образом, имеется некоторое представление о том, как устроен спектр $Spec(T_n)$ транспозиционного графа T_n, где под спектром понимается множество всех различных собственных значений графа вместе с их кратностями. Однако точное описание спектра для этого графа неизвестно. Следующий результат даёт описание спектра около значения ноль.

Теорема [**3**, теорема 2]. *Для любого целого $k \geqslant 0$, существует $n(k)$ такой, что для любого $n \geqslant n(k)$ и любого $m \in \{0, \dots, k\}$ выполнено $m \in Spec(T_n)$.*

Таким образом, для достаточно больших n этот результат показывает существование всех целых значений в спектре $Spec(T_n)$ вплоть до некоторой верхней оценки. Следующая теорема усиливает результат теоремы 1.

Теорема [**4**, теорема 3]. *Для $n \geqslant 19$ все целые значения из отрезка $[-\frac{n-4}{2}, \frac{n-4}{2}]$ лежат в спектре графа T_n.*

Доказательства этих теорем опирается на основные факты из теории представлений симметрической группы для графов Кэли [**5**], а также некоторые новые утверждения о соответствии между собственными значениями графа T_n и разбиениями числа n.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-281.

Литература

[1] *Kalpakis K., Yesha Y.*, On the bisection Width of the Transposition network, *Networks*, **29** (1997) 69–76.

[2] *Konstantinova E. V., Lytkina D. V.*, Integral Cayley graphs over finite groups, *Algebra Colloquium*, **27**(1) (2020) 131–136.

[3] *Konstantinova E. V., Kravchuk A.*, Spectrum of the Transposition graph, *Linear Algebra and its Applications*, **654** (2022) (379-389). https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.08.033

[4] *Konstantinova E. V, Kravchuk A.*, Distinct eigenvalues of the Transposition graph, https://arxiv.org/abs/2306.01627

[5] *Zieschang P.-H.*, Cayley graphs of finite groups, *Journal of Algebra*, **118** (1988) 447–454.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.kravchuk@g.nsu.ru

О про-p-группах с одним определяющим соотношением

А. Ф. Красников

Известная теорема о свободе Магнуса [**1**] показывает, что если F — свободная группа с базой $x_1, \ldots, x_n$, $H = \text{гр}\ (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $r \in F$, r не сопряжен с каким-либо словом из H, R — нормальная подгруппа, порожденная в группе F элементом r, то $H \cap R = 1$. В [**2**] показано, что условие r — *не сопряжен с каким-либо словом из* H, эквивалентно условию $D_n(r) \not\equiv 0 \mod \mathbf{Z}[F] \cdot (R-1)$, где D_n — производная Фокса кольца $\mathbf{Z}[F]$, $D_n(x_n) = 1,\ D_n(x_j) = 0,$ при $n \neq j$.

В [**2**] доказана следующая

Теорема. *Пусть $F(n)$ — свободная про-p-группа ранга n, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — система образующих $F(n)$, $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $F(K)$ — свободная про-p-группа с системой образующих $\{x_j \mid j \in K\}$; N— замкнутая нормальная подгруппа в $F(n)$, $v \in N$, $\mathbf{Z}_p[[F(n)]]$ — пополненное групповое кольцо группы $F(n)$; $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ — производные Фокса кольца $\mathbf{Z}_p[[F(n)]]$, $\pi : \mathbf{Z}_p[[F(n)]] \to \mathbf{Z}_p[[F(n)/N]]$ — гомоморфизм, индуцированный естественным гомоморфизмом $F(n) \to F(n)/N$. Если*

$$\pi(\partial_k(v)) = 0,\ k \in \{1, \ldots, n\} \setminus K,$$

то v принадлежит замыканию $(F(K) \cap N)^{F(n)}[N, N]$ в $F(n)$.

Следствие. *Пусть $F(n)$ — свободная про-p-группа, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — система образующих группы $F(n)$, H — свободная про-p-группа с системой образующих $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, $1 \neq r$ — элемент группы $F(n)$, R — замкнутая нормальная подгруппа в $F(n)$, порожденная элементом r, π: $\mathbf{Z}_p[[F(n)]] \to \mathbf{Z}_p[[F(n)/R]]$ — гомоморфизм, индуцированный естественным гомоморфизмом $F(n) \to F(n)/R$; $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ — производные Фокса алгебры $\mathbf{Z}_p[[F(n)]]$. Если $H \cap R = 1$, то $\pi(\partial_n(r)) \neq 0$.*

В [**3**] показано, что в $F(2)$ элемент $r = x_1^p[x_2, x_1^p]$ не является p-й степенью, $x_1 \notin R$, $x_1^p \in R$ и аналог теоремы о свободе Магнуса для $F(2)/R$ не выполняется.

Нетрудно видеть, что $\pi(\partial_2(r)) = \pi(-x_2^{-1}x_1^{-p}x_2x_1^p + x_1^p) = 0$, т.е. элемент r не удовлетворяет необходимому условию выполнения теоремы о свободе для про-p-групп с одним определяющим соотношением.

Литература

[1] Magnus W., Über diskontinuierliche Grouppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. reine u. angew Math., 163, (1931), 141–165.

[2] Красников А. Ф., О про-p-группах с одним определяющим соотношением, http://arxiv.org/abs/2308.14226.

[3] Gildenhuas D., On pro-p-groups with a single defining relator, Invent. Math., 5, (1968), 357-366.

Омский государственный университет, Омск (Россия)
E-mail: phomsk@mail.ru

Совершенные k-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций

М. А. Лисицына

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ будем называть *цветами*. Функция $\phi : V \to I$ называется *совершенной k-раскраской*, если цветовой состав всякого шара радиуса 1 в G зависит только от цвета его центра.

Граф Кэли группы $\mathbb{Z}$ с системой образующих $\{1, 2, \ldots, n\}$ будем называть *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* и обозначать $C_\infty(n)$. Объектами данного исследования являются совершенные k-раскраски графов $C_\infty(n)$ для $k \geq 3n + 3$.

Всякая совершенная раскраска такого графа периодическая. Записывать ее период будем в строку, заключенную в квадратные скобки.

Приведу краткий обзор известных результатов о совершенных раскрасках бесконечных циркулянтов. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(n)$ получены в [**3**]. В [**2**] описаны совершенные k-раскраски для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 и произвольного конечного k.

Пусть G — транзитивный граф. Произвольное множество его вершин T назовем *фрагментом*. Если для любой k-раскраски G найдется автоморфизм π такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент называется *k-тестовым*. *Длину* фрагмента T определим равной его мощности. Минимальность фрагмента с тем или иным свойством будем рассматривать относительно его длины.

Верхние оценки на длины минимальных k-тестовых фрагментов графа $C_\infty(n)$ для произвольных натуральных k и n получены в [**1**].

Для совершенных k-раскрасок таких графов при $k \geq 3n+3$ справедлива следующая теорема.

Теорема. *Совершенные k-раскраски графа $C_\infty(n)$ для $k \geq 3n + 3$ исчерпываются четырьмя орбитными раскрасками*

$$
\begin{gathered}
[1\ 2\ 3\ \ldots\ k],\\
[1\ 2\ 3\ \ldots\ (k-1)\ k\ (k-1)\ \ldots\ 3\ 2],\\
[1\ 2\ 3\ \ldots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \ldots\ 3\ 2],\\
[1\ 2\ 3\ \ldots\ (k-1)\ k\ k\ (k-1)\ \ldots\ 3\ 2\ 1].
\end{gathered}
$$

Литература

[1] Лисицына М. А., Августинович С. В., Тестовые фрагменты совершенных раскрасок циркулянтных графов // Сиб. электрон. мат. изв., 2023, 20:2, С. 638–645.

[2] Лисицына М. А., Паршина О. Г., Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций, 2017, 24:3, С. 20–34.

[3] Паршина О. Г., Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискрет. анализ и исслед. операций, 2014, 21:2, С. 76–83.

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург (Россия)
E-mail: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Представления групп виртуальных кос, построенные по вербальным квандлам с одним параметром

Е. В. Мархинина

Квандлом Q называется алгераическая система с одной бинарной алгебраической операцией $(x, y) \mapsto x * y$, которая удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(q1) $x * x = x$ для всех $x \in Q$,

(q2) Для всех $x \in Q$ отображение $S_x : y \mapsto y * x$ является биекцией,

(q3) Для всех $x, y, z \in Q$ справедливо равенство $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Квандлы впервые рассмотрены в работах Джойса и Матвеева как инструмент для построения инвариантов узлов. Следующее утверждение установлено в [**1**].

Теорема 1. *Пусть $W = W(x, y, z)$ — элемент свободной группы $F(x, y, z)$. Для группы G и элементов $a, b, c \in G$ положим $a *_{W,c} b = W(a, b, c)$. Если $Q = (G, *_{W,c})$ является квандлом для любой группы G и элемента $c \in G$, то W имеет один из приведенных ниже видов:*

(1) $W_1(x, y, z) = yx^{-1}y$,

(2) $W_2(x, y, z) = y^{-s}xy^s$ *для* $s \in \mathbb{Z}$,

(3) $W_3(x, y, z) = yz^{-s}y^{-1}xz^s$ *для* $s \in \mathbb{Z}$,

(4) $W_4(x, y, z) = yz^{-s}xy^{-1}z^s$ *для* $s \in \mathbb{Z}$,

(5) $W_5(x, y, z) = z^{-s}y^{-1}xz^sy$ *для* $s \in \mathbb{Z}$,

(6) $W_6(x, y, z) = z^{-s}xy^{-1}z^sy$ *для* $s \in \mathbb{Z}$.

Используя тот факт, что слова $W_1, W_2, \ldots, W_6$ задают квандл на любой группе, мы установили следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть F_{n+1} — свободная группа с порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, и пусть $W \in \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$. Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ обозначим через S_i, R_i автоморфизмы F_{n+1}, заданные на порождающих следующим образом:*

$$S_i : \begin{cases} x_j \mapsto x_j, \ j \neq i, i+1, \\ x_i \mapsto W(x_i, x_{i+1}, z), \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ z \mapsto z, \end{cases} \qquad R_i : \begin{cases} x_j \mapsto x_j, \ j \neq i, i+1, \\ x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ z \mapsto z. \end{cases}$$

Тогда отображение ϕ_W, заданное на порождающих σ_i, ρ_i группы виртуальных кос VB_n формулами $\phi_W(\sigma_i) = S_i$, $\phi_W(\rho_i) = R_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, продолжается до гомоморфизма $\phi_W : VB_n \to \mathrm{Aut}(F_{n+1})$.

Литература

[1] Nasybullov T., Markhihina E., Verbal quandles with one parameter. – arXiv:2204.11308. – 2022.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: lisamarh@yandex.ru

О группах с модулярными подгруппами Шмидта

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. В [**1**] приведен обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп.

Подгруппа H группы G называется модулярной в G, если H — модулярный элемент решетки подгрупп группы G. Модулярным подгруппам посвящена монография [**2**]. В [**3**, теорема (ii)] установлена нильпотентность коммутанта группы с модулярными подгруппами Шмидта.

В [**4**] был поставлен вопрос: *является ли фактор-группа $G/F(G)$ циклической в группе G, все подгруппы Шмидта которой модулярны?*

Здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

Положительный ответ на этот вопрос вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Если в группе G каждая подгруппа Шмидта субнормальна или модулярна, то фактор-группа $G/F(G)$ циклическая.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф23РНФ-237).

Литература

[1] Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. Укр. матем. конгресс : сб. тр. Киев. Ин-т матем. НАН Украины, 2002. С. 81–90.
[2] Schmidt R. Subgroup lattices of groups. Berlin. New York. Walter de Gruyter. 1994.
[3] Hu B., Huang J., Song D., Safonova I. N. Finite groups with K-$\mathfrak{F}$-subnormal Schmidt subgroups. Comm. Algebra. 2021. Vol. 49, № 10. P. 4513–4518.
[4] Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами. Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

О дважды транзитивных группах

М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Известно, что точно 2–транзитивные группы можно построить при помощи алгебраических систем, таких как поле, почти-поле, почти-область. Точно 3–транзитивные группы можно построить при помощи КТ-поля. В [**1**] была введена алгебраическая система n-псевдополе для построения групп, близких к точно n-транзитивным, которые будем называть ограниченно точно n-транзитивные.

Определение. *Группа $T_n(B)$ преобразования множества B называется ограниченно точно n–транзитивной, если для произвольных кортежей $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n) \in\ \Omega \subset B^n$ существует единственный элемент $g \in T_n$, который переводит кортежи друг в друга: $g(x_i)=y_i$ при $i\in\{1,\ldots,n\}$.*

Если подмножество $\Omega \subset B^n$ содержит все кортежи $(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$ из попарно неравных элементов: $x_i \neq x_j$ при $i\neq j$, то такая группа $T_n(B)$ называется точно n-транзитивной.

Характерным примером ограниченно точно n-транзитивной группы является полная линейная группа $T_n(L) = GL_n(\mathbb{F})$, где $L=\mathbb{F}^n$. В группе $GL_n(\mathbb{F})$ всегда найдётся единственный элемент, переводящий вектора кортежей $(v_1,\ldots,\ v_n)$, $(u_1,\ldots,\ u_n)\in\Omega$ друг в друга, если они ограничены условием линейной независимости $\det(v_1,\ldots,v_n)\neq 0$, $\det(u_1,\ldots,u_n)\neq 0$.

Определение. *Алгебраическую систему $\langle B;\cdot,^{-1},\varphi_2,\varphi_3,e\rangle$ с частичной операцией $(\cdot)$ будем называть 3–псевдополем, если справедливы тождества:*

$$\varphi_k\left(\varphi_k(x)\varphi_k(y)\right)=\varphi_k\left(x\varphi_k(y^{-1})\right)y,\quad \varphi_2\varphi_3\varphi_2=\varphi_3\varphi_2\varphi_3$$

для произвольных $x\in B,\ y\in B_{0k},\ k\in\{2,3\}$, где

$$B_k=\{x\in B_1|\varphi_k(x)\in A\}\,;\quad B_{0k}=\{x\in B_1|\varphi_k(x)\in B_1\}=B_1\setminus B_k;$$
$$A_k=\{x\in A|\varphi_k(x)\in B_1\}=\varphi_k\left(B_k\right);\quad A_{0k}=\{x\in A|\varphi_k(x)\in A\}=A\setminus A_k.$$

Для того, чтобы ограниченно точно 3–транзитивная группа T_3 была 2–транзитивной, необходимо, чтобы для произвольных пар (x_1,x_2), (y_1,y_2) существовал элемент $g\in T_3$, который переводил бы их друг в друга, при условии, что эти пары состоят из неравных элементов $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$.

Теорема. *Ограниченно точно 3-транзитивная группа $T_3(B)$, для которой справедливо $A_3\setminus\{e_3\}=A_2\setminus\{e_2\}$ и $A_{02}=\{e_3\}$, $A_{03}=\{e_2\}$, а также $B_3\cap B_2=\varnothing$, является 2-транзитивной. При этом, стабилизатор любых трёх точек тривиален.*

Литература

[1] Симонов А. А., Обобщение точно транзитивных групп, Изв. РАН. Сер. матем., 78:6 (2014), 153–178.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: neshch@math.nsc.ru, a.simonov@g.nsu.ru

Контуры малой длины в эйлеровых ориентациях полных графов

А. Л. Пережогин, И. С. Быков, С. В. Августинович

Произвольная ориентация ребер полного графа называется турниром. Турнир с нечетным числом вершин эйлеров, если полустепени исхода и захода для каждой его вершины совпадают. Нетрудно показать, что от любого эйлерова турнира к любому другому с тем же множеством вершин можно перейти последовательной сменой ориентаций на противоположные в контурах длины 3. Также легко доказывается, что число 3-контуров в эйлеровых турнирах фиксированного порядка не зависит от выбора турнира. В последние годы интерес к экстремальным (совершенным) структурам переносится с неориентированного случая [**2**] на ориентированный [**1**]. Нас интересуют оценки на число 4-контуров в эйлеровых турнирах.

Выходящей окрестностью $I_T(v)$ вершины v в турнире T будем называть множество вершин, в которые ведут дуги, начинающиеся в v. Аналогично определяется входящая окрестность $O_T(v)$. Турнир называется полутранзитивным, если его подтурниры, порожденные множествами $I_T(v)$ и $O_T(v)$ являются транзитивными для всех v.

Доказано, что число 4-контуров среди всех турниров достигает максимума на эйлеровом полутранзитивном турнире. Доказано также, что такой турнир — единственный с точностью до изоморфизма среди турниров с фиксированным числом вершин.

Получена нижняя оценка числа 4-контуров в эйлеровых турнирах, достижимая для турниров с малым числом вершин.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0018).

Литература

[1] Киреева Т. Е., Ориентационные спектры кубических графов, Сиб. электрон. матем. изв., 14 (2017), 703-709.

[2] Taranenko A. A., Algebraic properties of perfect structures.(English summary) Linear Algebra Appl. 607 (2020), 286-306.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: pereal@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: patrick.no10@gmail.com
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: avgust@math.nsc.ru

О конечных многократно бифакторизуемых группах

С. В. Путилов

Если группа равна нескольким различным произведениям двух подгрупп, то будем называть ее многократно бифакторизуемой группой. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Тогда $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. В [**1**] группа G называется σ-примарной, если $\pi(G) \subseteq \sigma_i$ для некоторого $i \in I$. Группа G называется σ-разрешимой, если каждый ее главный фактор является σ-примарной группой. Группа G называется σ-нильпотентной, если G равна прямому произведению σ-примарных групп.

Теорема 1. *Если для каждой максимальной подгруппы M из любой ненормальной силовской подгруппы S группы G в G есть σ-разрешимая подгруппа D и $G = MD$, то G — σ-разрешимая группа.*

Следствие 1 [2]. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-разрешимая подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — σ-разрешимая группа.*

Теорема 2. *Если для каждой максимальной подгруппы M из любой ненормальной силовской подгруппы S группы G в G есть σ-нильпотентная подгруппа D и $G = MD$, то G — σ-нильпотентная группа.*

Следствие 2 [2]. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-нильпотентная подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — σ-нильпотентная группа.*

Литература

[1] Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. J. of Algebra, 2015. V. 436. P. 1–16.

[2] Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. О двух проблемах из «Коуровской тетради», Тр. ИММ УрО РАН, 2021. Т. 27, № 1. С. 98–102.

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск (Россия)
E-mail: algebra.bgu@yandex.ru

Об одной модификации АТ-групп

А. В. Рожков

Тимофеенко А.В. поставил в Коуровской тетради вопрос 13.55: существует ли группа Голода, изоморфная AT-группе?

В группе Голода порождающие элементы — это символы, задающие многочлены, и в этом смысле они равноправны. Однако, в AT-группах всегда есть активный элемент(корневой порождающий), а все остальные пассивные (продольные).

Определение 1. *Пусть T – слойно-однородное дерево. Группа G называется GAT-группой (обобщенной AT-группой) если:*

а) *G действует транзитивно на слоях дерева T;*

б) *на всех поддеревьях дерева T группа G индуцирует GAT-группу, т.е. группу того же вида, причем во всех вершинах данного слоя в точности одну и ту же.*

GAT-группы схожи с ветвящимися группами Р.И. Григорчука Р.И. Первый пункт в определениях совпадает, второй кардинально разнится. У Григорчука требуется, чтобы костабилизаторы вершин (строгие стабилизаторы) были конечного индекса или просто нетривиальными. У нас важно, что на поддеревьях индуцируется группа того же типа, что и исходная. Наш подход позволяет вести индукцию, а это главный инструмент изучения AT-групп. При этом костабилизаторы, даже AT-групп, могут быть единичными.

Определение 2. *Пусть $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots), \gamma_i \in A_i$ — путь в дереве T, построенном над последовательностью множеств $A_0, A_1, \dots$ Автоморфизм f дерева T назовем γ-автоморфизмом, если из $f(u) \neq 1$ следует, что $u = (\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_n)$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $F = \{f, g, h, \dots\}$ некоторое множество γ-автоморфизмов дерева T. Группа $G = gr(F)$ называется γAT-группой, если группа перестановок $\Pi_n = gr(f(u) \mid f \in F, |u| = n)$ транзитивно действует на множестве A_n для всех $n = 0, 1, 2, \dots$*

Теорема. *Любая γAT-группа $G = gr(F)$ над деревом T индуцирует на поддеревьях n-го слоя γAT-группу, $G_n = gr(F_n)$, где F_n — автоморфизмы из F, у которых удалили начальный отрезок длины n. Любая γAT-группа транзитивно действует на слоях дерева T. Порождающие γAT-группы имеют единый геометрический вид.*

γAT-группы — лучшее, что можно предложить в группе $Aut(T)$ на сходство с группами Голода. Но все такие группы над любым деревом не периодические, и более того, без кручения, но не являются свободными группами.

Если говорить о периодических группах, то в $Aut(T)$, всегда получается автомат Калашникова, т.е группа Алешина.

Кубанский государственный университет, Краснодар (Россия)
E-mail: great.ros.marine2@gmail.com

О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп

Е. В. Соколов

Большая часть результатов о нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп относится к случаю, когда аппроксимирующим является класс конечных p-групп для некоторого простого числа p. Объясняется это тем, что данный класс принадлежит к числу так называемых корневых классов групп, методы изучения аппроксимируемости которыми свободных конструкций групп известны и весьма продуктивны. Если же говорить об аппроксимируемости указанных конструкций классами нильпотентных групп, не являющимися корневыми (например, классом всех нильпотентных групп, конечных нильпотентных групп и т. д.), то можно утверждать, что общих методов исследования таких свойств не существует и, как следствие, в данной области имеется лишь считанное число доказанных утверждений.

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий использовать известные факты об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп конечными p-группами для получения новых результатов об аппроксимируемости той же конструкции конечными нильпотентными и метанильпотентными π-группами, где π — наперед заданное непустое множество простых чисел. Предложенный подход удается применить при всех ограничениях на объединенную подгруппу, при которых ранее исследовалась аппроксимируемость конечными p-группами. Это периодичность, локальная цикличность, центральность в одном из свободных множителей, нормальность в обоих свободных множителях, а также свойство быть ретрактом одного из указанных множителей. Все новые результаты получены в предположении, что свободные множители аппроксимируются конечными нильпотентными π-группами и обладают гомоморфизмами на π-ограниченные нильпотентные группы, действующими инъективно на объединенной подгруппе. Отметим, что во всех известных ранее утверждениях об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений некорневыми классами нильпотентных групп требовалась нильпотентность свободных множителей. Класс π-ограниченных нильпотентных групп (при любом выборе множества π) включает все конечно порожденные нильпотентные группы и определяется следующим образом: абелева группа π-ограничена, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая числу из множества π, конечна; нильпотентная группа π-ограничена, если в ней имеется конечный центральный ряд с π-ограниченными абелевыми факторами. В докладе будут более подробно описаны новые результаты, относящие к случаю периодической объединенной подгруппы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, https://rscf.ru/project/22-21-00166/.

Ивановский государственный университет, Иваново (Россия)
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Перманент произведения матриц и трансверсали в итерированных квазигруппах

А. А. Тараненко

Под d-мерной матрицей A порядка n понимается массив вещественных чисел $A = (a_\alpha)_{\alpha \in I_n^d}$, где множество индексов $I_n^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) : \alpha_i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Диагональю в многомерной матрице порядка n называется набор из n индексов, каждая пара которых отличается во всех n позициях. Перманент матрицы A равен сумме по всем диагоналям произведений элементов, стоящих на диагонали.

Существует множество произведений многомерных матриц, самые естественные из которых – это внешнее и кронекерово произведения, а также обобщение стандартного умножения матриц на большие размерности. В данном докладе мы рассмотрим влияние этих операций на перманент многомерных неотрицательных матриц и их приложения к оценкам числа трансверсалей в некоторых латинских гиперкубах.

Латинскими гиперкубами называются d-мерные матрицы порядка n, заполненные n символами так, что в любой линии все символы различны. d-Мерные латинские гиперкубы порядка n находятся во взаимно однозначном соответствии с $(d+1)$-мерными $(0,1)$-матрицами порядка n и d-арными квазигруппами порядка n. Трансверсаль латинского гиперкуба – это диагональ, все элементы которой различны. $(d+1)$-Мерные латинские гиперкубы, соответствующие d-кратной композиции бинарной квазигруппы G, назовем d-итерированными квазигруппами $G[d]$.

Теорема 1. *Если число трансверсалей в d-итрерированной группе $G[d]$ отлично от нуля, то*

$$T(d) = \frac{n!}{|G'|n^{n-1}} n!^d (1 + o(1)) \text{ при } n \to \infty,$$

где G' – коммутант группы G.

Для произвольной итерированной квазигруппы $G[d]$ доказана аналогичная асимптотика числа трансвесралей.

Исследование перманентов произведений многомерных матриц выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00202.

Литература

[1] Taranenko A. A., Transversals, near transversals, and diagonals in iterated groups and quasigroups, Electron. J. Combin. **28(3)** (2021), #3.48.

[2] Taranenko A. A., Products of multidimensional matrices, stochastic matrices, and permanents. ArXiv: 2303.17278.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: taa@math.nsc.ru

Конечные группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы.

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T. Группы с полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см., например, литературу в [**1**].

В работе [**2**] был приведен следующий тип перестановочности: подгруппы A и B группы G называются сс-*перестановочными в* G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B\rangle$.

Вполне естественно рассмотреть следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A сс-перестановочна с каждой подгруппой из T.

Всякая полунормальная подгруппа является условно полунормальной подгруппой. Обратное неверно. Примером является полупрямое произведение $G = Z_5 \rtimes Z_4$, в котором существует подгруппа порядка 2, которая является условно полунормальной подгруппой в G, но не является полунормальной подгруппой в G.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема. *Пусть G — группа. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *в группе G все максимальные подгруппы являются условно полунормальными;*

(2) *в группе G все силовские подгруппы являются условно полунормальными;*

(3) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из нормальной подгруппы H группы G является условно полунормальной в G и G/H сверхразрешима;*

(4) *в группе G все 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными;*

(5) *в разрешимой группе G все максимальные подгруппы из каждой нециклической силовской подгруппы являются условно полунормальными.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант №Ф23РНФ-237)

Литература

[1] Монахов В. С., Трофимук А. А., О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Том 61, № 1. С. 148–159.

[2] Guo W., Shum K. P., Skiba A. N., Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493–510.

Брестский университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Аппроксимируемость трубчатых групп конечными π-группами

А. В. Усиков

Конечно порожденная группа называется *трубчатой*, если она представляется в виде фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{G})$ графа групп $\mathbb{G}$, реберные группы которого изоморфны $\mathbb{Z}$, а вершинные $\mathbb{Z}^2$. Группа G называется *аппроксимируемой конечными π-группами*, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую конечную π-группу, образ элемента g относительно которого отличен от единицы.

Многими авторами изучались различные свойства трубчатых групп: кубируемость [**1, 2**], хопфовость [**3**], отделимость [**4**], квазиизометрическая классификация [**5**], характерезация функции Дэна [**6**] и т.д.

В статье [**7**] Н. Хода, Д. Вайз и Д. Вудхаус находят необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости трубчатых групп. В настоящей работе мы изучаем аппроксимируемость трубчатых групп конечными π-группами. В этом направлении были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{G}$ — дерево групп трубчатой группы. Группа $\pi_1(\mathbb{G})$ аппроксимируется конечными π-группами в том и только в том случае, когда метки всех ребер графа X являются π-числами.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{G}$ – граф групп трубчатой группы, содержащий ровно одно ребро вне максимального поддерева. Группа $\pi_1(\mathbb{G})$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда*

1. *Метки всех ребер графа X являются p-числами.*
2. *Если выполнено условие $(*)$, то либо $\Delta = 1$, либо $\Delta = -1$, $p = 2$.*

Условие $(*)$, определение метки ребра и числа Δ будет дано в презентации доклада.

Литература

[1] Wise D. T., Cubular tubular groups. Trans. Amer. Math. Soc., 366(10):5503–5521, 2014.

[2] Button J., Tubular free by cyclic groups act freely on CAT(0) cube complexes. Canad. Math. Bull., 60(1):54–62, 2017.

[3] Wise D. T., A non-Hopfian automatic group. J. Algebra, 180(3):845–847, 1996.

[4] Burns R. G., Karrass A., and Solitar D., A note on groups with separable finitely generated subgroups. Bull. Austral. Math. Soc., 36(1):153–160, 1987.

[5] Cashen C. H., Quasi-isometries between tubular groups. Groups Geom. Dyn., 4(3):473–516, 2010.

[6] Brady N. and Bridson M. R., There is only one gap in the isoperimetric spectrum. Geom. Funct. Anal., 10(5):1053–1070, 2000.

[7] Hoda N., Wise D. and Woodhouse D. (2020), Residually finite tubular groups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 150(6), 2937-2951.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)
E-mail: a.usikov@g.nsu.ru

О классах Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп

С. А. Шахова

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $\langle a\rangle^G$ каждого элемента a из G принадлежит классу групп $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ называется классом Леви, порождённым $\mathcal{M}$.

В [**1**] доказано, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также квазимногообразие групп.

Пусть p — простое, а s — натуральное число, $p \neq 2$, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$.

$\mathcal{N}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное в многообразии $\mathcal{N}_2$ нильпотентных ступени ≤ 2 групп формулами

$$[x, y]^p = 1, \quad x^{p^{s-1}} = 1 \to [x, y] = 1, \quad x^p = [y, z] \to [y, z] = 1,$$

а также формулами

$$x^{p^{s+1}} = 1 \to x^{p^s} = 1, \quad x^q = 1 \to x = 1, \tag{1}$$

где q пробегает множество простых чисел, $q \neq p$;

$\mathcal{M}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное в многообразии $\mathcal{N}_3$ нильпотентных ступени ≤ 3 групп квазитождествами (1), а также формулами

$$[x, y, x]^p = 1, \quad [x, y]^{p^{s-1}} = 1 \to [x, y, x] = 1, \quad [x, z]^p = [x, y, x] \to [x, y, x] = 1,$$

а при $p = 3$ ещё и формулой

$$x^{3^{s-1}}[x, z]^p = [x, y, x] \to [x, y, x] = 1;$$

qS — квазимногообразие, порождённое классом групп S;

Z — циклическая группа бесконечного порядка;

H_{p^s} — группа, имеющая в $\mathcal{N}_2$ следующее представление:

$$H_{p^s} = \langle x, y; x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1\rangle.$$

В [**2**] были описаны классы Леви $L(\mathcal{K})$ неабелевых квазимногообразий $\mathcal{K}$ групп экспоненты p^s, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}^{p^s}$. В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть p — простое число, $p \neq 2$, $s \geq 2$, и $s > 2$ при $p = 3$, $\mathcal{K}$ — квазимногообразие групп, $q(H_{p^s}, Z) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}^{p^s}$. Тогда $L(\mathcal{K}) = \mathcal{M}^{p^s}$.*

Литература

[1] Будкин А. И., Квазимногообразия Леви, Сиб. матем. ж., 40, №2 (1999), 266-270.

[2] Лодейщикова В. В., Шахова С. А., Классы Леви квазимногообразий нильпотентных групп экспоненты p^s, Алгебра и логика, 61, №1 (2022), 77-92.

Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: ssa@math.asu.ru

On the Tits alternative for generalized tetrahedron groups of type (2,4,2,2,2,2)

V. V. Beniash-Kryvets, V. Y. Novikova

One says that a group G satisfies a Tits alternative if either G is virtually soluble, or G contains a non-abelian free subgroup. Generalized tetrahedron groups have a presentation

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}^l(x_1, x_2) = R_{13}^m(x_1, x_3) = R_{23}^n(x_2, x_3) = 1\rangle,$$

where $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ is a cyclically reduced word involving both x_i and x_j and $R_{ij}(x_i, x_j)$ is not a proper power in the free product on x_i and x_j. One says that G has a type (k_1, k_2, k_3, l, m, n) [**1**]. There is a conjecture [**1**] that the class of generalized tetrahedron groups satisfies the Tits alternative.

This conjecture has been proved [**1, 2, 3, 4, 5**] for all generalized tetrahedron groups except for the groups of the form

$$G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}^2(x_1, x_2) = (x_1^{\alpha} x_3^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = 1\rangle, \qquad (1)$$

where $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. In [**3**] this conjecture is proved for the groups of the form (1) in the case when there exist k_i, k_j, $i \neq j$, such that $\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j} < \frac{1}{2}$ except for the cases $k_3 = 2$ and $(k_1, k_2) \in \{(3,8), (3,10), (4,5), (4,6), (4,8), (5,6)\}$. The cases $(k_1, k_2) = (3,10), (4,5), (5,6)$ has been handled in [**6**].

Theorem. *Let G be a generalized tetrahedron group with presentation*

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = R^2(x, y) = (xz)^2 = (y^2 z)^2 = 1\rangle.$$

where $R(x, y) = xy^{v_1} \ldots xy^{v_s}$, $s \geq 1$ and $1 \leq v_i \leq 3$ for all i. Then G contains a non-abelian free subgroup, hence the Tits alternative holds for G.

References

[1] Fine B., Rosenberger G., *Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products*, New York: Marcel Dekker, 1999, 315 p.

[2] Howie J., The Tits alternative for generalized tetrahedron groups. *J. of Group Theory*, Vol.9, 2006, pp. 173-189.

[3] Fine B., Hulpke A., Große Rebel V., The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups, *Algebra Colloquium*, Vol.15, No.4, 2008, pp. 541-554.

[4] Große Rebel V., Hahn M., Rosenberger G., The Tits alternative for Tsaranov's generalized tetrahedron groups, *Groups-Complexity-Cryptology*, Vol.1, No.2, 2009, pp. 207-216.

[5] Fine B., Hulpke A., Große Rebel V., Rosenberger G., Schauerte S., The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups, *Scientia. Series A: Mathematical Sciences*, Vol.21, 2011, pp. 1-15.

[6] Beniash-Kryvets V., Hua Xiuying, On free subgroups in some generalized tetrahedron groups, *Vestnik of Belarusian State University, ser.1*, Vol.2, 2008, pp.79-85.

Belarusian State University, Minsk (Belarus)
E-mail: benyashvv@gmail.com, victoria.novikova256@gmail.com

A generalization of locally finite groups of finite centralizer dimension

A. A. Buturlakin

Let G be a group. The kh-dimension of G is the minimal non-negative integer k such that for every prime p and every p-subgroup P of G, the q-rank of $Aut_G(P)$ for a prime $q \neq p$ does not exceed k. Lemma 3 of [**1**] implies that a locally finite group of finite centralizer dimension has finite kh-dimension. Hence the class of groups of finite kh-dimension generalizes the class of groups of finite centralizer dimension. The main result of this talk is the following statement.

Theorem. *Let G be a locally finite group of finite kh-dimension k. Then every subnormal series of G has finite k-bounded number of non-solvable factors.*

The work was supported by the Russian Science Foundation, project 23-41-10003, rscf.ru/en/project/23-41-10003.

References

[1] Khukhro E.I., On solubility of groups with bounded centralizer chains, Glasgow Math. J., **51** (2009), 49–54.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru

Horizontal Joinability on the first Goursat group

A. V. Greshnov

The first canonical Goursat group $\mathcal{G}^1$ (see [**1**]) is defined in the standard Euclidean space $\mathbb{R}^5$ with the coordinate system (x, y, z, t, q), induced by the coordinate frame $(O, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ with the use of the table of commutators

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = \beta_1 e_4, & \beta_1 > 0, \\ [e_1, e_4] = \beta_2 e_4, & \beta_2 > 0; \end{cases} \tag{1}$$

all the rest of possible commutator relationships are equal to 0. Using the Campbell–Hausdorff formula and (1) we obtain an analytic expression for the left translation of an arbitrary element $w' \in \mathcal{G}^1$ by an arbitrary element $w \in \mathcal{G}^1$ and the expressions for the basis left invariant vector fields (the Jacobian Basis [**2**]) X, Y, Z, T, Q of $\mathbb{K}$. So we have $[X, Y] = \alpha Z$, $[X, Z] = \beta_1 T$, $[X, T] = \beta_2 Q$ on $\mathcal{G}^1$. The vector fields X, Y are called horizontal. The set $\bigcup\limits_{s\in[0,1]} \exp(s(aX + bY))(u) = I_{a,b}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, is called horizontal segment starting at u and ending at $w = \exp(aX + bY)(u)$. A piecewise smooth curve $L^k_{u,v} \subset \mathcal{G}^1$ that joins points u and v and consists of k horizontal segments I_{a_i,b_i}, $i = 1, \dots, k$, starting at u_{i-1} and ending at u_i, $u_0 = u$, $u_k = v$, is called a horizontal k-broken line. From the Rashevskii–Chow Theorem [**3**] it follows that for every pair of points $u, v \in \mathcal{G}^1$ there is a horizontal k-broken line $L^k_{u,v}$, $k = k(u, v) \leq N_{\mathcal{G}^1}$, where constant $N_{\mathcal{G}^1}$ does not depend on u, v.

Theorem (joint with V.S. Kostyrkin). $4 \leq N_{\mathcal{G}^1} \leq 6$.

The finding of minimal $N_{\mathcal{G}^1}$ is the relevant problem, see, for example, [**4**].

References

[1] Kuznetsov M. V., Absence of Nontrivial Symmetries to the Heat Equation in Goursat Groups of Dimension at Least 4, Siberian Mathematical Journal, **60**, 108–113 (2019).

[2] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian, Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 2007.

[3] Agrachev A., Barilari D., Boscain U., A Comprehensive Introduction to sub- Riemannian Geometry, Cambridge University Press, 2020.

[4] Greshnov A., Optimal horizontal joinability on the Engel group, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni, **32** (2021), 535-547.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: greshnov@math.nsc.ru

One corollary of description of finite groups without elements of order 6

A. S. Kondrat'ev, M. S. Nirova

Let G be a finite group. The set of all prime divisors of the order of G is denoted by $\pi(G)$. The Gruenberg-Kegel graph (the prime graph) $\Gamma(G)$ of G is defined as the graph with the vertex set $\pi(G)$ in which two different vertices p and q are adjacent if and only if G contains an element of order pq. If the order of G is even, then $\pi_1(G)$ denotes the connected component of $\Gamma(G)$ containing 2. Of current interest is the problem of describing finite groups with disconnected Gruenberg-Kegel graph. In the present work, all finite non-solvable groups G with $3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$ are determined.

The first author is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement 075-02-2023-935, for the development of the regional scientic and educational mathematical center "Ural Mathematical Center".

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ural Federal University, Ural Matematical Center, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik (Russia)
E-mail: nirova_m@mail.ru

On the Lambek invariants of commutative squares in a homological category in the sense of M. Grandis

V. E. Leshkov

In 1889 É. Goursat described the bijection between the set of all subdirect products of two given groups G_1 and G_2 and the set of all isomorphisms $G_1/N_1 \to G_2/N_2$ of their quotients for $N_i \trianglelefteq G_i$. This result is known as *Goursat's lemma.* In 1964 in **[3]** for a commutative square S

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "S"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

in the category of groups, J. Lambek introduced the following invariants of S: the *image ratio* $\operatorname{Im} S := (\operatorname{Im}\beta \cap \operatorname{Im} f)/\operatorname{Im}(f\alpha)$ and the *kernel ratio* $\operatorname{Ker} S := \operatorname{Ker}(f\alpha)/(\operatorname{Ker}\alpha \cdot \operatorname{Ker} g)$. In **[3]** J. Lambek proved the following result which, as he noted, is equivalent to Goursat's lemma.

Theorem (J. Lambek, 1964). *In the category of groups in a commutative diagram of two consecutive squares*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "T"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1}$$

if rows are exact then there is an isomorphism $\operatorname{Im} S \cong \operatorname{Ker} T$.

The theorem of J. Lambek holds in any abelian category. Furthermore, it holds in any quasi-abelian category (see **[2]**). In the present work we generalize the result of J. Lambek to the case of homological and semiexact categories in the sense of M. Grandis **[1]**. The main result is as follows.

Theorem. *In a semiexact category $(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ in a commutative diagram (1) of two consecutive squares, given the middle morphism f is exact and the rows are null, we have*

1. *there exists a morphism $\Lambda \colon \operatorname{Im} S \to \operatorname{Ker} T$;*
2. *if the category $(\mathcal{C}, \mathcal{N})$ is homological and rows in (1) are exact then the morphism Λ is an isomorphism.*

References

[1] Grandis M. Homological Algebra In Strongly Non-Abelian Settings. World Scientific Publishing, 2013.

[2] Kopylov Ya. On the Lambek invariants of commutative squares in a quasiabelian category. Scientia. Series A: Mathematical Sciences, 2005.

[3] Lambek J. Goursat's theorem and homological algebra. Canadian Mathematical Bulletin, 7(4): 597–608, 1964.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: v.leshkov@g.nsu.ru

On hereditary Baer–Shemetkov formations of finite groups

V. I. Murashka

All considered groups are finite. L.A. Shemetkov possed the following problem on Gomel Algebraic seminar in 1995: *For what non-empty (normally) hereditary (local, Baer-local) formations $\mathfrak{F}$ do the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups coincide with the $\mathfrak{F}$-hypercenter in any group ?*

The origin of this problem may be traced back to the R. Baer's result [**1**] which states that the intersection of maximal nilpotent subgroups coincides with the hypercenter in every group. Different cases of this problem were considered in [**2, 3, 4**].

We shall say that a formation $\mathfrak{F}$ is a Baer-Shemetkov formation in a class $\mathfrak{X}$ if for every $\mathfrak{X}$-group the intersection of all its $\mathfrak{F}$-maximal subgroups coincides with its $\mathfrak{F}$-hypercenter. If $\mathfrak{X}$ is the class of all groups, then we shall say that $\mathfrak{F}$ is a Baer-Shemetkov formation.

Using the notions of the N-critical $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X})$ graph of a class $\mathfrak{X}$ from [**5**] and of a Z-saturated formation from [**6**] we obtain the following.

Theorem. *Let $\mathfrak{F} \neq (1)$ be a hereditary formation. The following statements are equivalent.*

(1) *$\mathfrak{F}$ is the Baer-Shemetkov formation.*

(2) *The following conditions hold:*

(2.1) *$\mathfrak{F}$ is a Z-saturated formation.*

(2.2) *There exists a partition $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ of the set of all primes $\mathbb{P}$ such that $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$ is the union of complete directed graphs on the vertex sets $\pi_i, i \in I$.*

(2.3) *$\mathfrak{F}$ is a Baer-Shemetkov formation in the class of all π_i-groups for every $i \in I$.*

References

[1] Baer R., Group elements of prime power index // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 75. — P. 20–47.

[2] Beidleman J. C., Heineken H., A note of intersections of maximal $\mathfrak{F}$-subgroups // J. Algebra. — 2010. — No. 333. — P. 120–127.

[3] Skiba A. N., On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. — 2012. — No. 216(4). — P. 789–799.

[4] Murashka V. I., On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // J. Group Theory. — 2018. — Vol. 21, No. 3. — P. 463–473.

[5] Vasilyev A. F., Murashka V. I., Arithmetic Graphs and Classes of Finite Groups // Sib. Math. J. — 2019. — Vol. 60, No. 1. — P. 41–55.

[6] Murashka V. I., On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolinches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory // Math. Notes. 2022. — Vol. 122, No. 6. — P. 932-939.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)
E-mail: mvimath@yandex.by

On finite simple groups satisfying the strong Sylow π-theorem

V. D. Shepelev

Let some set π of primes be fixed. A finite group is called a *π-group* if all the prime divisors of its order belong to π. According to Wielandt [**1**], a finite group G *satisfies the strong Sylow π-theorem*, and we write $G \in W_\pi$, if all maximal π-subgroups of every subgroup H of G are conjugate in H.

Wielandt [**1**, (h)] posed the problem of the classification of finite simple groups satisfying the strong Sylow π-theorem. In the report, we will discuss the current state of this problem and give a solution for groups $L_2(q)$.

Definiton. Let r be a prime, $a \in \mathbb{N}$, $(a, r) = 1$. Then

$$\operatorname{ord}^*_r a = \min\{d \in \mathbb{N} : a^d \equiv 1 \pmod{r \cdot (r, 2)}\}.$$

Theorem. *Let p be a prime, $q = p^{2^k m} > 3$, m odd. Set $q_0 = p^m$ and $\tau = \pi \cap \pi(L_2(q))$. Then $L_2(q) \in W_\pi$ if and only if one of the following statements holds:*

(1) $\pi(L_2(q)) \subseteq \pi$;
(2) $p = 2$ *and* $\tau = \{2\}$;
(3) $p \in \pi$, $2 \notin \pi$, $|\{3, 5\} \cap \tau| \leq 1$, *and* $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$;
(4) $p \notin \pi$, $|\{2, 3, 5\} \cap \tau| \leq 1$, *and* $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ *for some* $\varepsilon = \pm 1$*; moreover, if* $2 \in \pi$, *then* $q \equiv \varepsilon \pmod 4$ *and if* $\varepsilon = 1$, *then* $\operatorname{ord}^*_r q_0 = \operatorname{ord}^*_s q_0$ *for all* $r, s \in \tau$.

References

[1] Wielandt H., Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 161–173.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: v.shepelev@g.nsu.ru

Outer forms of type A_2 with infinite genus

S. V. Tikhonov

Let K be a field and K^{sep} its separable closure. Two absolutely almost simple algebraic K-groups G_1 and G_2 are said to have the same K-isomorphism classes of maximal K-tori if every maximal K-torus of G_1 is K-isomorphic to some maximal K-torus of G_2, and vice versa. An algebraic K-group G' is called a K-form of an algebraic K-group G if G and G' are isomorphic over K^{sep}.

Definition [**2**, Def. 6.1]. *Let G be an absolutely almost simple algebraic group over a field K. The genus $\mathbf{gen}_K(G)$ of G is the set of K-isomorphism classes of K-forms G' of G that have the same K-isomorphism classes of maximal K-tori as G.*

The genus is trivial in some special cases and it is conjectured to be finite whenever the field K is finitely generated of "good" characteristic (see details in [**4**, §8]).

In a similar way one can define the genus of a division algebra.

Definition. *The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra D over a field K is defined as the set of classes $[D'] \in Br(K)$, where D' is a central division K-algebra having the same maximal subfields as D.*

If D is a finite-dimensional central division K-algebra, then it is well known that any maximal K-torus of the corresponding algebraic group $G = SL_{1,D}$ is of the form $R_{E/K}(\mathbb{G}_m) \cap G$ (where $R_{E/K}(\mathbb{G}_m)$ is the Weil restriction of the 1-dimensional split torus $\mathbb{G}_m$) for some maximal separable subfield E of D. Thus the results on genus of division algebras from [**3**] and [**5**] rephrased in the language of algebraic groups say that for any prime p, there exist fields (with infinite transcendence degree over the prime subfield) over which there are inner forms of type A_{p-1} with infinite genus. An example of groups of type G_2 with infinite genus is obtained in [**1**, Rem. 3.6(b)]. We construct such an example for outer forms of type A_2 [**6**].

References

[1] Beli C., Gille P., Lee T.-Y., *Examples of algebraic groups of type G_2 having the same maximal tori*, Tr. Mat. Inst. Steklova **292** (2016), 16-25 and Proc. Steklov Inst. Math., **292** (2016), 10-19.

[2] Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A., *Division algebras with the same maximal subfields*, Usp. Mat. Nauk. **70** (2015), no. 1, 89-122 (in Russian). English translation: Russ. Math. Surv. **70** (2015), 83-112.

[3] Meyer J. S., *Division algebras with infinite genus*, Bull. London Math. Soc. **46** (2014), no. 3, 463-468.

[4] Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A., *Linear algebraic groups with good reduction*, Res. Math. Sci. **7** (2020), no. 3, paper no. 28.

[5] Tikhonov S. V., *Division algebras of prime degree with infinite genus*, Tr. Mat. Inst. Steklova **292** (2016), 264-267 (in Russian). English translation: Proc. Steklov Inst. Math., **292** (2016), 256-259.

[6] Tikhonov S. V., *Outer forms of type A_2 with infinite genus*, Preprint arXiv:2305.01606.

Belarusian State University, Minsk (Belarus)
E-mail: tikhonovsv@bsu.by

On finite groups with formational basic subgroups of fans of Sylow subgroups

T. I. Vasilyeva

Only finite groups are considered. Let D be a subgroup of a group G. A subgroup H is called *intermediate* for D if $D \le H \le G$.

Definition [1]. A system $\{G_\alpha, N_\alpha\}$ of intermediate for D subgroups G_α and their normalizers $N_\alpha = N_G(G_\alpha)$ is called a *fan* of the subgroup D if for each intermediate subgroup H there exists a unique index α such that $G_\alpha \le H \le N_\alpha$. The subgroups G_α are called the *basic* subgroups of the fan. If there exists a fan of D, then D is called a *fan subgroup* of G.

In [**1**] it is established that any Sylow subgroup of a group is a fan subgroup.

Recall [**2**, Example IV.3.4(g)] that $\mathfrak{T}_\prec$ is the class of all Sylow tower groups of type $\prec$, where $\prec$ is an arbitrary linear ordering on the set $\mathbb{P}$ of all primes, i.e.

$\mathfrak{T}_\prec = (G \mid |G| = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$, where p_i is prime, $p_1 \prec p_2 \prec \cdots \prec p_r$, and G has a normal subgroup of the order $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ for $k = 1, 2, \ldots, r)$.

Denote by $\mathfrak{N}^2$ the class of all metanilpotent groups.

Theorem. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation such that $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}_\prec \cap \mathfrak{N}^2$. A group $G \in \mathfrak{F}$ if and only if every basic subgroup of the fan of every Sylow subgroup of G belongs to $\mathfrak{F}$.*

Corollary 1. *A group G is a Sylow tower group of type $\prec$ and metanilpotent if and only if every basic subgroup of the fan of every Sylow subgroup of G is a Sylow tower group of type $\prec$ and metanilpotent.*

Corollary 2. *A group G is a Sylow tower group of type $\prec$ and has a nilpotent derived subgroup if and only if every basic subgroup of the fan of every Sylow subgroup of G is a Sylow tower group of type $\prec$ and has a nilpotent derived subgroup.*

Corollary 3 [3]. *A group G is supersoluble if and only if every basic subgroup of the fan of every Sylow subgroup of G is supersoluble.*

Note that the group G is not always a basic subgroup of the fan of some its Sylow subgroup. For example, let $G = HK$, where the subgroup H is Z_7 and the subgroup K is equal to $\mathrm{Aut}(Z_7) \cong Z_6$. It is easy to see that the set of all basic subgroups of the fans of all Sylow subgroups of G consists of $\mathrm{Syl}(G)$ and subgroups of orders 14 and 21.

References

[1] Borevich Z. I., Arrangement of subgroups, *Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otd. Mat. Inst. AN SSSR.* **94** (1979) 5–12 [*Soviet Math.* **19**(1) (1982) 977–981].

[2] Doerk K. and Hawkes T., *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics 4 (Berlin; New York: de Gruyter, 1992).

[3] Vasilyeva T. I., Subgroups of the Fan of Sylow Subgroups and the Supersolvability of a Finite Group, *Math. Notes* **110**(2) (2021) 186–195.

Belarusian State University of Transport, Gomel (Belarus)
E-mail: tivasilyeva@mail.ru

On rational sets of solvable groups

O. A. Voronina

Research concerning applications of formal language theory and group theory is now quite popular, and many interesting results are known. Among the many classes of formal languages, rational (regular) languages occupy an important place. The work investigates rational subsets of solvable groups.

The conducted research is related to the well-known conjecture of V.A. Romankov: if in a finitely generated solvable group G all rational subsets form a Boolean algebra, then G is almost Abelian. Note that in any finitely generated almost Abelian group, all rational subsets form a Boolean algebra. The same is true for free monoids and free groups. G.A. Bazhenova proved that the class of groups with the noted property is closed with respect to free products and finite extensions. However, in the class of finitely generated solvable groups, all known examples of groups with this property are almost Abelian. G.A. Bazhenova established that any nilpotent, polycyclic, metabelian group with this property is almost Abelian [**1, 2**]. She also proved that finitely generated solvable groups of finite rank with this property are almost Abelian. In general, however, V.A. Romankov's conjecture is still open.

The main results of this work are as follows.

Theorem 1. *Let G be a finitely generated solvable group, and suppose that rational subsets of the direct product $G \times Z$ form a Boolean algebra. Then G is almost Abelian.*

As a consequence of Theorem 1, we have the following fact, Theorem 2.

Theorem 2. *If a finitely generated solvable group G decomposes into a direct product $G = G_1 \times G_2$, where both groups G_1 and G_2 are infinite, and rational subsets of the group G are a Boolean algebra, then G is almost Abelian.*

Theorem 3. *Let G be a finitely generated solvable group whose rational subsets are a Boolean algebra, and let there be such a normal Abelian subgroup A of the group G that G/A is nilpotent. Then G is almost Abelian.*

A number of other results have also been obtained.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

References

[1] Bazhenova G. A. The closeness of one class of groups with respect to a free product // Sib. Math. J. 2000. V. 41. P. 740–743.

[2] Bazhenova G. A. On rational sets in finitely generated nilpotent groups // Algebra and Logic. 2000. V. 39. P. 379–394.

M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk (Kazakhstan)
E-mail: oavy@mail.ru

A presentation of the cactus group

K. V. Zimireva

The cactus group J_n, $n \geq 2$, is generated by elements $s_{p,q}$, $1 \leq p < q \leq n$, and is defined by the following relations:

$$s_{p,q}^2 = 1,$$
$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{m,r}s_{p,q}, \quad \text{if} \quad [p,q] \cap [m,r] = \emptyset,$$
$$s_{p,q}s_{m,r} = s_{p+q-r,p+q-m}s_{p,q}, \quad \text{if} \quad [m,r] \subset [p,q].$$

The cactus group can be considered as an analogue of the braid group. Ehe cactus group first appeared in the work of S. L. Devadoss **[2]** during the study of the mosaic operad, but the definition in terms of generators and defining relations was given later. In **[1]**, Belingeri, Chemin and Lebed obtained a representation of J_n in minimal number of generators for $n \leq 4$. Also, they found the minimal number of generators for all J_n.

It is natural to formulate a question on a presentation of J_n in the minimal system of generators. We give a full answer to this question.

Theorem. The cactus group J_n, $n \geq 2$, is generated by the elements $s_{1,i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, and defined by the following relations:

$$s_{1,i}^2 = 1,$$
$$s_{1,i}s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k} = s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k}s_{1,i}, \quad i \leq j, \quad i+j \leq k,$$
$$s_{1,i}s_{1,k}s_{1,j}s_{1,k} = s_{1,i+j-k}s_{1,j}s_{1,i+j-k}s_{1,i},$$
$$4 \leq j+2 \leq i \leq n, \quad j < k < i;$$
$$2 \leq i+j-k \leq n, \quad 2k \leq i+j.$$

References

[1] Bellingeri P., Chemin H., Lebed V., Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups, arXiv:2209.08813.

[2] Devadoss S. L., Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad, Contemp. Math., **239** (1999), 91–114.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: k.zimireva@g.nsu.ru

VI. Секция «Теория колец»

О поле частных одного кольца формальных степенных рядов

Н. Ю. Галанова, М. В. Подкорытов

При изучении полей рядов Хана, которые обобщают поля рядов Пюизо и Леви-Чивиты от одной и нескольких переменных [**1**], будем использовать конструкцию полей из [**2**]. Пусть $\alpha-$ ординал, $L = \{\xi_i\}_{i\in\alpha}-$ вполне упорядоченное множество, подобное α, $G(L) = \{g = \prod\limits_{j=1}^{n} \xi_{i_j}^{q_{i_j}}, n \in \mathbb{N}, \xi_{i_j} \in L, q_{i_j} \in \mathbb{Q}\}-$ л. у. абелева делимая группа по умножению с лексикографическим порядком, продолжающим порядок, заданный на L, $\mathbb{R}[[G(L)]]-$ л.у. поле рядов Хана $u = \sum\limits_{g\in G(L)} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}$, $supp(u) = \{g \in G(L) | r_g \neq 0\}-$ инверсно вполнеупорядоченное подмножество $G(L)$, $K = qf\mathbb{R}[[G(L), \aleph_0]] = \{\frac{a_1 g_1 + \cdot + a_n g_n}{b_1 h_1 + \cdot + b_m h_m} | \ a_i, b_j \in \mathbb{R}, g_i, h_j \in G(L), n, m \in \mathbb{N}\}-$ поле частных кольца многочленов от переменных $\xi_{i_j}^{q_{i_j}}$ над полем $\mathbb{R}$. Принадлежность формального ряда u полю K соответствует представлению этого ряда в виде отношения многочленов от нескольких переменных, взятых с рациональными показателями.

Предложение 1. *Ряд u принадлежит полю K тогда и только тогда, когда* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists\, \xi = t^{-1} \in L, \exists\, \widetilde{L} = \{\xi_0, \xi_{i_1}, ..., \xi_{i_s}\} \subset L \setminus \{\xi\}, s \in \mathbb{N}$ *такие, что* $u \in k(t^{\frac{1}{n_0}})$, *где* $k = qf\mathbb{R}[[G(\widetilde{L}), \aleph_0]]$.

Следствие. *Если* $t^{-1} \in L$, *то* $\sqrt{1+t} \in \overline{K} \backslash K$, $e^t \notin K$, *где* $\overline{K}-$ *вещественное замыкание* K. *Таким образом, поле* K *не является вещественно замкнутым.*

В [**3**] при исследовании связи между строением корней многочленов и носителями их коэффициентов для полей Хана, J. F. Knight и K. Lange ввели понятие tc-базиса с соответствующей канонической последовательностью подполей.

Предложение 2. Множество L является tc-базисом поля $\overline{K}$ с соответствующей канонической последовательностью подполей $\{R_i\}_{i\in\alpha}$ такой, что $\bigcup\limits_{i\in\alpha} R_i = \overline{K}$, где $R_1 = \overline{\mathbb{R}(\xi_1)}$, $R_i = \overline{R_{i-1}(\xi_i)}$, $R_i = \bigcup\limits_{j<i} R_j$ для предельного $i \in \alpha$.

Литература

[1] *Comicheo A. B., Shamseddine K.* Summary on non-Archimedean valued fields. Contemporary Mathematics. V.704, 1-36 (2018). http://dx.doi.org/10.1090/conm/704/14158.

[2] Галанова Н. Ю. Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 5–16. doi:10.17223/19988621/83/1

[3] Knight J. F., Lange K. Lengths of developments in K((G)). Selecta Mathematica(2019). 25:14. https://doi.org/10.1007/s00029-019-0448-0.

ТГУ, Томск (Россия)
E-mail: galanova@math.tsu.ru, maximthegreate@yandex.ru

О некоторых изоморфизмах для алгебр инцидентности и групповых алгебр

И. В. Дудин

Все встречающиеся в тексте кольца - ассоциативные с ненулевой единицей. При этом считаем, что кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом T.

Обратим внимание на то, что $I(X,R)$ является $R{-}R$-бимодулем, а тензорное произвдение $I(X,R)\otimes_R R[G]$ и групповое кольцо $I(X,R)[G]$ являются левыми $I(X,R)$-модулями.

Для алгебры инцидентности $I(X,R)$ и групповой алгебры $R[G]$ были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо. Существует канонический изоморфизм левых $I(X,R)$-модулей и R-алгебр*

$$I(X,R)\otimes_R R[G] \longrightarrow I(X,R)[G].$$

Теорема 2. *Имеется канонический инъективный гомоморфизм левых $I(X,R)$-модулем и T-алгебр*

$$\epsilon : I(X,R)[G] \longrightarrow I(X,R[G]).$$

Если G — группа или X — конечное множество, то ϵ — изоморфизм.

Следствие 1. *Пусть R — коммутативное кольцо. Существует инъективный гомоморфизм левых $I(X,R)$-модулей и R-алгебр*

$$I(X,R)\otimes_R R[G] \longrightarrow I(X,R[G]).$$

Если либо G — конечная группа, либо X — конечное множество, то получаем изоморфизм.

Следствие 2. *Пусть X — конечное предупорядоченное множество, R — коммутативное кольцо. Следующие три R-алгебры попарно изоморфны: $M(n,B,R)\otimes_R R[G]$, $M(n,B,R)[G]$, $M(n,B,R[G])$.*

Замечание. Полученные результаты допускают обобщение в различных направлениях. Так, если R и S — коммутативные T-алгебры, то существует изоморфизм T-алгебр

$$I(X,R)\otimes_T S[G] \longrightarrow I(X,R\otimes_T S)[G].$$

А для произвольных T-алгебр R и S и их некоторого гомоморфизма $R \longrightarrow S$ имеется гомоморфизм T-алгебр

$$I(X,R)[G] \longrightarrow I(X,S[G]).$$

Соответствующим образом можно усилить и следствие 2.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-21-00375, https://rscf.ru/project/23-21-00375/

Томский государственный университет, Томск (Россия)
E-mail: dudin@mail.tsu.ru

О классах эквивалентности матриц над конечным полем нечетной характеристики

Е. В. Журавлев

Пусть $M_1, M_2, M_3, M_1', M_2', M_3' \in M_2(F)$, $F = GF(p^r)$ – конечное поле, p – простое число, $p \neq 2$, $r \in \mathbb{N}$. Упорядоченные последовательности матриц (M_1, M_2, M_3) и (M_1', M_2', M_3') назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ и $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ над полем F такие, что

$$\begin{cases} P^T\left(q_{11}M_1 + q_{12}M_2 + q_{13}M_3\right)P = M_1'; \\ P^T\left(q_{21}M_1 + q_{22}M_2 + q_{23}M_3\right)P = M_2'; \\ P^T\left(q_{31}M_1 + q_{32}M_2 + q_{33}M_3\right)P = M_3'. \end{cases} \tag{1}$$

В работах **[1, 2]** были найдены классы эквивалентности для последовательностей из одной и двух матриц. В работе **[3]** автор нашел классы эквивалентности для троек матриц при конкретных значениях p с помощью программы Matlab. В настоящей работе задача решена в общем случае для матриц над полем характеристики $p \neq 2$.

Пусть δ – некоторый фиксированный элемент из F^*, такой, что $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$. Если $\varepsilon = 1$ (соотв. $\varepsilon = \delta$), то для каждого $f \in F$ (соотв. $f \in F^*$) найдем ненулевое решение (x, y) уравнения $x^2 - \varepsilon y^2 = f$. Обозначим Ω_ε множество найденных таким образом элементов из $F \times F$. Кроме того, пусть σ пробегает множество представителей смежных классов $F^*/\{\pm 1\}$.

Теорема. *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на тройках матриц порядка два посредством соотношения (1):*

1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & z\\ -z & 1\end{pmatrix}, z \in F;$

3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

5) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \beta \in F^*;$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$

7) $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ -\alpha & \varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1+\beta\\ 1-\beta & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\}, (\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon;$

8) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

9) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$

10) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$

11) $\begin{pmatrix}1 & \sigma\\ -\sigma & \varepsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\};$

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Литература

[1] Williams G.D., Congruence of (2×2) matrices, Discrete Math., **224** (2000), 293–297.

[2] Gorbas B., Williams G.D., Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic $\neq 2$), Pacific Journal of Mathematics, **188**:2 (1999), 225–235.

[3] Chikunji C.J., Using Matlab to solve a classification problem in finite rings, 2^{nd} international conference on the teaching of mathematic (Greece), (2002) http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap252.pdf.

Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

Простые алгебры Новикова — Пуассона

А. С. Захаров

Многообразие алгебр Новикова было введено независимо в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман и работе А. А. Балинского и С. П. Новикова. Простые алгебры Новикова изучались в работах Е. И. Зельманова, В. Т. Филиппова, Дж. М. Осборна, С. Су и др. Для изучения тензорной теории алгебр Новикова С. Су ввел понятие алгебр Новикова — Пуассона.

Возникает естественный о строении простых алгебр Новикова — Пуассона. Зафиксируем обозначение $A^2 = A \cdot A$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2, $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — простая алгебра Новикова — Пуассона и $A^2 = A$. Тогда $\langle A, \circ \rangle$ — простая или $A \circ A = 0$.*

Следствие 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики 0. Тогда $\langle A, \cdot \rangle$ — поле $\mathbb{F}$, а также $a \circ b = \lambda ab$.*

Следствие 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики $p > 2$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра*

$$x_i \circ x_j = \binom{i+j+1}{j} x_{i+j} + \delta_{i,-1}\delta_{j,-1}\alpha x_{p^n-2} + \delta_{i,-1}\delta_{j,0}\beta x_{p^n-2},$$

а ассоциативное коммутативное умножение задано формулой

$$a \cdot b = \xi * a * b,$$

где $\xi \in A$ и умножение $*$ задано формулой

$$x_i * x_j = \binom{i+j+2}{i+1} x_{i+j+1}. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 21-11-00286).

Литература

[1] Gelfand I. M., Dorfman I. Ya. Hamiltonian operators and algebraic structures related tothem. Funktsional. Anal. i Prilozhen 13 (1979), no. 4, 13–30.

[2] Balinskii A. A., Novikov S. P. Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR 283 (1985), no. 5, 1036–1039.

[3] Zelmanov E. I. A class of local translation-invariant Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR 292 (1987), no. 6,1294–1297.

[4] Filippov V. T. A class of simple nonassociative algebras. *Mat. Zametki* 45(1):101–105.

[5] Osborn J. M. Simple Novikov algebra with an idempotent. Comm. Algebra 20 (1992) no. 9, 2729–2753.

[6] Xu X. On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules, J. Algebra, **185** (1996), 905–934.

НГТУ, НГУ, Новосибирск (Россия)
E-mail: antzakh@gmail.com

О шпехтовости неассоциативных алгебр, удовлетворяющих тождеству $x(yz) = 0$

А. В. Кислицин

Пусть F — некоторое поле, $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$ — многообразие левонильпотентных F-алгебр индекса 3. Линейную алгебру, все тождества которой не следуют из конечного набора тождеств, будем называть *не конечно базируемой* или коротко — *НКБ-алгеброй*.

В 1976 г. С. В. Полин для любого конечного поля F построил пример конечной НКБ-алгебры над полем F, удовлетворяющей тождеству $x(yz) = 0$ [**1**]. Позднее в 1977 г. Ю. Н. Мальцевым и В. А. Парфеновым был построен пример пятимерной алгебры из многообразия $\mathfrak{P}$ над полем нулевой характеристики и явно указан ее бесконечный неприводимый базис тождеств [**2**]. В 1978 г. И. В. Львов построил пример шестимерной НКБ-алгебры $\overline{V} = V \oplus E \in \mathfrak{P}$, где V — конечномерное векторное пространство, E — (под)пространство линейных преобразований пространства V [**3**]. В [**4, 5**] указан пример четырехмерной неассоциативной НКБ-алгебры из $\mathfrak{P}$ над полем нулевой характеристики, а также над конечным полем.

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании двумерных НКБ-алгебр в многообразии $\mathfrak{P}$.

Теорема. *Шпехтовость многообразия, порожденного любой двумерной алгеброй, удовлетворяющей тождеству $x(yz) = 0$, равносильна шпехтовости многообразия линейных алгебр $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0, xy[z,t] = 0\rangle$.*

Известно, что многообразие $\mathfrak{N} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0, x[y,z]t = 0\rangle$ шпехтово. Кроме того, подмногообразие $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0, x[y,z]t = t[y,z]x, \mathrm{St}_3(x,y,z) = 0\rangle$ многообразия $\mathfrak{M}$ шпехтово [**6**].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 22-21-00745).

Литература

[1] Полин С. В. О тождествах конечных алгебр. Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17. № 6. С. 1356–1366.

[2] Мальцев Ю. Н., Парфенов В. А. Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств. Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 6. С. 1420–1421.

[3] Львов И. В. Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств. Сибирский математический журнал. 1978. Т. 19. № 1. С. 91–99.

[4] Исаев И. М., Кислицин А. В. Тождества векторных пространств, вложенных в линейные алгебры. Сибирские электронные математичесике известия. 2015. Т. 12. С. 328–343.

[5] Исаев И. М., Кислицин А. В. О тождествах векторных пространств, вложенных в конечные ассоциативные алгебры. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 69–77.

[6] Исаев И. М. Об объединении шпехтовых многообразий алгебр. Сибирские электронные математичесике известия. 2018. Т. 15. С. 1498–1505.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск (Россия)
Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул (Россия)
E-mail: kislitsin@altspu.ru

Системы образующих колец инцидентности

Н. А. Колегов

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, n — натуральное число, $n \geq 2$. Обозначим через $M_n(R)$ кольцо всех $n \times n$ матриц с элементами в кольце R. Для натуральных чисел i, j от 1 до n пусть E_{ij} — соответствующая матричная единица кольца $M_n(R)$. Рассмотрим произвольный частичный порядок $\preceq$ на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Положим

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i \preceq j} r_{ij} E_{ij} \mid r_{ij} \in R \right\} \subseteq M_n(R).$$

Тогда $\mathcal{A}$ является подкольцом в $M_n(R)$, его называют *кольцом инцидентности*, см. классическую монографию [**4**]. Доклад будет посвящен изложению основных результатов работы [**1**]. Были получены обобщения ряда фактов о порождающих подмножествах со случая алгебр инцидентности над полем [**2, 3**].

Доказан критерий, когда подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$ порождает кольцо инцидентности $\mathcal{A}$. Критерий формулируется в терминах проекций на 2×2 подматрицы. В качестве следствия получены необходимые и достаточные условия на подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$, при которых S вместе со всеми скалярными матрицами порождает $\mathcal{A}$. В случае, когда кольцо R просто или полулокально, получена формула для минимальной мощности такого множества S.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Марковой Ольге Викторовне за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

[1] Kolegov N.A., On generators of incidence rings over finite posets. J. Algebra, Vol. 619, 2023, p. 686–706.

[2] Колегов Н.А., Маркова О.В., Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями. Зап. научн. семин. ПОМИ, том 472, 2018, с. 120–144; translation in J. Math. Sci., Vol. 240, 2019, p. 783–798.

[3] Longstaff W.E., Rosenthal P., Generators of matrix incidence algebras. Australas. J. Combin., Vol. 22, 2000, p. 117–121.

[4] Spiegel E., O'Donnel C.J., Incidence algebras. Pure and Applied Mathematics, A series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, 1997.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва (Россия)
E-mail: na.kolegov@yandex.ru

О решеточной определяемости полулокальных колец

С. С. Коробков

Пусть R и R^φ — ассоциативные кольца с изоморфными решётками подколец $L(R)$ и $L(R^\varphi)$ соответственно. Изоморфизм φ решётки $L(R)$ на решётку $L(R^\varphi)$ будем называть *решёточным изоморфизмом* (иначе *проектированием*) кольца R на кольцо R^φ. Будем говорить, что кольцо R *решёточно определяется,* если из изоморфизма решёток $L(R)$ и $L(R^\varphi)$ всегда следует изоморфизм самих колец R и R^φ. Следуя [**1**], назовём конечное кольцо R с единицей *полулокальным (примарным)* кольцом, если $R/\operatorname{Rad} R \cong M_n(GF(p^k))$. Согласно [**2**] конечное кольцо R с единицей тогда и только тогда является полулокальным кольцом, когда $R \cong M_n(K)$, где K — конечное локальное кольцо.

Продолжается изучение решёточных изоморфизмов полулокальных колец, начатое в [**3**]. В [**4**] было доказано, что если $R = M_n(K)$ — полулокальное кольцо и φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ, то $R^\varphi = M_n(K')$ и при этом K' — локальное кольцо, решёточно изоморфное кольцу K. В силу теоремы единственности [**5**, теорема 3, с. 92] для доказательства изоморфизма $M_n(K) \cong M_n(K')$ требуется установить изоморфизм между кольцами K и K'. В настоящее время известно (см. [**6**]), что полулокальные кольца, рассматриваемые над кольцами Галуа, определяются своими решётками подколец. Очевидно, что если локальное кольцо K определяется своей решёткой подколец, то и полулокальное кольцо $M_n(K)$ также решёточно определяется. Однако, кольцо K может и не определятся своей решёткой подколец, но при этом кольцо $M_n(K)$ будет решёточно определяющимся. Новые примеры таких колец даёт следующая теорема:

Теорема. *Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца $R = M_n(K)$, где K — однопорождённое локальное кольцо простой характеристики. Тогда $R \cong R^\varphi$.*

Литература

[1] McDonald B. R., Finite rings with identity, New York, Marcel Dekker, 1974.

[2] Елизаров В. П., Конечные кольца. Основы теории, Гелиос, М., 2006.

[3] Коробков С. С., Решёточная определяемость некоторых матричных колец, Матем. сб., 208:1 (2017), 97–110.

[4] Коробков С. С., Проектирования полулокальных колец, Алгебра и логика, 61, № 2 (2022), 180—200.

[5] Джекобсон Н., Строение колец, ИИЛ, М., 1961.

[6] Коробков С. С., Проектирования конечных ненильпотентных колец, Алгебра и логика, 58, № 1 (2019), 69—83.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург (Россия)
E-mail: ser1948@gmail.com

О коммутативных сильно консервативных алгебрах

А. В. Кухарев

Консервативные алгебры были введены И. Кантором в [**1**]. Рассмотрим алгебру (V, B), заданную на векторном пространстве V с умножением $B : V \times V \to V$. Пусть L_a — оператор умножения слева: $L_a(x) = B(a, x)$ $(x \in V)$.

Алгебра (V, B) называется *консервативной*, если существует другое умножение B^* (называемое *ассоциированным* с B) на том же векторном пространстве V, такое что

$$[[L_a, [L_b, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B] \quad \text{для всех } a, b \in V, \tag{1}$$

где коммутатор линейного C и билинейного B операторов определяется как

$$[C, B](x, y) = C(B(x, y)) - B(C(x), y) - B(x, C(y)).$$

Консервативную алгебру (V, B) назовем *сильно консервативной*, если ассоциированное умножение B^* совпадает с исходным умножением B этой алгебры.

Легко проверить, что все ассоциативные и квази-ассоциативные алгебры, а также алгебры Ли и алгебры Лейбница являются сильно консервативными (см., например, [**3**]). Примером консервативных, но не сильно консервативных алгебр, являются алгебры Зимбеля.

И. Кантором также было введено понятие терминальных алгебр и показано, что множество коммутативных терминальных алгебр совпадает с множеством (коммутативных) алгебр Йордана [**2**]. При этом каждая терминальная алгебра является консервативной, однако обратное не верно.

В настоящей исследовании показано, что каждая коммутативная терминальная алгебра является коммутативной сильно консервативной алгеброй, а каждая коммутативная сильно консервативная алгебра является алгеброй Йордана. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1) A — алгебра Йордана.

2) A — коммутативная терминальная алгебра.

3) A — коммутативная сильно консервативная алгебра.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект 19-71-10017).

Литература

[1] Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Том 16. С. 407–499.

[2] Kantor I. On an extension of a class of Jordan algebras // Algebra and Logic. 1989. Vol. 28. № 2. P. 117–121.

[3] Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Y. Conservative algebras of 2-dimensional algebras // Linear Algebra and its Applications, 486 (2015), 255-274.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: kukharev.av@mail.ru

Обобщение конструкции Мицухары для прелиевых алгебр

А. П. Пожидаев

Алгебра A называется *левосимметрической*, если ассоциатор на A является левосимметричным: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in A$, где $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$.

А. Мицухара ввел конструкцию расширения левосимметрической алгебры при помощи нильпотента степени 2 или идемпотента. Данная конструкция позволяет строить новые простые левосимметрические алгебры, исходя даже из довольно вырожденных алгебр. Нами изучена конструкция Мицухары для матричной алгебры, эндоморфов и алгебр Бурдэ. В частности, показано, что все простые алгебры Бурдэ получаются при помощи данной конструкции из алгебр с нулевым умножением. В работе также построены различные обобщения конструкции Мицухары и новые примеры простых левосимметрических алгебр, в частности, простой дубль Витта ассоциативной коммутативной унитальной алгебры с дифференцированием.

Одно из обобщений конструкции Мицухары выглядит следующим образом. Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное симметрическое отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto Der(A)$ такие, что

$$D_b(x) \circ y + x \circ D_b(y) = b(x \circ y),$$
$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz)$$

для любых $x, y, z \in A$, $b \in B$. Рассмотрим прямую сумму $A \oplus B$, где B является подалгеброй, а оставшиеся произведения определены правилами

$$b \cdot x = D_b(x), \quad x \cdot b = 0, \quad x \cdot y = xy + x \circ y \tag{1}$$

для всех $x, y \in A$, $b \in B$. Обозначим полученную алгебру через $A \circ_D B$.

Теорема 1. *Алгебра $A \circ_D B$ является левосимметрической.*

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d; $\mathcal{B} := \bar{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ с классическим левосимметрическим умножением $\bar{x} \star \bar{y} = \overline{xd(y)}$; ϕ — естественное вложение $\mathcal{A}$ в $\bar{\mathcal{A}}$: $\phi(a) = \bar{a}$. Определим $D : \mathcal{B}^{(-)} \mapsto Der(\mathcal{A})$ правилом $D(\bar{a}) = ad$. Обозначим полученную алгебру $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$ с умножением (1) через $\mathcal{A}_d$ и назовем *дублем Витта* алгебры $\mathcal{A}$. По теореме 1 $\mathcal{A}_d$ является левосимметрической алгеброй.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная ассоциативная коммутативная алгебра над полем F. Алгебра $\mathcal{A}_d$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d-простой.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00286.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: app@math.nsc.ru

Тождества супералгебры Капланского

А. В. Попов

Супералгебра Капланского $K = K_0 \oplus K_1$, где $K_0 = \mathbb{F}e$, $K_1 = \mathbb{F}a + \mathbb{F}b$, определяется как коммутативная супералгебра со следующими правилами умножения элементов:

$$e^2 = e, \quad ea = \frac{1}{2}a, \quad eb = \frac{1}{2}b, \quad ab = e.$$

Супералгебра K йорданова, т. е. ее грассманова оболочка

$$G(K) = G_0 \otimes K_0 \oplus G_1 \otimes K_1$$

удовлетворяет тождествам коммутативности и йордановости $x^2yx = x^2(yx)$.

Кроме того, супералгебра K проста. В частности, алгебра $G(K)$ порождает одно из T-первичных многообразий йордановых алгебр, описание которых играет важную роль в изучении структуры многообразий йордановых алгебр.

Рассмотрим свободную йорданову супералгебру $\mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[Y, Z]$, где $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ и $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ — множества четных и нечетных порождающих соответственно. Элемент $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[Y, Z]$ называется градуированным тождеством йордановой супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$, если $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A_0$ и $b_1, \ldots, b_m \in A_1$.

Теорема 1. *Следующие градуированные тождества образуют базис градуированных тождеств супералгебры K:*

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3 - y_1(y_2y_3) &= 0, \\ 2zy_1y_2 - z(y_1y_2) &= 0, \\ 2yz_1z_2 - y(z_1z_2) &= 0, \\ z_1z_2z_3 + z_2z_3z_1 + z_3z_1z_2 &= 0, \\ z_1z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4z_2 + z_1z_4z_2z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Литература

[1] Шестаков И. П. Альтернативные и йордановы супералгебры // *Труды X Сибирской Школы "Алгебра и Анализ"*. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. С. 157-169.

Ульяновск (Россия)
E-mail: klever176@rambler.ru

Альтернативные и йордановы Ли-нильпотентные алгебры

С. В. Пчелинцев

В [**1**] было начато изучение альтернативных Ли-нильпотентных алгебр. Напомним, что альтернативная алгебра A называется *Ли-нильпотентной* индекса n, если её коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ нильпотентна индекса n.

Следуя см. [**2**], глава VIII, с каждой йордановой алгеброй J можно связать тройную лиеву систему $T(J)$ (сокращенно, ТЛС), считая, что тернарная композиция $[xyz]$ совпадает с ассоциатором (x, y, z). Йорданову алгебру J мы называем *Ли-нильпотентной* индекса $2n+1$, если ТЛС $T(J)$ нильпотентна индекса $2n+1$.

Изучаются альтернативные и йордановы Ли-нильпотентные алгебры с единицей над кольцом скаляров Φ, содержащим элемент $\frac{1}{6}$.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть J — специальная йорданова алгебра, A — её ассоциативная обертывающая. Если алгебра J Ли-нильпотентна индекса $2n+1$, то алгебра A Ли-нильпотентна того же индекса $2n+1$.*

Теорема 2. *Пусть A — альтернативная алгебра Ли-нильпотентная индекса m. Тогда ее алгебра правых умножений A^* Ли-нильпотентна индекса $\leq m$.*

Теорема 3. *Йорданова алгебра Ли-нильпотентна индекса $2n+1$ тогда и только тогда, когда её алгебра умножений Ли-нильпотентна индекса $2n$.*

В качестве следствий доказано, что

а) любое многообразие Ли-нильпотентных йордановых алгебр имеет полиномиальный рост коразмерностей;

б) многообразие $\mathrm{Alt}^{(l)}$ альтернативных Ли-нильпотентных алгебр индекса l имеет экспоненциальный рост коразмерностей. Более точно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$ верно неравенство $c_n\left(\mathrm{Alt}^{(l)}\right) \leq 5^n$.

Последний результат является аналогом теоремы Регева для ассоциативных PI-алгебр [**3**].

Литература

[1] Пчелинцев С. В., Теоремы о произведении для альтернативных алгебр и некоторые их применения, Сиб. Мат. Журн., 64:2 (2023), 383–404.

[2] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, 39, American Math. Soc., 1968.

[3] Regev A., Existence of polynomial identities in $A \otimes B$, Bull. Amer. Math. Soc., 77:6 (1971), 1067–1069.

Фининсовый университет при Правительстве РФ, Москва (Россия)
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Неассоциативные обертывающие алгебры нильтреугольных алгебр Шевалле

Н. Д. Ходюня

Ассоциативное кольцо A всегда превращается в кольцо Ли $A^{(-)}$, если умножение в A заменим новым $[a, b] := ab - ba$ (коммутирование). А. А. Альберт [**1**] называет произвольную алгебру A (не обязательно ассоциативную) *Ли-допустимой*, когда $A^{(-)}$ есть алгебра Ли. Согласно [**2**] и [**3**], A называется *точной обертывающей* алгебры Ли L, если $A^{(-)} \simeq L$.

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ и базой, состоящей из элементов e_r ($r \in \Phi$) и подходящей базы подалгебры Картана. Как показано в [**4**, § 4.2], структурные константы базы Шевалле однозначно определяет их выбор для *нильтреугольной* подалгебры $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$.

В докладе будут представлены исследования записанных в 2001 году проблем комбинаторного перечисления идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ [**5**, Проблемы 1 и 2] и перечислены условия однозначности ее точной обертывающей алгебры, полученные в [**6**].

Литература

[1] Albert A. A., Power-Associative Rings, Trans. Amer. Math. Soc., 64 (1948), No. 3, 552–593.

[2] Левчук В. М., Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы, Докл. Акад. наук, 478 (2018), No. 2, 137–140.

[3] Левчук В. М., Сулейманова Г. С., Ходюня Н. Д., Неассоциативные обертывающие алгебр Шевалле, Труды ИММ УрО РАН, 26 (2020), No. 3, 91–100.

[4] Carter R., Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972.

[5] Egorychev G. P., Levchuk V. M., Enumeration in the Chevalley algebras, ACM SIGSAM Bulletin, 35 (2001), No. 2, 20–34.

[6] Egorychev G. P., Levchuk V. M., Suleimanova G. S., Khodyunya N. D., Enveloping algebras and ideals of niltriangular subalgebra of Chevalley algebra, Siberian Math. J., 64 (2023), No. 2, 292–311.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: nkhodyunya@gmail.com

Об абелевых группах с разрешимыми лиевыми кольцами эндоморфизмов

А. Р. Чехлов

Через $Z(n)$ обозначена циклическая группа порядка n, $Z(p^\infty)$ — квазициклическая p-группа, Q — аддитивная группа рациональных чисел, $r(G)$ — ранг группы G, а $t(B)$ — тип однородной группы без кручения B. Хорошо известно, что если вместо умножения в кольце эндоморфизмов $E(G)$ абелевой группы G взять операцию *коммутирования* $\alpha \circ \beta = [\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$, то получим *лиево кольцо эндоморфизмов* $L = L(G)$ группы G. Если $L^{(0)} = L$, а $L^{(1)} = \langle L \circ L \rangle$ — идеал кольца L, порожденный всеми коммутаторами $[\alpha, \beta]$, где $\alpha, \beta \in L$, то $L^{(n+1)} = \langle L^{(n)} \circ L^{(n)} \rangle$ — $n+1$-*коммутант кольца* L. Будем говорить, что группа G *L-разрешима*, если для лиева кольца ее эндоморфизмов L имеем $L^{(n)} = 0$ при некотором целом числе $n \geq 1$. Ясно, что прямые слагаемые L-разрешимых групп L-разрешимы, подгруппы в общем случае нет.

Предложение 1. *Периодическая группа является L-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая ее примарная компонента L-разрешима.*

Предложение 2. *Пусть G — прямая сумма циклических групп. Тогда G является L-разрешимой группой тогда и только тогда, когда $G = T \oplus R$, где T — L-разрешимая периодическая часть группы G, а $R = 0$ или $R \cong Z$.*

Предложение 3. *Делимая группа G является L-разрешимой тогда и только тогда, когда $G = T \oplus D$, где $D = 0$ или $D \cong Q$, а T — делимая периодическая группа, каждая ненулевая p-компонента которой изоморфна группе $Z(p^\infty)$.*

Показано, что изучение L-разрешимых групп сводится к редуцированным группам.

Теорема 1. *Ненулевая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения является L-разрешимой тогда и только тогда, когда она изоморфна группе $\prod_p \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — аддитивная группа целых p-адических чисел.*

Теорема 2. *Редуцированная сепарабельная группа без кручения G является L-разрешимой тогда и только тогда, когда G не содержит ненулевых прямых слагаемых, изоморфных группам вида $A \oplus A$, и удовлетворяет следующему условию: существует такое натуральное число n, что для всякого прямого слагаемого $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ группы G с условием $r(B_i) = 1$ и $t(B_1) < \cdots < t(B_m)$ следует, что $m \leq n$.*

Можно указать ступени L-разрешимости изучаемых групп. Так, если в предложении 3 обе группы T и D ненулевые, то ступень L-разрешимости группы G равна 2; а ступень L-разрешимости группы G в теореме 2 равна n, если n совпадает с наименьшей из длин возрастающих цепей типов прямых слагаемых группы G ранга 1.

Работа выполнена при поддержки Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Томский госуниверситет, Томск (Россия)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Specht type problems and Gelfand Conjecture

A. J. Belov

This is a joint work with Anton Khoroshkin, Ivan Vorobiev and Lucio Centrone.

Let $\mathcal{W}_n$ be the Lie algebra of formal vector fields on the n-dimensional plane and by $\mathcal{W}_n^{pol}$ the Lie algebra of polynomial vector fields on the plane. The Lie subalgebra of linear vector fields $\{x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\}$ is denoted by $\mathfrak{gl}_n$. We have the following decomposition of $\mathfrak{gl}_n$ modules:

$$\mathcal{W}_n \sim \prod_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*; \quad \mathcal{W}_n^{pol} \sim \oplus_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V^*$$

The subalgebras of finite codimension $\oplus_{k=d}^{\infty} S^k V \otimes V^*$ are called the basic subalgebras and are denoted by $L_d(n)$. With each irreducible $\mathfrak{gl}_n$-representation V_λ one associates the irreducible $L_0(n)$-module V_λ with the trivial action of subalgebra $L_1(n) \subset L_0(n)$. The induced and coinduced modules

$$\mathcal{T}_\lambda := Ind_{L_0(n)}^{W_n} V_\lambda = U(\mathcal{W}_n^{pol}) \otimes_{U(L_0(n))} V_\lambda \simeq \oplus_{k=0}^{\infty} S^k V \otimes V_\lambda,$$

$$\mathcal{T}_\lambda^* := CoInd_{L_0(n)}^{W_n} V_\lambda = Hom_{U(L_0(n))}(U(W_n), V_\lambda)$$

of the Lie algebras W_n^{pol} and W_n correspondingly are called the modules of tensor fields.

Conjecture. (I.M.Gelfand) *For all k and n the continious cohomology $H^k(W_n; \mathcal{T}_\lambda^*)$ as well as the Lie algebra homology $H_k(W_n^{pol}, \mathcal{T}_\lambda)$ are finite-dimensional for all k and λ.*

Note that thanks to the Chevalley–Eilenberg complex $C^\bullet(\mathfrak{g}; M) = Hom(\Lambda^k \mathfrak{g}; M)$ that computes the Lie algebra cohomology, it is enough to prove the following

Theorem 1. *For any collection of weights $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ the tensor product of W_n-modules $\mathcal{T}_{\lambda_1} \otimes \ldots \mathcal{T}_{\lambda_r}$ is a Noetherian $L_0(n)$-module.*

This theorem can be deduced from the following

Theorem 2. *With polynomials in two variables over field of zero characteristics, one can do the following operations Suppose there are or have already been derived polynomials P_1, P_2. Then the following polynomials are output:*

$$\lambda P_1, \qquad P_1 + P_2; \qquad P_1(R(x_1), \ldots, R(x_n)),$$

where R is an arbitrary polynomial in one variable, independent on i.

Then any system of polynomials is deduced from a finite subsystem.

Remark. Same question for positive characteristics fails if $n > 1$.

Moscow State University, Moscow (Russia)

Nonunital decompositions of $M_3(\mathbb{C})$ into a sum of two subalgebras

V. Yu. Gubarev

Let R be a ring, suppose that $R = R_1 + R_2$, where R_1, R_2 are subrings of R. In this situation, we say that R decomposes into a sum of R_1, R_2. The study of decompositions of associative rings started in 1963, when O.H. Kegel proved [**4**] that an associative algebra decomposed into a sum of two nilpotent subalgebras is nilpotent.

It is natural to study decompositions involved matrix algebras. In 1999, Y.A. Bahturin and O.H. Kegel [**1**] described all algebras decomposed as a sum of two matrix algebras. In [**2**], all direct decompositions of $M_2(\mathbb{C})$ were classified.

In [**3**], all direct decompositions of $M_3(\mathbb{C})$ such that one of the subalgebras contains the identity matrix were classified (71 cases). In the current work we finish a classification of direct decompositions of $M_3(\mathbb{C})$. Joint with the articles [**2, 3**], we complete the description of all Rota—Baxter operators of nonzero weight on $M_3(\mathbb{C})$.

Theorem 1. *Every direct decomposition of $M_3(\mathbb{C})$ with two subalgebras of the dimensions 3 and 6 not containing the identity matrix, up to transpose and up to action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$ is isomorphic to one of the following cases:*

(A1) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{21}, e_{31}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33}\}$,

(A2) $\mathrm{Span}\{e_{11} + e_{22}, e_{21}, e_{31}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33}\}$,

(A3) $\mathrm{Span}\{e_{11} + e_{22}, e_{21} + e_{22}, e_{31}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33}\}$.

Theorem 2. *Every direct decomposition of $M_3(\mathbb{C})$ with two subalgebras of the dimensions 4 and 5 not containing the identity matrix, up to transpose and up to action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$ is isomorphic to one of the following cases:*

(B1) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$,

(B2) $\mathrm{Span}\{e_{11} + e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$,

(B3) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{22} + e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$,

(B4) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32} + e_{23}, e_{22} + e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$;

(B5) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{11} + e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$,

(B6) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{22}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$,

(B7) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{11} + e_{31}, e_{12} + e_{32}, e_{22}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$,

(B8) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}, e_{22} + e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$,

(B9) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32} + e_{23}, e_{22} + e_{33}\} \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$.

References

[1] Bahturin Y. A., Kegel O. H., Sums of simple subalgebras, J. Math. Sci. **93** (6) (1999), 830–835.

[2] Goncharov M., Gubarev V., Rota-Baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three, Linear Multilinear A. (6) **70** (2022), 1055–1080.

[3] Gubarev V., Unital decompositions of the matrix algebra of order three, Commun. Algebra (11) **49** (2021), 4980–5005.

[4] Kegel O. H., Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe, Math. Ann. **149** (1963), 258–260.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vsevolodgu@math.nsc.ru

Free Bol loops and corresponding groups

A. N. Grishkov

By definition a (right) Bol loop B is a set with binary operation $(.)$ such that for every $a, b, c \in B$ we have $a.((b.c).b) = ((a.b).c).b$ and there exists unique solution $d \in B$ $(f \in B)$ of equation $a.x = b$ $(y.a = b)$. Moreover, there exists a unit $e \in B : e.a = a.e = a$.

For every Bol loop we can construct the corresponding group of right multiplications $G = Mult_r(B)$ generated by operators $R_B = \{R_x \mid x \in B\}$, $R_x : B \to B, a \to x.a$.

Let $B_{n,m}$ be a free Bol loop with generators $x_1, \ldots, x_m$ and identity $x^n = 1$.

Theorem 1. *The group $G_m = Mult_r(B_{2,m})$ is a free product of infinite (if $m > 1$) set of cyclic groups of order two.*

Theorem 2. *Let N_m be a free Bol loop of exponent two nilpotent of class two with m generators. Then $|N_m| = 2^{b_m}$, where $b_m = 2^m(m-1) - \frac{m(m-1)}{2} + 1$.*

Problem 1 (G.Nagy)**.** Is the loop $B_{3,m}$ finite?

Problem 2. Is the group $Mult_r(B_{3,m})$ locally finite?

University of Saõ Paulo, Saõ Paulo (Brasil); Omsk State University, Omsk (Russia)
E-mail: shuragri@gmail.com

Monomial Rota–Baxter operators of weight zero on $F[x, y]$

A. F. Khodzitskii

Given an algebra A over a field F, a linear operator R on A is called a Rota—Baxter operator, if the following relation

$$R(a)R(b) = R\big(R(a)b + aR(b) + \lambda ab\big)$$

holds for all $a, b \in A$. Here $\lambda \in F$ is a fixed scalar called a weight of R. Rota—Baxter operator is an algebraic generalization of the integral operator.

Let X be a set of variables, then a linear operator L on $F[X]$ is called monomial, if $L(t) = \alpha_t z$ for any $t \in F[X]$ and some $z \in F[X]$, $\alpha_t \in F$. Monomial Rota—Baxter operators on $F[x]$ appeared in [**1**], and such operators on $F[x]$ were described in [**2**].

Let A be an algebra over a field F, then a linear operator T on A is called averaging operator, if the relations $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$ hold for all $a, b \in A$.

We find connections between averaging and Rota—Baxter operators. In particular, we have found the conditions under which it is possible to construct a Rota—Baxter operator by an averaging operators and vice versa on $F[X]$.

Define $F_0[x, y] = F[x, y] \setminus F^*$. In [**3**], a class of Rota—Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators which are homomorphisms was described. In the case of Rota—Baxter operators of weight 0 on $F_0[x, y]$ ($F[x, y]$) we consider the similar class of operators. Let T be an averaging operator of the form

$$T(x^n y^m) = \alpha_{n,m} x^{\alpha n + \beta m + \gamma} y^{pn + qm + c} \tag{1}$$

for some $\alpha, \beta, \gamma, p, q, c \in \mathbb{N}$ and $\alpha_{n,m} \in F$. We classify all such monomial averaging operators on $F_0[x, y]$ ($F[x, y]$).

One of the natural methods to construct a Rota—Baxter operator using the averaging operators is to find a solution to the following problem:

Problem. Describe all Rota—Baxter operators of weight 0 on $F_0[x, y]$ ($F[x, y]$) of the form $R(x^n y^m) = \alpha_{n,m} T(x^n y^m)$, where $\alpha_{n,m} \in F$ and T is a monomial averaging operator on $F_0[x, y]$ ($F[x, y]$) of the form (1).

We solve Problem completely under the condition that $\alpha_{n,m} \neq 0$ for all n, m.

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10005, https://rscf.ru/project/23-71-10005

References

[1] Guo L., Rosenkranz M., Zheng S. H., Rota-Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) **275** (2015) 481–507.

[2] Yu H., Classification of monomial Rota-Baxter operators on $k[x]$. J. Algebra Appl. **15** (2016), 1650087, 16 p.

[3] Khodzitskii A., Monomial Rota-Baxter operators of nonzero weight on $F[x, y]$ coming from averaging operators, Mediterr. J. Math. **20** (2023), article number: 251.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.khodzitskii@g.nsu.ru

Separating invariants for octonions

A. Lopatin

This is a joint work with Alexander Zubkov. We continued the study of the invariants of the diagonal action of the exceptional simple group G_2 on the space of several octonions, over a field of positive characteristic. Over the field of complex numbers generators for the algebra of invariants were described in [**3**]. This result was generalized to an arbitrary infinite field of odd characteristic in [**4**], using a much finer technique of modules with good filtration.

We described separating G_2-invariants of several copies of the algebra of octonions over an algebraically closed field of characteristic two. We also obtained a minimal separating and a minimal generating set for G_2-invariants of several copies of the algebra of octonions in case of a field of odd characteristic (see [**2**]). Our proofs are based on the description of a minimal set of representatives for G_2-orbits on the set of pairs of octonions (see [**1**]).

References

[1] Lopatin A., Zubkov A. N., Classification of G_2-orbits for pairs of octonions, submitted, arXiv: 2208.08122.

[2] Lopatin A., Zubkov A.N., Separating G_2-invariants of several octonions, submitted, arXiv: 2209.12620.

[3] Schwarz G.W., Invariant theory of G_2 and Spin_7, Comment. Math. Helvetici **63** (1988), 624–663.

[4] Zubkov A.N., Shestakov I.P., Invariants of G_2 and Spin(7) in positive characteristic, Transformation Groups **23** (2018), no. 2, 555–588.

University of Campinas (UNICAMP), Campinas (Brazil)
E-mail: artem_lopatin@yahoo.com
saniya.1411@gmail.com

On polylinear part of the Kleinfeld algebras

K. M. Tulenbaev, A. K. Kunanbayev, S. A. Bolat

The Kleinfeld algebras are given by identity:

$$x \circ (y \circ z) = y \circ (z \circ x)$$

. The Kleinfeld algebras were introduced by E. Kleinfield. B. A. Kupershmidt studied Kleinfeld algebras in [1]. We obtain that multilinear parts are $P(3) = 8, P(4) = 40, P(5) = 210, P(6) = 1262, P(7) = 8835$

For multilinear part we obtain the following formula

Theorem 1. $P(n) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-7} n(n-1)...(n-k+1) + \frac{631}{360} \cdot n!$.

For Kleinfeld algebras dual in Koszul sense will be algebras close to Lie algebras with nilpotency index equal 3. Especially, we have two identities $(xy)z = 0$ and $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$, but we have no anticommutativity rule.

The first author is grateful to grant BR20281002 SC MSEH RK.

References

[1] Kupershmidt B. A. Phase Spaces of Algebras, University of Tennessee, Knoxville (2010).

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kaysart1@mail.ru
Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kunanbayev@math.kz
Kazakh National University after Al-Farabi, Almaty (Kazakhstan)

Novikov $\mathbb{Z}_2$-graded algebras with an associative 0-component

V. N. Zhelyabin, A. S. Panasenko

We will use a notation for associator $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. An algebra A over a field is called a *Novikov algebra* if the following identities hold for all $x, y, z \in A$:

$$(x, y, z) = (y, x, z), \qquad (xy)z = (xz)y.$$

Let A be an algebra over a field F, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in A$. Let us define the polynomials $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})_n^R$ (see [**1**]):

$$(x_1, x_2, x_3)_1^R := (x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, \ldots, x_{2n+1})_n^R := ((x_1, \ldots, x_{2n-1})_{n-1}^R, x_{2n}, x_{2n+1}).$$

A Novikov algebra N is called *right associator nilpotent* of degree $n \in \mathbb{N}$, if A satisfies the identity $(x_1, \ldots, x_{2n+1})_n^R = 0$.

We proved the following result.

Theorem 1. *In every Novikov algebra N over a field of characteristic $\neq 2$ the following conditions are equivalent:*
1) the algebra N is right associator nilpotent;
2) associator ideal (N, N, N) is right-nilpotent;
3) commutator ideal $[N, N]$ is right-nilpotent.

In [**1**] it was proved that conditions 1)–3) are equivalent for a field of characteristic 0.

U. U. Umirbaev and V. N. Zhelyabin proved [**2**] that any $\mathbb{Z}_n$-graded Novikov algebra with solvable 0-component is solvable. In [**3**] K. M. Tulenbaev, U. U. Umirbaev and V. N. Zhelyabin showed that in a Lie-solvable Novikov algebra the commutator ideal is solvable (if $\mathrm{char} F \neq 2$). The natural developing of these results is as follows.

Theorem 2. *Let $N = A + M$ be a Z_2-graded algebra over field of characteristic $\neq 2, 3$ Assume the algebra A is Lie nilpotent of index three or A is an associative algebra. Then the commutator ideal $[N, N]$ is solvable.*

The case when the 0-component is commutative was independently proven by U.U. Umirbaev. We have a natural question.

Question. *Let $N = A + M$ be a Z_2-graded Novikov algebra and a commutator ideal $[A, A]$ of an algebra A is solvable. Is the commutator ideal $[N, N]$ solvable?*

The research is supported by the Russian Science Foundation (project 21-11-00286).

References

[1] Dotsenko V., Ismailov N., Umirbaev U., Polynomial identities in Novikov algebras, Mathematische Zeitschrift, 2023, 303:3, 60.
[2] Umirbaev U., Zhelyabin V., On the solvability of graded Novikov algebras, Int. Journal of Algebra and Computation, 2021, 31:7, 1405–1418.
[3] Tulenbaev K., Umirbaev U., Zhelyabin V., On the Lie-solvability of Novikov algebras, Journal of Algebra and Its Applications, 2023, 643, 235–257.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vicnic@math.nsc.ru, a.panasenko@g.nsu.ru

VII. Авторский указатель