1. Введение

Знаменитая теорема Рамсея [1] (инфинитная версия), опубликованная в 1930 г., утверждает, что для любого конечного разбиения (раскраски) множества $[\omega]^n$ n-элементных подмножеств множества ω найдется бесконечное однородное множество $X \subseteq \omega$ (см. [2], Теорема 9.1, а также подробное обсуждение в [3]). Каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо, см. [3] (раздел 5.5., теорема 3) есть естественное обобщение теоремы Рамсея на случай произвольных (не обязательно конечных) разбиений. Она утверждает, что для любого разбиения множества $[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое подмножество $X \subseteq \omega$. Детальные формулировки приведены в настоящей работе в разделе 1.1. Впервые доказательство этой теоремы было опубликовано в работе [4] в 1950 г., однако оно оказалось неожиданно сложным по сравнению с известными на тот момент доказательствами теоремы Рамсея. Как справедливо отмечает Мате в [5], «это объясняет, почему каноническая рамсеевская теорема часто приводится без доказательства (см., напр., [6]) или только с доказательством для случая $n = 2$ (см., напр., [3]), который не имеет достаточной общности». Во второй половине XX – начале XXI в. было опубликовано несколько альтернативных доказательств. Их можно найти в работах [7–11] и [5], из которых работы Радо [8] и Мате [5] мотивированы прежде всего стремлением придать доказательству простоту и ясность.

Начиная с середины XX века для доказательства многих комбинаторных фактов начинает использоваться теория ультрафильтров. Наиболее впечатляющие примеры – простое и изящное доказательство теоремы Рамсея в [3] (раздел 6.2, Теорема 2) и доказательство Галвина и Глайзера теоремы Хиндмана о конечных суммах, впервые опубликованное в [12]. Другие примеры можно найти в монографии [13]. Однако, насколько нам известно, ни одно «ультрафильтровое» доказательство канонической рамсеевской теоремы не было опубликовано.

В данной работе мы восполняем этот пробел и даем короткое доказательство канонической рамсеевской теоремы с использованием теории ультрафильтров. Оно опирается на некоторые основные факты, которые можно найти в монографиях [14] и [15], а также на простейшие свойства ультрарасширения функций произвольной арности. Последнее понятие было введено в начале XXI в. независимо Горанко [18] и Савельевым [19, 20] и (среди прочего) изучалось в работах [21–24]. В разделе 1.2 мы даем все определения и факты, необходимые для нашего доказательства.

1.1. Теорема Рамсея и каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо

В этом разделе мы приводим детальные формулировки теоремы Рамсея и канонической рамсеевской теоремы Эрдёша и Радо.

Для любого множества X и натурального числа (конечного ординала) $n \in \omega$ множество всех n-элементных подмножеств множества X обозначается символом $[X]^n$:

$$[X]^n = \{\boldsymbol{x} \subseteq X : |\boldsymbol{x}| = n\}.$$

Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(Z)$ называется *разбиением* множества Z, если

1. $\varnothing \notin \mathcal{P}$,
2. $\bigcup \mathcal{P} = Z$ и
3. $(\forall X, Y \in \mathcal{P})\, X \cap Y = \varnothing \vee X = Y$.

Определение 1. *Для любого натурального числа $n \geqslant 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[X]^n$ множество $Y \subseteq X$ называется* однородным *для $\mathcal{P}$, если существует множество $P \in \mathcal{P}$, для которого $[Y]^n \subseteq P$.*

Теорема 1 (Рамсей [1]). *Для любого натурального числа* $n \geqslant 1$ *и конечного разбиения* $\mathcal{P}$ *множества* $[\omega]^n$ *существует бесконечное множество* $X \subseteq \omega$ *однородное для* $\mathcal{P}$.

Используя естественную биекцию между множеством $[\omega]^n$ и множеством возрастающих n-ок натуральных чисел, эту теорему можно переформулировать в терминах функций $f : \omega^n \to \omega$.

Определение 2. *Для любого натурального числа* $n \geqslant 1$ *и множества* $X \subseteq \omega$ *функция* $f : \omega^n \to \omega$ *называется постоянной вверх на множестве* X, *если*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$ *и* $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in X$.

Теорема 2 (Рамсей [1], эквивалентная формулировка). *Любая функция* $f : \omega^n \to \omega$, *где* $1 \leqslant n < \omega$, *с конечным множеством значений постоянна вверх на некотором бесконечном множестве* $X \subseteq \omega$.

Теорема Рамсея имеет много различных версий и обобщений, см., напр., [3]. Одно из обобщений носит название каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо.

Для любого разбиения $\mathcal{P}$ множества Z соответствующее отношение эквивалентности обозначается символом $\approx_{\mathcal{P}}$:

$$x \approx_{\mathcal{P}} y \;\Leftrightarrow\; (\exists P \in \mathcal{P})\, x, y \in P$$

для всех $x, y \in Z$.

Для каждого $X \subseteq \omega$ и $i < |X|$ i-ый (в естественном порядке) элемент $x \in X$ обозначается символом $X_{[i]}$:

$$x = X_{[i]} \;\Leftrightarrow\; (x \in X \wedge |x \cap X| = i).$$

Определение 3. *Пусть дано разбиение* $\mathcal{P}$ *множества* $[\omega]^n$, $1 \leqslant n < \omega$, *и множество (индексов)* $I \subseteq n$. *Множество* $X \subseteq \omega$ *называется* I-каноническим *для* $\mathcal{P}$ *если*

$$\boldsymbol{p} \approx_{\mathcal{P}} \boldsymbol{q} \;\Leftrightarrow\; \bigwedge_{i \in I} (\boldsymbol{p}_{[i]} = \boldsymbol{q}_{[i]})$$

для всех $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in [X]^n$. *Множество* $X \subseteq \omega$ *называется каноническим для* $\mathcal{P}$, *если оно* I-каноническое *для* $\mathcal{P}$ *для некоторого множества* $I \subseteq n$.

Теорема 3 (Эрдёш и Радо [4]). *Для любого натурального числа* $n \geqslant 1$ *и разбиения* $\mathcal{P}$ *множества* $[\omega]^n$ *существует бесконечное множество* $X \subseteq \omega$ *каноническое для* $\mathcal{P}$.

Эту теорему можно переформулировать в терминах функций $f : \omega^n \to \omega$.

Определение 4. *Для каждого натурального числа* $n \geqslant 1$ *функция* $f : \omega^n \to \omega$ *называется* выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно множества (индексов) $I \subseteq n$, *если*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \;\Leftrightarrow\; \bigwedge_{i \in I} (x_i = y_i)$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$ *и* $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in X$. *Функция* $f : \omega^n \to \omega$ *называется* выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$, *если она выборочно инъективна вверх на множестве* $X \subseteq \omega$ *относительно некоторого непустого множества индексов* $I \subseteq n$.

Пустая конъюнкция, как это обычно принято, полагается тождественной истиной. Поэтому, если функция $f : \omega^n \to \omega$ выборочно инъективна вверх на множестве X относительно пустого множества I, то она постоянна вверх на множестве X.

Теорема 4 (Эрдёш и Радо [4], эквивалентная формулировка). *Любая функция* $f : \omega^n \to \omega$, *где* $1 \leqslant n < \omega$, *либо постоянна вверх на некотором бесконечном множестве* $X \subseteq \omega$, *либо выборочно инъективна вверх на некотором бесконечном множестве* $X \subseteq \omega$.

Очевидно, теорема Рамсея немедленно следует из канонической рамсеевской теоремы.

1.2. Теория ультрафильтров: некоторые основные сведения

В этом разделе мы приводим все определения и факты из теории ультрафильтров, которые мы будем использовать для доказательства канонической рамсеевской теоремы. Некоторые сведения, выходящие за эти рамки, приводятся в виде замечаний.

Множество всех подмножеств множества A обозначается символом $\mathscr{P}(A)$. *Ультрафильтром* на множестве A называется (см., напр., [16], глава 15) произвольное множество $\mathfrak{u} \subseteq \mathscr{P}(A)$, удовлетворяющее следующим условиям: для любых множеств $B, C \subseteq A$

1. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \subseteq B$, то $C \in \mathfrak{u}$,

2. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \in \mathfrak{u}$, то $B \cap C \in \mathfrak{u}$,

3. $B \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве A обозначается символом $\boldsymbol{\beta} A$.

Каждый ультрафильтр вида $\{S \subseteq A : a \in S\}$, где $a \in A$, называется *главным ультрафильтром* (порожденным элементом a). Все ультрафильтры на множестве A, которые не являются главными, называются *неглавными*. ZFC влечет существование неглавных ультрафильтров на каждом бесконечном множестве A. Главный ультрафильтр, порожденный элементом $a \in A$ обычно отождествляется с самим элементом a и, как правило, обозначается той же буквой.

Определение 5. *Для каждой функции $f : A \to B$ ультрарасширение $\widetilde{f}$ есть функция из множества $\boldsymbol{\beta} A$ в множество $\boldsymbol{\beta} B$, которая определяется следующим образом:*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, f(x) \in S\}$$

для всех $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta} A$.

Предложение 1. *Пусть даны множества A, B, функция $f : A \to B$ и ультрафильтры $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta} A$, $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{\beta} B$. Пусть при этом для каждого множества $X \in \mathfrak{u}$ ультрафильтр $\mathfrak{v}$ содержит множество $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$. Тогда $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{v}$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) \neq \mathfrak{v}$. Тогда существует такое множество $S \subseteq B$, что $S \in \mathfrak{v}$ и $S \notin \widetilde{f}(\mathfrak{u})$. По определению ультрарасширения функции f последнее означает, что для некоторого множества $X \in \mathfrak{u}$ выполнено $(\forall x \in X)\, x \notin S$, т.е. $f[X] \cap S = \varnothing$. Значит, $f[X] \notin \mathfrak{v}$, что и требуется.

Замечание 1. *Утверждение, обратное к Предложению 1 тоже верно, см. [15], лемма 3.30, однако оно не используется в дальнейших рассуждениях. Для случая $A = B = \omega$ оно немедленно вытекает из нижеследующего Предложения 3.*

Теорема 5. *Для любого множества A, ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta} A$ и функции $f : A \to A$ если $\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, то $f(x) = x$ для всех x из некоторого множества $X \in \mathfrak{u}$.*

Доказательство можно найти, например, в [15], теорема 3.34 или в [14], теорема 9.2.

Для каждой функции $f : A^n \to B$ ее ультрарасширение $\widetilde{f} : (\boldsymbol{\beta} A)^n \to \boldsymbol{\beta} B$ определяется рекурсией по n. Напомним, что каждая нуль-местная функция $f : A \to B$ отождествляется с некоторой константой $c_f \in B$. Для каждого натурального числа $n \geqslant 1$, функции $f : A^n \to B$ и элемента $x \in A$ символом $f_{(x)}$ обозначим функцию из множества A^{n-1} в множество B, которая получена из функции f фиксированием первого аргумента, т.е. удовлетворяет условию:

$$f_{(x)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

для всех $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$.

Определение 6. *Пусть дана функция $f : A \to B$.*

i. Если $n = 0$ функция $\widetilde{f}$ есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f, т.е. $\widetilde{f} = \{S \subseteq B : c_f \in S\}$.

ii. Если $n > 0$, то

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X)\, S \in \widetilde{f_{(x)}}(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})\}.$$

Корректность этого определения обоснована в работах [18, 19]. Обоснование сводится к рутинной проверке того факта, что для любых ультрафильтров $\mathfrak{u}_0, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1} \in \boldsymbol{\beta} A$ множество $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ есть ультрафильтр на B. Легко проверить, что при $n = 1$ мы получаем определение, которое эквивалентно определению 5. Равносильные определения см. в [24].

Если в пункте *ii.* определения 6 поменять местами кванторы произвольности и существования, то определена будет та же самая функция $\widetilde{f}$. Это следует из следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta} A$. Тогда для любой теоретико-множественной формулы $\varphi(x)$ (возможно, с параметрами) выполнено*

$$(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x) \Leftrightarrow (\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$$

Доказательство. Пусть формула $(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x)$ истинна. Тогда множество $\{x \in A : \neg\varphi(x)\}$ не принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Значит, ультрафильтру $\mathfrak{u}$ принадлежит дополнение этого множества, т.е. множество $Y = \{x \in A : \varphi(x)\}$. Следовательно, истинна формула $(\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$.

Пусть, наоборот, истинна формула $(\exists Y \in \mathfrak{u})(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$. Выберем какое-нибудь множество $Y \in \mathfrak{u}$ с условием $(\forall y \in Y)\, \varphi(y)$. В каждом элементе X ультрафильтра $\mathfrak{u}$ выберем элемент $x \in X \cap Y$. Очевидно, этот элемент удовлетворяет формуле $\varphi(x)$. Следовательно, истинна формула $(\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)\, \varphi(x)$. Доказательство окончено.

Предложение 3. *Для любого неглавного ультрафильтра $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}\omega$, множества $X \in \mathfrak{u}$, натурального числа n и функции $f : \omega^n \to \omega$ множество*

$$\{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X\}$$

принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Доказательство. Индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$ и предложение верно для всех функций $g : \omega^{n-1} \to \omega$. Обозначим

$$S = \{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X\}.$$

Для каждого множества $Y \in \mathfrak{u}$ выберем произвольный элемент $a_Y \in Y \cap X$ и обозначим

$$X(a_Y) = \{x \in X : x > a_y\} \text{ и } S(a_Y) = \{f_{(a_Y)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X(a_Y)\}.$$

Поскольку ультрафильтр $\mathfrak{u}$ неглавный, каждое из множеств $X(a_Y)$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Поэтому по предположению индукции ультрафильтр $\widetilde{f_{(a_Y)}}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ содержит множество $S(a_Y)$, а значит, и множество $S \supseteq S(a_Y)$. Для завершения доказательства остается воспользоваться определением 6.

Для получения наиболее короткого доказательства канонической рамсеевской теоремы мы будем использовать понятие квази-нормального ультрафильтра.

Определение 7. *Ультрафильтр* $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}\omega$ *называется квази-нормальным, если он неглавный, и для любой последовательности* $X_0, X_1, \ldots$ *элементов ультрафильтра* $\mathfrak{u}$ *существует такой элемент* X *ультрафильтра* $\mathfrak{u}$, *что для любых* $i < j \in X$ *выполнено* $j \in X_i$.

В монографии [14] (теорема 9.6) можно найти много различных характеризаций квази-нормальных ультрафильтров. В частности, ультрафильтр $\mathfrak{u}$ квази-нормальный тогда и только тогда, когда он селективный, тогда и только тогда, когда он минимальный относительно предпорядка Рудин-Кейслера, и т.д. Из этого вытекает, что квази-нормальные ультрафильтры на ω существуют в предположении истинности континуум-гипотезы (а также некоторых других предположений, включая аксиому Мартина), см., напр., [2].[1]

Для удобства рассуждений мы будем использовать следующее техническое предложение.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω, $Y \in \mathfrak{u}$, *и для каждого элемента* $y \in Y$ *задано множество* $X_y \in \mathfrak{u}$. *Тогда существует такое множество* $Z \subseteq \omega$, *что*

1. $Z \in \mathfrak{u}$,

2. $Z \subseteq Y$,

3. *для любых* $i < j \in Z$ *выполнено* $j \in X_i$.

Доказательство. Дополним семейство $\{X_y\}_{y \in Y}$ до некоторой последовательности $\{X_i\}_{i \in \omega}$ элементов ультрафильтра $\mathfrak{u}$. Выберем множество X со свойствами из Определения 7. Очевидно, множество $Z = X \cap Y$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

2. Свойства квази-нормальных ультрафильтров и новое доказательство канонической рамсеевской теоремы

Для каждого натурального числа n, функции $f : \omega^n \to \omega$ и множества $X \subseteq \omega$ мы будем использовать обозначение

$$f^{\uparrow}[X] = \{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X\}.$$

Определение 8. *Множество* $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{P}(A)$ *называется базой ультрафильтра* $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{\beta}A$, *если* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{u}$, *и для каждого множества* $X \in \mathfrak{u}$ *существует множество* $Y \in \mathfrak{B}$, *для которого* $Y \subseteq X$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω, $n < \omega$ *и* $f : \omega^n \to \omega$. *Тогда множество*

$$\{f^{\uparrow}[X] : X \in \mathfrak{u}\}$$

есть база ультрафильтра $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Доказательство. По предложению 3 каждое из множеств $f^{\uparrow}[X]$, $X \in \mathfrak{u}$, принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Поэтому достаточно доказать, что для каждого множества $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ существует множество $X \in \mathfrak{u}$, для которого $f^{\uparrow}[X] \subseteq S$.

Докажем это утверждение индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$ и утверждение теоремы верно для всех функций $g : \omega^{n-1} \to \omega$. Пусть $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots)$. Тогда по определению 6 и предложению 2 существует множество $Y \in \mathfrak{u}$, для которого $S \in \widetilde{f_{(y)}}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots)$

[1] Однако, существование селективных ультрафильтров независимо от ZFC, см. [25] или [6].

для всех $y \in Y$. По предположению индукции для каждого элемента $y \in Y$ существует множество $X_y \in \mathfrak{u}$, для которого

$$f^{\uparrow}_{(y)}[X_y] \subseteq S.$$

Выберем какое-нибудь множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4. Тогда для любой последовательности $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$ выполнено $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\} \subseteq X_{x_0}$. Значит,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_{(x_0)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in S,$$

что и требуется. Доказательство закончено.

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{u}$ есть квази-нормальный ультрафильтр на ω, $X \in \mathfrak{u}$, $n < \omega$ и $I \subseteq n$. Пусть функции $f, g : \omega^n \to \omega$ выборочно инъективны вверх на множестве X относительно множества I, и имеет место равенство*

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}).$$

Тогда существует такое множество $Y \in \mathfrak{u}$, что

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Y$.

Доказательство. Легко проверить, что существует такая функция $\varphi : \omega \to \omega$, что

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$. Покажем, что имеет место равенство

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})).$$

В силу предложения 1 достаточно показать, что для каждого множества $S \in \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ множество $\varphi[S]$ принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Пусть $S \in \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Используя теорему 6, выберем множество $Z \in \mathfrak{u}$, для которого $g^{\uparrow}[Z] \subseteq S$. и положим $S' = g^{\uparrow}[Z \cap X]$. По теореме 6 (или предложению 3) множество S' принадлежит ультрафильтру $\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$, а множество

$$\begin{aligned}\varphi[S'] &= \{\varphi(g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z \cap X\} \\ &= \{f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z \cap X\}\end{aligned}$$

принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Значит, множество $\varphi[S] \supseteq \varphi[S']$ тоже принадлежит ультрафильтру $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$.

Теперь по условию мы имеем

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})) = \widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}).$$

По теореме 5 существует такой элемент S'' ультрафильтра $\widetilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$, что $\varphi(x) = x$ для всех $x \in S''$. Вновь используя теорему 6, найдем такое множество $Y \in \mathfrak{u}$, что $g^{\uparrow}[Y] \subseteq S''$. Очевидно, оно удовлетворяет заключению теоремы. Доказательство закончено.

Замечание 2. *Утверждение, обратное Теореме 7, также верно, причем для произвольного ультрафильтра $\mathfrak{u}$ и функций f и g, см, напр. [11]. Однако этот факт мы не используем в нашей работе.*

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть квази-нормальный ультрафильтр на* ω. *Тогда для каждого натурального числа* n *и функции* $f : \omega^n \to \omega$ *ультрафильтр* $\mathfrak{u}$ *содержит такое множество* $X \subseteq \omega$, *что функция* f *либо постоянна вверх на множестве* X, *либо выборочно инъективна вверх на множестве* X.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n. База индукции ($n = 0$) очевидна. Пусть $n > 0$, и предположение индукции верно.

По предположению индукции для каждого $i \in \omega$ существует такое множество $U_i \in \mathfrak{u}$ и такое множество $I_i \subseteq n-1$, что функция $f_{(i)}$ выборочно инъективна вверх на множестве U_i относительно множества I_i. Поскольку множество $\mathscr{P}(n-1)$ конечно, ультрафильтр $\mathfrak{u}$ содержит такое множество U, что $I_i = I_j$ для всех $i, j \in U$. Для простоты будем записывать просто I вместо I_i для некоторого (равносильно, любого) элемента $i \in U$.

Случай 1: множество $V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$.

Положим $Y = U \cap V$.

Пусть a есть произвольный элемент множества Y. По теореме 7 для каждого элемента $y \in Y$ существует множество $X'_y \in \mathfrak{u}$, для которого

$$f(y, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f_{(y)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f_{(a)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = f(a, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2})$$

для всех $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \in X'_y$.

Для каждого $y \in Y$ положим $X_y = X'_y \cap U_y$ и выберем множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4.

Покажем, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-2} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-2} \in Z$ выполнены условия

1. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, x_0, \ldots, x_{n-2})$ для всех таких $i, j \in Z$, что $i < x_0$ и $j < y_0$;
2. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(i, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i \in I} x_i = y_i$ для каждого такого $i \in Z$, что $i < \min\{x_0, y_0\}$.

Действительно, первое из них сразу следует из включения $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\} \subseteq X'_i \cap X'_j$, а второе – из включений $Z \subseteq U$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq U_i$.

Остается заметить, что из этих условий следует, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in Z$ выполнено:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I'} x_i = y_i,$$

где $I' = \{i + 1 : i \in I\}$.

Случай 2: множество $V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})\}$ не принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{u}$. Тогда $\omega \setminus V = \{x \in \omega : \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \neq \widetilde{f}_{(x)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})\} \in \mathfrak{u}$.

Положим $Y = U \cap (\omega \setminus V)$.

Покажем, что для каждого элемента $y \in Y$ существует такое множество X'_y, что

$$f^{\uparrow}[X'_y] \cap f^{\uparrow}_{(y)}[X'_y] = \varnothing.$$

Для этого выберем любое множество S, для которого $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ и $\omega \setminus S \in \widetilde{f}_{(y)}(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. По теореме 6 существуют множества $P, Q \in \mathfrak{u}$, для которых

$$f^{\uparrow}[P] \subseteq S \quad \text{и} \quad f^{\uparrow}_{(y)}[Q] \subseteq \omega \setminus S.$$

Очевидно, можно положить $X'_y = P \cap Q$.

Для каждого $y \in Y$ положим $X_y = X'_y \cap U_y$ и выберем множество Z, удовлетворяющее условиям предложения 4.

Покажем, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-2} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-2} \in Z$ выполнены условия

1. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Rightarrow i = j$ для всех таких $i, j \in Z$, что $i < x_0$ и $j < y_0$;
2. $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(i, y_0, \ldots, y_{n-2}) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i \in I} x_i = y_i$ для каждого такого $i \in Z$, что $i < \min\{x_0, y_0\}$.

Второе из них вновь вытекает из включений $Z \subseteq U$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq U_i$. Для доказательства первого допустим, что $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2}) = f(j, y_0, \ldots, y_{n-2})$ для некоторых различных $i < x_0$, $j < y_0$, и придем к противоречию. Без ограничения общности будем считать, что $i < j$. Тогда имеет место включение $\{j, x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}\} \subseteq X'_i$. Значит, $f(i, x_0, \ldots, x_{n-2})$ принадлежит множеству $f^{\uparrow}_{(i)}[X'_i]$, а $f(j, y_0, \ldots, y_{n-2})$ принадлежит множеству $f^{\uparrow}[X'_i]$. Между тем, эти множества имеют пустое пересечение, что и дает противоречие.

Остается заметить, что из этих условий следует, что для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Z$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} \in Z$ выполнено:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I''} x_i = y_i,$$

где $I'' = \{0\} \cup \{i + 1 : i \in I\}$. Это окончательно доказывает теорему.

Каноническая рамсеевская теорема Эрдёша и Радо есть очевидное следствие Теоремы 8 (в предположении существования квази-нормального ультрафильтра на ω).

3. Заключение

В работе дано короткое доказательство канонической рамсеевской теоремы с использованием теории ультрафильтров (теорема 8). Оно использует классические результаты этой теории и недавнюю концепцию ультрарасширения функций произвольной арности. Предшествующие доказательству теоремы 6 и 7 публикуются впервые и представляют самостоятельный интерес. В доказательстве использован факт существования квази-нормальных ультрафильтров на ω, независимый от ZFC (и вытекающий, например, из континуум-гипотезы). Остается открытым вопрос, можно ли его элиминировать с сохранением простоты доказательства (сама по себе каноническая рамсеевская теорема, конечно, не требует предположений, выходящих за рамки ZFC).[2] Также остается открытым вопрос о том, можно ли получить короткое «ультрафильтровое» доказательство теоремы 1 из [11], которая является «не-рамсеевской» частью канонической рамсеевской теоремы. Она утверждает, что для каждого натурального числа $n \geqslant 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для $\mathcal{Q}$ множество X есть конечное объединение множеств канонических для $\mathcal{P}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F. P. On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. 1930. Vol. 30. P. 264–286.

[2] О теориях, достаточных для доказательства канонической рамсеевской теоремы, см. [9].

2. Jeh T. Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded // Springer, 2002, 769 p.
3. Graham R. L., Rothschild B. L. & Spencer J. H., Solymosi J. Ramsey Theory // John Wiley and Sons, NY, 1990, 99 p.
4. Erdős P., Rado R. A combinatorial theorem // J. London Math. Soc. 1950. Vol. 25. P. 249–255.
5. Matet P. An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem // Colloquium Mathematicum. 2016. Vol. 145. 187–191.
6. Halbeisen L. J. Combinatorial Set Theory // Springer Monographs in Mathematics, London, 2012, 594 p.
7. Erdős P., Rado R. Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set // Proc. London Math. Soc. 1952. Vol. s3–2, №1. P. 417–439.
8. Rado R. Note on Canonical Partitions // Bul. of the London Math. Soc. 1986. Vol. 18, №2. 123–126.
9. Mileti J. R. The canonical Ramsey theorem and computability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. P. 1309–1341.
10. Lefmann H., Rödl V. On Erdős-Rado numbers // Combinatorica. 1995. Vol. 15. 85–104.
11. Polyakov N. L. On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters // Dokl. Math. 2023. Vol. 108. P. 392–401.
12. Comfort W. Ultrafilters: Some old and some new results // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83. P. 417–455.
13. Di Nasso M., Goldbring I., Lupini M. Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory // Springer, 2019, 206 p.
14. Comfort W. W., Negrepontis S. The theory of ultrafilters // Springer, Berlin, 1974, 481 p.
15. Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded // W. de Gruyter, Berlin–N.Y, 2012, 591 p.
16. Jeh T. Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing // Springer-Verlag, 1971, 148 p.
17. Polyakov N. L., Shamolin M. V. On a generalization of Arrow's impossibility theorem // Dokl. Math. 2014. Vol. 89. P. 290–292.
18. Goranko V. Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects // Preprint, 2007, 30 p.
19. Saveliev D. I. Ultrafilter extensions of models // Lecture Notes in AICS. 2011. Vol. 6521. P. 162–177.
20. Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of models // S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona. 2012. P. 599–616.
21. Saveliev D. I., Shelah S. Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence // Math. Log. Quart. 2019. Vol. 65. P. 511–516.

22. Saveliev D. I. On idempotents in compact left topological universal algebras // Topology Proc. 2014. Vol. 43. P. 37–46.

23. Poliakov N. L., Saveliev D. I. On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations // Logic, Language, Information, and Computation, Lecture Notes in Computer Science, eds. J. Kennedy, R. J. G. B. de Queiroz, Springer, Berlin, Heidelberg. 2017. Vol. 10388. P. 336–348.

24. Poliakov N. L., Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations. Arch. Math. Logic. 2021. Vol. 60. P. 625–681.

25. Wimmers E. The Shelah P-point independence theorem // Israel Journal of Mathematics. 1982. Vol. 43, №1. P. 28–48.

REFERENCES

1. Ramsey F. P., 1930. “On a problem of formal logic”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 30, pp. 264–286.

2. Jeh T., 2002. “Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded”, Springer, 769 p.

3. Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H., Solymosi J., 2015. “Ramsey Theory. 3rd ed.”, John Wiley and Sons, NY, 99 p.

4. Erdős P., Rado R., 1950. “A combinatorial theorem”, J. *London Math. Soc.*, vol. 25, pp. 249–255.

5. Matet P., 2016. “An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem”, *Colloquium Mathematicum*, vol. 145, pp. 187–191.

6. Halbeisen L. J., 2012. “Combinatorial Set Theory”, Springer, London, 594 p.

7. Erdős P., Rado R., 1952. “Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. s3–2, no. 1, pp. 417–439.

8. Rado R., 1986. “Note on Canonical Partitions”, *Bul. of the London Math. Soc.*, vol. 18, no. 2, pp. 123–126.

9. Mileti J. R., 2008. “The canonical Ramsey theorem and computability theory”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 360, pp. 1309–1341.

10. Lefmann H., Rödl V., 1995. “On Erdős-Rado numbers”, *Combinatorica*, vol. 15, pp. 85–104.

11. Polyakov N. L., 2023. “On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters”, *Dokl. Math.*, vol. 108, pp. 392–401.

12. Comfort W., 1977. “Ultrafilters: Some old and some new results”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 83, pp. 417–455.

13. Di Nasso M., Goldbring I., Lupini M., 2019. “Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory”, Springer, 206 p.

14. Comfort W. W., Negrepontis S., 1974. “The theory of ultrafilters”, Springer, Berlin, 481 p.

15. Hindman N., Strauss D., 2012. “Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded”, W. de Gruyter, Berlin–N.Y., 591 p.

16. Jeh T., 1971. “Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing”, Springer-Verlag, 148 p.

17. Polyakov N. L., Shamolin M. V., 2014. “On a generalization of Arrow’s impossibility theorem”, *Dokl. Math.*, vol. 89, pp. 290–292.

18. Goranko V., 2007. “Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects”, preprint, 30 p.

19. Saveliev D. I., 2011. “Ultrafilter extensions of models”, *Lecture Notes in AICS*, vol. 6521, pp. 162–177.

20. Saveliev D. I., 2012. “On ultrafilter extensions of models”, *In: S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona*, pp. 599–616.

21. Saveliev D. I., Shelah S., 2019. “Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence”, *Math. Log. Quart.*, vol. 65, pp. 511–516.

22. Saveliev D. I., 2014. “On idempotents in compact left topological universal algebras”, *Topology Proc.*, vol. 43, pp. 37–46.

23. Poliakov N. L., Saveliev D. I., 2017. “On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations”, *Logic, Language, Information, and Computation, Lecture Notes in Computer Science, eds. J. Kennedy, R. J. G. B. de Queiroz, Springer, Berlin, Heidelberg*, vol. 10388, pp. 336–348.

24. Poliakov N. L., Saveliev D. I., 2021. “On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations”, *Arch. Math. Logic*, vol. 60, pp. 625–681.

25. Wimmers E., 1982. “The Shelah P-point independence theorem”, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 1, pp. 28–48.