
НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

**Динамика формы кривой бескупонной доходности
российских государственных облигаций**

© 2024 г. С.В. Курочкин, М.С. Макушкин

С.В. Курочкин,

НИУ «Высшая школа экономики», Москва; e-mail: skurochkin@hse.ru

М.С. Макушкин

НИУ «Высшая школа экономики», Москва; e-mail: mmakushkin@hse.ru

Поступила в редакцию 31.03.2024

Авторы благодарны рецензенту первого варианта статьи за ценные замечания, позволившие улучшить изложение.

Аннотация. Кривая доходностей графически отображает зависимость процентной ставки от срочности. Форма кривой доходности постоянно привлекает внимание аналитиков, поскольку она косвенно отражает заложенные рынком ожидания относительно будущей траектории процентной ставки. При этом анализ формы кривой доходности обычно осуществляется эвристически — либо через спреды между ставками на различные сроки, либо визуально. В работе формализуется понятие формы кривой доходности в терминах топологических инвариантов дифференцируемых функций. С помощью модели Нельсона–Зигеля (в качестве базовой для кривой бескупонной доходности) показано, что возможно только шесть типов кривой доходностей — монотонно возрастающая, монотонно убывающая, возрастающая с горбом, возрастающая с ямой, инвертированная с горбом и инвертированная с ямой. На реальных данных о кривой бескупонной доходности Московской биржи анализируется динамика перехода рублевой кривой доходности из одного типа в другой. Показано, что переход из нормального возрастающего состояния кривой в инвертированное всегда происходит через горб, а обратный переход — через яму. Это указывает на важную роль среднесрочных ставок в трансформации кривой. Такое поведение связано с привязкой короткого конца кривой доходностей к ключевой ставке. Предложенная классификация формы кривой доходностей может быть полезна исследователям, ищущим инструментарий для формального анализа кривой доходности, а выводы о закономерностях в динамике кривой могут помочь инвесторам в государственные облигации при разработке стратегий.

Ключевые слова: кривая бескупонной доходности; срочная структура процентных ставок; модель Нельсона–Зигеля; функции Морса.

Классификация JEL: G12, E43.

УДК: 336.01.

Для цитирования: Курочкин С.В., Макушкин М.С. (2024). Динамика формы кривой бескупонной доходности российских государственных облигаций // Экономика и математические методы. Т. 60. № 4. С. 40–49. DOI: 10.31857/S0424738824040044

1. ВВЕДЕНИЕ

«Топологическая структура произвольных гладких функций на гладком многообразии относится к небольшому числу наиболее фундаментальных объектов изучения как в чистой, так и в прикладной математике» (Arnold, 2007). Глубокие исследования в данном направлении имеют место уже длительное время (по-видимому, начиная с 16-й проблемы Гильберта). Среди современных приложений следует отметить такие направления в машинном обучении, как топологический анализ данных и моделирование многообразий (manifold learning) (Chazal, Michel, 2021; Meilă, Zhang, 2024). Однако применительно к рассматриваемому в работе типу объектов — кривым бескупонной доходности — авторам такие работы неизвестны.

Предметом настоящей работы является топологическая классификация форм кривой доходности в рамках наиболее широко используемой модели Нельсона–Зигеля, а также эмпирическое

исследование динамики этой формы на предмет частотности переходов из класса в класс и имеющих здесь глобальных закономерностей.

Кривая бескупонной доходности (КБД) — ключевой показатель долгового рынка в данной валюте. Кривая представляет собой график зависимости доходности бескупонной государственной облигации от ее срока погашения. Расчет кривой производится регулятором, как правило, в реальном времени, не реже чем ежедневно по итогам торгов. Соответствующая информация публикуется на интернет-ресурсах и становится официальным документом, применяемым в различных целях. Также эти данные рутинным образом используются в текущей деятельности банков для расчета приведенной стоимости денежных потоков.

Качественный вид кривой (возрастание, убывание, наличие горбов и т.д.) привлекает постоянное внимание аналитиков. В работах как академического, так и делового характера можно найти различные объяснения (с финансовой и макроэкономической точек зрения), предвестником чего является та или иная форма кривой. При этом понятие формы кривой, как правило, остается на интуитивном уровне и сводится к следующим прокси: спреда между доходностями долгосрочных и краткосрочных облигаций (типичные пары: сроки погашения 10 лет и 2 года, 5 лет и 1 год, 2 года и ГКО) либо визуально по графику. Все такие подходы изначально неточны, поскольку они содержат элементы произвола и не могут считаться удовлетворительными в научном отношении. Желательно, в том числе для практических целей, придать выражению «форма кривой доходности» точный смысл.

Нетривиальная особенность кривой доходности при любом способе ее построения состоит в том, что информация для наблюдений по данным торгов на рынке государственных облигаций недоступна: бескупонных облигаций на средние и длинные сроки на рынках, даже на развитых, за редчайшими исключениями, нет. Расчет производится косвенно — по ценам купонных облигаций. Применяются различные методики, и часто за основу берется параметрическая модель Нельсона—Зигеля и ее модификации (см., например, (Hua, 2015)). Так, Московская биржа использует модель с добавленными девятью гауссовыми «шапками»¹. Ряд регуляторов не раскрывает своей методики расчета².

Для полного анализа формы кривой полезно знать конкретную применяемую модель. В данной работе представлен анализ для случая классической модели Нельсона—Зигеля с четырьмя параметрами. Такое решение является естественным первым шагом. Более того, для такого относительно низколиквидного долгового рынка, как российский, целесообразность использования более сложных моделей в принципе представляется сомнительной (Макушкин, Лапшин, 2021).

Структура работы. В разд. 2 представлен обзор литературы по данной теме. В разд. 3 с помощью аппарата дифференциальной топологии дана топологическая классификация кривых доходностей. В разд. 4 проведено эмпирическое исследование динамики формы кривой доходности российского рынка государственных облигаций, выявившее ряд статистических закономерностей. В разд. 5 приводятся выводы.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Кривая доходностей графически отображает зависимость безрисковой процентной ставки от срочности. В данном случае под безрисковой ставкой понимается доходность государственных облигаций в национальной валюте. Кривая доходностей отражает тот факт, что у денег на разную срочность есть разная стоимость.

Можно сформулировать следующие стилизованные³ факты относительно кривой доходностей (Diebold, Li, 2006). Во-первых, кривая доходностей в среднем имеет возрастающую выпуклую форму. Во-вторых, кривая доходностей изменяется во времени и может принимать другие формы (например, убывающую или с горбом на средних срочностях). В-третьих, короткий конец кривой в среднем более волатилен, чем дальний. Эконометрические исследования показывают, что

¹ Московская биржа «Кривая бескупонной доходности», 2024 г. (<https://www.moex.com/s2532?ysclid=lr3pqdzww1572949068>).

² Bank of England “Yield curve methodology”, 2024 (<https://www.bankofengland.co.uk/statistics/yield-curves>); US Department of the Treasury “Treasury Yield Curve Methodology”, 2022 (<https://home.treasury.gov/policy-issues/financing-the-government/interest-rate-statistics/treasury-yield-curve-methodology>).

³ В социальных науках, особенно в экономике, стилизованный факт — это упрощенное изложение эмпирического вывода.

большую часть дисперсии процентных ставок можно объяснить тремя факторами — уровнем кривой доходностей, ее наклоном и изгибом (Barber, Corper, 2012).

Литературу, посвященную анализу кривых доходностей, можно разделить на три блока, которые мы условно будем называть теоретическим, техническим и прикладным.

Теоретическая литература обсуждает причины возникновения временной структуры процентных ставок и факторов ее динамики. Основы современной теории процентных ставок восходят к работам Фишера (Fisher, 1896), который сформулировал так называемую теорию ожидаемых процентных ставок. Согласно этой теории форвардные ставки являются индикатором будущих краткосрочных ставок. Это верно в предположении, что стратегия инвестирования в долгосрочные бумаги и стратегия инвестирования в краткосрочные бумаги с постоянным продлением позиции должны давать инвестору одинаковую доходность для избегания арбитража. Тогда возрастающая структура процентных ставок должна означать ожидание роста краткосрочных ставок для уравнения доходностей обеих стратегий. Убывающая кривая, наоборот, должна указывать на ожидание снижения ставок.

Легко убедиться, что в чистом виде теория ожидаемых процентных ставок не соответствует реальному поведению кривой доходностей. Так, кривая доходностей имеет в среднем восходящую форму, однако ставки в среднем не возрастают. Аналогичные результаты видны из эконометрических исследований, которые показывают, что: а) форвардные ставки являются слабым предиктором реальных будущих спот-ставок; б) существует статистически значимая разница между доходностями стратегий инвестирования в короткие и длинные бумаги (Campbell, 1995).

Некоторые недостатки теории ожидаемых процентных ставок могут быть преодолены за счет добавления «премии за риск», также иногда называемой «премией за срочность» (Lutz, 1940; Hicks, 1946). В (Shiller, McCulloch, 1990) проводятся параллели между премией за риск и теорией предпочтений ликвидности Кейнса (Keynes, 1936). Согласно этой теории инвестор не безразличен при инвестировании в бумаги различной срочности. Предположения Фишера соблюдаются только в риск-нейтральном мире. В реальном же мире инвесторы обладают рискофобными предпочтениями, поэтому короткие бумаги обладают для них меньшим риском, в смысле переоценки на горизонте инвестирования. Соответственно, инвесторы готовы принимать их более низкую доходность. В предположении о возрастающей риск-премии кривая доходностей может иметь возрастающую выпуклую форму даже при ожиданиях, что короткая ставка не изменится.

Альтернативный взгляд на природу срочной структуры процентных ставок представляет теория сегментации рынка (Culbertson, 1957; Modigliani, Sutch, 1966). Она гласит, что разные участки кривой доходностей представляют собой разные сегменты рынка, слабо связанные между собой. На каждом сегменте рынка действуют разные игроки с разными риск-предпочтениями. В результате кривая доходностей формируется под балансом спроса и предложения на отдельных срочностях.

Современная финансовая литература признает, что все перечисленные факторы в той или иной степени влияют на форму кривой доходностей и ее динамику (Cook, Hahn, 1990; Ilmanen, Iwanowski, 1997; Fisher, 2001). Классические теории дополняются поправкой на выпуклость (convexity), которая объясняет выпуклость кривой доходностей (Ilmanen, 1995; Rebonato, Putyatin, 2018). Данный фактор (т.е. поправка) является следствием неравенства Йенсена. Поскольку цену облигации отражает выпуклая функция ее доходности, то средняя цена облигации должна быть выше цены облигации со средней доходностью. У долгосрочных бумаг показатель выпуклости функции доходности облигации больше из-за более выпуклой зависимости от ставок. В результате цена облигаций растет больше при увеличении риск-премии, что давит их доходности вниз. Из-за этого на дальних срочностях эффект показателя выпуклости компенсирует эффект возрастающей риск-премии, что и придает кривой доходности выпуклую форму.

Техническая литература фокусируется на задаче извлечения информации о ненаблюдаемой кривой доходности из наблюдаемых цен рыночных инструментов. Для этого существует много различных моделей (сплайны (McCulloch, 1971), бутстрэпы (Fama, Bliss, 1987), риск-нейтральные модели (Vasicek, 1977), различные параметрические модели (Svensson, 1994)). Их подробный обзор можно найти в работе (Лапшин, Терещенко, 2018).

Большую популярность получила параметрическая модель Нельсона–Зигеля (Nelson, Siegel, 1987). Она описывает кривую доходностей с помощью трех латентных факторов, которые хорошо ложатся в стилизованные факты о наблюдаемой кривой доходностей (Diebold, Li, 2006). Модель может быть оценена как по бескупонным доходностям, так и по ценам купонных облигаций.

Помимо вопросов применимости моделей, техническая литература занимается практически всеми вопросами построения кривой, например калибровки модели (Annaert et al., 2013; Wahlström, Paraschiv, Schürle, 2021), особенностями оценки кривой на низколиквидных рынках (Гамбаров, Шевчук, 2004; Макушкин, Лапшин, 2021) и в условиях неполных данных (Макушкин, Лапшин, 2023).

Решение практических задач. В отличие от технической литературы, где оцененная кривая доходностей является результатом исследования, в прикладной литературе кривая доходностей является лишь входными данными. Так, форма кривой доходностей часто используется как предиктор рецессии (Estrella, Mishkin, 1998; Chauvet, Potter, 2001). Это объясняется тем, что кривая доходностей отражает ожидания траектории короткой ставки, которая тесно связана с монетарной политикой. Инвертированная кривая доходностей означает ожидание повышения ставок в краткосрочной перспективе (сдерживающая монетарная политика). Повышение ставки приведет к замедлению экономики и потребует от финансового регулятора снижения ставки в будущем (смягчение монетарной политики) для преодоления рецессии. Исследования показывают, что заложенная в кривой доходностей информация делает ее эффективным предиктором таких макроэкономических переменных, как экономический рост, инфляция и курс валюты (Ang, Piazzesi, Wei, 2006; Mehl, 2009; Ishii, 2023).

3. ТОПОЛОГИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

Следуя (Arnold, 2006; Nicolaescu, 2008), под формой кривой мы будем понимать ее топологическую структуру, т.е. класс эквивалентности относительно сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов области определения и области значений. Конструктивное содержание и возможность алгебраического анализа возникают в случае, если исследуемая функция является функцией Морса, т.е. когда все ее критические точки невырождены (Постников, 1971). Свойство быть функцией Морса есть свойство общего положения: такие функции образуют открытое всюду плотное множество в пространстве дифференцируемых функций. В случае кривых доходности это утверждение можно усилить: почти все, в смысле меры Лебега в пространстве параметров, реализации модели Нельсона—Зигеля являются функциями Морса. Этот факт можно было бы получить из общих конструкций, как сделано в (Vanyaga, Hurtubise, 2004; Le, 2018) для многочленов от нескольких переменных и в (Курочкин, 2021) для нейронных сетей. Однако в данном случае можно дать несложное прямое доказательство (см. Приложение, утверждение 1).

Для случая вещественнозначных функций Морса на одномерной сфере S^1 классы эквивалентности описываются так называемыми змеями Арнольда — представленными в виде графов списками последовательных локальных максимумов и минимумов с относительным упорядочением соответствующих значений функции. В случае кривых доходности положение дел несколько иное: областью определения является $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ — некомпактное многообразие с краем, где t — срочность ставки. Здесь аналогом «змеи» и полным описанием топологической формы кривой будет следующий список: начальное значение; далее, идя по t слева направо, последовательные минимумы и максимумы; предельное значение при $t \rightarrow +\infty$.

Непрерывная бескупонная процентная ставка $G(t)$ в модели Нельсона—Зигеля описывается уравнением

$$G(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)(\tau/t)[1 - \exp(-\tau/t)] - \beta_2 \exp(-\tau/t), \quad (1)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau$ — оцениваемые параметры модели.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. В своем общем положении кривая Нельсона—Зигеля $G(t)$ может принадлежать одному из 6 топологических типов⁴. В списке для каждого типа указаны его топологические инварианты и соответствующие области на плоскости параметров (β_1, β_2) :

- 1) N (normal) — монотонно возрастающая, $\beta_1 < 0, |\beta_2| < -\beta_1$;
- 2) I (inverted) — монотонно убывающая, $\beta_1 > 0, |\beta_2| < \beta_1$;
- 3) NH (normal humped) — возрастающая с горбом, $G(0) < G(+\infty)$, максимум при некотором $t : 0 < t < +\infty, \beta_1 < 0, \beta_2 > -\beta_1$;

⁴ В обозначениях использована распространенная терминология, см., например, (Diez, Korn, 2020).

4) *ND (normal dipped)* — возрастающая с ямой, $G(0) < G(+\infty)$, минимум при некотором $t: 0 < t < +\infty$, $\beta_1 < 0, \beta_2 < \beta_1$;

5) *IH (inverted humped)* — убывающая с горбом, $G(0) > G(+\infty)$, максимум при некотором $t: 0 < t < +\infty$, $\beta_1 > 0, \beta_2 > \beta_1$;

6) *ID (inverted dipped)* — убывающая с ямой, $G(0) > G(+\infty)$, минимум при некотором $t: 0 < t < +\infty$, $\beta_1 > 0, \beta_2 < -\beta_1$.

Ситуации, когда для параметров имеют место строгие равенства, приводящие к экспоненциальным кривым, образуют множество меры ноль в пространстве параметров кривой доходности.

Нетривиальная часть доказательства приведена в Приложении, утверждение 2.

Полученная классификация действует для отдельных кривых доходности. Если же рассматриваются траектории в функциональном пространстве, например зависимость объекта от времени, то в некоторые моменты времени траектория общего положения, вообще говоря, проходит через случаи необщего положения, образующие гиперповерхности коразмерности 1. «Гиперповерхности особых случаев образуют границы областей случаев общего положения» (Арнольд, 1978). Поверхностями же коразмерности 2 и более можно пренебрегать — траектории их не задевают.

На рисунке представлена в целом картина областей-классов на плоскости (β_1, β_2) и разделяющих их линий.

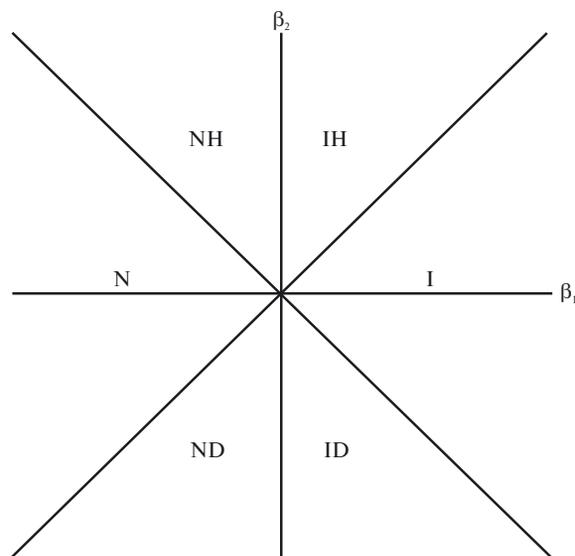


Рисунок. Карта топологических типов кривых бескупонной доходности в модели Нельсона–Зигеля

4. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФОРМЫ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

В данном разделе будет проведен анализ реальной траектории, порожденной естественным ходом времени в пространстве кривых. При этом, с точностью погрешности модели, подтверждается, что переходы из класса в класс, в согласии с теорией, происходят через разделяющие линии, а не прыжком и не через начало координат (особенность коразмерности 2). Анализ выявил топологические свойства траектории, характеризующие ее эволюцию. Представляет интерес статистика переходов, которая свидетельствует о наличии определенных закономерностей.

Исследуемые данные были собраны на сайте Московской биржи⁵, они имеют ежедневный формат и охватывают период с 06.01.2014 (начало расчета кривой) по 06.10.2023; всего — 2446 наблюдений. По итогам каждого торгового дня имеются значения параметров модели и бескупонной доходности на 11 различных сроков от 0,25 до 20 лет.

Модель КБД Московской биржи представляет собой вариацию модели Нельсона–Зигеля (1), в которую было добавлено девять гауссовских колоколов g_i для лучшей подстройки кривой под рынок. Непрерывная ставка в модели описывается уравнением

$$G(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)(\tau/t)[1 - \exp(-\tau/t)] - \beta_2 \exp(-\tau/t) + \sum_{i=1}^9 g_i \exp\left(-\frac{(t-a_i)^2}{b_i^2}\right), \quad (2)$$

где a_i и b_i — дополнительные фиксированные параметры.

В табл. 1 представлены описательные статистики параметров $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ (в базисных пунктах) и τ (в годах). Средний долгосрочный уровень процентных ставок (параметр β_0) в рассматриваемый период составлял порядка 9%. Кривая была в среднем возрастающая и выпуклая вверх, о чем

⁵ Московская биржа. Кривая бескупонной доходности (<https://www.moex.com/s2532?ysclid=lr3pqdzzw1572949068>).

Таблица 1. Описательные статистики основных параметров модели КБД Московской биржи (MOEX GCURVE)

Параметр	β_0	β_1	β_2	τ
Среднее	886	-146	-44	3,89
Минимум	555	-639	-837	0,30
Максимум	1308	768	1192	17,53
Стандартное отклонение	159	240	356	4,07

Таблица 2. Вклад гауссовских колоколов в процентные ставки на различных срочностях

Статистика	0,5	1	2	3	5	10	20
Минимум, %	-0,88	-0,65	-0,36	-0,35	-0,38	-0,36	-0,24
Среднее, %	-0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
Максимум, %	0,34	0,35	0,60	0,79	0,69	0,78	0,34

Таблица 3. Статистика эволюции топологических типов КБД Мосбиржи

В \ Из	N	NH	IH	I	ID	ND	Всего
N	976	11			2	32	
NH	14	369	5				
IH	1	7	224	7			239
I			9	102	6		
ID			1	8	171	5	185
ND	31				6	458	495
Всего	1022	387	239		185	495	2445

свидетельствуют отрицательные значения β_1, β_2 . Горб кривой, положение которого регулируется в модели параметром τ , в среднем находился в районе четырех лет.

Дополнительно мы рассмотрели вклад от гауссовских колоколов в оцененные процентные ставки на различных срочностях (табл. 2). В отдельные дни они могут корректировать базовую ставку из модели Нельсона–Зигеля на 0,8–0,9%. Однако в целом их отбрасывание не меняет топологии кривой в подавляющем числе дней и характер ее динамики. Это верно для всех ключевых срочностей. В связи с этим мы можем без потери информативности сконцентрироваться на анализе параметров β_1, β_2 .

Статистика пребывания кривой доходности в каждом топологическом классе и переходов из класса в класс представлена в табл. 3. По столбцам указан класс, из которого идет переход, по строкам — класс, в который переходит кривая. Расположение — по часовой стрелке, начиная от класса N. Начальный класс — N, конец траектории — класс NH.

Анализ матрицы переходов показал следующее. Из нормальной в перевернутую форму кривая доходности всегда эволюционирует только по схеме $N \rightarrow NH \rightarrow IH \rightarrow I$, т.е. через горб. Наоборот, из перевернутой в нормальную форму переход осуществляется только по схеме $I \rightarrow ID \rightarrow ND \rightarrow N$, т.е. через впадину. По-видимому, этот реальный факт отмечен впервые. В целом же за все время траектория делает на плоскости (β_1, β_2) два полных (с лишним) оборота по часовой стрелке.

Отдельно обсудим неправильные с точки зрения теории переходы не в соседние сектора. За время наблюдения ($\approx 2,5$ тыс.) таких было четыре, из них три шли подряд, а именно: 03.06.2015 — $IH \rightarrow ID$; 06.07.2015 — $ID \rightarrow N$; 07.07.2015 — $N \rightarrow IH$; 24.06.2022 — $ID \rightarrow N$. Анализ кривых за 02–08.06.2015 выявляет побочный эффект модели: торговля была сосредоточена на коротких и средних сроках погашения, кривая — в целом нерелевантна. При этом некоторые из дополнительных параметров g_i принимали аномально большие по абсолютной величине значения, что в данном случае играет роль помех, а не уточнения.

Что касается даты 24.06.2022 (пятница) и последующих, облигации торговались с большими спредами и переходы $ID \rightarrow N \rightarrow ND \rightarrow ID$ также представляют побочный эффект модели. По существу, как и в первом случае, никаких переходов не было, кривая оставалась в своем классе.

Наш вывод о том, что кривая доходностей меняет режим через горб и впадину, согласуется с результатами схожих исследований. Так, в (Ilmanen, Iwanowski, 1997) горб кривой интерпретируется как ожидания рынка изменения формы кривой. В (Mönch, 2012) показано, что изгиб кривой может предсказывать будущие изменения ее наклона.

Мы объясняем такое поведение через привязку короткого конца кривой доходностей к ключевой ставке. Ключевая ставка отражает минимальную доходность на аукционах репо Банка России со срочностью одна неделя. Для избегания арбитража доходность ОФЗ с похожим оставшимся сроком до погашения должна быть близка к ключевой ставке (оба инструмента обладают минимальным риском, соответственно, должны давать одинаковую доходность). Таким образом, короткий конец кривой доходностей не может в полной мере измениться до фактического изменения ключевой ставки.

Ставки на средние срочности, напротив, не привязаны напрямую к ключевой ставке. Участники рынка при ожидании будущего повышения ставок продают облигации, чтобы фиксировать прибыль и избежать негативной переоценки. Увеличение предложения на среднем участке кривой толкает среднесрочные доходности вверх.

Долгосрочные доходности же реагируют на увеличение предложения слабее — отчасти из-за более низкой ликвидности дальнего конца кривой, отчасти — из-за ожиданий возвращения ставок к равновесному уровню в долгосрочной перспективе.

Так у кривой появляется горб. Затем, после повышения ключевой ставки изменяется и короткий конец кривой. Кривая становится инвертированной. По аналогичной логике, но в другом направлении работает переход кривой из инвертированного положения в возрастающее — через обратный горб.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было формализовано понятие формы кривой доходностей в терминах топологических классов дифференцируемых функций. Показано, что в рамках модели Нельсона–Зигеля возможны шесть типов кривой доходностей: монотонно возрастающая, монотонно убывающая, возрастающая с горбом, возрастающая с ямой, инвертированная с горбом и инвертированная с ямой.

На реальных данных КБД Московской биржи мы оценили матрицу переходов кривой доходностей на российском рынке государственных облигаций. Мы пришли к выводу, что переход от возрастающей кривой доходностей к инвертированной происходит через горб на средних срочностях, а обратный переход — к нормальной возрастающей кривой — происходит через яму. Таким образом, среднесрочные ставки содержат ожидания изменения формы кривой доходностей в будущем. Это поведение мы связываем с меньшей адаптивностью короткого конца кривой доходности, который косвенно привязан к ключевой ставке и не может в полной мере реагировать на изменение ожиданий инвесторов.

Выводы работы могут быть полезны как для теоретиков, так и для практиков. Для теоретиков работа предоставляет новый инструментарий для формального анализа кривой доходностей. Для практиков — формулирует основные закономерности в движении кривой доходностей на рублевом рынке. Эта информация может быть полезна для разработки стратегий инвестирования в облигации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Утверждение 1. *Кривая доходности Нельсона–Зигеля*

$$G(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)(\tau/t)[1 - e^{-\tau/t}] - \beta_2 e^{-\tau/t}$$

является функцией Морса почти для всех значений параметров $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$ в смысле меры Лебега в \mathbb{R}^4 .

Доказательство. Параметры β_0, τ не влияют на форму кривой, следовательно, множество $\{V = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau), \text{ где } G(t) \text{ не функция Морса}\}$ имеет вид $V = \mathbb{R} \times \mathbf{W} \times \mathbb{R}^+, \mathbf{W} \subset \mathbb{R}^2$, и для доказательства достаточно исследовать плоскую меру \mathbf{W} .

Полагая $\beta_0 = 0, \tau = 1, a = \beta_1 + \beta_2, b = -\beta_2, g(t) = t^{-1}(1 - e^{-t}), h(t) = e^{-t}$, получаем, что в вырожденной критической точке t^* должны выполняться соотношения $ag'(t^*) + bh'(t^*) = 0, ag''(t^*) + bh''(t^*) = 0$, что

возможно при $a=b=0$ — это множество меры ноль, ему соответствуют плоские кривые доходности, — или при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} g'(t^*) & h'(t^*) \\ g''(t^*) & h''(t^*) \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Покажем, что (3) не может иметь места.

Для $t > 0$:

$$g'(t) = t^{-2}(-1 + e^{-t} + te^{-t}), \quad h'(t) = -e^{-t}, \quad g''(t) = t^{-3}(2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t^2e^{-t}), \quad h''(t) = e^{-t},$$

определитель в (3) равен

$$t^{-3}e^{-t} \begin{vmatrix} 1 + e^{-t} + te^{-t} & -1 \\ 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t^2e^{-t} & t \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Определитель в (4) равен $D(t) = -2 - t + 2e^{-t} + 3te^{-t} + 2t^2e^{-t}$. Имеем: $D(0) = 0$, $D'(t) = -1 + e^{-t} \times (1-t)(1+2t)$, $D'(0) = 0$, $D''(t) = e^{-t}(-3t - 2t^2) < 0$, откуда следует, что при $t > 0$ будет $D(t) < 0$, и то же — для определителя в (3).

При $t=0$ из разложений $g(t)$, $h(t)$ в ряд Тейлора в нуле имеем $g'(0) = -0,5$, $h'(t) = -1$, $g''(0) = 1/3$, $h''(0) = 1$, и определитель в (3) при $t^* = 0$ равен $-1/6 < 0$. ■

Утверждение 2. В своем общем положении, т.е. за вычетом комбинаций параметров $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$, образующих множество меры «ноль», кривая Нельсона–Зигеля при $t \geq 0$ может иметь не более одной критической точки (т.е. точек t , где $G'(t) = 0$).

Доказательство. Как и в доказательстве утверждения 1, полагаем $\beta_0 = 0$, $\tau = 1$, $a = \beta_1 + \beta_2$, $b = -\beta - 2$, $g(t) = t^{-1}(1 - e^{-t})$, $h(t) = e^{-t}$, и вместо $G(t)$ исследуем кривую $y(t) = ag(t) + bh(t)$. Из вида $g(t)$, $h(t)$ следует, что $y'(0) = 0$ только при $a + 2b = 0$. При $t > 0$

$$y'(t) = t^{-2}a(-1 + e^{-t} + te^{-t}) - be^{-t}. \quad (5)$$

Функция $u(t) = -1 + e^{-t} + te^{-t}$ не имеет нулей при $t > 0$, поскольку $u(0) = 0$ и $u'(t) = -te^{-t} < 0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $b \neq 0$, и задача сводится к исследованию числа положительных нулей у функции

$$v(t) = c(-1 + e^{-t} + te^{-t}) + t^2e^{-t}. \quad (6)$$

Здесь $c = -a/b$ — произвольный параметр. Если таких нулей больше одного, должна существовать точка $t^* > 0$, где обращается в ноль производная v . Для нее имеем $v'(t) = (2 - c - t)te^{-t}$, $v'(t^*) = 0$ при $t^* = 2 - c$, — единственный возможный положительный корень, откуда необходимое условие $c < 2$. Поскольку при $t > 0$ будет $-1 + e^{-t} + te^{-t} < 0$, для наличия положительного нуля у функции $v(t)$ (см. (6)) также необходимо условие $c > 0$.

Из разложения $v(t)$ в точке $t=0$ (см. (6)) получаем $v(t) \approx (-0,5c + 1)t^2 > 0$ при малых t . Кроме того, $v(+\infty) = -c < 0$. Далее, $y'(0) = (-0,5c + 1) > 0$, т.е. в таком случае точка $t=0$ не является критической для $y(t)$. При наличии двух или более строго положительных нулей у функции $v(t)$ (учитывая знак $v(t)$ при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$, в таком случае нулей должно было бы быть не менее трех, поскольку, по предположению, $y(t)$ является функцией Морса) ее производная при $t > 0$ должна была бы обращаться в ноль как минимум дважды, что невозможно (см. выше). ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Арнольд В.И. (1978). *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука. [Arnold V.I. (1978). *Additional chapters of the theory of ordinary differential equations*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Гамбаров Г.М., Шевчук И.В., Балабушкин А.Н. (2004). Оценка срочной структуры процентных ставок. Роль рынка государственных ценных бумаг в оценке срочной структуры процентных ставок // *Рынок ценных бумаг*. № 13. С. 1–33. [Gambarov G.M., Shevchuk I.V., Balabushkin A.N. (2004). Evaluation of interest rates term structure. The role of the sovereign bond market in valuation of interest rates term structure. *Securities Market*, 13, 1–33 (in Russian).]
- Курочкин С.В. (2021). Нейронная сеть с гладкими функциями активации и без узких горловин почти наверное является функцией Морса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 61 (7). С. 1172–1178. [Kurochkin S.V. (2021). Neural network with smooth activation functions and without bottlenecks

- is almost surely a Morse function. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 61 (7), 1162–1168 (in Russian).]
- Лапшин В.А., Терещенко М.Ю.** (2018). Выбор модели срочной структуры процентных ставок на основе ее свойств // *Корпоративные финансы*. Т. 12 (2). С. 53–69. [Lapshin V.A., Tereshchenko M. Yu. (2018). Choosing a model of the term structure of interest rates based on its properties. *Corporate Finance*, 12 (2), 53–69 (in Russian).]
- Макушкин М.С., Лапшин В.А.** (2021). Кривые доходностей на низколиквидных рынках облигаций: особенности оценки // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. Т. 25 (2). С. 177–195. [Makushkin M.S., Lapshin V.A. (2021). Yield curve estimation in illiquid bond markets. *HSE Economic Journal*, 25 (2), 177–195 (in Russian).]
- Макушкин М.С., Лапшин В.А.** (2023). Обработка пропусков в рыночных данных на примере задачи оценки кривой доходностей облигаций // *Финансы: теория и практика*. Т. 27 (6). С. 44–53. DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-6-44-53 [Makushkin M.S., Lapshin V.A. (2023). Treatment of missing market data: Case of bond yield curve estimation. *Finance: Theory and Practice*, 27 (6), 44–53. DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-6-44-53 (in Russian).]
- Постников М.М.** (1971). *Введение в теорию Морса*. М.: Наука. [Postnikov M.M. (1971). *Introduction to Morse theory*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Ang A., Piazzesi M., Wei M.** (2006). What does the yield curve tell us about GDP growth? *Journal of Econometrics*, 131 (1–2), 359–403.
- Annaert J., Claes A.G., Ceuster M.J. de, Zhang H.** (2013). Estimating the spot rate curve using the Nelson–Siegel model: A ridge regression approach. *International Review of Economics & Finance*, 27, 482–496.
- Arnold V.I.** (2007). Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert’s 16-th problem. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 10, 227–236.
- Arnold V.I.** (2006). Smooth functions statistics. *Functional Analysis and Other Mathematics*, 1, 111–118.
- Banyaga A., Hurtubise D.** (2004). Lectures on Morse homology. Series: *Texts in the Mathematical Sciences*. Vol. 29. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
- Barber J.R., Copper M.L.** (2012). Principal component analysis of yield curve movements. *Journal of Economics and Finance*, 36 (3), 750–765. DOI: 10.1007/s12197-010-9142-y
- Campbell J.Y.** (1995). Some lessons from the yield curve. *Journal of Economic Perspectives*, 9 (3), 129–152.
- Chauvet M., Potter S.** (2005). Forecasting recessions using the yield curve. *Journal of Forecasting*, 24 (2), 77–103.
- Chazal F., Michel B.** (2021). An introduction to topological data analysis: Fundamental and practical aspects for data scientists. *Frontiers in artificial intelligence*, 4, 108. DOI: 10.3389/frai.2021.667963
- Cook T., Hahn T.** (1990). Interest rate expectations and the slope of the money market yield curve. *FRB Richmond Economic Review*, 76 (5), 3–26.
- Culbertson J.M.** (1957). The term structure of interest rates. *The Quarterly Journal of Economics*, 71 (4), 485–517.
- Diebold F.X., Li C.** (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130, 337–364. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.03.005
- Diez F., Korn R.** (2020). Yield curve shapes of Vasicek interest rate models, measure transformations and an application for the simulation of pension products. *European Actuarial Journal*, 10, 91–120. DOI: 10.1007/s13385-019-00214-0
- Estrella A., Mishkin F.S.** (1998). Predicting US recessions: Financial variables as leading indicators. *Review of Economics and Statistics*, 80 (1), 45–61.
- Fama E.F., Bliss R.R.** (1987). The information in long-maturity forward rates. *The American Economic Review*, 77 (4), 680–692.
- Fisher I.** (1896). *Appreciation and interest*. Publications of the American Economic Association, 23–29, 88–92.
- Fisher M.** (2001). Forces that shape the yield curve. Parts 1 and 2. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, no. 2001–3.
- Hicks J.R.** (1946). *Value and capital*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.
- Hua J.** (2015). Term structure modeling and forecasting using the Nelson–Siegel model. *Handbook of Financial Econometrics and Statistics*. Springer USA, 1093–1103.
- Ilmanen A.** (1995). *Convexity bias and the yield curve*. N.Y.: Salomon Bros.
- Ilmanen A., Iwanowski R.** (1997). Dynamics of the shape of the yield curve. *The Journal of Fixed Income*, 7 (2), 47.
- Ishii H.** (2023). Yield curve shapes and foreign exchange rates: The term structure of interest rates model approach. *Applied Economics*, 55 (38), 4402–4414.
- Keynes J.M.** (1936). *The general theory of employment, interest and money*. London: Macmillan & Co. Ltd.

- Le C. (2018). A note on optimization with Morse polynomials. *Commun. Korean Math. Soc.*, 33, 2, 671–676.
- Lutz F.A. (1940). The structure of interest rates. *Quarterly Journal of Economics*, 55, 36–63.
- McCulloch J.H. (1971). Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44 (1), 19–31.
- Mehl A. (2009). The yield curve as a predictor and emerging economies. *Open Economies Review*, 20, 683–716.
- Meilä M., Zhang H. (2024). Manifold learning: What, how, and why. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 11. DOI: 10.48550/arXiv.2311.0375
- Modigliani F.R., Sutch R. (1966). Innovations in interest rate policy. *American Economic Review*, 56, 178–197.
- Nelson C.R., Siegel A.F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 473–489.
- Nicolaescu L.I. (2008). Counting Morse functions on the 2-sphere. *Compositio Mathematica*, 144, 5, 1081–1106.
- Rebonato R., Putyatin V. (2018). The value of convexity: A theoretical and empirical investigation. *Quantitative Finance*, 18 (1), 11–30. DOI: 10.1080/14697688.2017.1341639
- Shiller R.J., McCulloch H.J. (1990). The term structure of interest rates. In: *Handbook of Monetary Economics*. Chapter 13. B.M. Friedman, F.H. Hahn (eds.), 627–722. Elsevier (North Holland Publisher).
- Svensson L.E. O. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994. *National Bureau of Economic Research. Working Paper no. 4871*.
- Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 177–188.
- Wahlström R.R., Paraschiv F., Schürle M. (2022). A comparative analysis of parsimonious yield curve models with focus on the Nelson-Siegel, Svensson and Bliss versions. *Computational Economics*, 1–38.

Zero coupon yield curve dynamics in the Russian sovereign bond market

© 2024 S.V. Kurochkin, M.S. Makushkin

S.V. Kurochkin,

HSE University, Moscow, Russia; e-mail: skurochkin@hse.ru

M.S. Makushkin,

HSE University, Moscow, Russia; e-mail: mmakushkin@hse.ru

Received 31.03.2024

The authors are grateful to the reviewer of the first version of the article for valuable comments that made possible to improve the text.

Abstract. Yield curve is a graphical representation of a relationship between interest rates and maturity. Shape of yield curve often attracts attention of analysts, because it represents market implied expectation of future interest rate path. However, the analysis of the yield curve shape often lacks theoretical foundation. It is based either on review of term spreads or on a simple visual investigation. In this article we formally define the shape of the yield curve in terms of function invariants. We use Nelson–Siegel model as a backbone for our classification and show that there exists only six possible shapes of yield curve. They are: a normal upward slopping yield curve, inverted yield curve, humped upward slopping, dipped upward slopping, humped inverted and dipped inverted. We analyze dynamics of zero coupon yield curve in Russian market based on real historical data. We show that transition from an upward slopping curve to an inverted one was always preceded by a hump at mid-term maturities, while the transition back was always done through the dip. This highlights the importance of mid-term rates in reshaping the curve. We explain this behavior by short end of the curve being linked to the key rate and thus being more sticky. The contribution of the paper is twofold. First, it provides a formal framework to analyze the shape of the yield curve. Second, it describes the patterns in dynamic of the ruble yield curve that can be useful for bond investors in the Russian market.

Keywords: zero coupon yield curve, term structure of interest rates, Nelson–Siegel model, Morse function.

JEL Classification: G12, E43.

UDC: 336.01.

For reference: **Kurochkin S.V., Makushkin M.S.** (2024). Zero coupon yield curve dynamics in the Russian sovereign bond market. *Economics and Mathematical Methods*, 60, 4, 40–49. DOI: 10.31857/S0424738824040044 (in Russian).