Математика

DOI 10.15507/2079-6900.26.202403.1-14 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами

О. А. Кольчурина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются Ω-устойчивые диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых ориентируемых многообразиях размерности $n \geq 3$, все нетривиальные базисные множества которых являются либо растягивающимися аттракторами, либо сжимающимися репеллерами коразмерности 1. Благодаря простой топологической структуре бассейнов аттракторов и репеллеров такого типа можно осуществить переход от данной динамической системы с нетривиальными базисными множествами к регулярной системе, представляющей собой гомеоморфизм с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Как известно, не все дискретные динамические системы обладают энергетической функцией — глобальной функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством системы. Контрпримеры были найдены как среди регулярных диффеоморфизмов, так и среди диффеоморфизмов с хаотической динамикой. Основным результатом данной работы является доказательство того, что топологические энергетические функции для исходного диффеоморфизма и соответствующего ему регулярного гомеоморфизма существуют или отсутствуют одновременно. Таким образом, многочисленные результаты, полученные в области существования энергетических функций для систем с регулярной динамикой, например, для диффеоморфизмов Морса-Смейла, можно применить к исследованию диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности 1.

Ключевые слова: энергетическая функция, Ω-устойчивые диффеоморфизмы, растягивающийся аттрактор, сжимающий репеллер

Для цитирования: Кольчурина О. А. Энергетическая функция для диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 3. С. 1–14. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14

Об авторах:
Кольчурина Ольга Александровна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, oakolchurina@edu.hse.ru

Original article

MSC2020 37D20

The Energy Function for Diffeomorphisms with Expanding Attractors and Contracting Repellers

O. A. Kolchurina

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper we consider Ω-stable diffeomorphisms defined on smooth closed orientable manifolds of dimension $n \geq 3$, whose all nontrivial basic sets are either expanding attractors or contracting repellers of co-dimension 1.
Due to the simple topological structure of the basins of such attractors and repellers, one can make a transition from a given dynamical system with nontrivial basic sets to a regular system which is a homeomorphism with a finite hyperbolic chain-recurrent set.
It is well known that not every discrete dynamical systems has energy functions, i.e. a global Lyapunov function whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of the system. Counterexamples were found both among regular diffeomorphisms and among diffeomorphisms with chaotic dynamics.
The main result of this paper is the proof of the fact that the topological energy functions for the original diffeomorphism and for its corresponding regular homeomorphism exist or do not exist simultaneously.
Thus, numerous results obtained in the field of existence of energy functions for systems with regular dynamics, e.g., for Morse–Smale diffeomorphisms, may be applied to the study of the diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers of co-dimension 1.

Keywords: energy function, Ω-stable diffeomorphism, expanding attractor, contracting repeller

For citation: *O. A. Kolchurina*. The Energy Function for Diffeomorphisms with Expanding Attractors and Contracting Repellers. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:3(2024), 1–14. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202403.1-14

About the authors:
Kolchurina O. A., Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, oakolchurina@edu.hse.ru

1. Введение

«Фундаментальная теорема динамических систем» Ч. Конли [1] гласит, что глобальная функция Ляпунова[1] существует для любой динамической системы, заданной на компактном многообразии. Естественно ожидать, что благодаря строгому убыванию функции Ляпунова вне цепно рекуррентного множества ее критические точки могут находится только в цепно рекуррентном множестве, однако это неверно для произвольных динамических систем. Поэтому рассматриваются *энергетические функции* — функции

[1] Строгие определения для терминов из этой части, посвященной истории изучения энергетической функции, будут даны ниже для удобства читателя.

Ляпунова, у которых множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы.

Одним из первых вопросом существования энергетических функций начал заниматься С. Смейл. В 1961 г. он доказал существование энергетической функции Морса (непрерывной функции, критическое множество которой состоит из невырожденных точек) у градиентно-подобных потоков [2]. Его результат был расширен К. Мейером в 1968 г. В своей работе [3] К. Мейер построил энергетическую функцию Морса-Ботта — непрерывную функцию, у которой любая компонента связности критического множества является или критической точкой, или критическим подмногообразием — для произвольного потока Морса-Смейла. Дж. Фрэнкс в 1985 г. указал на существование энергетической функции для любого гладкого потока на компактном многообразии [4].

Для потоков с конечным числом гиперболических периодических орбит, обобщающих потоки Морса-Смейла, имеет смысл искать энергетическую функцию среди функций Морса или Морса-Ботта. Результаты в этой области были получены А. А. Босовой, В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, С. Х. Зининой, А. Е. Колобяниной, В. Е. Кругловым, О. В. Починкой [5–9].

В отличие от потоков, каскады не всегда обладают энергетической функцией даже в топологическом смысле (см., например, обзор [10]). Первый пример такого каскада построил Д. Пикстон в 1977 г. на трехмерной сфере [11]. Пример Пикстона представляет собой диффеоморфизм Морса-Смейла[2] с четырьмя неподвижными точками. Энергетическая функция в данном примере отсутствует из-за дикого вложения сепаратрис в объемлющее многообразие. В этой же работе доказывается существование энергетической функции Морса для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на поверхностях.

Энергетические функции для каскадов с регулярной динамикой изучали В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Т. М. Митрякова, А. Е. Шишенкова и др. [12–13]. Следует отметить работу [14], в которой В. З. Гринес, Ф. Лауденбах и О. В. Починка ввели понятие динамически упорядоченной функции Морса-Ляпунова для произвольных диффеоморфизмов Морса–Смейла на трехмерных многообразиях и доказали критерий существования такой энергетической функции. Условия существования определяются типом вложения одномерных аттракторов и репеллеров, каждый из которых является объединением нульмерных и одномерных неустойчивых и устойчивых многообразий орбит соответственно. Недавним результатом М. К. Бариновой, В. З. Гринеса и О. В. Починки в работе [15] стало доказательство критерия существования непрерывной энергетической функции Морса для регулярных гомеоморфизмов 3-сферы, согласно которому существование такой функции равносильно асимптотической тривиальности одномерных седловых многообразий.

Изучаются энергетические функции и для каскадов с хаотической динамикой. Для 2-многообразий в 2022 г. М. К. Баринова выделила класс динамических систем на поверхностях, у которых нет энергетических функций [16], показав, что Ω-устойчивый 2-диффеоморфизм с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек не обладает энергетической функцией. А в работе [17] М. К. Баринова (Носкова), В. З. Гринес и О. В. Починка установили существование энергетической функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых двумерных многообразиях с нетривиальными базисными множествами размерности один. Построенная ими в этом случае энергетическая функция является функцией Морса вне нетри-

[2] Диффеоморфизмом Морса-Смейла называют структурно устойчивый диффеоморфизм, заданный на замкнутом n-многообразии M^n, с конечным неблуждающим множеством.

виальных аттракторов и репеллеров. Для динамических систем на 3-многообразиях М. К. Баринова, В. З. Гринес и О. В. Починка в работе [18] установили существование энергетической функции для структурно устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых 3-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор. Более того, построенная ими функция является функцией Морса вне нетривиального аттрактора. Кроме этого в работе [19] было доказано существование энергетической функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутых ориентируемых трехмерных многообразиях, с растягивающимся канонически вложенным аттрактором и сжимающимся репеллером размерности 1.

Работы М. К. Бариновой и Е. К. Шустовой [20–21] посвящtны изучению энергетических функция для прямых произведений дискретных динамических систем. Они доказали, что отсутствие энергетической функции для одного из сомножителей не является достаточным условием для отсутствия такой функции у прямого произведения [20]. Также они показали, что для диффеоморфизмов, уже обладающих энергетическими функциями, их прямое произведение также обладает энергетической функцией [21].

Настоящая статья посвящена доказательству критерия существования топологической энергетической функции для класса n-диффеоморфизмов.

Пусть M^n — гладкое замкнутое ориентируемое n-многообразие с метрикой d и $f: M^n \to M^n$ — Ω-устойчивый[3] диффеоморфизм. Из результатов [22–25] следует, что для таких диффеоморфизмов цепно рекуррентное множество R_f гиперболично и совпадает с неблуждающим множеством. Более того, верна теорема Смейла о спектральном разложении [26], т. е. неблуждающее множество можно представить в виде конечного объединения непересекающихся, компактных, инвариантных и топологически транзитивных подмножеств, называемых *базисными.* Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют *тривиальным*, в противном случае — *нетривиальным.*

У каждой точки x базисного множества Λ существуют устойчивое и неустойчивое многообразия W^s_x и W^u_x, определенные следующим образом:

$$W^s_x = \{y \in M^n \mid \lim_{k\to+\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\},$$

$$W^u_x = \{y \in M^n \mid \lim_{k\to+\infty} d(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) = 0\}.$$

Аттрактором (*репеллером*) Ω-устойчивого диффеоморфизма $f: M^n \to M^n$ называется базисное множество Λ (R), у которого существует компактная окрестность U_Λ $(U(R))$, называемая захватывающей, такая что $f(U(\Lambda)) \subset int\, U(\Lambda)$ $(f^{-1}(U(R)) \subset \subset int\, U(R))$ и $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(U(\Lambda)) = \Lambda$ $(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U(R)) = R)$. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неусточивых (устойчивых) многообразий его точек, аттрактор (репеллер) называют *растягивающимся* (*сжимающимся*). Множество $W^s_\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^s_x$ $(W^u_R = \bigcup\limits_{x\in R} W^u_x)$ называется *бассейном аттрактора* (*репеллера*).

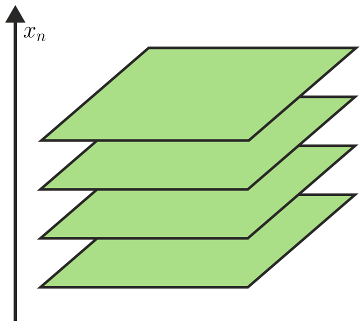
Обозначим через G_Ω класс Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на гладких замкнутых ориентируемых многообразиях размерности $n \geq 3$, все нетривиальные базисные множества которых являются либо растягивающимися аттракторами, либо сжимающимися репеллерами коразмерности[4] 1.

[3] Диффеоморфизм $f: M^n \to M^n$ называют Ω-*устойчивым*, если C^1-близкие к f диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах.

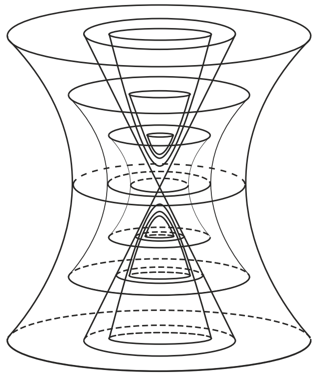
Точка $p \in M^n$ называется *регулярной* для непрерывной функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $V_p \subset M^n$ точки p и гомеоморфизм на образ $\phi_p : V_p \to \mathbb{R}^n$, $\phi_p(y) = (x_1(y), x_2(y) \dots x_n(y))$ такой, что

$$x_i(p) = 0, \text{ где } i \in 1, 2 \dots n, \text{ и } \varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y).$$

В противном случае точку p называют *критической* (Рис. 1.1).



a)



b)

Рис. 1.1. Пример множеств уровня в окрестности регулярной и критической точки.
Fig. 1.1. Example of level sets in the neighbourhood of a regular and critical point.

Непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для каскада f, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(f(x)) < \varphi(x), x \notin R_f$
2) $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x, y \in R_f$ и $x \sim y$, в том смысле, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ε-цепи[5], соединяющие x с y и y с x. (Это условие не является обязательным;
3) $\varphi(R_f)$ — нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$.

Энергетическая функция — функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством диффеоморфизма. Если несущее многообразие гладкое, то часто от энергетической функции требуется еще и гладкость.

Известно, что для размерности 4 и более существуют топологические многообразия с несколькими гладкими структурами. Одним из ярких примеров является работа Милнора [27], в которой он приводит различные гладкие структуры на многообразии, гомеоморфном семимерной сфере. Есть также многообразия вовсе не допускающие гладких структур, их называют экзотическими. В своих работах С. Дональдсон и М. Фридман [28] показали, что многие односвязные компактные многообразия размерности 4 не обладают гладкой структурой. Поэтому на таких многообразиях рассматриваются

[4] Подмножество является подмножеством коразмерности 1, если размерность подмножества отличается на единицу от размерности самого множества.

[5] ε-цепью длины $m \in \mathbb{N}$, соединяющей точку x с точкой y, для гомеоморфизма f называют конечный набор точек $x = x_0, x_1, \dots x_m = y$, такой что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \le i \le m$.

только каскады, порожденные гомеоморфизмами и топологические – непрерывные — энергетические функции.

В разделе [2] будет показано, что каждому диффеоморфизму f из класса G_Ω с множеством нетривиальных аттракторов $\mathcal{A}$ и репеллеров $\mathcal{R}$ соответствует гомеоморфизм $\widetilde{f}$ с регулярной динамикой (цепно рекуррентное множество которого состоит из конечного числа гиперболических периодических орбит [8]), называемый «регулярный спутник», т. е. имеет место следущая теорема:

Т е о р е м а 1.1. *Для диффеоморфизма f из класса G_Ω существует гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$, такой что $f\mid_{M^n \setminus (\mathcal{A}\cup\mathcal{R})}$ топологически сопряжен с $\widetilde{f}|_{\widetilde{M}^n\setminus(\widetilde{\mathcal{A}}\cup\widetilde{\mathcal{R}})}$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$ являются подмножествами множеств всех стоков и источников $\widetilde{f}$ соответственно.*

Гладкий аналог этой теоремы доказан в статье [29] в случае, когда n = 3 и все нетривиальные базисные множества являются аттракторами.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы, которое будет представлено в разделе [3]:

Т е о р е м а 1.2. *Диффеоморфизм f из класса G_Ω обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его “регулярный спутник” обладает энергетической функцией.*

2. Переход к «регулярному спутнику»

Из работы [30], с учетом выкладок из Леммы 2.2 работы [15], справедливо следущее утверждение:

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть Λ — растягивающийся аттрактор коразмерности 1 Ω-устойчивого диффеоморфизма f, заданного на ориентируемом многообразии M^n. Существует захватывающая окрестность $U(\Lambda)$ аттрактора Λ, границей которой является объединение конечного числа $(n-1)$-мерных сфер и каждая компонента связности пространства орбит ограничения диффеоморфизма f на множество $W^s_\Lambda\setminus\Lambda$ гомеоморфно либо $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, либо $\mathbb{S}^{n-1}\widetilde{\times}\mathbb{S}^1$.*

Аналогичное предложение верно и для репеллеров.

Обозначим за $U(\mathcal{A})$, $U(\mathcal{R})$ захватывающие окрестности аттрактора $\mathcal{A}$ и репеллера $\mathcal{R}$ такие, как в предложении 2.1 и с минимальным количеством компонент связности границы, т. е. $\partial(U(\mathcal{A}))$ состоит из n_ω копий $(n-1)$-мерных сфер и $\partial(U(\mathcal{R}))$ состоит из n_α таких копий. Положим $\mathcal{M} = M^n \setminus (\mathcal{R}\cup\mathcal{A})$. Несущее многообразие “регулярного спутника” будет иметь вид $\widetilde{M}^n = \mathcal{M}\cup_h(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}_{n_\omega+n_\alpha})$, где $h : (W^s_{\mathcal{A}}\setminus\mathcal{A})\cup(W^u_{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}) \to$ $\to (\mathbb{R}^n\setminus\{O\})\times\mathbb{Z}_{n_\omega+n_\alpha}$ — гомеоморфизм.

Докажем Теорему 1.1, т. е. покажем, что для любого диффеоморфизма f из класса G_Ω существует гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$, у которого n_ω стоков и n_α источников, расположенных в точках $q(\{O\}\times\mathbb{Z}_{n_\omega+n_\alpha}) \subset \widetilde{M}^n$, где $q : \mathcal{M}\sqcup(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}_{n_\omega+n_\alpha}) \to \widetilde{M}^n$ — естественная проекция и O — начало координат. Причем $\widetilde{f}\mid_{\widetilde{M}^n\setminus q(\{O\}\times\mathbb{Z}_{n_\omega+n_\alpha})}$ топологически сопряжен с $f\mid_{M^n\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Аттрактор $\mathcal{A}$ и репеллер $\mathcal{R}$ делят свои бассейны на конечное число компонент связности. Более того, $W^s_{\mathcal{A}}\setminus\mathcal{A}$ можно разбить на несколько непересекающихся множеств

B_i^A, состоящих из m_i^A связных подмножеств с периодом m_i^A, где $i \in \{1, 2, \dots m_A\}$. Аналогичным образом множество $W^u_{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R}$ разбивается на множества B_j^R, состоящие из m_j^R периодических компонент, где $j \in \{1, 2, \dots m_R\}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m_A} m_i^A = n_\omega$ и $\sum\limits_{j=1}^{m_R} m_j^R = n_\alpha$.

Из Предложения 2.1 следует, что все компоненты связности B_i^A $\left(B_j^R\right)$ гомеоморфны $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, а пространства орбит $f^{m_i^A}|_{B_i^A}$ $\left(f^{m_j^R}|_{B_j^R}\right)$ гомеоморфны $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, если $f^{m_i^A}|_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ $\left(f^{m_j^R}|_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}\right)$ сохраняет ориентацию, и $\mathbb{S}^{n-1} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$, если меняет. Заметим, что такое же пространство орбит у ограничения действия диффеоморфизма с гиперболическими стоками и источниками на их бассейны без самих стоков и источников.

Положим $g_i^A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i^A} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$ — гомеоморфизм с m_i^A стоками, расположенными в точках $\{O\} \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$, $g_i^A = \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{x_2}{2}, \dots \dfrac{x_n}{2}, (t+1) \mod m_i^A\right)$, если $f^{m_j^A}|_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ сохраняет ориентацию, а если меняет, то $g_i^A = \left(a\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{x_2}{2}, \dots \dfrac{x_n}{2}, (t+1) \mod m_i^A\right)$, где $a = -1$, если $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_1$, и $a = 1$ в остальных случаях. Аналогично определим $g_j^R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_j^R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$ — гомеоморфизм с m_j^R источниками, расположенными в $\{O\} \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$, $g_j^R = \left(2x_1, 2x_2, \dots 2x_n, (t+1) \mod m_j^R\right)$, если $f^{m_j^R}|_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ сохраняет ориентацию, и $g_j^R = \left(2ax_1, 2x_2, \dots 2x_n, (t+1) \mod m_j^R\right)$, если $f^{m_j^R}|_{B_j^R \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ меняет ориентацию.

Поскольку пространства орбит $f^{m_i^A}|_{B_i^A}$ и $f^{m_j^R}|_{B_j^R}$ гомеоморфны пространствам орбит $g_i^A|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}$ и $g_j^R|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}$, то существуют гомеоморфизмы для аттракторов $h_i^A : B_i^A \to (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$, сопрягающие $f|_{B_i^A \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ и $g_i^A|_{(\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_i^A}}$, и гомеоморфизмы для репеллеров $h_j^R : B_j^R \to (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$. Причем h_i^A и h_i^R могут быть выбраны таким образом, что $h_i^A(\partial\widehat{M} \cap B_i^A) = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{m_i^A}$ и $h_j^R(\partial\widehat{M} \cap B_j^R) = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{m_j^R}$.

Наконец определим гомеоморфизмы $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}$ и $h : ((W^s_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}) \cup (W^u_{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R})) \to (\mathbb{R}^n \setminus \{O\}) \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}$, составленные из g_i^A и g_j^R, h_i^A и h_j^R соответственно. Тогда $\widetilde{M}^n = \mathcal{M} \cup_h (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})$. Обозначим естественную проекцию $q : \mathcal{M} \sqcup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha}) \to \widetilde{M}^n$. Тогда искомый гомеоморфизм $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ определен следующим образом:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} qf(q|_{\mathcal{M}})^{-1}, & x \in q(\mathcal{M}), \\ qg(q|_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{n_\omega + n_\alpha})})^{-1}, & \text{иначе}. \end{cases}$$

3. Доказательство критерия

В этом разделе приводится доказательство основной теоремы:

Теорема 3.1. *Диффеоморфизм f из класса G_Ω обладает энергетической функцией тогда и только тогда, когда его «регулярный спутник» обладает энергетической функцией.*

Доказательство.

В первую очередь докажем достаточность. Пусть существует энергетическая функция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M}^n \to \mathbb{R}$ для гомеоморфизма $\widetilde{f}$, который является «регулярным спутником» для диффеоморфизма f. Покажем, что в таком случае существует энергетическая функция φ и для f.

Введем специальную энергетическую функцию $\bar{\varphi} : \widetilde{M}^n \to [0,1]$, для гомеоморфизма $\widetilde{f}$, которая принимает значение 0 на множестве $\widetilde{\mathcal{A}}$ и 1 на множестве $\widetilde{\mathcal{R}}$. Напомним, что $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$ являются множествами, состоящими из периодических стоков и источников, на которые заменили нетривиальные аттракторы и репеллеры при переходе к «регулярному спутнику». Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 3.1. *Если для регулярной системы $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to \widetilde{M}^n$ существует энергетическая функция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M}^n \to \mathbb{R}$, то существует и такая энергетическая функция $\bar{\varphi} : \widetilde{M}^n \to [0,1]$, что:*

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \widetilde{\mathcal{R}}, \\ 0, & x \in \widetilde{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку область определения функции $\widetilde{\varphi}$ является компактным множеством, то она достигает своего максимума и минимума. Заметим, что $min(\widetilde{\varphi}) \neq max(\widetilde{\varphi})$, т. к. блуждающее множество не пусто, а значит, существует линейная функция $l_{\widetilde{\varphi}} : [min(\widetilde{\varphi}), max(\widetilde{\varphi})] \to [0,1]$, определенная следующим образом:

$$l_{\widetilde{\varphi}}(x) = \frac{\widetilde{\varphi}(x) - min(\widetilde{\varphi})}{max(\widetilde{\varphi}) - min(\widetilde{\varphi})}.$$

Тогда определена композиция $\widetilde{\varphi}_{norm} = l_{\widetilde{\varphi}} \circ \widetilde{\varphi} : \widetilde{M}^n \to [0,1]$.

Рассмотрим орбиту O_{ω_i} периодического стока $\omega_i \in \widetilde{\mathcal{A}}$, где $i \in 1, 2, \ldots n_\omega$. Пусть $\widetilde{U}(O_{\omega_i})$ — захватывающая окрестность орбиты O_{ω_i}, тогда для $\varepsilon > 0$, таких что неравенство $\widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon < max(\widetilde{\varphi}_{norm}(\widetilde{U}(O_{\omega_i})))$ выполняется, можно определить ε-окрестность:

$$U_\varepsilon(O_{\omega_i}) = \widetilde{\varphi}_{norm}^{-1}([\widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i), \widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon]) \cap \widetilde{U}(O_{\omega_i}).$$

Заметим, что тогда $max(\widetilde{\varphi}_{norm}(U_\varepsilon(O_{\omega_i}))) = \widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon$. Определим линейную функцию $\delta_{A_i} : \widetilde{\varphi}_{norm}(U_\varepsilon(O_{\omega_i})) \to [0, \widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon]$ следующим образом (Рис. 3.1):

$$\delta_{A_i} = (\widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i) + \varepsilon)\frac{x - \widetilde{\varphi}_{norm}(\omega_i)}{\varepsilon}.$$

Аналогичным способом найдем линейную функцию δ_{R_j} для периодических источников $\alpha_j \in \widetilde{\mathcal{R}}$, где $j \in [1, 2, \ldots n_\alpha]$. Пусть $\widetilde{U}(O_{\alpha_j})$ — захватывающая окрестность орбиты O_{α_j} и для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon > min(\widetilde{\varphi}_{norm}(\widetilde{U}(O_{\alpha_j})))$. Определим ε-окрестность для множества O_{α_j}:

$$U_\varepsilon(O_{\alpha_j}) = \widetilde{\varphi}_{norm}^{-1}([\widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon, \widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j)]) \cap \widetilde{U}(O_{\alpha_j}).$$

Заметим, что тогда $min(\widetilde{\varphi}_{norm}(U_\varepsilon(O_{\alpha_j}))) = \widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon$. Определим линейную функцию $\delta_{R_j} : \widetilde{\varphi}_{norm}(U_\varepsilon(O_{\alpha_j})) \to [\widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) - \varepsilon, 1]$ как

$$\delta_{R_j}(x) = 1 + \frac{(x - \widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j))(1 - \widetilde{\varphi}_{norm}(\alpha_j) + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Теперь получим искомую энергетическую функцию $\widetilde{\varphi}_*(x)$, рассмотрев отображение из $\widetilde{M}^n$ в $\mathbb{R}$ (рис 3.2):

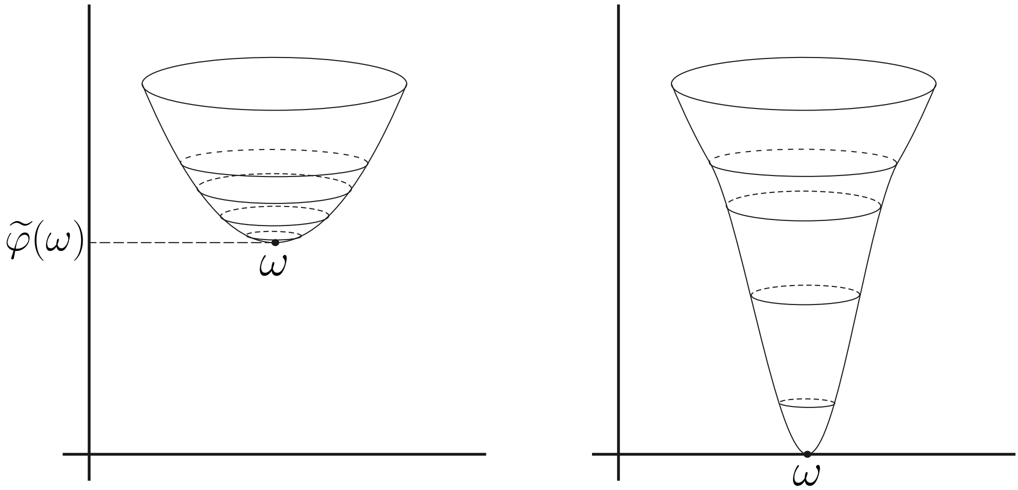


Рис. 3.1. Пример изменения линий уровня функции $\widetilde{\varphi}$ под действием δ_{A_i}

Fig. 3.1. An example of the change of the level lines of the function $\widetilde{\varphi}$ under the action of δ_{A_i}

$$\widetilde{\varphi}_*(x) = \begin{cases} \delta_{A_i} \circ \widetilde{\varphi}_{norm}(x), & x \in U_\varepsilon(O_{\omega_i}), \text{ где } \omega_i \in \widetilde{\mathcal{A}}, \\ \delta_{R_j} \circ \widetilde{\varphi}_{norm}(x), & x \in U_\varepsilon(O_{\alpha_j}), \text{ где } \alpha_j \in \widetilde{\mathcal{R}}, \\ \widetilde{\varphi}_{norm}(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что функции δ_{A_i} и δ_{R_i} – строго возрастающие по построению, а значит, сама функция $\widetilde{\varphi}_*(x)$ сохраняет убывание вдоль траекторий.

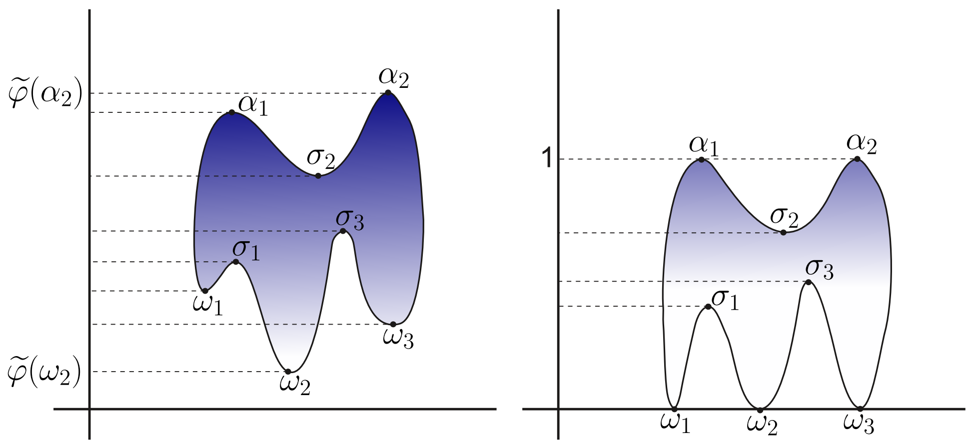


Рис. 3.2. Пример изменения энергетической функции $\widetilde{\varphi}$

Fig. 3.2. An example of a change in the energy function $\widetilde{\varphi}$

Напомним, что $q\,|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})} \colon M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) \to \widetilde{M}^n \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{R})$ — естественная проекция, сопрягающая $f\,|_{M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})}$ с $\widetilde{f}\,|_{\widetilde{M}^n \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}})}$ Определим функцию $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{A} \\ 1 & x \in \mathcal{R} \\ \bar{\varphi} \circ q & x \in M^n \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}). \end{cases}$$

Тогда критические точки функции φ совпадают с неблуждающим множеством диффеоморфизма f по построению, а значения функции $\bar{\varphi}(x)$ при стремлении x к $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) стремятся к нулю (единице), следовательно, функция φ непрерывна. Тогда $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — искомая энергетическая функция.

Теперь докажем необходимость.

Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — энергетическая функция для f. Покажем, что найдется энергетическая функция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M^n} \to \mathbb{R}$ для «регулярного спутника» $\widetilde{f}$.

Пусть функция $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi \circ q^{-1}(x)$, где $x \in \widetilde{M^n} \setminus (\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}})$. Таким образом, функция $\widetilde{\varphi}$ не определена только множестве $\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{\mathcal{R}}$, состоящим из конечного числа точек. Продолжим по непрерывности функцию $\widetilde{\varphi}(x)$ на это множество.

Множество критических точек $\widetilde{\varphi}$ совпадает с неблуждающим множеством гомеоморфизма $\widetilde{f}$, и аналогично прошлому случаю $\widetilde{\varphi}$ непрерывна, следовательно, является энергетической. Значит, из существования энергетической функции для f следует существование энергетической функции для $\widetilde{f}$.

Благодарности. Автор благодарит М. К. Баринову за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) в 2024 г.

Список литературы

1. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence: American Mathematical Society, 1978. Vol. 38, No. 1. 100 p.

2. Smale. S. On gradient dynamical systems // Ann. of Math. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206.

3. Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems // American Journal of Mathematics. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: https://doi.org/10.2307/2373287

4. Franks J. Nonsingular smale flows on S^3 // Topology. 1985. Vol. 24. pp. 265–282. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3

5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В. Энергетическая функция градиентно-подобных потоков и проблема топологической классификации // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 6. С. 856–863. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1056

6. Босова А. А., Круглов В. Е., Починка О. В. Энергетическая функция для Ω-устойчивого потока с седловой связкой на сфере // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 4. С. 51–58.

7. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 4. С. 434–441. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441

8. Починка О. В., Зинина С. Х. Динамика регулярных топологических потоков // Таврический вестник информатики и математики. 2020. № 3. С. 77–91.

9. Pochinka O., Zinina S. Construction of the Morse – Bott energy function for regular topological flows // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, No. 4. P. 350–369. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354721040031

10. Гринес В. З., Починка О. В. Построение энергетических функций для омега-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 2. С. 191–222. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222

11. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. 1977. Vol. 16, Issue 2. pp. 167–172. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3

12. Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 175–183. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8474

13. Митрякова Т. М., Починка О. В., Шишенкова А. Е. Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14, № 1. С. 98–106.

14. Починка О. В., Лауденбах Ф., Гринес В. З. Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2012. Т. 278. № 0,5. С. 34–48.

15. Баринова М. К., Гринес В. З., Починка О. В. Критерий существования энергетической функции у регулярного гомеоморфизма 3-сферы // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2023. Т. 321, № 1. С. 45–61. DOI: https://doi.org/10.4213/tm4323

16. Barinova M. On Existence of an energy function for Ω-stable surface diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 14. P. 3317–3323. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222020020

17. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Энергетическая функция для А-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. 2015. Т. 5, № 1-2. С. 31–37.

18. Починка О. В., Гринес В. З., Носкова М. К. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. 2015. Т. 76, № 2. С. 271–286.

19. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 6. Article number: 063112. DOI: https://doi.org/10.1063/5.0026293

20. Баринова М. К., Шустова Е. К. Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 11–21. . DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21

21. Баринова М. К., Шустова Е. К. Динамические свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24. № 1. С. 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

22. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems: an introduction. NY: Springer New York, 2012. 198 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5

23. Shub M. Stabilité globale des systèmes dynamiques // Astérisque. 1978. Vol. 56. 224 p.

24. Smale S. The Ω-stability theorem // Same Proceedings. 1970. Vol. 14. pp. 289–297.

25. Franke J. E., Selgrade J. F. Hyperbolicity and chain recurrence // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 26. No. 1. pp. 27–36. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90096-1

26. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 73. №. 6. pp. 747–817.

27. Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-Sphere // Annals of Mathematics. 1956. Vol. 64, No. 2. pp. 399–405. DOI: https://doi.org/10.2307/1969983

28. Donaldson S. K. An application of gauge theory to four-dimensional topology // Journal of Differential Geometry 1983. Vol. 18. No. 2. pp. 279–315.

29. Barinova M. On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1 // Cornell University. Series Math Arxiv.org. 2024. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.15699

30. Grines V. Z., Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. On the topological structure of manifolds supporting axiom A Systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, No. 6. pp. 613-628. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354722060028

References

1. C. Conley, “Isolated invariant sets and the Morse index”, **38**:1 (1978), 100 pp.

2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math*, **74**:1 (1961), 199–206.

3. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040 DOI: https://doi.org/10.2307/2373287.

4. J. Franks, “Nonsingular smale flows on S^3”, *Topology*, **24** (1985), 265–282 DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3.

5. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, "The energy function of gradient-like flows and the topological classification problem", *Math. Notes*, **96**:6 (2014), 856—863 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1056).

6. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, "Energy function for an Ω-stable flow with a saddle connection on a sphere", *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **4** (2017), 51–58 (In Russ.).

7. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, "Morse-Bott energy function for surface Ω-steady flows", *Middle Volga Mathematical Society Journal*, **22**:4 (2020), 434–441 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441).

8. O. V. Pochinka, S. K. Zinina, "Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows", *Math. Notes*, **107**:2 (2020), 313–321 (In Russ.).

9. O. V. Pochinka, S. K. Zinina, "Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows", *Regul. Chaotic Dyn.*, **26**:4 (2021), 350—369 DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354721040031.

10. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, "Construction of energetic functions for Ω-stable diffeomorphisms on 2- and 3-manifolds", *Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, CMFD*, **63**:2 (2017), 191—222 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222).

11. D. Pixton, "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16** (1977), 167—172 DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3.

12. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices", *Mat. Zametki*, **86**:2 (2009), 175—183 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8474).

13. T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, A. E. Shishenkova, "Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **14**:1 (2012), 98–106 (In Russ.).

14. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27—40 (In Russ.).

15. M. K. Barinova, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, "Criterion for the existence of an energy function for a regular homeomorphism of the 3-sphere", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 45–61 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.4213/tm4323).

16. M. K. Barinova, "On existence of an energy function for ω-stable surface diffeomorphisms", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43** (2022), 257–263.

17. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "Energy function for A-diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional non-trivial basic sets", *Dynamical Systems*, **5**:1–2 (2015), 31–37 (In Russ.).

18. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor", *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **76**:2 (2015), 237–249 (In Russ.).

19. M. K. Barinova, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, B. Yu, "Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades", *Chaos*, **31**:6 (2021), 1–8 DOI: https://doi.org/10.1063/5.0026293.

20. M. K. Barinova, E. K. Shustova, "Energy function for direct products of discrete dynamical systems", *Zhurnal SVMO*, **25**:2 (2023), 11–21 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21).

21. M. K. Barinova, E. K. Shustova, "Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems", *Zhurnal SVMO*, **24**:1 (2022), 21–30 (In Russ. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30).

22. J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer New York, NY, 2012, 198 DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5 pp.

23. M. Shub, "Stabilité globale des systèmes dynamiques", *Astérisque*, 1978, № 56, 224 pp.

24. S. Smale, "The ω-stability theorem, global analysis", *Proc. Symp. Pure Math*, **14** (1970), 289–297.

25. J. E. Franke, J. F. Selgrade, "Hyperbolicity and chain recurrence", *Journal of Differential Equations*, **26**:1 (1977), 27–36 DOI: https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90096-1.

26. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

27. J. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Annals of Mathematics*, **64**:2 (1956), 399–405 DOI: https://doi.org/10.2307/1969983.

28. S. K. Donaldson, "An application of gauge theory to four-dimensional topology", *Journal of Differential Geometry*, **18**:2 (1983), 279–315.

29. M. K. Barinova, "On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1", *Cornell University. Series Math Arxiv.org*, 2024 DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.15699.

30. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, "On the topological structure of manifolds supporting axiom a systems", *Regul. Chaot. Dyn.*, **27** (2022), 613–628 DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354722060028.