В. Д. Галкин, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, Классификация неособых четырехмерных потоков с нескрученной седловой орбитой, *Матем. сб.*, 2024, том 215, номер 11, 65–91

DOI: 10.4213/sm10091

В. Д. Галкин, О. В. Починка, Д. Д. Шубин

Классификация неособых четырехмерных потоков с нескрученной седловой орбитой

Топологической эквивалентности маломерных потоков Морса–Смейла без неподвижных точек (НМС-потоков) в предположениях различной общности посвящен целый ряд работ. Начиная с размерности 4 имеется пока незначительное число классификационных результатов. Однако известно, что существуют четырехмерные неособые потоки с дико вложенными инвариантными седловыми многообразиями. В настоящей статье рассмотрен класс неособых потоков Морса–Смейла, заданных на замкнутых ориентируемых 4-многообразиях и имеющих единственную седловую орбиту, которая является нескрученной. Установлено, что полным инвариантом для них является класс эквивалентности узла, вложенного в многообразие $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. По любому узлу в $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ построен стандартный представитель в классе рассматриваемых потоков. Также доказано, что несущим многообразием всех таких потоков является многообразие $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^1$.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: неособый поток, поток Морса–Смейла.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm10091

§ 1. Введение и формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются так называемые *НМС-потоки* f^t, т.е. *неособые* (без неподвижных точек) потоки Морса–Смейла, заданные на замкнутых ориентируемых n-многообразиях M^n, $n\geqslant 2$. Неблуждающее множество такого потока состоит из конечного числа периодических гиперболических орбит.

В случае малого числа орбит известные инварианты можно значительно упростить и, главное, довести задачу классификации до реализации, описав допустимость полученных инвариантов. В работе [17] была получена исчерпывающая классификация потоков с двумя орбитами на произвольных замкнутых n-многообразиях. В статье [23] полная топологическая классификация получена для потоков с тремя периодическими орбитами, заданных на ориентируемых 3-многообразиях. В работах [20], [24] решен вопрос классификации для трехмерных потоков Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий. Топологическая эквивалентность неособых потоков в предположениях различной общности на 3-сфере получена, например, в [5], [22].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-30008, https://rscf.ru/project/23-71-30008/, кроме исследования топологии несущих многообразий рассматриваемых потоков (теорема 4), которое выполнено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

В работе [21] установлено, что единственным ориентируемым 4-многообразием, допускающим НМС-потоки в точности с одной седловой периодической орбитой в предположении, что она *скрученная* (ее инвариантные многообразия неориентируемы), является $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Там же доказано, что такие потоки разбиваются на восемь классов эквивалентности. Сразу отметим, что в случае нескрученной орбиты число классов эквивалентности таких потоков бесконечно, как следует из работы [16], и среди них есть потоки с дико вложенными инвариантными многообразиями седловой орбиты.

Настоящая работа посвящена топологической эквивалентности четырехмерных НМС-потоков в точности с одной седловой периодической орбитой в предположении, что она нескрученная.

Перейдем к формулировке результатов.

Пусть M^4 – связное замкнутое ориентируемое 4-многообразие, $f^t\colon M^4 \to M^4$ – НМС-поток и $\mathcal{O}$ – его периодическая орбита. В окрестности гиперболической периодической орбиты $\mathcal{O}$ поток допускает простое описание (с точностью до топологической эквивалентности), а именно существует ее трубчатая окрестность $V_\mathcal{O}$, гомеоморфная $\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$, в которой поток топологически эквивалентен надстройке над некоторым линейным диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^3$, заданным матрицей с положительным определителем и действительными собственными значениями, по модулю отличными от единицы (см. предложение 7 ниже). Число значений, по модулю больших единицы, называется *индексом Морса* орбиты $\mathcal{O}$ и обозначается $i_\mathcal{O}$.

Если $i_\mathcal{O} = 0$ ($i_\mathcal{O} = 3$), то соответствующая периодическая орбита является *притягивающей* (*отталкивающей*), в противном случае – *седловой*. Седловая орбита называется *скрученной*, если ровно два собственных значения отрицательны, при этом одно из них больше, другое меньше единицы по модулю, и называется *нескрученной* в противном случае. Будем добавлять минус к индексу Морса $i_\mathcal{O}$ в случае скрученности орбиты $\mathcal{O}$. Через

$$\langle c\rangle_\mathcal{O}$$

будем обозначать число оборотов узла $c \subset V_\mathcal{O}$ вдоль орбиты $\mathcal{O}$. Положим

$$\Sigma_\mathcal{O} = \partial V_\mathcal{O} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$$

и обозначим через $e_\mathcal{O} \subset \Sigma_\mathcal{O}$ образующую фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_\mathcal{O})$ такую, что

$$\langle e_\mathcal{O}\rangle_\mathcal{O} = 1.$$

Напомним, что узел в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ называется *стандартным*, если существует гомеоморфизм $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, переводящий его в узел $\{s\} \times \mathbb{S}^1$.

Рассмотрим класс $G_1^+(M^4)$ НМС-потоков $f^t\colon M^4 \to M^4$ с единственной седловой орбитой S в предположении, что она является нескрученной.

Для седловой орбиты S потока $f^t \in G_1^+(M^4)$ возможны два следующих варианта: 1) $\dim W^{\mathrm{u}}_S = 3$; 2) $\dim W^{\mathrm{u}}_S = 2$.

Обозначим через $G_1^{+1}(M^4)$, $G_1^{+2}(M^4)$ классы потоков типа 1), 2) соответственно. Очевидно, что в силу различия в размерностях неустойчивых седловых многообразий никакой поток множества $G_1^{+1}(M^4)$ не эквивалентен никакому потоку множества $G_1^{+2}(M^4)$. Кроме того, $G_1^{+2}(M^4) = \{f^{-t}\colon f^t \in G_1^{+1}(M^4)\}$ и потоки f^t, f'^t эквивалентны тогда и только тогда, когда f^{-t}, f'^{-t}. Непосредственно отсюда следует, что решение проблемы классификации в множестве $G_1^{+}(M^4)$ сводится к решению этой проблемы в классе $G = G_1^{+1}(M^4)$.

В п. 3.1 мы установим следующий факт.

Лемма 1. *Неблуждающее множество любого потока $f^t \in G$ содержит единственную притягивающую орбиту A.*

Из эквивалентности потока надстройке в окрестностях периодических орбит следует, что множество

$$T = W_S^{\mathrm{u}} \cap \Sigma_S$$

гомеоморфно двумерному тору (рис. 1; в дальнейшем многообразие будем изображать в виде шарового слоя $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ с основаниями, отождествленными по правилу $(x,0) \sim (x,1)$). При этом если $N_T \subset \Sigma_S$ – замкнутая трубчатая окрестность тора T, то множество $\Sigma_S \setminus \operatorname{int} N_T$ состоит из пары заполненных торов V^-, V^+, являющихся трубчатыми окрестностями узлов $L^\pm$ таких, что

$$L^- \sqcup L^+ = W_S^{\mathrm{s}} \cap \Sigma_S.$$

Везде далее будем полагать узел $L^\pm$ ориентированным так, что $\langle L^\pm \rangle_S = 1$.

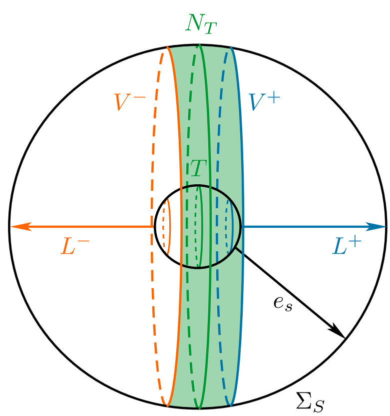

Рис. 1. Тор T и узлы L^-, L^+ в многообразии Σ_S.

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество отталкивающих орбит потока f^t, положим

$$\Sigma_{\mathcal{R}} = \bigsqcup_{R\in\mathcal{R}} \Sigma_R.$$

В п. 3.3 будет показано, что окрестность N_T можно выбрать так, что

$$N_T \subset \Sigma_A, \qquad (\Sigma_S \setminus \operatorname{int} N_T) \subset \Sigma_{\mathcal{R}}.$$

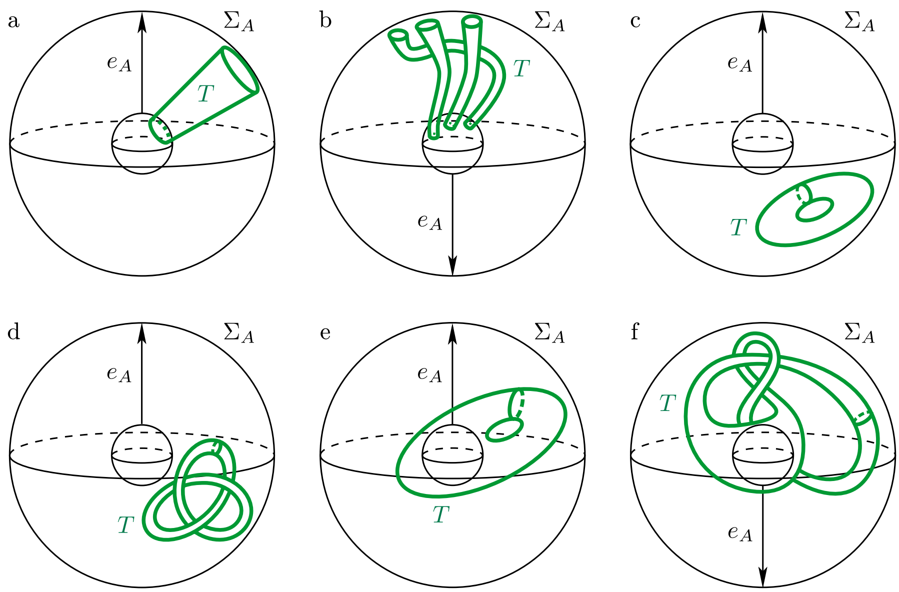

Рис. 2. Возможные вложения тора T в многообразие Σ_A.

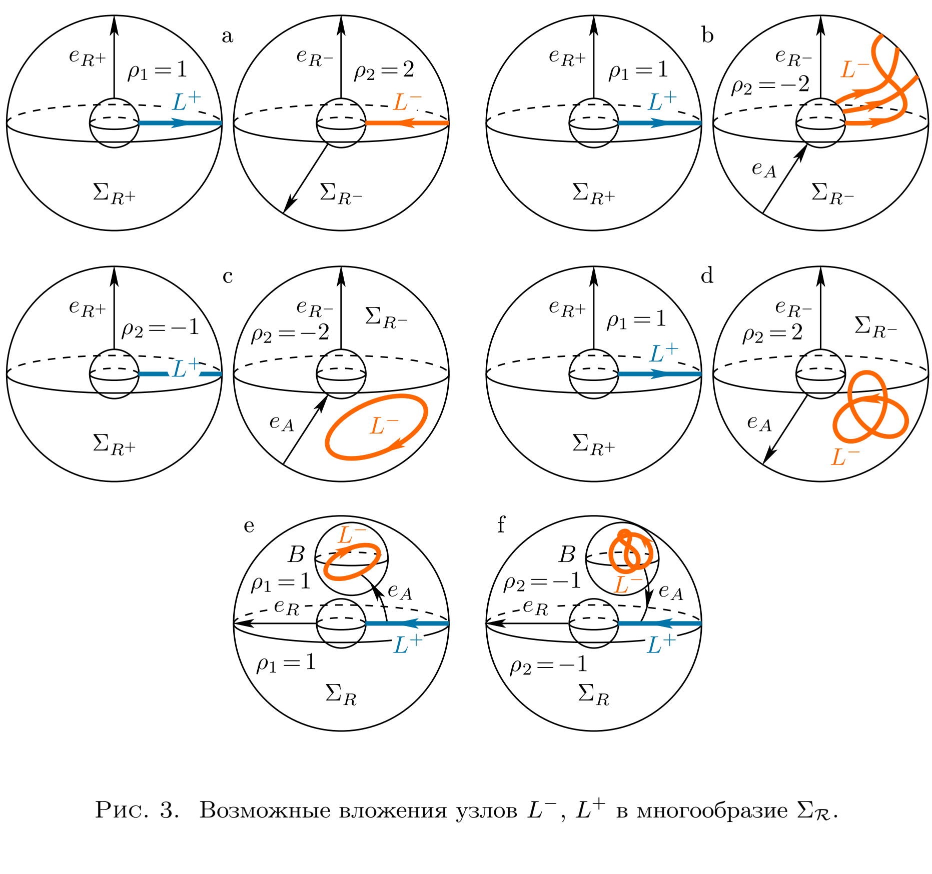

Рис. 3. Возможные вложения узлов L^-, L^+ в многообразие $\Sigma_{\mathcal{R}}$.

На рис. 2 изображены возможные вложения тора T в многообразие Σ_A.

В п. 3.4 мы установим следующий факт о числе отталкивающих орбит и расположении узлов L^-, L^+ в многообразии $\Sigma_\mathcal{R}$ потока f^t (рис. 3).

Лемма 2. *Для потоков множества G реализуются в точности две возможности*:

1) *множество $\mathcal{R}$ состоит из двух орбит R^-, R^+ и хотя бы один из узлов $L^- \subset \Sigma_{R^-}$, $L^+ \subset \Sigma_{R^+}$ является стандартным* (*см. рис.* 3, a–d);
2) *множество $\mathcal{R}$ состоит из одной орбиты R, узлы L^-, L^+ разделены в Σ_R 2-сферой и хотя бы один из узлов является стандартным* (*см. рис.* 3, e, f).

Не умаляя общности, будем полагать, что стандартным является узел L^+, положим $L = L^-$ и, если $\mathcal{R}$ состоит из двух орбит, положим $R = R^-$ и обозначим через $B \subset \Sigma_R$ 3-шар, ограниченный 2-сферой, разделяющей в Σ_R узлы L^-, L^+. Каждому потоку $f^t \in G$ поставим в соответствие пару чисел $\rho_1 \in \{-1, 1\}$, $\rho_2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ по следующему правилу (см. рис. 3). Если поток f^t имеет две отталкивающие орбиты, то $\rho_1 = \langle L^+ \rangle_{R^+}$, $\rho_2 = 2\langle e_A \rangle_{R^-}$. Если поток f^t имеет одну отталкивающую орбиту, то $\rho_1 = \langle L^+ \rangle_R$, $\rho_2 = 1(-1)$, если образующая e_A в многообразии Σ_R направлена внутрь шара B (наружу шара B).

Набор

$$\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, L, \rho_1, \rho_2)$$

назовем *схемой потока* $f^t \in G$ (рис. 4).

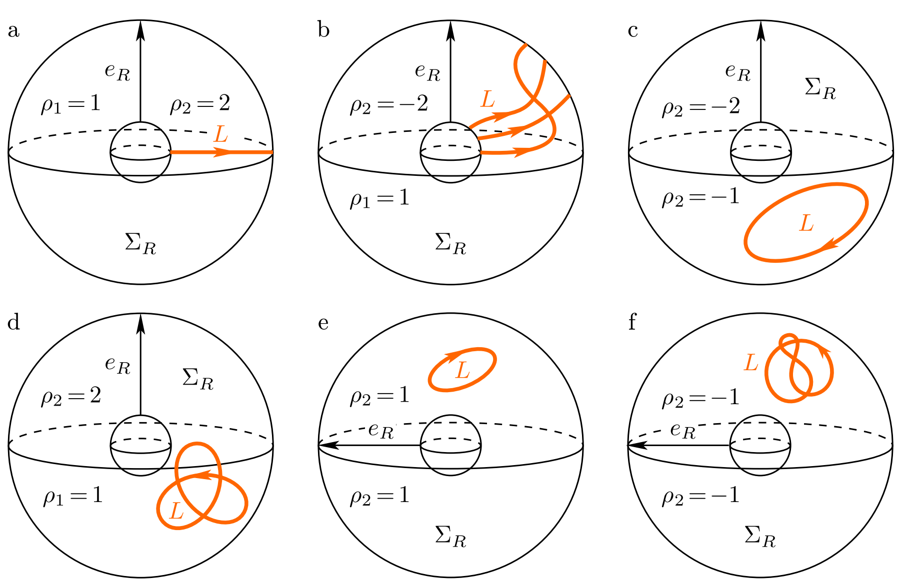

Рис. 4. Возможные схемы потоков класса G.

Схемы $\mathcal{S}_{f^t}=(\Sigma_R,L,\rho_1,\rho_2)$, $\mathcal{S}_{f'^t}=(\Sigma_{R'},L',\rho'_1,\rho'_2)$ потоков $f^t,f'^t\in G$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon\Sigma_R\to\Sigma_{R'}$ такой, что:

- $\langle\varphi(e_R)\rangle_{R'}=\langle e_{R'}\rangle_{R'}$;
- $\varphi(L)=L'$;
- $\rho_1=\rho'_1$, $\rho_2=\rho'_2$.

Основным результатом работы является следующая теорема, доказанная в § 4.

Теорема 1. *Потоки $f^t,f'^t\in G$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t},\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.*

Для решения проблемы реализации потоков рассматриваемого класса опишем абстрактную схему.

Набор

$$\mathcal{S}=(\Sigma,L,\rho_1,\rho_2)$$

назовем *абстрактной схемой*, если:

- множество Σ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ с фиксированной образующей e;
- L – произвольный узел, гладко вложенный в Σ;
- $\rho_1\in\{-1,1\}$;
- $\rho_2\in\{-2,-1,1,2\}$ и $|\rho_2|=2$, если узел L не гомотопен нулю в Σ.

Непосредственно из леммы 2 следует, что схема любого потока $f^t\in G$ эквивалентна некоторой абстрактной схеме.

Классификацию потоков рассматриваемого класса завершает следующая теорема, конструктивно доказанная в § 5.

Теорема 2. *Для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток $f^t\in G$, схема которого ей эквивалентна.*

Частным случаем рассматриваемых потоков являются надстройки над 3-диффеоморфизмами Морса–Смейла с единственной седловой орбитой. Согласно работе [14] несущим многообразием любого такого диффеоморфизма является сфера $\mathbb{S}^3$, а из работ [3], [4] следует, что полным инвариантом их топологической сопряженности также является вложение узла в многообразие $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Непосредственным следствием этой классификации и теоремы 1 является следующий факт.

Теорема 3. *Поток $f^t\in G$ с инвариантом $\mathcal{S}_{f^t}=(\Sigma_R,L,\rho_1,\rho_2)$ эквивалентен надстройке над 3-диффеоморфизмом Морса–Смейла тогда и только тогда, когда*

$$\langle L\rangle_R>0,\qquad \rho_1=1,\quad \rho_2=2.$$

В частности, поток $f^t\in G$ с инвариантами $\langle L\rangle_R=1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=2$ эквивалентен надстройке над так называемыми *диффеоморфизмами Пикстона* [15]. В этом случае узел L является *узлом Хопфа* (т.е. принадлежит гомотопическому классу $\langle e_R\rangle_R$). Из результатов работы [1] следует, что существует счетное число попарно не эквивалентных (объемлюще не гомеоморфных) хопфовских узлов (рис. 5). Согласно [3] любой узел Хопфа может быть реализован диффеоморфизмом Пикстона. В работе [16] установлено, что надстройка над диффеоморфизмом Пикстона, реализованным по узлу, не эквивалентному стандартному узлу L_0, является потоком с дико вложенными инвариантными многообразиями седловой орбиты.

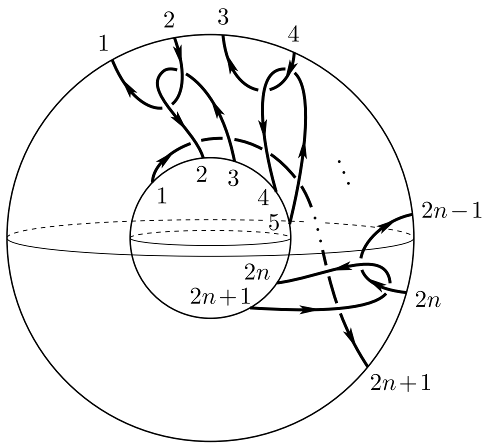

Рис. 5. Попарно не эквивалентные узлы Хопфа L_n, $n \geqslant 0$.

Несмотря на возможность дикого вложения инвариантных многообразий седловой орбиты несущее многообразие любого потока $f^t \in G$, являющегося надстройкой над 3-диффеоморфизмом, гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Удивительным фактом настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема 4. *Несущее многообразие любого потока $f^t \in G$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.*

§ 2. О вложениях в многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Напомним, что C^r-*вложением* ($r \geqslant 0$) многообразия X в многообразие Y называется отображение $\lambda\colon X \to Y$ такое, что $\lambda\colon X \to \lambda(X)$ – это C^r-диффеоморфизм. C^0-вложение называют также *топологическим вложением.*

Топологическое вложение $\lambda\colon X \to Y$ m-многообразия X в n-многообразие Y ($m \leqslant n$) называется *локально плоским в точке* $\lambda(x)$, $x \in X$, если точка $\lambda(x)$ принадлежит такой карте (U, ψ) многообразия Y, что $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, у которых последние $n-m$ координат равны нулю, или $\psi(U \cap \lambda(X)) = R^m_+$, где $\mathbb{R}^m_+ \subset \mathbb{R}^m$ – множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение λ называется *локально плоским*, а многообразие X – *локально плоско вложенным*, если λ является локально плоским в каждой точке $\lambda(x)$, $x \in X$. В противном случае вложение λ называется *диким*, а многообразие X – *дико вложенным.* Любая точка $\lambda(x)$, в которой отображение λ не является локально плоским, называется *точкой дикости.*

Положим $\Sigma = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Предложение 1 (см. [3; лемма 3.1]). *Пусть Λ – двумерная сфера, локально плоско вложенная в многообразие Σ. Тогда Λ либо ограничивает на сфере 3-шар, либо объемлюще изотопна сфере $\mathbb{S}^2 \times \{s_0\}$, $s_0 \in \mathbb{S}^1$.*

Напомним, что *заполненным тором V* называется 3-многообразие с краем, гомеоморфное многообразию $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. *Меридианом* заполненного тора V называется узел $\mu \subset \partial V$, ограничивающий 2-диск $d \subset V$ такой, что $d \cap \partial V = \mu$.

Предложение 2 (см. [18]). *Пусть V_1, V_2 – заполненные торы и $h\colon \partial V_1 \to \partial V_2$ – гомеоморфизм. Тогда гомеоморфизм h продолжается до гомеоморфизма $h\colon V_1 \to V_2$, если и только если он переводит меридиан заполненного тора V_1 в меридиан заполненного тора V_2.*

Предложение 3 (см. [2]). *Пусть V_1, V_2 – заполненные торы, локально плоско вложенные в 3-многообразие M^3 так, что $M^3 = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$. Тогда $M^3 \cong \Sigma$, если и только если меридиан заполненного тора V_1 одновременно является меридианом заполненного тора V_2.*

Предложение 4 (см. [2]). *Локально плоский узел $L \subset \Sigma$ является стандартным тогда и только тогда, когда дополнение до его трубчатой окрестности в Σ гомеоморфно заполненному тору.*

Локально плоский узел $L \subset \mathbb{S}^3$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $\mathbb{S}^3$, переводящий его в узел $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$. В противном случае узел называется *нетривиальным.*

Предложение 5 (см. [7; теорема 3], [6; замечание]). *Пусть множество W гомеоморфно дополнению $\mathbb{S}^3$ до трубчатой окрестности нетривиального узла $L \subset \mathbb{S}^3$ и $M^3 = W \cup V$, где V – заполненный тор такой, что $W \cap V = \partial W = \partial V$. Тогда M^3 не гомеоморфно многообразию Σ.*

Пусть T – локально плоско вложенный в многообразие Σ двумерный тор и $i_T\colon T \to \Sigma$ – отображение включения. Будем говорить, что тор T вложен *гомотопически тривиально* (*не тривиально*), если $i_{T*}(\pi_1(T)) = 0$ ($i_{T*}(\pi_1(T)) \neq 0$).

Предложение 6 (см. [3; теорема 4]). *Пусть T – двумерный тор, гомотопически нетривиально вложенный в многообразие Σ. Тогда T ограничивает в Σ заполненный тор.*

Для описания двумерного тора T, гомотопически тривиально вложенного в многообразие Σ, заметим, что для любого такого тора T существует гладко вложенная 2-сфера $\Lambda \subset \Sigma$, гомотопная слою $\mathbb{S}^2 \times \{s_0\}$ и не пересекающаяся с тором T.

Лемма 3. *Пусть T – двумерный тор, гомотопически тривиально вложенный в многообразие Σ. Тогда для тора T реализуются следующие возможности*:

1) *T ограничивает заполненный тор V в Σ;*
2) *T не делит многообразие Σ и множество $\Sigma \setminus (\Lambda \cup T)$ состоит из двух компонент связности, замыкание одной из которых гомеоморфно заполненному тору без 3-шара, другой – 3-шару без заполненного тора;*
3) *T делит многообразие Σ на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна дополнению сферы $\mathbb{S}^3$ до трубчатой окрестности нетривиального узла.*

Доказательство. Представим $\mathbb{S}^3$ как компактификацию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ северным N и южным S полюсами. Определим проекцию $p\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \Sigma$ формулой $p(s,r) = (s, r \pmod 1)$. Тогда многообразие Σ является пространством орбит действия на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ группы диффеоморфизмов $\{g^n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, где диффеоморфизм $g\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ задается формулой

$$g(s,r) = (s, r-1).$$

Обозначим через $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{S}^3$ компоненту связности множества $p^{-1}(\Lambda)$ и через $\widetilde{K} \subset \mathbb{S}^3$ – трехмерное кольцо, ограниченное 2-сферами $\widetilde{\Lambda}$, $g(\widetilde{\Lambda})$. При этом сфера $\widetilde{\Lambda}$ $(g(\widetilde{\Lambda}))$ ограничивает в $\mathbb{S}^3$ 3-шар B_N (B_S), содержащий полюс N (S) (рис. 6). Обозначим через $\widetilde{T} \subset \widetilde{K}$ компоненту связности множества $p^{-1}(T)$, которая в силу гомотопической тривиальности тора T является локально плоско вложенным двумерным тором.

Поскольку многообразие $\mathbb{S}^3$ является неприводимым (любая локально плоско вложенная в него 2-сфера ограничивает в нем 3-шар), то тор $\widetilde{T}$ ограничивает там заполненный тор $\widetilde{V} \subset \mathbb{S}^3$ (см., например, [13]). Положим $\widetilde{W} = \mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} \widetilde{V}$. Поскольку тор $\widetilde{T}$ не пересекается с шарами B_N, B_S, то для множеств $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ существуют следующие возможности:

1) $\widetilde{V} \subset \widetilde{K}$ и многообразие $\widetilde{W}$ гомеоморфно заполненному тору (см. рис. 6, a);
2) $\widetilde{V} \subset \widetilde{K}$ и многообразие $\widetilde{W}$ не гомеоморфно заполненному тору (см. рис. 6, c);
3) $\widetilde{V}$ пересекается в точности с одним из шаров B_N, B_S (с B_N для определенности) и многообразие $\widetilde{W}$ гомеоморфно заполненному тору (см. рис. 6, b);
4) $\widetilde{V}$ пересекается в точности с одним из шаров B_N, B_S (с B_N для определенности) и многообразие $\widetilde{W}$ не гомеоморфно заполненному тору (см. рис. 6, d);
5) $\widetilde{V}$ содержит оба шара B_N, B_S и многообразие $\widetilde{W}$ не гомеоморфно заполненному тору (см. рис. 6, e).

Непосредственно отсюда получаются следующие возможности для тора T:

1), 2) T ограничивает заполненный тор $V = p(\widetilde{V})$ в Σ;

3), 4) T не делит многообразие Σ и множество $\Sigma \setminus (\Lambda \cup T)$ состоит из двух компонент связности, замыкание одной из которых $p(\widetilde{V} \setminus \operatorname{int} B_N)$ гомеоморфно

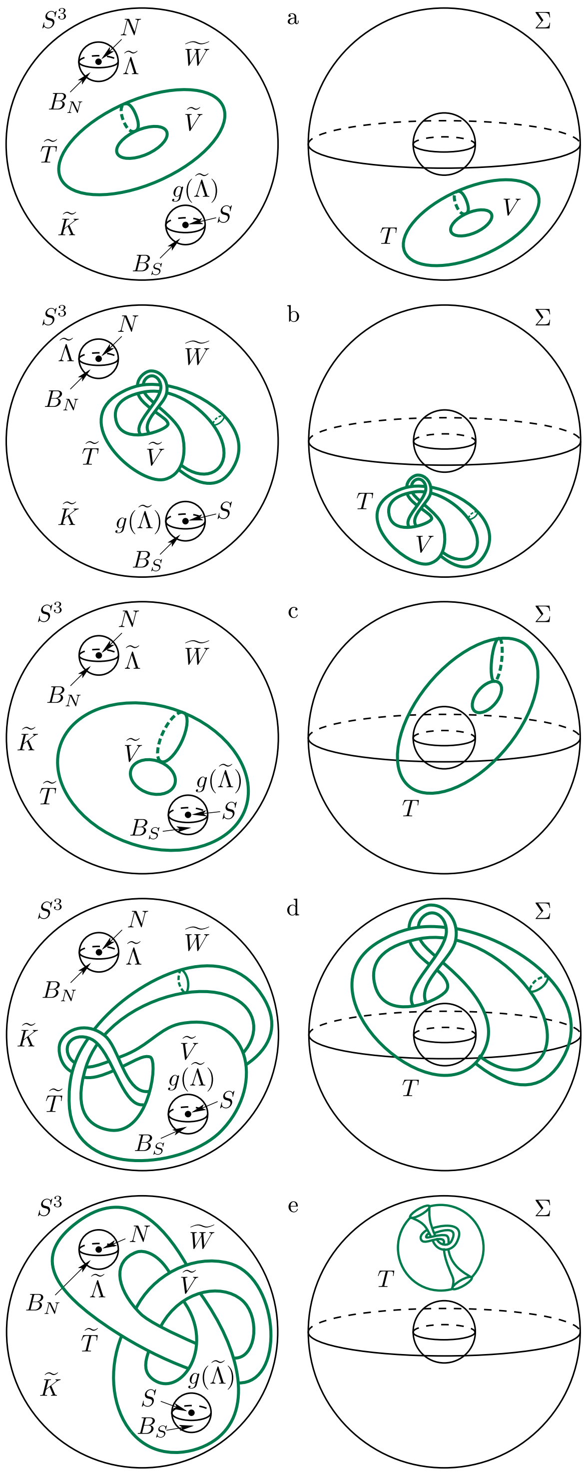
a
b
c
d
e
S^3
Σ
N
S
B_N
B_S
$\widetilde{\Lambda}$
$g(\widetilde{\Lambda})$
$\widetilde{W}$
$\widetilde{V}$
$\widetilde{T}$
$\widetilde{K}$
T
V

Рис. 6

заполненному тору без 3-шара, другой $p(g(\widetilde{\Lambda})\setminus\operatorname{int}\widetilde{V})$ – 3-шару без заполненного тора;

5) T делит многообразие Σ на две компоненты связности, одна из которых гомеоморфна $p(\mathbb{S}^3\setminus\operatorname{int}\widetilde{V})$.

Лемма доказана.

§ 3. Динамика потоков класса G

3.1. Единственность притягивающей орбиты. Настоящий пункт посвящен доказательству леммы 1: неблуждающее множество любого потока $f^t\in G$ содержит единственную притягивающую орбиту A.

Доказательство леммы 1. Основой доказательства является следующее представление несущего многообразия M^4 НМС-потока f^t с множеством периодических орбит Per_{f^t} (см., например, [19]):

$$M^4=\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathrm{Per}_{f^t}}W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}}=\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathrm{Per}_{f^t}}W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}},\tag{3.1}$$

а также асимптотическое поведение инвариантных многообразий

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}})\setminus W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}}=\bigcup_{\widetilde{\mathcal{O}}\in\mathrm{Per}_{f^t}\colon W^{\mathrm{u}}_{\mathcal{O}}\cap W^{\mathrm{s}}_{\widetilde{\mathcal{O}}}\neq\varnothing}W^{\mathrm{u}}_{\widetilde{\mathcal{O}}},\tag{3.2}$$

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}})\setminus W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}}=\bigcup_{\widetilde{\mathcal{O}}\in\mathrm{Per}_{f^t}\colon W^{\mathrm{s}}_{\mathcal{O}}\cap W^{\mathrm{u}}_{\widetilde{\mathcal{O}}}\neq\varnothing}W^{\mathrm{s}}_{\widetilde{\mathcal{O}}}.\tag{3.3}$$

Аналогично теореме 1 работы [9] все источниковые орбиты, объединенные с устойчивыми многообразиями всех седловых обит потока f^t, образуют репеллер[1]. Поскольку размерность устойчивых многообразий равна 2, то построенный репеллер (обозначим его через R) имеет топологическую размерность 2. Согласно [10; гл. 4, § 5, следствие 1] многообразие $M^4\setminus R$ связно так же, как и многообразие $M^4\setminus\operatorname{int}U_R$, где U_R – захватывающая окрестность репеллера R. С другой стороны, множество $U_A=M^4\setminus\operatorname{int}U_R$ является захватывающей окрестностью объединения A всех притягивающих орбит потока f^t, являющегося аттрактором. Поскольку $A=\bigcap_{t\geqslant0}f^t(U_A)$ и U_A связно, то A связно и, следовательно, состоит из одной орбиты.

Лемма доказана.

3.2. Канонические окрестности периодических орбит. Напомним определение надстройки. Пусть $\varphi\colon M^3\to M^3$ – диффеоморфизм трехмерного многообразия. Определим диффеоморфизм $g_\varphi\colon M^3\times\mathbb{R}\to M^3\times\mathbb{R}$ формулой

$$g_\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\varphi(x_1,x_2,x_3),x_4-1).$$

[1] Компактное f^t-инвариантное множество $A\subset M^4$ называется *аттрактором* потока f^t, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f^t(U_A)\subset\operatorname{int}(U_A)$ для любого $t>0$ и $A=\bigcap_{t\geqslant0}f^t(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для потока f^{-t}.

Тогда группа $\{g_\varphi^n\} \cong \mathbb{Z}$ действует свободно и разрывно на $M^3 \times \mathbb{R}$, в силу чего пространство орбит $\Pi_\varphi = M^3 \times \mathbb{R}/g_\varphi$ является гладким 4-многообразием, а естественная проекция $v_\varphi \colon M^3 \times \mathbb{R} \to \Pi_\varphi$ – накрытием. При этом поток $\xi^t \colon M^3 \times \mathbb{R} \to M^3 \times \mathbb{R}$, заданный формулой

$$\xi^t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4 + t),$$

индуцирует поток $[\varphi]^t = v_\varphi \xi^t v_\varphi^{-1} \colon \Pi_\varphi \to \Pi_\varphi$, называемый *надстройкой над диффеоморфизмом* φ.

Определим диффеоморфизмы $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, a_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ формулами

$$a_3(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3), \qquad a_0 = a_3^{-1},$$
$$a_{\pm 1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\pm 2x_1, \pm\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}\right), \qquad a_{\pm 2} = a_{\pm 1}^{-1}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\overline{V}_0 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{x_4}x_1^2 + 4^{x_4}x_2^2 + 4^{x_4}x_3^2 \leqslant 1\},\\
\overline{V}_{\pm 1} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{-x_4}x_1^2 + 4^{x_4}x_2^2 + 4^{x_4}x_3^2 \leqslant 1\},\\
\overline{V}_{\pm 2} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{-x_4}x_1^2 + 4^{-x_4}x_2^2 + 4^{x_4}x_3^2 \leqslant 1\},\\
\overline{V}_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \mid 4^{-x_4}x_1^2 + 4^{-x_4}x_2^2 + 4^{-x_4}x_3^2 \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

Для $i \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$ положим $v_i = v_{a_i}$, $\overline{\Sigma}_i = \partial \overline{V}_i$, $V_i = v_i(\overline{V}_i)$ и $\Sigma_i = v_i(\overline{\Sigma}_i)$. Положим $e_i = v_i(Ox_4)$. Через $\langle c \rangle_i$ будем обозначать число оборотов узла $c \subset \Sigma_i$ вдоль образующей e_i.

Следующее утверждение, доказанное М. Ирвином [11], описывает поведение потоков в окрестности гиперболических периодических орбит.

Предложение 7. *Для любой гиперболической периодической орбиты $\mathcal{O}$ потока $f^t \colon M^4 \to M^4$, заданного на замкнутом ориентируемом многообразии M^4, существуют трубчатая окрестность $V_{\mathcal{O}}$ орбиты $\mathcal{O}$ и число $i_{\mathcal{O}} \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$ такие, что поток $f^t|_{V_{\mathcal{O}}}$ топологически эквивалентен посредством некоторого гомеоморфизма $H_{\mathcal{O}}$ потоку $[a_{i_{\mathcal{O}}}]^t|_{V_{i_{\mathcal{O}}}}$.*

Окрестность $V_{\mathcal{O}} = H_{\mathcal{O}}(V_{i_{\mathcal{O}}})$, описанную в предложение 7, назовем *канонической окрестностью* периодической орбиты $\mathcal{O}$.

При доказательстве топологической эквивалентности будем использовать следующий факт, который следует из доказательства теоремы 4 и леммы 4 в [17], а также может быть найден в [20; теорема 1.1].

Предложение 8. *Гомеоморфизм $h_i \colon \Sigma_i \to \Sigma_i$ для $i \in \{0, 3\}$ продолжается до гомеоморфизма $H_i \colon V_i \to V_i$, реализующего эквивалентность потока $[a_i]^t$ с самим собой, тогда и только тогда, когда индуцированный изоморфизм $h_{i*} \colon \pi_1(\Sigma_i) \to \pi_1(\Sigma_i)$ является тождественным.*

3.3. Разбиение несущего многообразия на канонические окрестности. Положим $\overline{\Gamma} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \overline{\Sigma}_2 \mid 4^{x_4}x_3^2 = 1/2\}$ и $\overline{T} = Ox_2x_3x_4 \cap \overline{\Sigma}_2$. По построению множество $\overline{\Sigma}_2$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, множество $\overline{\Gamma}$ состоит из двух поверхностей, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, делящих $\overline{\Sigma}_2$ на три компоненты связности, одна из которых $N_{\overline{T}}$ содержит цилиндр $\overline{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, а каждая из двух оставшихся гомеоморфна $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$. Тогда

- $\mathbb{T} = v_2(\overline{T})$ – двумерный тор с трубчатой окрестностью $N_{\mathbb{T}} = v_2(\mathrm{cl}(N_{\overline{T}}))$, дополнение до которой в $\Sigma_2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ состоит из двух заполненных торов $\mathbb{V}^-$, $\mathbb{V}^+$.

Рассмотрим поток $f^t \in G$. В силу леммы 1 поток f^t обладает единственной притягивающей орбитой A с канонической окрестностью $V_A = H_A(V_0)$, ограниченной многообразием $\Sigma_A = \partial V_A \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Пусть S – седловая орбита потока f^t. Тогда $V_S = H_S(V_2)$ – каноническая окрестность орбиты S. Положим

$$T = H_S(\mathbb{T}), \qquad N_T = H_S(N_{\mathbb{T}}), \qquad V^- = H_S(\mathbb{V}^-), \qquad V^+ = H_S(\mathbb{V}^+),$$

$$\Sigma_A^{\mathrm{u}} = \left(\bigcup_{t>0,\, w\in N_T} f^t(w) \right) \cap \Sigma_A.$$

Обозначим через $\lambda^{\pm} \subset \partial V^{\pm}$ образующую заполненного тора $V^{\pm}$ и через $\mu^{\pm}$ его меридиан. Определим непрерывную функцию $\tau_A\colon \Sigma_A \to \mathbb{R}^+$ так, что $f^{\tau_A(a)}(a) \in N_T$ для $a \in \Sigma_A^{\mathrm{u}}$. Положим

$$\widetilde{V}_A = V_A \cup \left(\bigcup_{a\in\Sigma_A} \left(\bigcup_{t\in[0,\tau_A(a)]} f^{-t}(a) \right) \right).$$

Непосредственно проверяется, что поток $f^t|_{\widetilde{V}_A}$ топологически эквивалентен надстройке $[a_0]^t|_{V_0}$. Поэтому везде далее мы будем полагать $V_A = \widetilde{V}_A$. В силу равенства (3.1) каждая компонента связности множества

$$M^4 \setminus (V_A \cup V_S)$$

содержит в точности одну отталкивающую орбиту R и поток f^t на замыкании этой компоненты эквивалентен надстройке $[a_3]^t|_{V_3}$, в силу чего мы будем обозначать эту компоненту V_R. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех отталкивающих орбит потока f^t. Тогда несущее многообразие M^4 представляется в виде объединения канонических окрестностей с попарно не пересекающимися внутренностями:

$$M^4 = V_A \cup V_S \cup \bigsqcup_{R\in\mathcal{R}} V_R. \tag{3.4}$$

3.4. Число отталкивающих орбит. Настоящий пункт посвящен доказательству леммы 2: для потоков множества G реализуются в точности две возможности:

- множество $\mathcal{R}$ состоит из двух орбит R^-, R^+ и хотя бы один из узлов $L^- \subset \Sigma_{R^-}$, $L^+ \subset \Sigma_{R^+}$ является стандартным;
- множество $\mathcal{R}$ состоит из одной орбиты R, узлы L^-, L^+ разделены в Σ_R 2-сферой и хотя бы один из узлов является стандартным.

Доказательство леммы 2. Из формулы (3.4) следует, что

$$\Sigma_A \setminus \mathrm{int}\, N_T = \Sigma_{\mathcal{R}} \setminus \mathrm{int}(V^+ \sqcup V^-). \tag{3.5}$$

Положим $Y = \Sigma_A \setminus \operatorname{int} N_T$. Поскольку N_T – трубчатая окрестность тора T, то ∂Y состоит из двух двумерных торов, T^+ и T^-. При этом в силу формулы (3.5)

$$V^+ \cup_{h_+} Y \cup_{h_-} V^- = \Sigma_{\mathcal{R}}, \tag{3.6}$$

где $h_\pm \colon \partial V^\pm \to T^\pm$ – некоторый гомеоморфизм. Обозначим через $\mu^\pm$ меридиан заполненного тора $V^\pm$. В силу предложения 6 и леммы 3 для множества Y возможны следующие варианты:

1) Y состоит из двух компонент связности, хотя бы одна из которых является заполненным тором;
2) Y связно и содержит 2-сферу Λ такую, что множество $Y \setminus \Lambda$ состоит из двух компонент связности, замыкание одной из которых $\dot{Y}^+$ гомеоморфно заполненному тору без 3-шара, другой $\dot{Y}^-$ – 3-шару без заполненного тора;
3) Y состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна дополнению 3-сферы S^3 до трубчатой окрестности нетривиального узла.

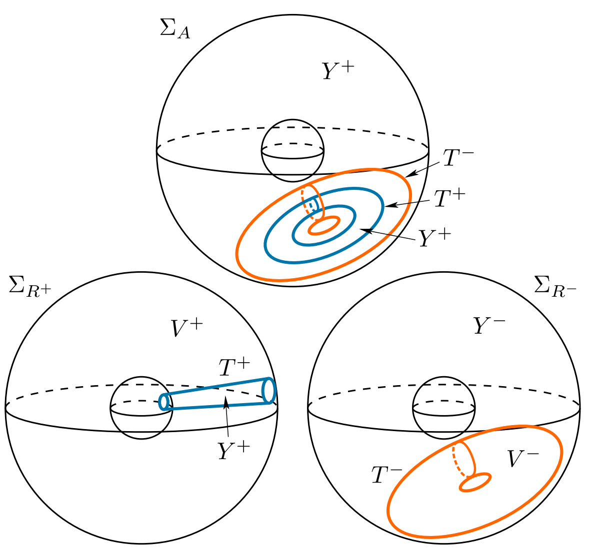

Рис. 7. Иллюстрация к доказательству леммы 2, случай 1).

Далее рассмотрим каждый случай отдельно.

1) Обозначим через Y^+, Y^- компоненты связности множества Y, ограниченные торами T^+, T^- соответственно. Тогда из формулы (3.6) следует, что множество $\Sigma_{\mathcal{R}}$ также состоит из двух компонент связности. Следовательно, множество $\mathcal{R}$ состоит в точности из двух орбит R^-, R^+ таких, что $\Sigma_{R^\pm} = V^\pm \cup_{h_\pm} Y^\pm$. Поскольку хотя бы одно из множеств Y^+, Y^- (положим для определенности Y^+) гомеоморфно заполненному тору, то многообразие Σ_{R^+}

получается склейкой двух заполненных торов $V^+ \cup_{h_+} Y^+$. Поскольку многообразие Σ_{R^+} гомеоморфно многообразию Σ, то в силу предложения 3 $h_+(\mu^+)$ – меридиан заполненного тора Y^+, а в силу предложения 4 узел L^+ является стандартным в Σ_{R^+}. Кроме того, по построению $h_-(\mu^-)$ – меридиан заполненного тора $\Sigma_A \setminus Y^-$ и, следовательно, в силу предложения 2 многообразие $V^- \cup_{h_-} Y^-$ гомеоморфно многообразию Σ_A (рис. 7). Таким образом, случай 1) возможен, и мы доказали утверждение леммы в этом случае.

2) Поскольку множество Y связно, то из формулы (3.6) следует, что множество $\Sigma_{\mathcal{R}}$ также связно. Следовательно, множество $\mathcal{R}$ состоит в точности из одной орбиты R такой, что $\Sigma_R = V^+ \cup_{h_+} Y \cup_{h_-} V^-$. Кроме того, 2-сфера Λ разделяет в Σ_R заполненные торы V^+, V^-, а значит, и узлы L^+, L^-. С другой стороны, в силу предложения 1 она ограничивает 3-шар $B \subset \Sigma_R$, в котором лежит один из этих заполненных торов, для определенности положим, что это тор V^- (рис. 8). Тогда $B \setminus \operatorname{int} V^- = \dot{Y}^-$ и $\Sigma_R \setminus \operatorname{int}(B \cup V^+) = \dot{Y}^+$. Из последнего равенства следует, что $\Sigma_R \setminus \operatorname{int} V^+ = \dot{Y}^+ \cup B$. Поскольку $\dot{Y}^+ \cup B$ – заполненный тор, то узел L^+ является стандартным в Σ_R.

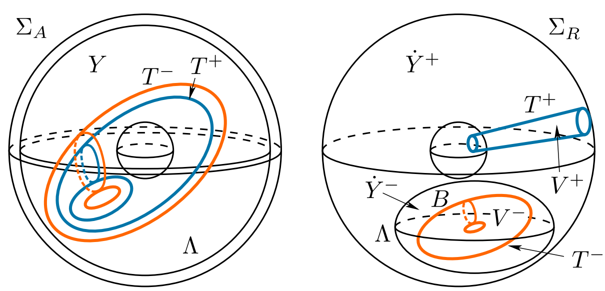

Рис. 8. Иллюстрация к доказательству леммы 2, случай 2).

3) Поскольку Y состоит из двух компонент связности, одна из которых гомеоморфна дополнению 3-сферы S^3 до трубчатой окрестности нетривиального узла, то компонента связности множества $\Sigma_{\mathcal{R}}$ получается из нее приклеиванием заполненного тора к ее границе. В силу предложения 5 полученное множество не может быть гомеоморфно многообразию Σ, что говорит о нереализуемости случая 3).

Лемма 2 доказана.

§ 4. Необходимые и достаточные условия эквивалентности потоков класса G

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1: потоки $f^t, f'^t \in G$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ эквивалентны.

Доказательство теоремы 1. $\Rightarrow$. Пусть потоки $f^t\colon M^4 \to M^4 \in G$ и $f'^t\colon M'^4 \to M'^4 \in G$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма $h\colon M^4 \to M'^4$. Поскольку h переводит периодические орбиты потока f^t в периодические орбиты потока f'^t с сохранением направления движения по орбите и ее инвариантных многообразий, то $\Omega_{f'^t} = \{\mathcal{O}' = h(\mathcal{O}),\ \mathcal{O} \in \Omega_{f^t}\}$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $V_{\mathcal{O}'} = h(V_{\mathcal{O}})$. Следовательно, $\varphi = h|_{\Sigma_R}\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ – искомый гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ и $\rho_i = \rho'_i$, $i = 1, 2$.

$\Leftarrow$. Пусть $\varphi\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ – гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность схем $\mathcal{S}_{f^t}$, $\mathcal{S}_{f'^t}$ потоков $f^t\colon M^4 \to M^4 \in G$, $f'^t\colon M'^4 \to M'^4 \in G$.

Построим по шагам гомеоморфизм $h\colon M^4 \to M'^4$, осуществляющий эквивалентность этих потоков.

По предложению 7 существует гомеоморфизм H_S, осуществляющий эквивалентность потока $f^t|_{V_S}$ с надстройкой $[a_{+1}]|_{V_{+1}}$. Положим

$$\varphi_S = H_{S'} H_S^{-1}\colon V_S \to V_{S'}.$$

Тогда гомеоморфизм φ_S осуществляет эквивалентность потоков $f^t|_{V_S}$ и $f'^t|_{V_{S'}}$, откуда следует, что $\varphi_S(T) = T'$, $\varphi_S(N_T) = N_{T'}$ и гомеоморфизм φ_S переводит пару узлов L^-, L^+ в пару узлов L'^-, L'^+ с сохранением их ориентации. С другой стороны, гомеоморфизм $\varphi\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$ переводит узел L^- в узел L'^- с сохранением ориентации. Не умаляя общности, будем считать, что $\varphi(V^-) = V'^-$. Тогда изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\varphi|_{T^-}\colon T^- \to T'^-$, в образующих λ^-, μ^-, λ'^-, μ'^- задается матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad \delta \in \{-1, 1\}.$$

Определим гомеоморфизм $Q\colon \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_1$ формулой

$$Q = v_{a_2} \overline{Q} v_{a_2}^{-1}, \quad \text{где} \quad \overline{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\delta_1 x_1, \widetilde{Q}(x_2, x_3), x_4)\colon V_1 \to V_1,$$

$\delta_1 \in \{-1, 1\}$ и $\widetilde{Q}\colon Ox_2x_3 \to Ox_2x_3$ – линейный диффеоморфизм, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & k_2 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \qquad k_2 \in \mathbb{Z}, \quad \delta_2 \in \{-1, 1\}.$$

Непосредственно проверяется, что построенный гомеоморфизм Q осуществляет эквивалентность потока $[a_2]^t$ с самим собой. Положим

$$h_S = H_{S'} Q H_S^{-1}\colon V_S \to V_{S'},$$

выбрав значение δ_1 так, что $h_S(V^-) = V'^-$, и значения δ_2, k_2 так, что изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $h_S|_{T^-}\colon T^- \to T'^-$, в образующих λ^-, μ^-, λ'^-, μ'^- записывается матрицей $\mathcal{A}$.

Таким образом, гомеоморфизмы $\varphi|_{T^-}, h_S|_{T^-}\colon T^- \to T'^-$ изотопны (см., например, [18]), а значит, существует гомеоморфизм $h_-\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_S на V_- и совпадающий с φ вне некоторой окрестности заполненного тора V_-.

Далее рассмотрим отдельно два случая: 1) $|\rho_2| = 2$; 2) $|\rho_2| = 1$.

В случае 1) поток f^t (f'^t) имеет две отталкивающие орбиты R^-, R^+ $(R'^-$, $R'^+)$ и трубчатая окрестность N_T $(N_{T'})$ тора T (T') делит многообразие Σ_A $(\Sigma_{A'})$ на две компоненты связности Y^-, Y^+ $(Y'^-$, $Y'^+)$, ограниченные торами T^-, T^+ $(T'^-$, $T'^+)$ соответственно. В силу леммы 2 узел L^+ (L'^+) является стандартным в многообразии Σ_{R^+} $(\Sigma_{R'^+})$, а следовательно, множество Y^+ (Y'^+) гомеоморфно заполненному тору. При этом $\Sigma_{R^+} = V^+ \cup Y^+$ $(\Sigma_{R'^+} = V'^+ \cup Y'^+)$.

На множестве V^+ определен гомеоморфизм $h_{R^+} = h_S|_{V^+}\colon V^+ \to V'^+$. Поскольку изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $h_{R^+}|_{T^+}\colon T^+ \to T'^+$, в образующих λ^+, μ^+, λ'^+, μ'^+ задается матрицей $\mathcal{A}$, то $h_{R^+}|_{T^+}$ переводит меридиан заполненного тора Y^+ в меридиан заполненного тора Y'^+. В этом случае (см., например, [18]) гомеоморфизм h_{R^+} продолжается на заполненный тор Y^+ гомеоморфизмом $h_{R^+}\colon \Sigma_{R^+} \to \Sigma_{R'^+}$.

Положим $h_{R^-} = h_-$. Тогда на множестве Σ_A определен гомеоморфизм $h_A\colon \Sigma_A \to \Sigma_{A'}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_S на N_T, с гомеоморфизмом h_{R^-} на $\Sigma_{R^-} \setminus \operatorname{int} V^-$ и с гомеоморфизмом h_{R^+} на $\Sigma_{R^+} \setminus \operatorname{int} V^+$.

Поскольку $\rho_i = \rho_i'$, $i = 1, 2$, то в силу предложения 8 гомеоморфизм $h_{\mathcal{O}}\colon \Sigma_{\mathcal{O}} \to \Sigma_{\mathcal{O}'}$, $\mathcal{O} \in \{R^-, A, R^+\}$, продолжается до гомеоморфизма $h_{\mathcal{O}}\colon V_{\mathcal{O}} \to V_{\mathcal{O}'}$, осуществляющего эквивалентность потоков $f^t|_{V_{\mathcal{O}}}$ и $f'^t|_{V_{\mathcal{O}'}}$. Таким образом, искомый гомеоморфизм $h\colon M^4 \to M'^4$ совпадает с гомеоморфизмом $h_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O} \in \{S, A, R^-, R^+\}$, на $V_{\mathcal{O}}$.

В случае 2) поток f^t (f'^t) имеет одну отталкивающую орбиту R (R'). В силу леммы 2 узел L^+ (L'^+) является стандартным в многообразии Σ_R $(\Sigma_{R'})$, а заполненный тор V^- (V'^-) лежит в 3-шаре $B \subset (\Sigma_R \setminus V^+)$ $(B' \subset (\Sigma_{R'} \setminus V'^+))$. Поскольку гомеоморфизм $h_-\colon \Sigma_{R^-} \to \Sigma_{R'^-}$ переводит заполненный тор V^- в заполненный тор V'^-, то, не умаляя общности, можно считать, что $B' = h_-(B) \subset (\Sigma_{R'} \setminus V'^+)$.

Положим $\widetilde{L}^+ = h_-^{-1}(L'^+)$, $\widetilde{V}^+ = h_-^{-1}(V'^+)$. Поскольку узлы L^+, $\widetilde{L}^+$ являются стандартными в многообразии Σ_R, то существует разбиение многообразия Σ_R на два заполненных тора W^+, W^- таких, что $B \subset \operatorname{int} W^-$ и $V^+, \widetilde{V}^+ \subset \operatorname{int} W^+$. Тогда пространства $W^+ \setminus \operatorname{int} V^+$, $W^+ \setminus \operatorname{int} \widetilde{V}^+$ гомеоморфны многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Следовательно, существует гомеоморфизм $\psi\colon \Sigma_R \to \Sigma_R$, тождественный на W^- и такой, что $\psi(L^+) = \widetilde{L}^+$, $\psi(V^+) = \widetilde{V}^+$. Положим $\widetilde{h}_- = h_-\psi\colon \Sigma_R \to \Sigma_R$. Тогда $\widetilde{h}_-(V^+) = V'^+$.

Положим $\widetilde{W}^- = \Sigma_R \setminus \operatorname{int} V^+$ и $\widetilde{W}'^- = \Sigma_{R'} \setminus \operatorname{int} V'^+$. Поскольку $B \subset \widetilde{W}^-$ – 3-шар и $\widetilde{W}^-$, $\widetilde{W}'^-$ – заполненные торы, то существует гомеоморфизм $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{W}^- \to \widetilde{W}^-$, тождественный на B и такой, что изоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом $\widetilde{h}_-\widetilde{\psi}|_{T^+}\colon T^+ \to T'^+$, в образующих λ^+, μ^+, λ'^+, μ'^+ задается матрицей $\mathcal{A}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_R\colon \Sigma_R \to \Sigma_{R'}$, совпадающий с h_S на V^+ и с $\widetilde{h}_-\widetilde{\psi}$ вне некоторой окрестности заполненного тора V^+. Тогда на множестве Σ_A определен гомеоморфизм $h_A\colon \Sigma_A \to \Sigma_{A'}$, совпадающий с гомеоморфизмом h_S на N_T и с гомеоморфизмом h_R на $\Sigma_R \setminus \operatorname{int}(V^- \cup V^+)$.

Поскольку $\rho_i = \rho_i'$, $i = 1, 2$, то в силу предложения 8 гомеоморфизм $h_{\mathcal{O}}\colon \Sigma_{\mathcal{O}} \to \Sigma_{\mathcal{O}'}$, $\mathcal{O} \in \{R, A\}$, продолжается до гомеоморфизма $h_{\mathcal{O}}\colon V_{\mathcal{O}} \to V_{\mathcal{O}'}$, осуществляющего эквивалентность потоков $f^t|_{V_{\mathcal{O}}}$ и $f'^t|_{V_{\mathcal{O}'}}$. Таким образом, искомый гомеоморфизм $h\colon M^4 \to M'^4$ совпадает с гомеоморфизмом $h_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O} \in \{S, A, R\}$, на $V_{\mathcal{O}}$.

Теорема 1 доказана.

§ 5. Реализация потоков класса G по допустимой абстрактной схеме

Напомним, что абстрактной схемой мы назвали набор

$$\mathcal{S} = (\Sigma, L, \rho_1, \rho_2)$$

со следующими свойствами:

- множество Σ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ с фиксированной образующей e;
- L – произвольный узел, гладко вложенный в Σ;
- $\rho_1 \in \{-1, 1\}$;
- $\rho_2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ и $|\rho_2| = 2$, если узел L не гомотопен нулю в Σ.

В этом параграфе мы докажем теорему 2: для любой абстрактной схемы $\mathcal{S}$ существует поток $f^t \in G$, схема которого ей эквивалентна.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathcal{S} = (\Sigma, L, \rho_1, \rho_2)$ – некоторая абстрактная схема. Будем обозначать через $\langle L\rangle$ гомотопический тип узла L, равный числу его обходов (с учетом ориентации) вокруг образующей e многообразия Σ. Опишем реализацию набора

$$\mathcal{S} = (\Sigma, L, \rho_1, \rho_2)$$

потоком $f^t \in G$, схема которого ему эквивалентна, отдельно для двух случаев: 1) $\langle L\rangle \neq 0$; 2) $\langle L\rangle = 0$.

В случае 1) сначала реализуем надстройкой любую схему вида $\mathcal{S} = (\Sigma, L, 1, 2)$, $\langle L\rangle > 0$. Для этого опишем построение диффеоморфизма $f_L\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ по узлу L. Искомый поток будет надстройкой над построенным диффеоморфизмом. Затем покажем, как модифицировать надстройку, чтобы получить поток, реализующий произвольную схему вида 1). Поскольку согласно [3] любой 3-диффеоморфизм Морса–Смейла с единственной седловой орбитой топологически сопряжен диффеоморфизму f_L, то тем самым мы докажем теорему 3.

Построение диффеоморфизма $f_L\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и $\nu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм, заданный формулой

$$\nu(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.$$

Определим отображение $p\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \Sigma$ формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2(\|\mathbf{x}\|) \ (\mathrm{mod}\, 1)\right).$$

Пусть $L \subset \Sigma$ – такой узел, что $\langle L\rangle = m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\overline{L} = p^{-1}(L)$ состоит из ν-инвариантного объединения m дуг:

$$\overline{L} = \overline{L}_0 \sqcup \dots \sqcup \nu^{m-1}(\overline{L}_0).$$

Пусть $U(L) \subset \Sigma$ – трубчатая окрестность узла L. Тогда $U(\overline{L}) = p^{-1}(U(L))$ – ν-инвариантная окрестность дуг $\overline{L}$, состоящая из m компонент связности $U(\overline{L}_0), \dots, \nu^{m-1}(U(\overline{L}_0))$, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$.

Пусть $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$, и пусть диффеоморфизм $g\colon C \to C$ определен формулой

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2, x_3).$$

Определим диффеоморфизм $g_m \colon C \times \mathbb{Z}_m \to C \times \mathbb{Z}_m$ формулой

$$g_m(\mathbf{x}, j) = (g(\mathbf{x}), j + 1 \pmod m), \qquad \mathbf{x} \in C, \quad j \in \mathbb{Z}_m.$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta \colon U(\overline{L}) \to C \times \mathbb{Z}_m$, который сопрягает диффеоморфизмы $\nu|_{U(\overline{L})}$ и g_m. Определим поток ϕ^t на C следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{\pi\|\mathbf{x}\|}{2}\right), & \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 1, & \|\mathbf{x}\| > 2; \end{cases} \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} x_2, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ x_2\left(1 + \cos\left(\dfrac{3\pi\|\mathbf{x}\|}{2}\right)\right), & 1 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 2; \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} x_3, & \|\mathbf{x}\| < 1, \\ x_3\left(1 + \cos\left(\dfrac{3\pi\|\mathbf{x}\|}{2}\right)\right), & 1 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 2. \end{cases} \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет две неподвижные точки: седло $P(-1, 0, 0)$ и источник $Q(1, 0, 0)$ (рис. 9), обе гиперболические.

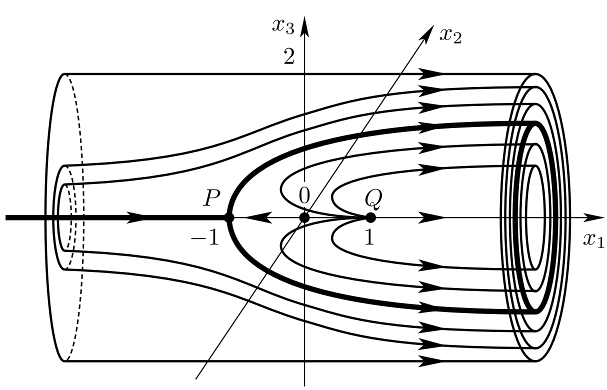

Рис. 9. Траектории потока ϕ^t.

Одна устойчивая сепаратриса седла P совпадает с открытым интервалом $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon |x_1|<1,\ x_2=x_3=0\}$, принадлежащим бассейну источника Q, а другая – с лучом $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1<-1,\ x_2=x_3=0\}$. Кроме того, ϕ совпадает с диффеоморфизмом g вне шара $\{(x_1,x_2,x_3)\in C\colon x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4\}$.

Определим диффеоморфизм $\phi_m\colon C\times\mathbb{Z}_m\to C\times\mathbb{Z}_m$ формулой

$$\phi_m(\mathbf{x},j)=(\phi(\mathbf{x}),j+1\ (\operatorname{mod} m)),\qquad \mathbf{x}\in C,\quad j\in\mathbb{Z}_m.$$

Определим диффеоморфизм $\overline{f}_L\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ таким образом, что $\overline{f}_L$ совпадает с ν вне $U(\overline{L})$ и совпадает с диффеоморфизмом $\zeta^{-1}\phi_m\zeta$ на $U(\overline{L})$. Тогда $\overline{f}_L$ имеет в $U(\overline{L})$ две периодические орбиты периода m: источниковую $\overline{\alpha}\sqcup\overline{f}_L(\overline{\alpha})\sqcup\dots\sqcup\overline{f}_L^{\,m-1}(\overline{\alpha})=\zeta^{-1}(Q\times\mathbb{Z}_m)$ и седловую $\overline{\sigma}\sqcup\overline{f}_L(\overline{\sigma})\sqcup\dots\sqcup\overline{f}_L^{\,m-1}(\overline{\sigma})=\zeta^{-1}(P\times\mathbb{Z}_m)$, обе гиперболические (рис. 10).

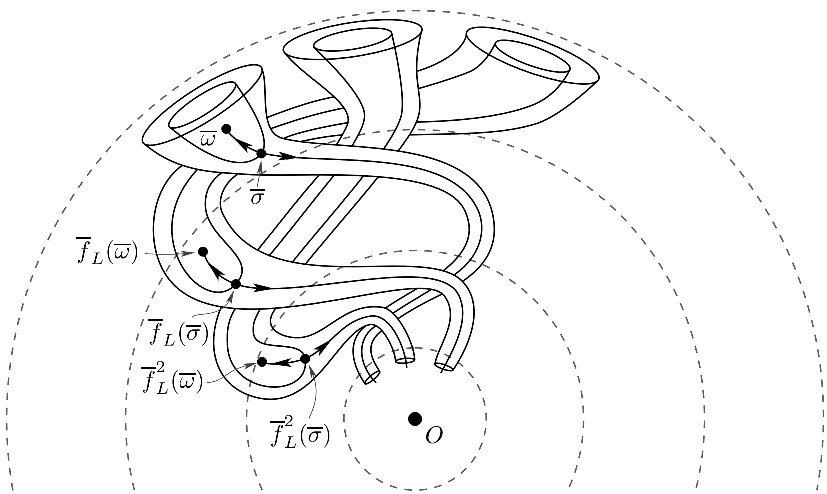

Рис. 10. Фазовый портрет диффеоморфизма $\overline{f}_L$.

Теперь спроецируем динамику на 3-сферу. Для этого обозначим через $N(0,0,0,1)$ северный полюс сферы $\mathbb{S}^3=\{s=(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$. Для каждой точки $s\in(\mathbb{S}^3\setminus N)$ существует единственная прямая, проходящая через N и s в $\mathbb{R}^4$, и эта прямая пересекает $\mathbb{R}^3$ в единственной точке $\vartheta(s)$. *Стереографическая проекция* $\vartheta\colon\mathbb{S}^3\setminus N\to\mathbb{R}^3$, переводящая точку s в точку $\vartheta(s)$, является диффеоморфизмом и задается формулой

$$\vartheta(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{x_1}{1-x_4},\frac{x_2}{1-x_4},\frac{x_3}{1-x_4}\right).$$

По построению диффеоморфизм $\overline{f}_L$ совпадает с ν в некоторой окрестности точки O и в окрестности бесконечно удаленной точки, следовательно, он индуцирует на $\mathbb{S}^3$ диффеоморфизм Морса–Смейла

$$f_L(s) = \begin{cases} \vartheta^{-1}\overline{f}_L\vartheta(s), & s \neq N, \\ N, & s = N. \end{cases}$$

Неблуждающее множество диффеоморфизма f_L состоит из четырех орбит: неподвижного стока N, неподвижного источника $\vartheta^{-1}(O)$, источниковой орбиты $\mathcal{O}_\alpha = \alpha \sqcup f_L(\alpha) \sqcup \dots \sqcup f_L^{m-1}(\alpha) = \vartheta^{-1}(\zeta^{-1}(Q \times \mathbb{Z}_m))$ периода m и седловой орбиты $\mathcal{O}_\sigma = \sigma \sqcup f_L(\sigma) \sqcup \dots \sqcup f_L^{m-1}(\sigma) = \vartheta^{-1}(\zeta^{-1}(P \times \mathbb{Z}_m))$ периода m.

Построение и модификация надстройки. Обозначим через $[f_L]^t \colon \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ надстройку над диффеоморфизмом f_L. Тогда неблуждающее множество потока $f^t = [f_L]^t$ состоит из четырех периодических орбит: притягивающей A, отталкивающих R^- и R^+, седловой S, являющихся надстройками над орбитами $N, \vartheta^{-1}(O), \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\sigma$ соответственно. Непосредственно из построения следует, что построенный поток принадлежит классу G, а его схема эквивалентна схеме $(\Sigma, L, 1, 2)$ и $\langle L \rangle = m$.

Для реализации потока с отрицательными параметрами в схеме модифицируем поток в окрестности периодических орбит следующим образом.

Пусть $\mathcal{O}$ – притягивающая или отталкивающая периодическая орбита потока f^t и $V_\mathcal{O}$ – ее каноническая окрестность с границей $\Sigma_\mathcal{O}$. Положим

$$V_\mathcal{O}^t = f^t(V_\mathcal{O}), \quad \Sigma_\mathcal{O}^t = f^t(\Sigma_\mathcal{O}), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad K_\mathcal{O} = \bigcup_{t \in [-1,1]} f^t(\Sigma_\mathcal{O}).$$

Тогда $K_\mathcal{O} \cong \Sigma \times [-1,1]$. Пусть $x \in \Sigma$, $t \in [-1,1]$ и $\vec{v}_\mathcal{O}(x,t)$ – векторное поле, индуцированное потоком f^t на $K_\mathcal{O}$ и $\vec{n}_\mathcal{O}(x,t)$ – векторное поле единичных внешних нормалей к гиперповерхностям $f^t(\Sigma_\mathcal{O}) \cong \Sigma \times \{t\}$. Определим векторное поле $\vec{w}_\mathcal{O}(x,t)$ на $K_\mathcal{O}$ формулой

$$\vec{w}_\mathcal{O}(x,t) = (1 - |t|)\vec{n}_\mathcal{O}(x,t) + |t|\vec{v}_\mathcal{O}(x,t).$$

Обозначим через $\phi_\mathcal{O}^t$ поток на $K_\mathcal{O}$, порожденный векторным полем $\vec{w}_\mathcal{O}$. Не умаляя общности, будем считать, что окрестности $V_A^{-1}, V_{R^-}^1, V_{R^+}^1$ попарно не пересекаются, и обозначим через ϕ^t поток на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, совпадающий с потоком $\phi_\mathcal{O}^t$ на множествах $K_\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \in \{A, R^+, R^-\}$, и с потоком f^t вне этих множеств. По построению поток ϕ^t принадлежит множеству G, его периодические орбиты совпадают с орбитами A, R^-, R^+, S, а его схема эквивалентна схеме $(\Sigma, L, 1, 2)$.

Пусть $\mathcal{O}$ – притягивающая или отталкивающая периодическая орбита потока ϕ^t. Тогда $V_\mathcal{O} \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$. Пусть $d \in \mathbb{D}^3$, $e^{i\varphi} \in \mathbb{S}^1$. Для $\delta \in \{-1, +1\}$ определим диффеоморфизм $g_{\mathcal{O},\delta} \colon V_\mathcal{O} \to V_\mathcal{O}$ формулой

$$g_{\mathcal{O},\delta}(d, e^{i\varphi}) = (d, e^{i\delta\varphi}).$$

Для схемы $\mathcal{S} = (\Sigma, \delta_0 L, \delta_1, 2\delta_2)$, где $\delta_i \in \{-1, +1\}$, $i = 0, 1, 2$, определим на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ поток $f^t_{\mathcal{S}}$ формулой

$$f^t_{\mathcal{S}}(x) = \begin{cases} g_{R^-,\delta_0}\phi^t g_{R^-,\delta_0}(x), & x \in V_{R^-}, \\ g_{R^+,\delta_1}\phi^t g_{R^+,\delta_1}(x), & x \in V_{R^+}, \\ g_{A,\delta_0\delta_2}\phi^t g_{A,\delta_0\delta_2}(x), & x \in V_A, \\ \phi^t(x) & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

По построению поток $f^t_{\mathcal{S}}$ имеет инвариант $\mathcal{S}$, а его несущим многообразием является $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

В случае 2) поток будем реализовывать “сшиванием” канонических окрестностей.

Пусть $\mathcal{S} = (\Sigma, L, \rho_1, \rho_2)$ – схема, в которой узел $L \subset \Sigma$ такой, что $\langle L \rangle = 0$.

Дальнейшие построения проведем отдельно для двух следующих случаев: 2i) $|\rho_2| = 1$; 2ii) $|\rho_2| = 2$.

В случае 2i), поскольку $\langle L \rangle = 0$, существует 3-шар $B \subset \Sigma$, содержащий узел L в своей внутренности. Выберем стандартный узел $L^+ \subset (\Sigma \setminus B)$ так, что $\langle L^+ \rangle = \rho_1$. Выберем попарно не пересекающиеся трубчатые окрестности $U^-, U^+ \subset \Sigma$ узлов L, L^+ соответственно. Положим $E^+_R = \mathrm{cl}(\Sigma \setminus (U^+ \cup B))$, $E^-_R = \mathrm{cl}(B \setminus U^-)$. Пусть $p_{\rho_2}\colon \mathbb{S}^2 \times [0,1] \to \Sigma_0$ – гладкое отображение, являющееся диффеоморфизмом на $\mathbb{S}^2 \times (0,1)$ и такое, что $p_{\rho_2}(s,0) = p_{\rho_2}(s,1)$, $\langle p_{\rho_2}(\{s\} \times [0,1]) \rangle_0 = \rho_2$. Выберем в многообразии $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ гладкое подмногообразие $N \cong \mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ так, что множество $\mathbb{S}^2 \times [0,1] \setminus \mathrm{int}\, N$ состоит из двух компонент связности, $E^-_A \cong E^-_R$ и $E^+_A \cong E^+_R$, содержащих сферы $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ и $\mathbb{S}^2 \times \{1\}$ соответственно в своих границах.

Напомним, что $\mathbb{T} = v_2(\overline{T})$ – двумерный тор с трубчатой окрестностью $N_{\mathbb{T}} = v_2(\mathrm{cl}(N_{\overline{T}}))$, дополнение до которой в $\Sigma_2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ состоит из двух заполненных торов, $\mathbb{V}^-$ и $\mathbb{V}^+$ (см. п. 3.3). Положим $U = p_{\rho_2}(N)$, $U_A = \mathrm{cl}(\Sigma_0 \setminus U)$ и $U_R = \mathrm{cl}(\Sigma \setminus (U^+ \cup U^-))$. Тогда существуют диффеоморфизмы $j_R\colon U^- \sqcup U^+ \to \mathbb{V}^- \sqcup \mathbb{V}^+$, $j_A\colon U \to N_T$, $j_{RA}\colon U_R \to U_A$ такие, что

$$\langle j_R(L) \rangle_2 = \langle j_R(L^+) \rangle_2 = 1,$$
$$j_{RA}(E^-_R) = E^-_A, \qquad j_{RA}(E^+_R) = E^+_A, \qquad j_{RA}|_{\partial U_R} = j_A j_R|_{\partial U_R}.$$

Не умаляя общности, будем полагать, что $\Sigma = \Sigma_3$, $e = e_3$. Положим $\widetilde{M}^3 = \mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_2 \sqcup \mathbb{V}_3$ и введем на множестве $\widetilde{M}^3$ минимальное отношение эквивалентности $\sim$ условием

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &\sim j_R(\widetilde{x}), & \widetilde{x} &\in (U^- \sqcup U^+), \\ \widetilde{x} &\sim j_A(\widetilde{x}), & \widetilde{x} &\in U, \\ \widetilde{x} &\sim j_{RA}(\widetilde{x}), & \widetilde{x} &\in U_R. \end{aligned}$$

Обозначим через M^3 множество классов эквивалентности по введенному отношению и через $p\colon \widetilde{M}^3 \to M^3$ – естественную проекцию. Определим поток $f^t\colon M^3 \to M^3$ формулой

$$f^t(x) = \begin{cases} p[a_0]^t(p|_{\mathbb{V}_0})^{-1}(x), & x \in p(\mathbb{V}_0), \\ p[a_2]^t(p|_{\mathbb{V}_2})^{-1}(x), & x \in p(\mathbb{V}_2), \\ p[a_3]^t(p|_{\mathbb{V}_3})^{-1}(x), & x \in p(\mathbb{V}_3). \end{cases}$$

Построенный поток является непрерывным. Методами, аналогичными методам, предложенным в пункте 1), его можно сгладить, получив искомый поток $f^t_{\mathcal{S}}$, имеющий инвариант $\mathcal{S}$.

В случае 2ii), поскольку $\langle L\rangle = 0$, не умаляя общности, можно считать, что $e \cap L = \varnothing$. Выберем стандартный узел $L^+ \subset (\Sigma_3 \setminus B)$ так, что $\langle L^+\rangle_3 = \rho_1$. Выберем попарно не пересекающиеся трубчатые окрестности $U^- \subset \Sigma$, $U^+ \subset \Sigma_3$ узлов L, L^+ соответственно. Положим $E_{R^+} = \mathrm{cl}(\Sigma_3 \setminus U^+)$, $E_{R^-} = \mathrm{cl}(\Sigma \setminus U^-)$.

Выберем в многообразии Σ_0 гладкое подмногообразие $U \cong \mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ так, что множество $\Sigma_0 \setminus \operatorname{int} U$ состоит из двух компонент связности $E^-_A \cong E_{R^-}$, $E^+_A \cong E_{R^+}$ и существует диффеоморфизм $j^-_{RA}(E_{R^-}) = E^-_A$ такой, что $\langle j^-_{RA}(e)\rangle_0 = \rho_2/2$. Тогда существуют диффеоморфизмы $j_R\colon U^- \sqcup U^+ \to \mathbb{V}^- \sqcup \mathbb{V}^+$, $j_A\colon U \to N_T$, $j^+_{RA}\colon E_{R^+} \to E^+_A$ такие, что

$$\langle j_R(L)\rangle_2 = \langle j_R(L^+)\rangle_2 = 1, \qquad j^{\pm}_{RA}|_{\partial U^\pm} = j_A j_R|_{\partial U^\pm}.$$

Не умаляя общности, будем полагать, что $\Sigma = \Sigma_3$, $e = e_3$. Положим $\widetilde{M}^3 = \mathbb{V}_0 \sqcup \mathbb{V}_2 \sqcup \mathbb{V}_3 \sqcup \mathbb{V}_3$ и введем на множестве $\widetilde{M}^3$ минимальное отношение эквивалентности $\sim$ условием

$$\begin{aligned} &\widetilde{x} \sim j_R(\widetilde{x}), && \widetilde{x} \in (U^- \sqcup U^+), \\ &\widetilde{x} \sim j_A(\widetilde{x}), && \widetilde{x} \in U, \\ &\widetilde{x} \sim j^{\pm}_{AR}(\widetilde{x}), && \widetilde{x} \in E_{R^\pm}. \end{aligned}$$

Обозначим через M^3 множество классов эквивалентности по введенному отношению и через $p\colon \widetilde{M}^3 \to M^3$ – естественную проекцию. Определим поток $f^t\colon M^3 \to M^3$ аналогично случаю 2i).

Теорема 2 доказана.

§ 6. Топология несущего многообразия потоков класса G

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 4. Но сначала мы докажем следующий факт, существенно используемый при доказательстве теоремы.

Лемма 4. *Пусть*:

- P – *компактное топологическое* $(n+1)$-*многообразие* $(n \in \mathbb{N})$ *с непустым краем* ∂P;
- $Q \subset \partial P$ – *компактное* n-*многообразие*;
- $R = Q \times [0,1]$;

- $h\colon Q \to Q \times \{0\}$ – *гомеоморфизм, заданный формулой* $h(q) = q \times \{0\}$;
- $\widetilde{P} = (P \cup R)/_{\sim}$, *где* $\sim$ – *минимальное отношение эквивалентности, определенное условием* $q \sim h(q)$, $q \in Q$.

Тогда существует гомеоморфизм $H\colon P \to \widetilde{P}$, *тождественный вне любой фиксированной окрестности* $V_Q \subset P$ *множества* Q *и такой, что* $V_Q \cap \partial P = Q$.

Доказательство. Если $\partial Q = \varnothing$, то утверждение леммы следует из [8; лемма 3]. В противном случае для $t \in [0,1]$ определим изотопию $z_t\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ формулой

$$z_t(s) = \begin{cases} ((1-t)s, 2ts), & s \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ (1 + (t+1)(s-1), t), & s \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Запишем изотопию z_t в виде

$$z_t(s) = (x_t(s), y_t(s)).$$

Рассмотрим "воротник" множества ∂Q в Q, т.е. вложение $\mu\colon \partial Q \times [-1,0] \to Q$ такое, что $\mu(q,0) = q\ \forall\, q \in \partial Q$. Положим $\check{Q} = \mu(\partial Q \times [-1,0])$ и $\widehat{Q} = \mathrm{cl}(Q \setminus \check{Q})$. Для $t \in [0,1]$ определим изотопию $Z_t\colon Q \to Q \times [0,1]$ формулой

$$Z_t(q) = \begin{cases} (\mu(\check{q}, x_t|s|), y_t(|s|)), & q = \mu(\check{q}, s), \quad \check{q} \in \partial Q, \\ (q, t), & q \in \widehat{Q}. \end{cases}$$

Запишем изотопию Z_t в виде

$$Z_t(q) = (X_t(q), Y_t(q)).$$

Рассмотрим "воротник" множества Q в V_Q, т.е. вложение $\nu\colon Q \times [-1,0] \to V_Q$ такое, что $\nu(q,0) = q\ \forall\, q \in Q$. Положим $R^- = \nu(Q \times [-1,0])$. Для $t \in [-1,0]$ положим $Z_t^-(q) = (X_t(q), -Y_t(q))$ и $Z_t = \nu Z_t^-\colon Q \to R^-$. Тогда искомый гомеоморфизм $H\colon P \to \widetilde{P}$ определяется формулой

$$H(x) = \begin{cases} x, & x \in (P \setminus R^-), \\ Z_{(t-1)/2}(q), & x = Z_t(q), \quad q \in Q, \quad t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать теорему 4: несущее многообразие любого потока $f^t \in G$ гомеоморфно $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство теоремы 4. Пусть поток f^t принадлежит классу G. В силу теоремы 1 полным инвариантом топологической эквивалентности такого потока является класс эквивалентности его схемы $\mathcal{S}_{f^t} = (\Sigma_R, L, \rho_1, \rho_2)$. Согласно теореме 2 любой поток $f^t \in G$ эквивалентен потоку, реализованному по абстрактной схеме $\mathcal{S} = (\Sigma_R, L, \rho_1, \rho_2)$, эквивалентной схеме $\mathcal{S}_{f^t}$.

Дальнейшее доказательство проведем отдельно для двух следующих случаев: 1)$\langle L\rangle \neq 0$; 2) $\langle L\rangle = 0$.

В случае 1) несущее многообразие потока, реализованного по узлу $\langle L\rangle \neq 0$, гомеоморфно $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, и, следовательно, для этого случая теорема 4 доказана.

В случае 2) положим $D^{\mathrm{s}}_S = W^{\mathrm{s}}_S \cap V_S$. По построению D^{s}_S диффеоморфно двумерному кольцу $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$, ограниченному узлами L^-, L^+. Выберем трубчатую окрестность $V^{\mathrm{s}}_S \subset V_S$ кольца D^{s}_S, диффеоморфную $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$, и диффеоморфизм $\nu\colon \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \to V^{\mathrm{s}}_S$ так, что $\nu(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \{-1\}) = V^-$, $\nu(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \{+1\}) = V^+$ и множество $\nu(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [-1,1])$ трансверсально траекториям потока f^t.

Положим $W_R = V^{\mathrm{s}}_S \cup V_{\mathcal{R}}$ и $W_A = M^3 \setminus \operatorname{int} W_R$. По построению ∂W_A является секущей для всех траекторий потока f^t, лежащих в множестве $W^{\mathrm{s}}_A \setminus A$, и, следовательно, $W_A \cong V_A \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$. Ниже мы покажем, что $W_R \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$. Тогда в силу [12] $M^3 = W_A \cup W_R \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$.

Доказательство того, что $W_R \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1$, проведем отдельно для двух следующих случаев: 2i) $|\rho_2| = 1$; 2ii) $|\rho_2| = 2$.

В случае 2ii) $V_{\mathcal{R}} = V_{R^-} \sqcup V_{R^+}$. Поскольку узел L^+ является стандартным в V_{R^+}, то существует гомеоморфизм $\nu_+\colon \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [1,2] \to V_{R^+}$ такой, что $\nu_+(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \{1\}) = V^+$. Тогда (см., например, [8; лемма 3]) $V^{\mathrm{s}}_S \cup V_{R^+} \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \times [-1,2]$. Таким образом, $V^{\mathrm{s}}_S \cup V_{R^+} \cong V^- \times [-1,2]$ и, следовательно, $W_R \cong V_{R^-} \cup V^- \times [-1,2]$, где $V_{R^-} \cap V^- \times [-1,2] = V^-$. В силу леммы 4

$$W_R \cong V_{R^-} \cong \mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^1.$$

В случае 2i) $V_{\mathcal{R}} = V_R$, узел L^+ является стандартным в V_R и для узла L^- существует 3-шар $B \subset \Sigma_R$ такой, что $V^- \subset \operatorname{int} B$ и $B \cap V^+ = \varnothing$. Выберем 4-шар $\widetilde{B} \subset V_R$ так, что $\widetilde{B} \cap \Sigma_R = \partial\widetilde{B} \cap \Sigma_R = B$. Тогда $B_0 = \operatorname{cl}(\partial\widetilde{B} \setminus B) \cong \mathbb{D}^3$. Положим $\overline{W}_R = \operatorname{cl}(W_R \setminus B_0)$. По построению $\overline{W}_R$ – связное 4-многообразие с краем, из которого многообразие W_R получается отождествлением (с помощью меняющего ориентацию гомеоморфизма) двух не пересекающихся копий 3-шара B_0 на его границе. Тогда доказательство теоремы сводится к доказательству того, что $\overline{W}_R \cong \mathbb{D}^4$.

Покажем, что $\overline{W}_R \cong \mathbb{D}^4$. Для этого представим $\overline{W}_R$ в следующем виде: $\overline{W}_R = \widetilde{V}_R \cup \widetilde{V}^{\mathrm{s}}_S$, где $\widetilde{V}_R = \operatorname{cl}(V_R \setminus \widetilde{B})$, $\widetilde{V}^{\mathrm{s}}_S = V^{\mathrm{s}}_S \cup \widetilde{B}$. По построению $\widetilde{V}_R \cap \widetilde{V}^{\mathrm{s}}_S = V^-$. Аналогично пункту 2ii) показывается, что $\widetilde{V}_R \cup V^{\mathrm{s}}_S \cong V^- \times [-1,2]$, откуда получаем $\overline{W}_R \cong \widetilde{B} \cup V^- \times [-1,2]$, где $\widetilde{B} \cap V^- \times [-1,2] = V^-$. В силу леммы 4

$$\overline{W}_R \cong \widetilde{B} \cong \mathbb{D}^4.$$

Теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] P. M. Akhmet'ev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, "On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms", *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **20**:3 (2021), 76, 15 pp.

[2] F. Bonahon, J.-P. Otal, “Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **16**:3 (1983), 451–466.

[3] C. Bonatti, V. Z. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.

[4] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.

[5] J. Franks, “Nonsingular Smale flows on S^3”, *Topology*, **24**:3 (1985), 265–282.

[6] D. Gabai, “Foliations and the topology of 3-manifolds. III”, *J. Differential Geom.*, **26**:3 (1987), 479–536.

[7] C. McA. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:2 (1989), 371–415.

[8] V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, “The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28**:11 (2015), 4081–4102.

[9] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **271**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 111–133; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 103–124.

[10] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948, 232 с.; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, PMS-4, Reprint of the 1948 ed., Princeton Math. Ser., **63**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2015, vii+165 pp.

[11] M. C. Irwin, “A classification of elementary cycles”, *Topology*, **9**:1 (1970), 35–47.

[12] N. L. Max, “Homeomorphisms of $S^n \times S^1$”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 939–942.

[13] W. D. Neumann, *Notes on geometry and* 3*-manifolds*, Citeseer, 1996.

[14] E. M. Osenkov, O. V. Pochinka, *Morse–Smale* 3*-diffeomorphisms with saddles of the same unstable manifold dimension*, arXiv: 2310.08476.

[15] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[16] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit”, *Appl. Math. Nonlinear Sci.*, **5**:2 (2020), 261–266.

[17] O. V. Pochinka, D. D. Shubin, “Non-singular Morse–Smale flows on n-manifolds with attractor-repeller dynamics”, *Nonlinearity*, **35**:3 (2022), 1485–1499.

[18] D. Rolfsen, *Knots and links*, Reprint with corr. of the 1976 ed., AMS Chelsea Publ. Ser., **346**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, ix+439 pp.

[19] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

[20] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239; англ. пер.: Ya. L. Umanskiĭ, “Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories”, *Math. USSR-Sb.*, **69**:1 (1991), 227–253.

[21] V. Galkin, O. Pochinka, D. Shubin, *Classification of NMS-flows with unique twisted saddle orbit on orientable* 4*-manifolds*, arXiv: 2306.09125.

[22] Bin Yu, “Behavior 0 nonsingular Morse Smale flows on S^3”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **36**:1 (2016), 509–540.

[23] О. В. Починка, Д. Д. Шубин, "Неособые потоки Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях", *Матем. заметки*, **112**:3 (2022), 426–443; англ. пер.: O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "Nonsingular Morse–Smale flows with three periodic orbits on orientable 3-manifolds", *Math. Notes*, **112**:3 (2022), 436–450.

[24] А. О. Пришляк, "Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий", *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 185–196; англ. пер.: A. Prishlyak, "Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds", *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **144**:5 (2007), 4492–4499.

Поступила в редакцию
24.02.2024 и 01.07.2024

Владислав Дмитриевич Галкин
(Vladislav D. Galkin)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Нижний Новгород
E-mail: vgalkin@hse.ru

Ольга Витальевна Починка
(Olga V. Pochinka)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Нижний Новгород
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Данила Денисович Шубин
(Danila D. Shubin)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Нижний Новгород
E-mail: schub.danil@yandex.ru