

УДК 336.76

## Иммунизация несбалансированных денежных потоков на основе расстояния Монжа – Канторовича

Курочкин С.В., Родина В.А.

Одной из ключевых техник в управлении портфелем ценных бумаг с фиксированной доходностью является иммунизация, т.е. контроль изменения стоимости портфеля при колебаниях процентных ставок с учетом аналогичной зависимости для портфеля обязательств. Начиная с классических работ Редингтона, были предложены различные модели иммунизации. При этом принимались ограничительные условия, что поток обязательств сводится к единичному платежу, а кривая спот-ставок или/и ее возможные изменения имеют определенный вид (первоначально – соответственно, плоская и параллельный сдвиг). Авторами ранее было получено решение задачи оптимальной иммунизации для произвольного потока обязательств и формы и сдвигов кривой бескупонной доходности произвольной структуры. В данной работе результат впервые обобщен на случай, когда приведенные к настоящему моменту времени стоимости потоков активов и обязательств не совпадают. Задача оптимизации сформулирована в виде несбалансированной задачи оптимального транспорта. Получен алгоритм построения оптимального иммунизирующего портфеля, конструктивно реализуемый на практике и имеющий ясную финансовую интерпретацию. Существенную роль в оценках играет мера близости между произвольными денежными потоками, известная под различными названиями (метрика Монжа – Канторовича, Вассерштейна, Earth Mover's Distance) в теории оптимального транспорта и широко применяемая в современных методах машинного обучения. Также установлены некоторые соотношения, связывающие расстояние Монжа – Канторовича между денежными потоками с их дюрациями Фишера – Вейля.

**Ключевые слова:** управление активами и пассивами; иммунизация; процентный риск; метрика Монжа – Канторовича; расстояние Вассерштейна; EMD-расстояние; несбалансированная задача оптимального транспорта.

---

Авторы благодарят рецензента первого варианта статьи за ценные замечания, позволившие улучшить текст.

**Курочкин Сергей Владимирович** – к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: skurochkin@hse.ru

**Родина Виктория Алексеевна** – ст. преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: victoriarodina@hse.ru

Статья поступила: 19.03.2024/Статья принята: 11.09.2024.

DOI: 10.17323/1813-8691-2024-28-3-412-426

**Для цитирования:** Курочкин С.В., Родина В.А. Иммунизация несбалансированных денежных потоков на основе расстояния Монжа – Канторовича. *Экономический журнал ВШЭ*. 2024; 28(3): 412–426.

**For citation:** Kurochkin S.V., Rodina V.A. Unbalanced Cash Flows Immunization Based on Monge – Kantorovich Distance. *HSE Economic Journal*. 2024; 28(3): 412–426. (In Russ.)

## Введение

Теория иммунизации является важной составляющей управления портфелем активов с фиксированным доходом и происходит из следующей задачи. Финансовая организация (банк, страховая компания, пенсионный фонд) привлекает средства (вкладчиков, страхователей, инвесторов), в результате чего у нее возникают обязательства, распределенные во времени. Для финансирования обязательств привлеченные средства могут и должны быть размещены в инструменты с фиксированным денежным потоком (т.е. облигации). При этом доли отдельных активов в портфеле не фиксированы и являются предметом управления со стороны организации, законодательно и регуляторно устанавливаются лишь требования по надежности используемых активов и пределы их концентрации в портфеле. Структура реальных облигационных рынков такова, что добиться при этом точного соответствия денежных потоков активов и обязательств по срокам и размерам платежей (такой подход называется *cash matching*) весьма сложно и дорого. На практике денежный поток по портфелю активов лишь приближенно (в смысле, который требует уточнения) воспроизводит поток по обязательствам. Как следствие, возникает большой массив рисков невыполнения части обязательств. Источником таких рисков являются изменения процентных ставок<sup>1</sup>.

Современные требования регуляторов, научные достижения в области финансов и выработанная культура управления портфелем активов с фиксированным доходом предполагают, что организация не имеет права доводить дело до реализации этих рисков, а должна в реальном времени контролировать их потенциальное возникновение. Конкретно это означает, что контролю подлежит текущая (настоящая, приведенная) стоимость активов в сравнении с такой же стоимостью обязательств.

В своем первоначальном виде идея иммунизации была выдвинута в классических работах [Redington, 1952]. В предположении, что процентные ставки на все сроки одинаковые и что возмущение ставок описывается параллельным сдвигом, было показано, что достичь одинаковой чувствительности активов и обязательств к изменениям ставок (это и есть в общем смысле иммунизация) в случае малых изменений ставок и с точностью до малых величин более высоких порядков можно, уравнив дюрации Маколея обоих портфелей. К настоящему времени теория иммунизации стала обширной областью знания, где используются различные подходы. Различия выражены в том, используется ли и

---

<sup>1</sup> Как правило, в данной ситуации допустимыми признаются лишь вложения в достаточно надежные бумаги. Аспект, связанный с вероятностью дефолтов эмитентов облигаций, здесь не рассматривается.

какая параметрическая модель кривой форвардных/спот-ставок, используется ли и какая стохастическая модель динамики ставок, каковы критерии соответствия активов и обязательств (вероятностные либо минимаксные), см. подробный обзор литературы в работе [Курочкин, Родина, 2023].

В направлении, к которому относится данная работа – получение безмодельных оценок и соотношений, усиливающих результаты классической теории, – пионерной работой была [Fong, Vasicek, 1984]. Авторы рассмотрели упрощенную ситуацию, когда поток обязательств состоит из единичного платежа, приходящегося на определенный будущий момент времени. Доказано, что снижение стоимости портфеля активов вследствие изменения процентных ставок ограничено снизу произведением двух величин, одна из которых зависит только от шока форвардных ставок (конкретно, равна  $\sup$ -норме его производной по сроку), а вторая, получившая название М-квадрат, зависит только от структуры портфеля и представляет собой взвешенное среднее квадратов расстояний между моментами времени денежных поступлений и горизонтом инвестирования. Тем самым задача оптимального управления рисками может быть поставлена как задача минимизации второго сомножителя за счет выбора долей составляющих бумаг.

В многочисленных последующих публикациях были получены различные варианты и обобщения. Так, в статье [Boczek, Kaluszka, 2019] получены обобщения оценок Фонга – Васичека (для единичного обязательства). В работе [Cesari, Mosco, 2018], также в постановке Фонга – Васичека, стратегия иммунизации рассмотрена в контексте активных стратегий управления портфелем.

Также в литературе широко представлены работы, развивающие классическую теорию через рассмотрение большего числа факторов (в дополнение к параллельному сдвигу). В статье [De La Peña et al., 2021] проведено сравнительное эмпирическое исследование моделей, использующих разложения в ряды Тейлора.

Ввиду того, что основные торговые площадки и регуляторы (ФРС США, ЦБ РФ и др.) используют параметрические модели кривой процентных ставок (сплайновые либо варианты Нельсона – Зигеля), в ряде работ развивается теория параметрической иммунизации – методы выравнивания чувствительности активов и обязательств к возмущениям параметров кривой [Lapshin, 2021]. Та же задача в работе [Mantilla-Garcia, 2022] решается с применением методов регуляризации и известной в машинном обучении концепции bias-variance trade-off. В работе [Simões, Oliveira, Bravo, 2021] в рамках модели Нельсона – Зигеля для случая множественных обязательств проведено эмпирическое сравнение результатов иммунизации посредством портфелей из обычных облигаций и облигаций, защищенных от инфляции.

Существенным этапом в теории стала работа [Nawalkha, Chambers, 1996], где вместо М-квадрат введена мера М-Absolute – взвешенное среднее расстояние между моментом очередного платежа по активам и горизонтом инвестирования. Величина шока ставки выражается через  $\sup$ -норму функции, вид оценки аналогичен, но обладает тем преимуществом, что оба сомножителя имеют прозрачную финансовую интерпретацию. Модель привлекла внимание исследователей и практиков [Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2012]. Эмпирические тесты показали преимущества стратегий, основанных на минимизации М-Absolute, в сравнении, в частности, со стратегиями выравнивания дюраций [Soto, Prats, 2003; Kondratiuk-Janyska et al., 2010] и моделями, которые используют регуляторы [Nawalkha, Soto, 2012]. В работе [Kondratiuk-Janyska, Kałuszka, 2006] рассмотрен случай стохастического

потока обязательств, введена мера, аналогичная M-Absolute, и в ее терминах получена некоторая оценка математического ожидания убытков по портфелю, по смыслу аналогичная полученной в работе [Nawalkha, Chambers, 1996]. При этом вместо sup-нормы шока в оценке фигурирует функционал – норма производной от математического ожидания экспоненты шока.

За исключением последней процитированной работы, в известных авторам работах по непараметрической иммунизации принимались следующие два условия-ограничения:

- поток обязательств состоит из единичного платежа;
- в текущий момент времени приведенные стоимости активов и обязательств равны.

В работе [Курочкин, Родина, 2023] конструкция [Nawalkha, Chambers, 1996] была распространена на случай множественных обязательств (т.е. произвольного потока). При этом вместо M-Absolute, как ее прямое обобщение, возникает известная под различными названиями (расстояние Монжа – Канторовича, Вассерштейна, Earth Mover's Distance, далее используем обозначение EMD) характеристика различия двух распределений.

В настоящей работе снято второе из ограничений, т.е. исследована ситуация, обычная в практике финансовых организаций, когда сумма привлеченных средств превышает текущую стоимость потока обязательств:  $A > L$ . Задачи такого типа получили название несбалансированных транспортных задач (аббревиатура UOT) и интенсивно изучаются в работах [Chizat, Peyré, Schmitzer, Vialard, 2018; Gangbo, Li, Osher, Puthawala, 2019]. Их точные постановки используют одну из двух конструкций: или переносимая масса имеет свойство уменьшаться по пути, или она может появляться и исчезать ценой некоторого штрафа в целевом функционале. В нашем случае таких приемов не требуется, поскольку излишние денежные средства идут на покрытие убытков.

Структура работы следующая. В разделе 1 вводятся необходимые понятия и доказаны некоторые не отмеченные ранее свойства EMD-расстояния между денежными потоками, в том числе связанные с дюрацией Фишера – Вейля. В разделе 2 получена оценка для максимального убытка по портфелю без предположения о малости шока ставок. Дана постановка оптимизационной задачи для случая несбалансированных потоков, установлен вид ее решения и получен алгоритм его нахождения. В заключении приведены выводы и открытые вопросы.

## 1. Метрика на денежных потоках

Введем необходимые обозначения.

$C = \{(t_k, C_k), k = 1, \dots, N\}$  – денежный поток, предусматривающий поступления средств в размере  $C_k$  в моменты времени  $t_k$ .

Потоки платежей по портфелям активов и обязательств – соответственно  $A = \{(t_k, A_k)\}$  и  $L = \{(t_k, L_k)\}$ . Не нарушая общности, можно считать, что моменты времени в двух потоках синхронизированы, полагая недостающие платежи равными нулю. Короткие позиции не допускаются:  $A_k \geq 0$ . Пусть  $r_t$  – в данный момент рыночная бескупонная ставка годовых на срок  $t$  в непрерывном начислении. Тогда приведенная стоимость активов и обязательств представляются соответственно как

$$A = \sum_{t=t_0}^{t_N} A_t W_t,$$

$$L = \sum_{t=t_1}^{t_N} L_t W_t,$$

$$W_t = \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right),$$

где  $i(t)$  – мгновенная форвардная ставка в данный момент, относящаяся к моменту  $t$ ,  $i(t)$  и  $r(t)$  связаны соотношением  $i(t) = r(t) + tr'(t)$  (относительно арифметики процентных ставок см., например: [Hull, 2023, ch. 4] или [Veronesi, 2016, ch. 1]).

Денежный поток активов, в отличие от потока обязательств, вообще говоря, может включать ненулевой платеж  $A_0$ , соответствующий начальному моменту времени  $t_0 = 0$ . Иначе говоря, в некоторых ситуациях может оказаться целесообразным оставить часть привлеченных средств на текущем счете, явным образом сформировав подушку безопасности. Из содержательных соображений следует, что, среди прочих, должны и далее будут рассмотрены стратегии, в которых  $A_0 = A - L > 0$ .

Как с содержательной стороны, так и для краткости записи удобнее рассматривать возмущения кривой процентных ставок и порождаемые ими риски в терминах форвардных, а не спот-ставок. Так делается практически во всех публикациях по теме, далее используется именно эта схема.

Для денежных потоков удобно ввести их дисконтированные и нормированные версии:

$$a_k = \frac{A_k W_k}{A}, \quad l_k = \frac{L_k W_k}{L}, \quad \sum a_k = \sum l_k = 1.$$

Тем самым  $\{a_k\}$  и  $\{l_k\}$  можно рассматривать как дискретные вероятностные меры на полупрямой  $0 \leq t < \infty$ . Расстояние Монжа – Канторовича  $EMD(a, l)$  между двумя вероятностными мерами в метрическом пространстве с метрикой соотношением  $\rho$  (ограничиваясь достаточным для финансовой постановки случаем дискретных мер) определяется как минимум выражения

$$\sum_{t,s} u_{ts} \rho(t, s) \rightarrow \min, \quad s.t. \sum_s u_{ts} = a_t, \quad \sum_t u_{ts} = l_s,$$

при этом  $\{u_{ts}\}$  называется транспортным планом. В нашем случае

$$\rho(t, s) = |t - s|.$$

Дюрация Фишера – Вейля произвольного потока платежей  $\{(t_k, C_k)\}$  при дисконтной функции  $W_k$  определяется как

$$D_{FW}(\{(t_k, C_k)\}) = \frac{\sum_k t_k C_k W_k}{\sum_j C_j W_j}.$$

$D_{FW}$  количественно отражает чувствительность текущей стоимости потока к мгновенным изменениям спот-ставок для случая произвольной кривой бескупонной доходности, тем самым обобщая понятие дюрации Маколея, но, как и для дюрации Маколея, при условии только параллельных сдвигов кривой.

Также, для денежного потока  $\{(t_k, C_k)\}, C_k \geq 0$ , в линейном приближении, т.е. при малых возмущениях ставок, дюрация Фишера – Вейля дает оценку относительной чувствительности текущей стоимости денежного потока к мгновенным изменениям форвардных ставок, оцениваемым в равномерной норме:

$$\begin{aligned} \Delta C &= \sum_{t=t_1}^{t_N} C_t \left[ \exp\left(-\int_0^t (i(\tau) + \Delta i(\tau)) d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right) \right] = \\ &= \sum_{t=t_1}^{t_N} C_t \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right) \left[ \exp\left(-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right) - 1 \right] \approx \\ &\approx -\sum_{t=t_1}^{t_N} C_t \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right) \int_0^t \Delta i(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

откуда, с точностью до малых более высокого порядка,

$$|\Delta C| \leq \sum_{t=t_1}^{t_N} C_t \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right) t \|\Delta i\| = D_{FW}(\{(t_k, C_k)\}) C \|\Delta i\|,$$

где  $C$  – текущая стоимость потока;  $\|\Delta i\|$  – *sup*-норма шока ставки.

Следующие утверждения прямо следуют из определений, но, по-видимому, не были замечены ранее.

*Утверждение 1.*

$D_{FW}(\{(t_k, C_k)\})$  равна  $EMD(\{(t_k, c_k)\}, \{(0, 1)\})$ , где  $\{(t_k, c_k)\}$  – дисконтированный и нормированный поток  $\{(t_k, c_k)\}, \{(0, 1)\}$  – поток, состоящий из платежа в 1 денежную единицу в нулевой момент времени. При этом, очевидно,  $D_{FW}(\{(0, 1)\}) = 0$ .

*Утверждение 2.*

Для двух денежных потоков разность их дюраций не превосходит по абсолютной величине EMD-расстояния между их нормированными версиями:

$$\left| D_{FW}(\{(t_k, C_k)\}) - D_{FW}(\{(t_k, D_k)\}) \right| \leq EMD(\{(t_k, c_k)\}, \{(t_k, d_k)\}).$$

Первое утверждение следует из того, что

$$D_{FW}(\{(t_k, C_k)\}) = \sum_k t_k c_k = \sum_k |t_k - 0| c_k$$

и план  $\{u_{t0} = c_t\}$  оптимальный (и единственно возможный).

Второе утверждение следует из соотношений

$$(1) \quad \begin{aligned} & \left| D_{FW}(\{(t_k, C_k)\}) - D_{FW}(\{(t_k, D_k)\}) \right| = \left| \sum_t t c_t - \sum_s s d_s \right| = \\ & = \left| \sum_t t \sum_s u_{ts} - \sum_s s \sum_t u_{ts} \right| = \left| \sum_{t,s} (t u_{ts} - s u_{ts}) \right| \leq \sum_{t,s} |t - s| u_{ts}, \end{aligned}$$

верных для любого транспортного плана  $u_{ts}$ . Взяв план, минимизирующий правую часть (1), получим требуемое.

Таким образом, имеется связь между классической иммунизацией, основанной на выравнивании дюраций, и последующими подходами [Fong, Vasicek, 1984; Nawalkha, Chambers, 1996; Курочкин, Родина, 2023], основанными на минимизации меры близости потоков активов и обязательств.

## 2. Постановка и решение оптимизационной задачи

Основной результат [Курочкин, Родина, 2023] может быть сформулирован так: в линейном приближении, с точностью до малых более высоких порядков,

$$(2) \quad \frac{|\Delta(A-L)|}{L} \leq EMD(a, l) \|\Delta i\|,$$

где  $A, L$  – соответственно приведенные стоимости активов и обязательств (в начальный момент  $A=L$ );  $\Delta(A-L)$  – изменение баланса активов и обязательств, возникающее вследствие шока процентных ставок;  $a = \{(t_k, a_k)\}$ ,  $l = \{(t_k, l_k)\}$  – нормированные дисконтированные потоки активов и обязательств соответственно;  $\|\Delta i\|$  – *sup*-норма шока форвардных ставок. Тем самым, задача оптимальной иммунизации может быть поставлена как задача минимизации (за счет выбора структуры активов) величины  $EMD(a, l)$ , с тем чтобы при изменении ставок в заданных пределах относительный текущий дисбаланс, т.е. левая часть (2), был бы минимальным.

Ценой введения коэффициента, большего единицы, но на практике того же порядка, может быть получена аналогичная оценка без предположения о малости шока ставок.

*Утверждение 3.*

В предположении

$$(3) \quad T \|\Delta i\| \leq 1,$$

где  $T$  – максимум разностей временных сроков в правой части (1), верно

$$(4) \quad \frac{|\Delta(A-L)|}{L} \leq 2e EMD(a,l) \|\Delta i\|.$$

*Замечание.* Практически условие (3) выполняется с большим запасом. Так, исторический максимум изменения ключевой ставки ЦБ РФ (ориентира для шока форвардных ставок) имел место 28.02.2022 г. и составил 10,5 п.п., т.е. 0,105. В свою очередь, величина  $T$  заведомо не превосходит максимального срока по потокам активов и обязательств, с грубой оценкой 10 лет (фактически же здесь фигурирует максимум величин  $|t-s|$  при ненулевых  $u_{ts}$  в оптимальных планах, что существенно меньше).

*Доказательство.*

Предварительно рассмотрим случай, когда потоки активов и обязательств отличаются только сроком одного платежа:

$$A = \{(t_k, A_k)\} \cup (t, A_t), \quad L = \{(t_k, L_k)\} \cup (s, L_s), \quad A_k = L_k \quad \forall k, \quad t \neq s, \quad a_t = l_s.$$

Тогда, с учетом  $A_t W_t = L_s W_s$

$$\begin{aligned} |\Delta(A-L)| &= |\Delta(A_t W_t - L_s W_s)| - \\ &- A_t \exp\left(-\int_0^t i(\tau) d\tau\right) \left[ \exp\left(-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^s \Delta i(\tau) d\tau\right) \right] \leq \\ &\leq L a_t \exp\left(-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right) \left[ 1 - \exp\left(-\int_t^s \Delta i(\tau) d\tau\right) \right] \leq \\ &\leq L a_t \exp(T \|\Delta i\|) \left[ \exp(\|\Delta i\| |t-s|) - 1 \right] \leq 2e L a_t |t-s| \|\Delta i\| \end{aligned}$$

(учтено (3) и неравенство величин  $|e^x - 1| \leq 2|x|$  при  $|x| \leq 1$ ), что дает (4) для этого частного случая.

Пусть теперь потоки  $A$  и  $L$  произвольны (но с одинаковой начальной стоимостью). Пусть  $u_{ts}$  – транспортный план, реализующий  $EMD(a,l)$ . Упорядочим каким-либо образом множество пар индексов  $(t,s) : (t_k, s_k), k = 1 \dots m$  и рассмотрим последовательность денежных потоков  $\{C_k\}$ , устроенную так: все приведенные стоимости равны и равны таковым для потоков  $A$  и  $L$ , потоков  $C_{(0)} = A, C_{(m)} = L$  и, в дисконтированном и нормированном варианте,  $C_{(k)}$  получается из  $C_{(k-1)}$  заменой платежа  $(t(k), u_{t(k),s(k)})$  на  $(s(k), u_{t(k),s(k)})$  и остальными платежами одинаковыми (т.е. транспортный план разбит на последовательность элементарных перемещений). Тогда, по доказанному выше,



$$\left| \Delta \left( C_{(k)} - C_{(k-1)} \right) \right| \leq 2eL u_{t(k),s(k)} |t(k) - s(k)| \|\Delta i\|,$$

и

$$\begin{aligned} |\Delta(A-L)| &\leq \sum_{k=1..m} \left| \Delta \left( C_{(k)} - C_{(k-1)} \right) \right| \leq 2eL \sum_{k=1..m} u_{t(k),s(k)} |t(k) - s(k)| \|\Delta i\| = \\ &= 2eL \sum_{t,s} u_{ts} |t-s| \|\Delta i\| = 2eL EMD(a,l) \|\Delta i\|. \end{aligned}$$

В работе [Курочкин, Родина, 2023] был рассмотрен пример иммунизации посредством минимизации EMD-расстояния, где потоком пассивов служил 10-летний аннуитет, а активами для конструирования портфеля выступали наиболее ликвидные ОФЗ ПД. Для этой же ситуации в рамках данной работы был проведен расчет, показывающий фактическую зависимость левой части (4) от величины шока ставок. На рис. 1 представлен результат симуляции просадки итогового портфеля при шоках различной амплитуды – от 0,5 до 5% (в *sur*-норме, доходности на различных сроках распределены равномерно и независимо), сгенерировано 150 точек. Следует отметить, что шок ставки порядка 5% годовых – редчайшее явление, т.е. расчет охватывает не только малые шоки, но и разумную верхнюю границу амплитуды изменения ставки. Тем не менее отклонений от линейной оценки не выявлено, из чего можно сделать вывод, что на практике, после дополнительных тестов, допустимо пользоваться оценкой вида (4) без множителя  $2e$ , т.е. в линеаризованном варианте.

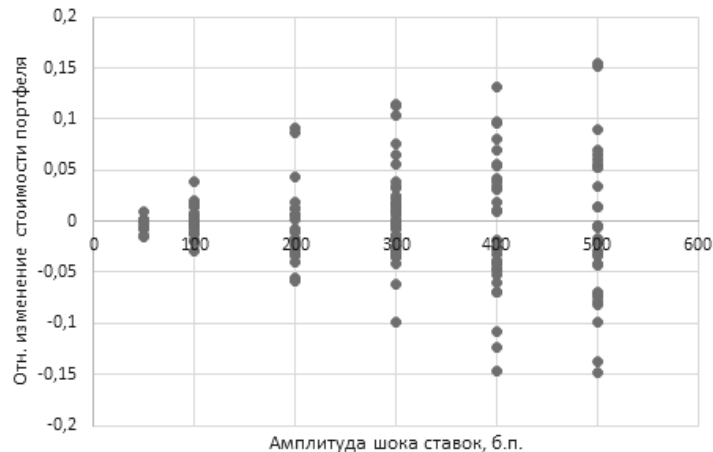


Рис. 1. Изменения относительной стоимости иммунизированного портфеля при случайных шоках ставки различной амплитуды

Откажемся теперь от требования равенства начальных стоимостей активов и обязательств. Пусть

$$A = (1 + \gamma)L, \gamma \geq 0.$$

В линейном приближении имеем

$$\begin{aligned}\Delta A &= -A \sum_k a_k \int_0^{t_k} \Delta i(\tau) d\tau, \\ \Delta L &= -L \sum_k l_k \int_0^{t_k} \Delta i(\tau) d\tau, \\ \Delta(A-L) &= -L \sum_k ((1+\gamma)a_k - l_k) \int_0^{t_k} \Delta i(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование Абеля (с обратной нумерацией) для нормированного чистого денежного потока:

$$B_k = \sum_{i=k}^N ((1+\gamma)a_i - l_i), k = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$(5) \quad |\Delta(A-L)| = L \left| \sum_{k=1}^N B_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta i(\tau) d\tau \right| \leq L \sum_{k=1}^N |B_k| (t_k - t_{k-1}) \|\Delta i\|.$$

Выражение

$$(6) \quad \sum_{k=1}^N |B_k| (t_k - t_{k-1})$$

зависит от размера «подушки безопасности»  $\gamma$  и (через пропорцию долей  $a_k$  в портфеле активов) от инвестиционного решения. Оно очевидным образом равно норме линейного функционала долей  $B_{\gamma,a}$ , действующего на пространстве функций, представляющих шок ставок (с *sup*-нормой) по формуле

$$B_{\gamma,a}(\Delta i) = \sum_{k=1}^N B_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta i(\tau) d\tau.$$

Приведенная стоимость платежа  $A_0$  равна ему самому и к изменениям ставок нечувствительна.

Для выбранной структуры активов подушка не будет пробита, если  $|\Delta(A-L)| \leq \gamma L^2$ . В силу (5) это можно гарантировать (и в наихудшем случае оценка достижима), если амплитуда шока ставок не превысит величины

$$(7) \quad \frac{\gamma}{\|B_{\gamma,a}\|}.$$

<sup>2</sup> В нелинейном варианте – если  $|\Delta(A-L)| \leq \gamma L / (2e)$ .

Таким образом, оптимизационная задача относится к минимаксному типу и имеет вид

$$(8) \quad \|B_{\gamma,a}\| \rightarrow_{\alpha} \min.$$

Задача (8) является выпуклой, с кусочно-линейным целевым функционалом и линейными ограничениями. Такая задача (см.: [Luenberger, Ye, 2008]) может быть сведена к серии задач линейного программирования. Пробные расчеты показывают, что для решения вполне достаточно оказывается универсальных методов оптимизации.

В случае, если  $\gamma$  мала (что обычно имеет место на практике), задача упрощается и приводит к уже известной конструкции. Действительно, простая выкладка показывает, что с точностью до малых более высоких порядков величина (6) равна расстоянию Монжа – Канторовича между потоками  $a_k$  и  $l_k$  (здесь принимаем во внимание, что расстояние Монжа – Канторовича между двумя вероятностными мерами на прямой равно расстоянию между их функциями распределения в норме платежа  $L_1$ , см: [Валландер, 1973]). Таким образом, в этом случае решение (8), т.е. структура оптимального портфеля активов, с точностью до малых, не зависит от  $\gamma$  и является решением задачи

$$(9) \quad EMD(a,l) \rightarrow_{\alpha} \min.$$

Как и следовало ожидать, в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  воспроизводится основной результат [Курочкин, Родина, 2023].

Следующий простой числовой пример демонстрирует вычисление (6) и показывает, что в общем случае решение (9) не сводится к тому, чтобы сформировать сбалансированный портфель по критерию  $EMD$ -метрики, а затем взять его с коэффициентом  $1 + \gamma$ . Наряду с облигациями, доступен для вложения текущий счет, т.е. актив с потоком  $\{(0,1)\}$ .

*Пример.* Поток по пассивам:  $\{(1,1/2), (10,1/2)\}$ . Для портфеля активов: облигация  $\{(11,1)\}$ . Поток  $(a-l)$  есть

$$\begin{aligned} & \{(0, a_0), (1, -1/2), (10, -1/2), (11, 1 + \gamma - a_0)\}, \\ \|B\| &= |\gamma - a_0| \cdot 1 + |1/2 + \gamma - a_0| \cdot 9 + |1 + \gamma - a_0| \cdot 1, \\ a_{0,min} &= 1/2 + \gamma. \end{aligned}$$

Далее будет выяснена структура оптимального портфеля в несбалансированном случае.

*Лемма.*

Если в потоке пассивов содержится платеж  $(t^*, l^*)$ , а среди активов есть бескупонная облигация  $(t^*, 1)$ , то в оптимальном портфеле ее количество будет больше или равно  $l^*$ , а оптимальный план не будет предусматривать перемещения этой суммы.

*Доказательство.* Пусть в портфеле  $\{(t_i, a_i)\}$  для некоторого  $n, 1 \leq n \leq N$ , количество облигаций  $(t_n, 1)$  равно  $w_n$ . В соответствующем плане  $\{u_{i,j}\}$  имеем

$$\sum_{k=1}^N u_{nk} = w_n,$$

$$\sum_{k=1}^N u_{kn} = l_n.$$

Нужно доказать, что  $w_n \geq l_n, u_{nn} = l_n$ . Предположим, что  $u_{nn} < l_n$ ,  $\sum_{k \neq n} u_{kn} = l_n - u_{nn} > 0$ . Изменим портфель так: для всех  $k \neq n$  из  $a_k$  изыдем  $u_{k,n}$  и добавим к  $a_n$ . При этом EMD-расстояние до потока пассивов уменьшится, следовательно, план не был оптимальным.

#### *Утверждение 4.*

Для произвольного коэффициентом  $\gamma > 0$  решение задачи (8) может быть найдено по следующему алгоритму:

1. В совокупность активов добавить текущий денежный счет, т.е. поток  $(0, 1)$ .
2. Игнорируя избыток средств, найти решение сбалансированной транспортной задачи, минимизируя EMD-метрику.
3. Оставшиеся средства в размере  $\gamma$  поместить на текущий счет.

*Доказательство.* Пусть имеется портфель с потоком платежей  $A$ , минимизирующий  $B_{\gamma, a}$ . Добавим к потоку пассивов платеж  $(0, \gamma)$ . Он не меняет  $B_{\gamma, a}$ , и таким образом имеется решение сбалансированной задачи. По доказанному в работе [Курочкин, Родина, 2023] (см. также выше о случае  $\gamma \rightarrow 0$ ),  $A$  – EMD-ближайший к расширенному потоку пассивов.

Из леммы следует, что в оптимальном портфеле будет  $a_0 \geq \gamma$ . Сокращая платеж  $(0, \gamma)$  в активах и пассивах, получаем поток активов, EMD-ближайший к исходным пассивам, плюс оставшуюся сумму  $\gamma$  на счете.

### **Заключение**

Всякая схема иммунизации портфеля обязательств явно или неявно предполагает минимизацию различия между активами и пассивами. В качестве меры различия могут использоваться различные функционалы. Но, по-видимому, наиболее удобными для расчетов и одновременно имеющими ясную финансовую интерпретацию являются мера M-Absolute и предложенные ее обобщения на случай множественных обязательств. В работе получено решение и дан алгоритм оптимальной иммунизации для общего случая,

когда потоки активов и обязательств не сбалансированы в смысле приведенной стоимости. При этом при рассмотрении шока ставок использовался безмодельный подход и оценки в равномерной норме. Конструкция может служить практическим рецептом. Дальнейшие исследования здесь могут быть направлены на согласование алгоритмов иммунизации с моделями динамики ставок и, более широко, моделями управления рисками, принятыми в финансовых организациях.

\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Валландер С.С.* Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18. Вып. 4. С. 824–827.
- Курочкин С.В., Родина В.А.* Оптимальное решение задачи иммунизации потока множественных платежей произвольной структуры // Экономика и математические методы. 2023. Т. 59. № 2. С. 87–99.
- Boczek M., Kałuszka M.* On the Fong-Vašíček Type Inequalities for the Assets/Liabilities Portfolio Immunization Problem // Collegium of Economic Analysis Annals. 2018. № 51. P. 209–228.
- Cesari R., Mosco V.* Optimal Management of Immunized Portfolios // European Actuarial Journal. 2018. Vol. 8. № 2. P. 461–485.
- Chizat L., Peyré G., Schmitzer B., Vialard F.X.* Unbalanced Optimal Transport: Dynamic and Kantorovich Formulations // Journal of Functional Analysis. 2018. Vol. 274. № 11. P. 3090–3123.
- Fong G., Vasicek O.* A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization // Journal of Finance. 1984. Vol. 39. № 5. P. 1541–1546.
- Gangbo W., Li W., Osher S., Puthawala M.* Unnormalized Optimal Transport // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 399. 108940.
- Hull J.* Options, Futures, and Other Derivatives. Pearson, 2021.
- Kondratiuk-Janyska A., Kałuszka M.* Assets/Liabilities Portfolio Immunization as an Optimization Problem // Control and Cybernetics. 2006. Vol. 35. № 2. P. 335–349.
- Kondratiuk-Janyska A. et al.* On Performance of Immunization Strategies in Setting of US Treasury Term Structure Data // Forecasting Financial Markets and Economic Decision-Making (FindEcon) Conference Archive. University of Lodz, 2010. Vol. 8. P. 237–251.
- Lapshin V.* Immunizing a Marked-to-Model Obligation with Marked-to-Market Financial Instruments // HSE Working Papers. WP BRP 84/FE/2021.
- Luenberger D., Ye Y.* Linear and Nonlinear Programming. Springer, 2008.
- Mantilla-Garcia D., Martellini L., Milhau V., Ramirez-Garriido H.E.* Improving Interest Rate Risk Hedging Strategies through Regularization // Financial Analysts Journal. 2022. Vol. 78. № 4. P. 18–36.
- Nawalkha S.K., Chambers D.R.* An Improved Immunization Strategy: M-Absolute // Financial Analysts Journal. 1996. Vol. 52. № 5. P. 69–76.
- Nawalkha S.K., Soto G.M.* Managing Interest Rate Risk: The Next Challenge? Available at: SSRN 1392543. 2012.
- Nawalkha S.K., Soto G.M., Beliaeva N.A.* Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course. John Wiley & Sons, 2005. Vol. 178.
- De La Peña J.I., Iturricastillo I., Moreno R., Roman F., Trigo E.* Towards an Immunization Perfect Model? // International Journal of Finance & Economics. 2021. Vol. 26. № 1. P. 1181–1196.
- Redington F.* Review of the Principles of Life-Office Valuations // Journal of the Institute of Actuaries. 1952. Vol. 78. № 3. P. 286–340.

*Simões C., Oliveira L., Bravo J.M.* Immunization Strategies for Funding Multiple Inflation-Linked Retirement Income Benefits // *Risks*. 2021. Vol. 9. № 4. P. 60.

*Soto G.M., Prats M.A.* Portfolio Design and the Goal of Immunization. Available at: SSRN 985403. 2003.

*Veronesi P.* Handbook of Fixed-Income Securities. Wiley, 2016.

## Unbalanced Cash Flows Immunization Based on Monge-Kantorovich Distance

Sergey Kurochkin<sup>1</sup>, Victoria Rodina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Blvd., Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: skurochkin@hse.ru

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Blvd., Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: victoriarodina@hse.ru

One of the key techniques in the fixed-income portfolio management is immunization which involves a managed change in the portfolio value under interest rate fluctuations given a similar pattern in a portfolio of liabilities. Since the classic work by Redington, scholars have developed a variety of immunization models. Yet, these models are built on restrictive assumptions that a stream of liabilities is constrained to a single payment while the yield curve and/or its possible shift have a certain shape (a flat yield curve and a parallel shift, respectively, in early works). In their previous paper, the authors obtained a solution to the optimal immunization problem for the case when a stream of liabilities and the shape of and a shift in the yield curve are of arbitrary structure. In this paper, the results are first generalized to the case when the present values of the streams of assets and liabilities are not equalized. The optimization problem is formulated as an unbalanced optimal transport problem. The authors have developed an algorithm for constructing an optimal immunization portfolio which is practically feasible and has a straightforward financial interpretation. The solution is based on the proximity measure between payment streams, which is known by multiple terms (Earth Mover's Distance, the Wasserstein distance, the Monge-Kantorovich metric) and is widely used in modern machine learning. Additionally, the authors have established a set of relationships that relate the Wasserstein distance between payment streams to their Fischer-Weil durations.

**Key words:** asset-liability management; immunization; interest rate risk; Monge-Kantorovich metric; Wasserstein distance; EMD; unbalanced optimal transport.

**JEL Classification:** G1, G2, F3.

\* \*  
\*  
\*

## References

- Boczek M., Kałuszka M. (2018) On the Fong-Vašíček Type Inequalities for the Assets/Liabilities Portfolio Immunization Problem. *Collegium of Economic Analysis Annals*, 51, pp. 209–228.
- Cesari R., Mosco V. (2018) Optimal Management of Immunized Portfolios. *European Actuarial Journal*, 8, 2, pp. 461–485.
- Chizat L., Peyré G., Schmitzer B., Vialard F.X. (2018) Unbalanced Optimal Transport: Dynamic and Kantorovich Formulations. *Journal of Functional Analysis*, 274, 11, pp. 3090–3123.
- Fong G., Vasicek O. (1984) A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization. *Journal of Finance*, 39, 5, pp. 1541–1546.
- Gangbo W., Li W., Osher S., Puthawala M. (2019) Unnormalized Optimal Transport. *Journal of Computational Physics*, 399, 108940.
- Hull J. (2021) *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.
- Kondratiuk-Janyska A., Kałuszka M. (2006) Assets/Liabilities Portfolio Immunization as an Optimization Problem. *Control and Cybernetics*, 35, 2, pp. 335–349.
- Kondratiuk-Janyska A. et al. (2010) On Performance of Immunization Strategies in Setting of US Treasury Term Structure Data. *Forecasting Financial Markets and Economic Decision-Making (FindEcon) Conference Archive*. University of Lodz, 8, pp. 237–251.
- Kurochkin S.V., Rodina V.A. (2023) Optimal Solution for Immunizing Arbitrarily Scheduled Multiple Liabilities. *Economics and Mathematical Methods*. 59, 2, pp. 87–99. (In Russ.)
- Lapshin V. (2021) *Immunizing a Marked-to-Model Obligation with Marked-to-Market Financial Instruments*. HSE Working Papers. WP BRP 84/FE/2021.
- Luenberger D., Ye Y. (2008) *Linear and Nonlinear Programming*. Springer.
- Mantilla-Garcia D., Martellini L., Milhau V., Ramirez-Garriido H.E. (2022) Improving Interest Rate Risk Hedging Strategies through Regularization. *Financial Analysts Journal*, 78, 4, pp. 18–36.
- Nawalkha S.K., Chambers D.R. (1996) An Improved Immunization Strategy: M-Absolute. *Financial Analysts Journal*, 52, 5, pp. 69–76.
- Nawalkha S.K., Soto G.M. (2012) *Managing Interest Rate Risk: The Next Challenge?* Available at: SSRN 1392543.
- Nawalkha S.K., Soto G.M., Beliaeva N.A. (2005) *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course*. John Wiley & Sons, 178.
- De La Peña J.I., Iturricastillo I., Moreno R., Roman F., Trigo E. (2021) Towards an Immunization Perfect Model? *International Journal of Finance & Economics*, 26, 1, pp. 1181–1196.
- Redington F. (1952) Review of the Principles of Life-Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries*, 78, 3, pp. 286–340.
- Simões C., Oliveira L., Bravo J.M. (2021) Immunization Strategies for Funding Multiple Inflation-Linked Retirement Income Benefits. *Risks*, 9, 4, p. 60.
- Soto G.M., Prats M.A. (2003) *Portfolio Design and the Goal of Immunization*. Available at: SSRN 985403.
- Vallander S.S. (1973) The Computation of the Wasserstein Distance among Probability Distributions. *Theory of Probability and its Applications*, 18, 4, pp. 824–827. (In Russ.)
- Veronesi P. (2016) *Handbook of Fixed-Income Securities*. Wiley.