

М. К. Баринава, О. А. Кольчурина, Е. И. Яковлев

О 3-диффеоморфизмах с обобщенным аттрактором Плыкина

Известно, что нетривиальный аттрактор в неблуждающем множестве Ω -устойчивого 3-диффеоморфизма сосуществует с тривиальными базисными множествами тогда и только тогда, когда он либо одномерный неориентируемый, либо двумерный растягивающийся (ориентируемый или неориентируемый). Ранее были построены примеры соответствующих диффеоморфизмов, за исключением случая двумерного неориентируемого аттрактора. Настоящая работа восполняет этот пробел. Кроме того, здесь конструктивно доказывается существование энергетической функции у построенного диффеоморфизма, тем самым расширяется класс каскадов, обладающих глобальной функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством динамической системы.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: базисное множество, Ω -устойчивость, растягивающийся аттрактор, обобщенный аттрактор Плыкина, энергетическая функция.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm10048>

§ 1. Введение

В настоящей работе будут рассматриваться Ω -устойчивые¹ диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых n -мерных многообразиях. Для таких диффеоморфизмов имеет место теорема о спектральном разложении [1]: неблуждающее множество каждого Ω -устойчивого диффеоморфизма представляется в виде конечного дизъюнктного объединения подмножеств, называемых *базисными*, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным. Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют *тривиальным*, в противном случае – *нетривиальным*.

Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – Ω -устойчивый диффеоморфизм, заданный на многообразии M^n с метрикой d , и Λ – его базисное множество. У каждой точки x

Исследование за исключением § 5 выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00027, <https://rscf.ru/project/22-11-00027/>. Результаты § 5 получены в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

¹Диффеоморфизм, заданный на замкнутом n -мерном многообразии, называют Ω -устойчивым, если C^1 -близкие к нему диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах.

базисного множества Λ существуют так называемые *инвариантные многообразия*, устойчивое W_x^s и неустойчивое W_x^u , определенные следующим образом:

$$W_x^s = \left\{ y \in M^n \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\},$$

$$W_x^u = \left\{ y \in M^n \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \right\}.$$

Согласно обобщенной теореме об устойчивом многообразии [1] инвариантные многообразия W_x^s, W_x^u являются образами евклидовых пространств $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}$ для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ в силу инъективных иммерсий² $J_x^k: \mathbb{R}^k \rightarrow M^n$, $J_x^u: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M^n$ соответственно. Следовательно, множества $W_{x,r}^s = J_x^s(D_r^k)$, $W_{x,r}^u = J_x^u(D_r^{n-k})$ являются гладко вложенными дисками для $D_r^k = \{x \in \mathbb{R}^k: \|x\| \leq r\}$, $D_r^{n-k} = \{x \in \mathbb{R}^{n-k}: \|x\| \leq r\}$ при любом $r > 0$.

Если хотя бы один из дисков $W_{x,r}^s$ и $W_{x,r}^u$ является одномерным, т.е. k равно 1 или $n - 1$, то это позволяет ввести понятие индекса пересечения подмногообразий. Для простоты будем считать, что одномерным является диск $W_{x,r}^s$. Пусть U – трубчатая окрестность диска $W_{x,r}^u$, являющаяся образом вложения в M^n пространства одномерного векторного расслоения на $W_{x,r}^u$ [2; гл. 4, § 5]. Поскольку шар D_r^{n-1} стягиваемый, то это расслоение тривиально и, следовательно, $U \setminus W_{x,r}^u$ состоит из двух компонент связности, U_+ и U_- . Это позволяет определить функцию $\nu: U_+ \cup U_- \rightarrow \mathbb{Z}$ такую, что $\nu(x) = 1$, если $x \in U_+$, и $\nu(x) = 0$, если $x \in U_-$. Если подмногообразия $W_{x,r}^s$ и $W_{x,r}^u$ трансверсально пересекаются в точке $y = J_x^s(t)$, $t \in D_r^1$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $J_x^s(t - 2\delta, t + 2\delta) \subset U$.

Число

$$\text{Ind}_y(W_{x,r}^s, W_{x,r}^u) = \nu(t + \delta) - \nu(t - \delta)$$

называется *индексом пересечения* подмногообразий $W_{x,r}^s$ и $W_{x,r}^u$ в точке y . Заметим, что множество значений индекса пересечения есть $\{1, -1\}$. Базисное множество называется *ориентируемым*, если одно из его инвариантных многообразий является одномерным и индекс пересечения подмногообразий $W_{x,r}^s$ и $W_{x,r}^u$ одинаковый во всех точках для любого $r > 0$. В противном случае базисное множество называется *неориентируемым*. Заметим, что понятие ориентируемости базисного множества, введенное данным способом, может быть использовано как для диффеоморфизмов, заданных на ориентируемых многообразиях, так и на неориентируемых.

Компактное инвариантное множество \mathcal{A} называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если у него существует компактная окрестность $U_{\mathcal{A}}$ такая, что $f(U_{\mathcal{A}}) \subset \text{Int } U_{\mathcal{A}}$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}$. Если аттрактор является базисным множеством и его топологическая размерность равна размерности неустойчивых многообразий его точек, то аттрактор называется *растягивающимся*.

²Под *иммерсией* здесь понимается дифференцируемое отображение, дифференциал которого в каждой точке является невырожденным.

Важным примером двумерного диффеоморфизма с растягивающимся аттрактором является так называемый DA-диффеоморфизм (Derived from Anosov), впервые построенный С. Смейлом в работе [1]. Он получается из диффеоморфизма Аносова³ на двумерном торе с помощью “хирургической операции” Смейла⁴, проведенной в окрестности неподвижной точки. Неблуждающее множество DA-диффеоморфизма состоит из одномерного ориентируемого растягивающегося аттрактора и неподвижного источника. При проведении операции Смейла в окрестностях нескольких периодических орбит можно получать обобщенные DA-диффеоморфизмы с единственным нетривиальным аттрактором и периодическими источниками. Аналогичную операцию можно проводить для диффеоморфизмов Аносова на n -мерном торе, если устойчивое многообразие точек тора является одномерным. Такие диффеоморфизмы также называют DA-диффеоморфизмами, если полученный источник единственный, и обобщенными DA-диффеоморфизмами, если источников несколько.

В 1974 г. Р. В. Плыкин [3] привел геометрическое построение структурно устойчивого диффеоморфизма двумерной сферы с одномерным неориентируемым аттрактором и четырьмя неподвижными источниками. Впоследствии было показано (см., например, [4; п. 17.2]), что такой диффеоморфизм может быть получен из обобщенного DA-диффеоморфизма с четырьмя источниками (один из них неподвижный, а остальные – периода 3) путем факторизации тора в силу инволюции. Аттрактор, полученный с помощью аналогичной конструкции на n -мерном торе, назовем обобщенным аттрактором Плыкина. По построению такой аттрактор является неориентируемым растягивающимся аттрактором размерности $n - 1$. Заметим, что из результатов работы [5] следует, что любое 3-многообразие, допускающее Ω -устойчивый диффеоморфизм с обобщенным аттрактором Плыкина, является неориентируемым, а сам диффеоморфизм не является структурно устойчивым. Там же был построен диффеоморфизм с таким аттрактором и дуальным к нему нетривиальным репеллером в качестве неблуждающего множества.

Из недавно полученных результатов [6] М. К. Бариновой, О. В. Починки и Е. И. Яковлева известно, что если все нетривиальные базисные множества Ω -устойчивого 3-диффеоморфизма являются аттракторами, то они могут быть одного из трех типов: либо неориентируемый одномерный аттрактор, либо ориентируемый двумерный растягивающийся аттрактор, либо неориентируемый двумерный растягивающийся аттрактор.

Примером такого диффеоморфизма с ориентируемым двумерным растягивающимся аттрактором является DA-диффеоморфизм, заданный на трехмерном торе. Примером диффеоморфизма с неориентируемым одномерным аттрактором служит каскад 3-сферы, полученный компактификацией декартова произведения диффеоморфизма Плыкина на 2-сфере и гиперболического сжатия на прямой (рис. 1).

³Диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом многообразии, называется *диффеоморфизмом Аносова*, если все несущее многообразие является гиперболическим множеством.

⁴Подробное описание “хирургической операции” Смейла приводится в § 2.

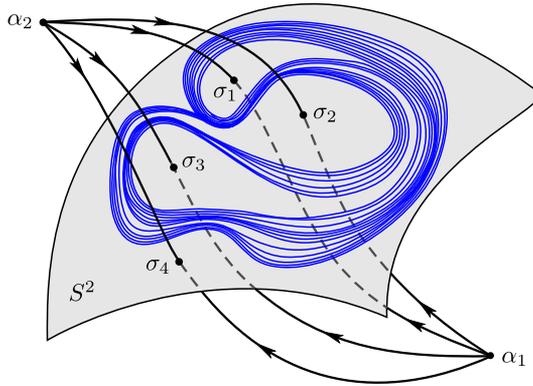


Рис. 1. Диффеоморфизм на 3-сфере с одномерным аттрактором Плыкина и шестью изолированными периодическими точками.

В упомянутой работе [6] не было найдено препятствий тому, чтобы обобщенный аттрактор Плыкина в неблуждающем множестве Ω -устойчивого 3-диффеоморфизма сосуществовал с тривиальными базисными множествами, но примеры таких диффеоморфизмов до сих пор не были известны. В двумерном случае для получения каскада на замкнутом многообразии с единственным нетривиальным базисным множеством – аттрактором Плыкина – достаточно добавить четыре неподвижных гиперболических источника. Аналогичным образом построить систему в трехмерном случае невозможно в силу структуры бассейна обобщенного аттрактора Плыкина.

Основным результатом работы является конструктивное доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Существует Ω -устойчивый 3-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из обобщенного аттрактора Плыкина и 12 изолированных периодических точек⁵.*

В качестве доказательства в § 2 и § 3 приводится построение таких диффеоморфизмов. Обозначим через \mathcal{P} класс построенных диффеоморфизмов. Их несущие многообразия получаются с помощью “приклеивания” четырех цилиндров над вещественной проективной плоскостью к границам захватывающей окрестности нетривиального аттрактора. В § 4 вычисляются группы гомологий несущих многообразий построенных примеров. Оказывается, таким способом можно получить диффеоморфизмы, не являющиеся топологически сопряженными, так как фундаментальная группа несущего многообразия существенно зависит от способа “приклеивания” цилиндров.

⁵В работе [7] было показано, что невозможно получить менее 12 изолированных периодических точек.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм из класса \mathcal{P} . Тогда группы гомологий многообразия M^3 имеют следующий вид:

$$H_3(M^3) = 0, \quad H_2(M^3) \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2, \quad H_1(M^3) \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^m, \quad (1.1)$$

где $m \in \{1, 2, 3\}$, причем каждое из указанных значений m реализуется.

Еще одним результатом работы является доказательство существования энергетической функции у диффеоморфизмов из класса \mathcal{P} .

Напомним, что непрерывная функция $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для Ω -устойчивого диффеоморфизма f , если $\varphi(x) > \varphi(f(x))$, когда x – блуждающая точка, и $\varphi(x) = \varphi(y)$, когда x и y принадлежат одному и тому же базисному множеству. Если функция Ляпунова гладкая и множество ее критических точек совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма, то ее называют *энергетической*.

В отличие от потоков, каскады не всегда обладают энергетической функцией (см., например, обзор [8]). Первый пример такого каскада был построен Д. Пикстоном в 1977 г. на трехмерной сфере [9] и представляет собой диффеоморфизм Морса–Смейла⁶ с четырьмя неподвижными точками. В той же работе Пикстон доказал существование энергетической функции Морса для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на поверхностях. В работах [10]–[13] В.З. Гринеса, О.В. Починки и М.К. Бариновой были выделены несколько классов 2- и 3-диффеоморфизмов, обладающих энергетическими функциями. В 2022 г. был найден класс динамических систем на поверхностях, у которых нет энергетических функций [14].

В настоящей работе приводится конструктивное доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Диффеоморфизмы из класса \mathcal{P} обладают энергетическими функциями.

§ 2. Обобщенный DA-диффеоморфизм

В данном параграфе приводится конструкция 3-диффеоморфизма, полученного с помощью “хирургической операции” Смейла из диффеоморфизма Аносова, и доказывается, что полученный диффеоморфизм является Ω -устойчивым и его неблуждающее множество состоит из двумерного ориентируемого растягивающегося аттрактора и восьми неподвижных источников. Данная конструкция аналогична двумерному случаю, описанному в книге А.Б. Катка и Б. Хассельблата (см. [4; шп. 1.8, 17.2]).

2.1. Построение. Пусть $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ – трехмерный тор и $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ – естественная проекция. Начнем с гиперболического автоморфизма $\widehat{L}_A: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, индуцированного линейным отображением L_A на \mathbb{R}^3 с гиперболической

⁶ Диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$, заданный на замкнутом n -многообразии M^n , называют *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если он является структурно устойчивым и его неблуждающее множество конечно.

матрицей $A \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$, у которой собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Например, зададим отображение L_A таким образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widehat{L}_A = pL_A p^{-1}: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ – диффеоморфизм Аносова. Одномерные устойчивые и двумерные неустойчивые многообразия точек тора образуют два трансверсальных инвариантных слоения, каждый слой которых всюду плотен на торе. Каждая точка, все координаты которой рациональны, является периодической для \widehat{L}_A , таким образом, множество периодических точек также всюду плотно на \mathbb{T}^3 .

Определим действие группы $\Gamma = \{1, -1\}$ на трехмерном торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, полагая $\gamma \cdot ((x, y, z) + \mathbb{Z}^3) = \gamma(x, y, z) + \mathbb{Z}^3$ для всех $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и $\gamma \in \Gamma$. Тогда элементу $\gamma = 1$ соответствует тождественное отображение, а элементу $\gamma = -1$ – инволюция J , которая имеет восемь неподвижных точек:

$$v_i = p(\bar{v}_i), \quad i = 1, \dots, 8,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= (0, 0, 0), & \bar{v}_2 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), & \bar{v}_3 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), & \bar{v}_4 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \bar{v}_5 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), & \bar{v}_6 &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), & \bar{v}_7 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), & \bar{v}_8 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Так как эти точки периодические для \widehat{L}_A , то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что эти точки являются неподвижными для \widehat{L}_A^k . Для отображения \widehat{L}_A , заданного выше, $k = 3$, а матрица A^k имеет вид

$$A^k = \begin{pmatrix} 115 & 146 & 84 \\ 62 & 83 & 46 \\ 106 & 132 & 77 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A^k – это

$$\lambda^s = (\lambda_1)^k \approx 0.001 < 1, \quad \lambda_1^u = (\lambda_2)^k \approx 2.802 > 1, \quad \lambda_2^u = (\lambda_3)^k \approx 272.197 > 1.$$

Соответствующие им собственные векторы

$$\mathbf{e}^s \approx \begin{pmatrix} -0.456 \\ -0.146 \\ 0.878 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1^u \approx \begin{pmatrix} 0.278 \\ -0.631 \\ 0.725 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^u \approx \begin{pmatrix} 0.684 \\ 0.376 \\ 0.626 \end{pmatrix}$$

определяют два инвариантных слоения на торе: W^s – одномерное устойчивое и W^u – двумерное неустойчивое.

Выберем столь малое $r > 0$, что $\lambda_2^u r$ -шары с центрами в точках \bar{v}_i , $i = 1, \dots, 8$, не пересекаются. Положим $r_1 = \frac{\lambda^s}{16} r$, $r_2 = \frac{r}{2}$, $t = \sqrt{y^2 + z^2}$ и выберем $\varepsilon \ll r_1$.

ЛЕММА 1. Существует диффеоморфизм $\Delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$\Delta(x, y, z) = (\delta(x, y, z), y, z)$$

со следующими свойствами:

- если $|x| \geq r_2 + \varepsilon$ или $t \geq r_2$, то Δ – тождественное отображение;
- если $|x| \leq r_1 - \varepsilon$ и $t \leq r_2/2$, то $\Delta(x, y, z) = (2x/\lambda^s, y, z)$;
- диффеоморфизм Δ коммутирует с инволюцией $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$, т.е. $\Delta(-x, -y, -z) = -\Delta(x, y, z)$;
- верны оценки на частные производные функции δ

$$\delta'_x > 0, \quad |\delta'_y| \leq 2(2 - \lambda^s), \quad |\delta'_z| \leq 2(2 - \lambda^s),$$

более того, $\delta'_x \leq 1$ при $|x| \geq r_1 + \varepsilon$ или $t \geq r_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим гладкую нечетную функцию $\delta_0(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полученную из некоторой кусочно линейной функции сглаживанием с помощью дуг окружностей⁷. При $x \geq 0$ функция $\delta_0(x)$ изображена на рис. 2 и определяется формулой

$$\delta_0(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda^s}, & \text{если } 0 \leq x < r_1 - \varepsilon_1, \\ \sqrt{\rho_1^2 - (x - x_{O_1})^2} + y_{O_1}, & \text{если } r_1 - \varepsilon_1 \leq x < r_1 + \varepsilon, \\ \frac{2}{4 - \lambda^s}x + \frac{2 - \lambda^s}{4 - \lambda^s}r_2, & \text{если } r_1 + \varepsilon \leq x \leq r_2 - \varepsilon, \\ -\sqrt{\rho_2^2 - (x - x_{O_2})^2} + y_{O_2}, & \text{если } r_2 - \varepsilon < x \leq r_2 + \varepsilon_2, \\ x, & \text{если } x > r_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где $(r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon)$, $(r_2 - \varepsilon, r_2 + \varepsilon_2)$ – промежутки сглаживания, причем $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon$, (x_{O_1}, y_{O_1}) , (x_{O_2}, y_{O_2}) – координаты центров сглаживающих окружностей, а ρ_1 и ρ_2 – их радиусы.

Рассмотрим сигмид-функцию $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, определенную следующим образом (рис. 3):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > r_2, \\ \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(3r_2 - 4t)r_2^3}{8(t - r_2)^2(2t - r_2)^2}\right)}, & \text{если } \frac{r_2}{2} \leq t \leq r_2, \\ 0, & \text{если } t < \frac{r_2}{2}. \end{cases}$$

Функция $\sigma(t)$ монотонная, бесконечно гладкая и все ее производные равны нулю при $t \leq r_2/2$ и $t \geq r_2$.

Введем однопараметрическое семейство функций $\delta_t(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при $x \geq 0$:

$$\delta_t(x) = \delta_0(x)(1 - \sigma(t)) + x\sigma(t).$$

⁷Заметим, что функцию δ_0 можно сделать сколь угодно гладкой, мы используем сглаживание с помощью дуг окружностей для наглядности.

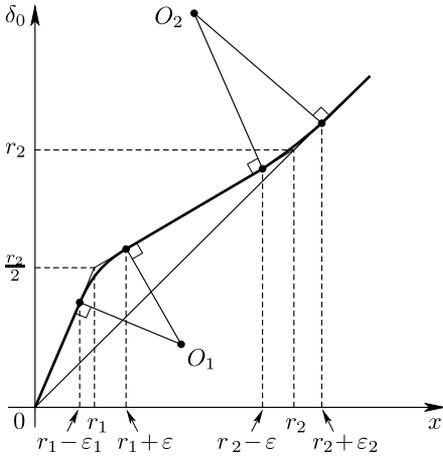


Рис. 2. Построение функции $\delta_0(x)$ при $x \geq 0$.

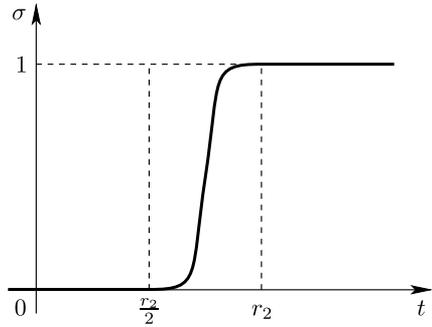


Рис. 3. График функции $\sigma(t)$.

Продолжим функцию $\delta_t(x)$ на отрицательные значения x так, чтобы полученная функция была нечетной, т.е. $\delta_t(x) = -\delta_t(-x)$ при $x < 0$. Графики функций $\delta_t(x)$ при различных значениях t изображены на рис. 4. Тогда $\delta(x, y, z) = \delta_{\sqrt{y^2+z^2}}(x)$ – искомая функция.

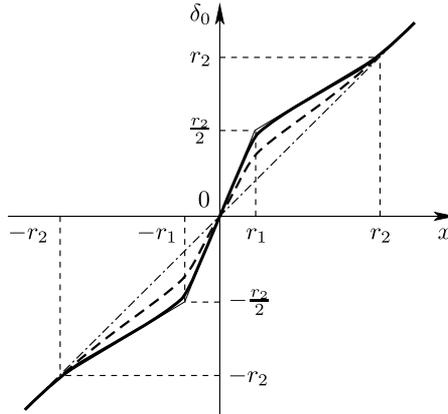


Рис. 4. График функции δ_t при различных значениях параметра t : сплошная линия – для $t \leq r_2/2$, штриховая – для $r_2/2 < t < r_2$, штрихпунктирная – для $t \geq r_2$.

Функция $\delta(x, y, z)$ – это C^1 -гладкая функция на всей области определения, так как функция $\delta_0(x)$ C^1 -гладкая, а $\sigma(t)$ C^∞ -гладкая. Покажем, что полученный диффеоморфизм $\Delta = (\delta(x, y, z), y, z)$ удовлетворяет всем свойствам из леммы. Действительно,

- если $|x| \geq r_2 + \varepsilon$ или $t = \sqrt{y^2 + z^2} \geq r_2$, то $\delta_t(x) = x$, а значит, при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > r$ отображение Δ является тождественным;

- при $|x| \leq r_1 - \varepsilon$ и $t \leq r_2/2$ имеем $\delta_t(x) = 2x/\lambda^s$, т.е. $\Delta(x, y, z) = (2x/\lambda^s, y, z)$;
- равенство $\Delta(-x, -y, -z) = -\Delta(x, y, z)$ непосредственно следует из того, что $\delta_{\sqrt{(-y)^2 + (-z)^2}}(-x) = -\delta_{\sqrt{y^2 + z^2}}(x)$;
- частные производные функции $\delta(x, y, z)$ – это

$$\begin{aligned} \delta'_x &= \delta'_0(x)(1 - \sigma(t)) + \sigma(t), \\ \delta'_y &= (x - \delta_0(x))\sigma'_t \frac{y}{t}, \quad \delta'_z = (x - \delta_0(x))\sigma'_t \frac{z}{t}. \end{aligned}$$

Так как $\delta'_0(x) > 0$ и $0 \leq \sigma \leq 1$, то $\delta'_x > 0$.

Заметим, что нечетная функция $(\delta_0(x) - x)$ является неотрицательной при $x > 0$ и достигает своего максимума на интервале $(r_1 - \varepsilon, r_1 + \varepsilon)$. Для оценки частных производных по y и z рассмотрим цепочки неравенств, учитывая, что $r_1 = \frac{\lambda^s}{8}r_2$, $r_1 + \varepsilon < 2r_1$ и $\delta_0 \leq 2x/\lambda^s$ при $x > 0$:

$$\begin{aligned} |x - \delta_0(x)| &\leq \frac{2}{\lambda^s}2r_1 - 2r_1 = \frac{r_2}{4}(2 - \lambda^s), \\ 0 \leq (\sigma \circ \beta)'_t &\leq \frac{2\sigma'(r_2/2)}{r_2} = \frac{8}{r_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|\delta_y| \leq 2(2 - \lambda^s), \quad |\delta_z| \leq 2(2 - \lambda^s). \quad (2.1)$$

Если $|x| \geq r_1 + \varepsilon$, то производная δ'_0 неубывающая, причем $\delta'_0(x) \leq 1$. Множество значений функции $\sigma(t)$ – отрезок $[0, 1]$. Тогда $\delta'_x \leq 1$, если $|x| \geq r_1 + \varepsilon$ или $t \geq r_2$.

Лемма 1 доказана.

Пусть $\bar{D}_i \subset \mathbb{R}^3$ – шаровая окрестность радиуса r точки \bar{v}_i и $D_i = p(\bar{D}_i)$. Перейдем в окрестности \bar{D}_i каждой точки \bar{v}_i к новым ортонормированным координатам таким образом, чтобы ось абсцисс соответствовала вектору \mathbf{e}^s , а оси ординат и аппликат – векторам \mathbf{e}_1^u и \mathbf{e}_2^u . Тогда $T = (\mathbf{e}^s \quad \mathbf{e}_1^u \quad \mathbf{e}_2^u)$ – матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}^s, \mathbf{e}_1^u, \mathbf{e}_2^u\}$ к

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и T^{-1} – матрица перехода от

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

к $\{\mathbf{e}^s, \mathbf{e}_1^u, \mathbf{e}_2^u\}$. Обозначим линейные отображения, соответствующие матрицам T и T^{-1} , через L_T и $L_{T^{-1}}$. Тогда в окрестности D_i каждой точки v_i , $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, отображение перехода $\psi_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ будет иметь вид⁸

$$\forall a \in D_i \subset \mathbb{T}^3 \quad \psi_i = L_{T^{-1}}((p|_{\bar{D}_i})^{-1}(a) - \bar{v}_i).$$

⁸В дальнейшем нам понадобится отображение, обратное к ψ , но имеющее область определения шире, чем $\psi(D_i)$. Будем считать, что $\psi^{-1}(x, y, z) = p(L_T(x, y, z) + \bar{v}_i)$ для всех $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Определим диффеоморфизм $f_{\text{DA}}: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$f_{\text{DA}}(a) = \begin{cases} \widehat{L}_A^k(a), & \text{если } a \notin D_i, \\ \widehat{L}_A^k \circ \psi_i^{-1} \circ \Delta \circ \psi_i(a), & \text{если } a \in D_i. \end{cases}$$

При данном построении диффеоморфизм f_{DA} коммутирует с инволюцией J , в неподвижных точках инволюции находятся неподвижные гиперболические источники, а одномерное слоение W^s исходного диффеоморфизма Аносова остается инвариантным относительно f_{DA} .

2.2. Ω -устойчивость.

ТЕОРЕМА 4. *Диффеоморфизм f_{DA} является Ω -устойчивым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [15; теоремы 4.1, 5.7, 9.1] следует, что если цепно-рекуррентное множество $\text{CR}(f_{\text{DA}})$ диффеоморфизма f_{DA} гиперболично, то он является Ω -устойчивым.

Обозначим через \mathcal{A} множество $\text{CR}(f_{\text{DA}}) \setminus \bigcup_{i=1}^8 \{v_i\}$. В первую очередь докажем лемму о расположении множества \mathcal{A} . Пусть K_i – такие подмножества D_i , что их образы \overline{K}_i в локальных картах (D_i, ψ_i) имеют вид цилиндров

$$\overline{K}_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_1 + \varepsilon, y^2 + z^2 < r_2^2\}.$$

ЛЕММА 2. *Область K_i является подмножеством бассейна $W_{v_i}^u$ источника v_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{A}_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_1 - \varepsilon, y^2 + z^2 < (r_2/2)^2\}$, отображение f_{DA} в области $A_i = \psi^{-1}(\overline{A}_i)$ в выбранных локальных картах имеет вид $(2x, \lambda_1^u y, \lambda_2^u z)$, а значит, A_i является подмножеством бассейна источника v_i . Образ A_i в данных картах имеет вид

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 2r_1 - 2\varepsilon, \left(\frac{y}{\lambda_1^u}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_2^u}\right)^2 < \left(\frac{r_2}{2}\right)^2 \right\},$$

так как $\lambda_2^u > \lambda_1^u > 2$. В силу малости ε имеем $K_i \subset f(A_i)$, а значит, $K_i \subset W_{v_i}^u$.

Таким образом, множество \mathcal{A} лежит вне областей K_i , $i = 1, \dots, 8$. Докажем, что \mathcal{A} – гиперболическое множество, т.е. существует непрерывное разложение касательного подрасслоения $T_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^3)$ в прямую сумму $E_{\mathcal{A}}^s \oplus E_{\mathcal{A}}^u = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} E_x^s \oplus E_x^u$, инвариантную относительно дифференциала Df_{DA} , и существуют константы $c > 0$ и $\mu \in (0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} \|Df_{\text{DA}}^n(\mathbf{v})\| &\leq c\mu^n \|\mathbf{v}\|, & \mathbf{v} \in E_{\mathcal{A}}^s, \\ \|Df_{\text{DA}}^{-n}(\mathbf{v})\| &\leq c\mu^n \|\mathbf{v}\|, & \mathbf{v} \in E_{\mathcal{A}}^u. \end{aligned}$$

Найдем дифференциал Df_{DA} отображения f_{DA} . При выборе локальных карт таким образом, что собственные векторы матрицы A являются направляющими осями аналогично локальным картам (D_i, ψ_i) , дифференциал

будет иметь вид

$$Df_{\text{DA}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^s \delta'_x & \delta'_y & \delta'_z \\ 0 & \lambda_1^u & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

при этом $\delta'_x = 1$, $\delta'_y = \delta'_z = 0$, если точка находится вне областей D_i .

Так как при описанной “хирургической операции” сохраняется слоение W^s , то в качестве Df_{DA} -инвариантного слагаемого E_x^s , $x \in \mathcal{A}$, выберем линейную оболочку вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{\mathcal{A}}^s$, тогда

$$\|Df_{\text{DA}}(\mathbf{v})\| = |\lambda^s \delta_x x| \leq \lambda^s \|\mathbf{v}\|,$$

а значит, выполняются требуемые условия на $E_{\mathcal{A}}^s$.

Для доказательства существования двумерного подпространства $E_{\mathcal{A}}^u$ применим критерий конусов [4; следствие 6.4.8]. Покажем, что для семейства конусов H вида $y^2 + z^2 \geq \gamma^2 x^2$ существует число $\mu > 1$ такое, что

$$Df_{\text{DA}}(H) \subset \text{Int } H, \quad \|Df_{\text{DA}}(\mathbf{v})\| \geq \mu \|\mathbf{v}\|, \quad \mathbf{v} \in H.$$

Проверим выполнение первого условия. Пусть

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = Df_{\text{DA}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Покажем, что если $t \geq \gamma|x|$, $\gamma > 0$, то $\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} = \bar{t} \geq \gamma|\bar{x}|$. Оценим отдельно правую и левую части, учитывая оценки из леммы 1 и что в проверке нуждаются только $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \gamma|\bar{x}| &= \gamma|\lambda^s \delta_x x + \delta_y y + \delta_z z| \leq \gamma \lambda^s \delta_x |x| + \gamma(|\delta_y y| + |\delta_z z|) \\ &\leq \lambda^s t + 2(2 - \lambda^s) \gamma t \left(\frac{|y|}{t} + \frac{|z|}{t} \right) \leq (\lambda^s + 2(2 - \lambda^s) \gamma) t, \\ \bar{t} &= \sqrt{(\lambda_1^u y)^2 + (\lambda_2^u z)^2} \geq \lambda_1^u t. \end{aligned}$$

Неравенство $(\lambda^s + 2(2 - \lambda^s) \gamma) t \leq \lambda_1^u t$ выполняется, если

$$\gamma \leq \frac{\lambda_1^u - \lambda^s}{2(2 - \lambda^s)} \approx 0.7.$$

Проверим, что существует $\mu > 1$ такое, что $\|Df_{\text{DA}}(v)\| \geq \mu \|\mathbf{v}\|$, если $\mathbf{v} \in H$, т.е. $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \geq \mu(x^2 + y^2 + z^2)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 &\geq \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = (\lambda_1^u y)^2 + (\lambda_2^u z)^2 \geq (\lambda_1^u)^2 t^2, \\ \mu(x^2 + y^2 + z^2) &\leq \left(\frac{\mu}{\gamma^2} \right) t^2 + \mu t^2 = \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \mu t^2. \end{aligned}$$

Пусть $(1 + 1/\gamma^2)\mu t^2 \leq (\lambda_1^u)^2 t^2$, т.е.

$$\mu \leq \frac{(\lambda_1^u)^2}{1 + 1/\gamma^2}.$$

Тогда для существования $\mu > 1$ достаточно, что $(\lambda_1^u)^2 > 1 + 1/\gamma^2$, т.е.

$$\gamma > \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1^u)^2 - 1}} \approx 0.382.$$

Таким образом, что для семейства конусов $y^2 + z^2 \geq (0.5x)^2$ и $\mu = 1.5$ выполняются все необходимые условия из критерия конусов, что вместе с выкладками для $E_{\mathcal{A}}^s$ доказывает гиперболичность множества \mathcal{A} , а значит, и Ω -устойчивость диффеоморфизма f_{DA} .

Лемма 2 доказана.

Неблуждающее множество Ω -устойчивого диффеоморфизма совпадает с его цепно-рекуррентным множеством [15; теорема 4.1], поэтому

$$\mathcal{A} = \text{NW}(f_{DA}) \setminus \bigcup_{i=1}^8 \{v_i\}.$$

2.3. Существование и единственность двумерного растягивающегося аттрактора. Диффеоморфизм f_{DA} является Ω -устойчивым и $\text{NW}(f_{DA}) = \mathcal{A} \cup \bigcup_{i=1}^8 \{v_i\}$. Тогда \mathcal{A} является объединением конечного ненулевого числа базисных множеств. В данном пункте будут найдены седловые точки, двумерные неустойчивые многообразия которых состоят из неблуждающих точек и плотны в множестве \mathcal{A} . Это позволяет доказать, что \mathcal{A} содержит двумерный растягивающийся аттрактор и других базисных множеств в \mathcal{A} нет.

ЛЕММА 3. *Каждая из областей D_i , $i = 1, \dots, 8$, содержит две неподвижные седловые точки, β_i^+ и β_i^- .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диффеоморфизм f_{DA} в локальных картах (D_i, ψ_i) имеет вид

$$(x, y, z) \mapsto (\lambda^s \delta(x, y, z), \lambda_1^u y, \lambda_2^u z),$$

а значит, неподвижные точки могут находиться на оси Ox . Рассмотрим ограничение $f_x = \lambda^s \delta_0(x)$ диффеоморфизма f_{DA} на ось Ox и найдем его неподвижные точки из уравнения $\lambda^s \delta_0(x) = x$ (рис. 5). В силу малости ε для $x > 0$ решение принадлежит интервалу $(r_1 - \varepsilon; r_1 + \varepsilon)$, поэтому достаточно решить уравнение

$$\lambda^s \left(\frac{2}{4 - \lambda^s} x + \frac{2 - \lambda^s}{4 - \lambda^s} r_2 \right) = x.$$

Получим

$$x^* = \frac{4 - 3\lambda^s}{\lambda^s(2 - \lambda^s)}.$$

Тогда точки $\beta_i^+ = \phi_i^{-1}(x^*, 0, 0)$ и $\beta_i^- = \phi_i^{-1}(-x^*, 0, 0)$ являются неподвижными, а значит, принадлежат множеству \mathcal{A} . Из гиперболической структуры множества \mathcal{A} и размерностей подпространств E_x^s и E_x^u , $x \in \mathcal{A}$, следует, что β_i^+ и β_i^- – гиперболические седла с одномерными устойчивыми сепаратрисами и двумерными неустойчивыми.

Лемма доказана.

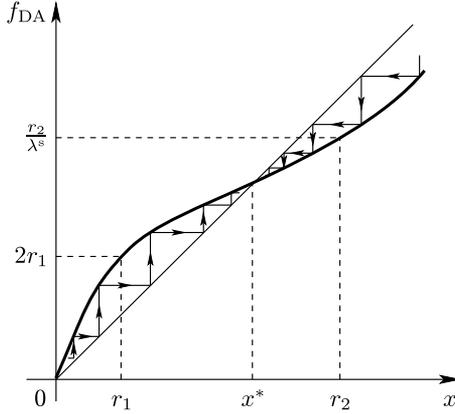


Рис. 5. Диаграмма Ламерея для ограничения диффеоморфизма f_{DA} на ось Ox в выбранных локальных картах.

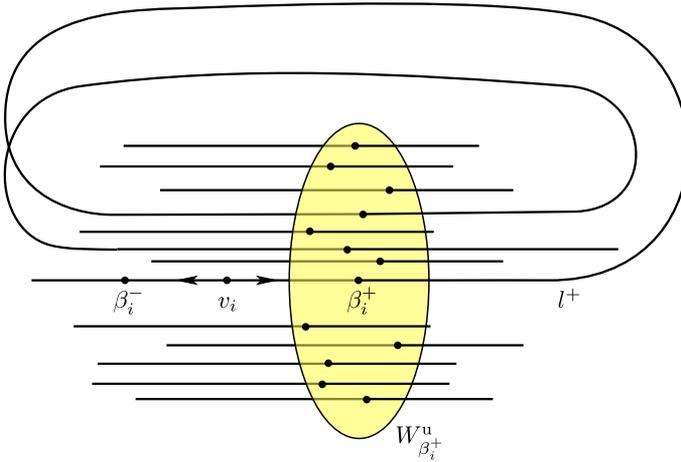
ЛЕММА 4. *Неустойчивые многообразия седел β_i^+ и β_i^- , $i = 1, \dots, 8$, состоят из неблуждающих точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диффеоморфизм f_{DA} имеет одномерное инвариантное слоение W^s , совпадающее с таковым для исходного диффеоморфизма Аносова \widehat{L}_A . Каждый слой l^s слоения W^s плотен на торе, более того, если $w \in l^s$, то плотна на торе каждая из компонент связности множества $l^s \setminus \{w\}$. Рассмотрим одномерный слой l^s , проходящий через точку β_i^+ . Поднятие слоя l^s на \mathbb{R}^3 , проходящее через точку \bar{v}_i , не содержит других точек, все координаты которых рациональны. Тогда та компонента связности l^+ множества $l^s \setminus \{\beta_i^+\}$, которая не содержит неподвижный источник, не проходит ни через один из источников v_j , $j \neq i$, а значит, совпадает с сепаратрисой точки β_i^+ .

Из построения диффеоморфизма f_{DA} следует, что диск

$$\bar{D}^u = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x^*, y^2 + z^2 < \left(\frac{r_2}{2}\right)^2 \right\}$$

является подмножеством образа $\psi_i(W_{\beta_i^+}^u)$ неустойчивой сепаратрисы седла β_i^+ . Так как сепаратриса l^+ плотна на торе и в выбранных локальных картах образ множества $l^+ \cap D_i$ является объединением интервалов, параллельных оси Ox , плотных в множестве \bar{D}_i , то гомоклинические точки плотны в множестве $\psi_i^{-1}(\bar{D}^u)$, а значит, и в множестве $W_{\beta_i^+}^u$ (рис. 6). Тогда неблуждаемость

Рис. 6. Пересечения сепаратрис седла β_-^+ .

точек неустойчивой сепаратрисы седла β_i^+ , очевидно, следует из неблуждаемости гомоклинических точек. Доказательство для неустойчивых сепаратрис точек β_i^- аналогично.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Неблуждающее множество диффеоморфизма f_{DA} содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ_{DA} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что двумерные неустойчивые многообразия неподвижных седел содержатся в множестве \mathcal{A} . В силу теоремы о спектральном разложении (см. [1]) существует базисное множество Λ_{DA} типа⁹ $(2, 1)$, содержащее двумерное неустойчивое многообразие седла. Тогда топологическая размерность множества Λ_{DA} не меньше 2. Предположим, что $\dim \Lambda_{DA} = 3$, но тогда в силу [16; лемма 8.1] Λ_{DA} совпадает с несущим многообразием \mathbb{T}^3 , а это неверно, так как неблуждающее множество диффеоморфизма f_{DA} содержит источники. Тогда размерность базисного множества Λ_{DA} равна 2, а значит, оно является аттрактором (см. [17; теорема 3]), причем двумерным растягивающимся.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Множество \mathcal{A} совпадает с аттрактором Λ_{DA} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу компактности базисных множеств достаточно показать, что неустойчивое многообразие седла β_1^+ плотно в множестве \mathcal{A} . Пусть $a \in \mathcal{A}$ и U_a – ее произвольная окрестность. Так как периодические точки

⁹Типом базисного множества Λ называют пару чисел $(\dim W_x^u, \dim W_x^s)$, $x \in \Lambda$.

плотны в неблуждающем множестве Ω -устойчивых диффеоморфизмов, то найдется точка $p \in U_a$ – периодическая с периодом m_p . Хотя бы одна из ее одномерных сепаратрис плотна на торе – обозначим ее через l_p^s – и пересекает неустойчивое многообразие седла β_1^+ . Обозначим произвольную точку их пересечения через q . Так как устойчивая сепаратриса l_p^s является f^{m_p} -инвариантной, то

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(q), p) = 0.$$

Но точка q одновременно принадлежит инвариантному многообразию неподвижного седла β_1^+ , а значит, найдется номер k такой, что $W_{\beta_1^+}^u \cap U_a \neq \emptyset$. Таким образом, \mathcal{A} не содержит других базисных множеств, кроме $\Lambda_{\text{ДА}}$.

Теорема доказана.

Суммируя результаты, доказанные в теоремах 4–6, получаем, что $f_{\text{ДА}}$ является Ω -устойчивым диффеоморфизмом и его неблуждающее множество состоит из восьми неподвижных гиперболических источников и двумерного растягивающегося аттрактора, т.е. является обобщенным ДА-диффеоморфизмом. Заметим, что так как аттрактор $\Lambda_{\text{ДА}}$ является дополнением бассейнов источников, гомеоморфных 3-шарам, до трехмерного тора, то он связан. Одна из сепаратрис каждого из седел β_i^+ и β_i^- , $i = 1, \dots, 8$, полностью лежит в бассейне соответствующего источника, а значит, эти седла являются граничными периодическими точками растягивающегося аттрактора $\Lambda_{\text{ДА}}$ и их неустойчивые многообразия объединяются в 2-связки. Таким образом, полученный аттрактор ориентируемый.

§ 3. Построение 3-диффеоморфизма с обобщенным аттрактором Плыкина

В этом параграфе приводится конструкция 3-диффеоморфизма с обобщенным аттрактором Плыкина и 12 неподвижными точками, т.е. доказывается теорема 1.

Рассмотрим факторпространство $M_s = \mathbb{T}^3/\Gamma = \mathbb{T}^3/J$. Оно представляет собой трехмерный орбиформ с восемью особыми (орбиформными) точками. Тогда факторпространство $\widetilde{M} = (\mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^8 \{v_i\})/\Gamma$ является многообразием, а естественная проекция $\widetilde{p}: \mathbb{T}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^8 \{v_i\} \rightarrow \widetilde{M}$ – двулиственным накрытием. Так как $f_{\text{ДА}}J = Jf_{\text{ДА}}$, то $f_{\text{ДА}}$ индуцирует диффеоморфизм $\widetilde{f} = \widetilde{p}f_{\text{ДА}}\widetilde{p}^{-1}: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ с обобщенным аттрактором Плыкина $\Lambda = \widetilde{p}(\Lambda_{\text{ДА}})$, устойчивое многообразие которого совпадает с \widetilde{M} . Множество $\widetilde{M} \setminus \Lambda$ является блуждающим множеством диффеоморфизма \widetilde{f} и состоит из восьми связных компонент \widetilde{B}_i , $i = 1, \dots, 8$, каждая из которых получена с помощью факторизации бассейна $W_{v_i}^u \setminus \{v_i\}$ источника v_i . Из результатов работы [18] следует, что множество \widetilde{B}_i , $i = 1, \dots, 8$, диффеоморфно $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}P^2$ – вещественная проективная плоскость.

Чтобы изучить топологическую структуру пространства орбит $\widetilde{B}_i/\widetilde{f}$ ограничения диффеоморфизма \widetilde{f} на каждую компоненту связности блуждающего множества \widetilde{B}_i , найдем фундаментальную область F_i ограничения диффеоморфизма $f_{\text{ДА}}$ на множества $W_{v_i}^u \setminus \{v_i\}$, $i = 1, \dots, 8$, и спроецируем ее на \widetilde{M} .

Для этого рассмотрим локальные карты (ψ_i, D_i) , введенные ранее. При $x^2 + y^2 + z^2 \leq r_1^2$ диффеоморфизм f_{DA} в выбранных локальных картах имеет вид $f_{DA}(x, y, z) = (2x, \lambda_1^u y, \lambda_2^u z)$. Тогда

$$F_i = \psi^{-1} \left(\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq \left(\frac{r_1}{2}\right)^2, \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda_1^u}\right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_2^u}\right)^2 \leq \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \right\} \right).$$

Рассмотрим расслоение множества F_i на эллипсоиды, образы которых под действием ψ_i имеют вид

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{(\lambda_1^u - 1)(t - 1) + 1}\right)^2 + \left(\frac{z}{(\lambda_2^u - 1)(t - 1) + 1}\right)^2 = \left(\frac{\lambda^s r_0}{8}\right)^2, \\ t \in [1, 2].$$

Заметим, что каждый слой данного расслоения инвариантен относительно инволюции J на торе \mathbb{T}^3 , а значит, фундаментальная область \tilde{F}_i ограничения диффеоморфизма \tilde{f} на множество \tilde{B}_i – это проекция фундаментальной области F_i , т.е. $\tilde{F}_i = \tilde{p}(F_i)$, более того \tilde{F}_i диффеоморфна $\mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$, так как при факторизации каждый эллипсоид переходит в множество, диффеоморфное $\mathbb{R}P^2$. Тогда искомое пространство орбит \tilde{B}_i/\tilde{f} имеет вид $\mathbb{R}P^2 \times [0, 1]_{(x,0) \sim (\tilde{f}(x),1)}$ и диффеоморфно $\mathbb{R}P^2 \times S^1$, так как любой гомеоморфизм на $\mathbb{R}P^2$ изотопен тождественному [19].

Пусть $k = 1, \dots, 4$ и

$$C_k = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}, \quad C_k^0 = \mathbb{R}P^2 \times \{0\}, \\ C_k^- = \mathbb{R}P^2 \times (-\infty, 0), \quad C_k^+ = \mathbb{R}P^2 \times (0, +\infty).$$

Положим

$$C = \bigsqcup_{k=1}^4 C_k, \quad C^0 = \bigsqcup_{k=1}^4 C_k^0, \quad C^\pm = C \setminus C^0 = \bigsqcup_{k=1}^4 (C_k^- \sqcup C_k^+).$$

Рассмотрим структурно устойчивый диффеоморфизм $g_{RP^2}: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ с тремя неподвижными точками: источником α , стоком ω и седлом σ (рис. 7).

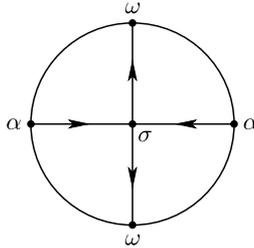


Рис. 7. Диффеоморфизм g_{RP^2} на $\mathbb{R}P^2$.

Пусть также $g_R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – диффеоморфизм, заданный формулой $g_R(x) = 2x$, и $g_k = g_{RP^2} \times g_R: C_k \rightarrow C_k$ для всех $k = 1, \dots, 4$, и $g: C \rightarrow C$ – диффеоморфизм, составленный из g_k . Очевидно, пространства орбит C_k^-/g_k и C_k^+/g_k диффеоморфны $\mathbb{R}P^2 \times S^1$.

Таким образом, для любых $i = 1, \dots, 8$ и $k = 1, \dots, 4$ пространства орбит C_k^-/g_k и C_k^+/g_k диффеоморфны $\widetilde{B}_i/\widetilde{f}$, а значит, для любой перестановки $P = \{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4\}$ последовательности $\{1, \dots, 8\}$ существует диффеоморфизм $h: C^\pm \rightarrow M \setminus \Lambda = \bigcup_{i=1}^8 \widetilde{B}_i$ сопрягающий $g|_{C^\pm}$ с $f|_{\widetilde{M} \setminus \Lambda}$ и такой, что

$$h(C_k^-) = \widetilde{B}_{i_k}, \quad h(C_k^+) = \widetilde{B}_{j_k}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Пусть

$$M_P = C \bigcup_h \widetilde{M}$$

и $q: C \sqcup \widetilde{M} \rightarrow M_P$ – естественная проекция. Пусть диффеоморфизм $f_P: M_P \rightarrow M_P$ совпадает с диффеоморфизмом $q\widetilde{f}(q|_{\widetilde{M}})^{-1}$ на $q(\widetilde{M})$ и с диффеоморфизмом $qg(q|_C)^{-1}$ на $q(C)$. Тогда в качестве требуемого в условиях теоремы 1 диффеоморфизма можно выбрать, например, диффеоморфизм f_P , соответствующий перестановке $P = \{1, \dots, 8\}$, а объединение всех диффеоморфизмов образуют класс \mathcal{P} .

§ 4. Гомологии несущих многообразий

В этом параграфе будут вычислены гомологии с целыми коэффициентами несущих многообразий M_P для диффеоморфизмов f_P , построенных в § 3. Тем самым будет доказана теорема 2.

4.1. Вспомогательные конструкции и изоморфизмы. Введем обозначения

$$C_k^1 = \mathbb{R}P^2 \times [-1, 1], \quad C^1 = \bigsqcup_{k=1}^4 C_k^1, \\ N_P = q(C^1), \quad M_1 = M_P \setminus \text{Int } N_P, \quad N_1 = \partial M_1.$$

Так как множество $q(C^0)$ замкнуто в M_P и лежит в $\text{Int } N_P$, то включение $(M_P \setminus q(C^0), N_P \setminus q(C^0)) \rightarrow (M_P, N_P)$ индуцирует изоморфизмы $H_n(M_P \setminus q(C^0), N_P \setminus q(C^0)) \cong H_n(M_P, N_P)$. Поскольку $N_P \setminus q(C^0) = q(C^1 \setminus C^0) \approx N_1 \times [0, 1)$, то включение $(M_1, N_1) \rightarrow (M_P \setminus q(C^0), N_P \setminus q(C^0))$ является гомотопической эквивалентностью пар и потому индуцирует изоморфизмы $H_n(M_1, N_1) \cong H_n(M_P \setminus q(C^0), N_P \setminus q(C^0))$. В результате имеем изоморфизмы $H_n(M_1, N_1) \cong H_n(M_P, N_P)$, индуцированные включением $(M_1, N_1) \rightarrow (M_P, N_P)$.

Положим

$$\widetilde{M}_1 = (q|_{\widetilde{M}})^{-1}(M_1), \quad \widetilde{N}_1 = \partial \widetilde{M}_1 = (q|_{\widetilde{M}})^{-1}(N_1).$$

Тогда $q: \widetilde{M}_1 \rightarrow M_1$ – гомеоморфизм и $q(\widetilde{N}_1) = N_1$. Поэтому q индуцирует изоморфизмы $H_n(\widetilde{M}_1, \widetilde{N}_1) \cong H_n(M_1, N_1)$.

Пусть $M_s = \mathbb{T}^3/\Gamma$, $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ и $p_J: \mathbb{T}^3 \rightarrow M_s$ – естественные проекции и $p_s = p_J \circ p$. Положим

$$\tilde{N} = (q|_{\tilde{M}})^{-1}(q(C^1 \setminus C^0)), \quad V = \{p_J(v_1), \dots, p_J(v_8)\}, \quad N_s = \tilde{N} \cup V.$$

Тогда $\tilde{M} = M_s \setminus V$ и потому $\tilde{M} \subset M_s$, $\tilde{N} \subset M_s$, причем N_s – замыкание множества \tilde{N} в орбиформе M_s . По тем же причинам, что и выше, имеем изоморфизмы $H_n(\tilde{M}_1, \tilde{N}_1) \cong H_n(M_s \setminus V, N_s \setminus V) \cong H_n(M_s, N_s)$, индуцированные включениями пар $(\tilde{M}_1, \tilde{N}_1) \rightarrow (M_s \setminus V, N_s \setminus V)$ и $(M_s \setminus V, N_s \setminus V) \rightarrow (M_s, N_s)$.

Объединив результаты, получим следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть $\iota_s: \tilde{M} \rightarrow M_s$ – включение, а $q: C \sqcup \tilde{M} \rightarrow M_P$ – естественная проекция. Тогда отображения пар $\iota_s: (\tilde{M}_1, \tilde{N}_1) \rightarrow (M_s, N_s)$ и $q: (\tilde{M}_1, \tilde{N}_1) \rightarrow (M_P, N_P)$ индуцируют изоморфизмы

$$H_n(M_s, N_s) \cong H_n(\tilde{M}_1, \tilde{N}_1) \cong H_n(M_P, N_P).$$

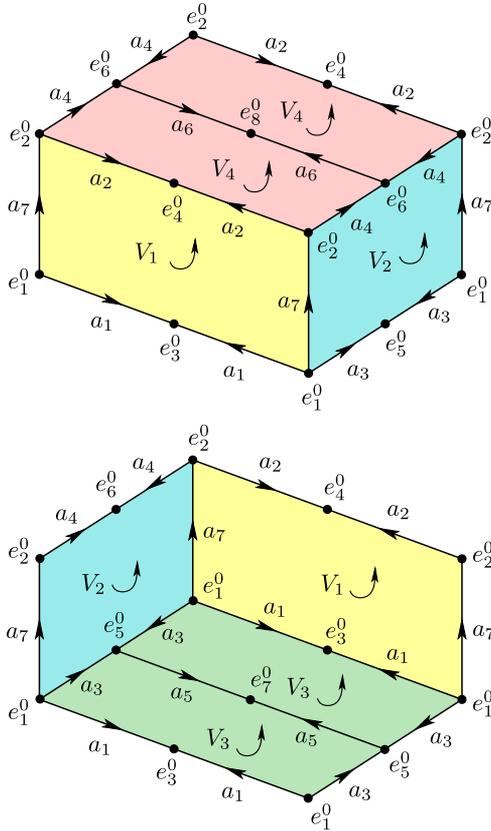


Рис. 8. Клеточное разбиение орбиформы M_s .

Фундаментальной областью для действия группы Γ на \mathbb{T}^3 является образ $Q = p(\bar{Q})$ параллелепипеда $\bar{Q} = [0, 1]^2 \times [0, 1/2]$. При этом $\partial Q = p([0, 1]^2 \times 0) \cup p([0, 1]^2 \times (1/2))$. Инволюция $J \in \Gamma$ действует на ∂Q посредством формулы

$J(p(x, y, \epsilon)) = p(1 - x, 1 - y, \epsilon)$, где $\epsilon \in \{0, 1/2\}$. Отсюда возникает естественное клеточное разбиение орбифолда M_s (рис. 8). Оно состоит из нульмерных клеток $e_i^0 = p_J(v_i) = p_s(\bar{v}_i)$, $i = 1, \dots, 8$, одной трехмерной клетки $e^3 = p_s(\text{Int } \bar{Q})$, одномерных клеток

$$\begin{aligned} e_1^1 &= p_s\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \times 0 \times 0\right), & e_2^1 &= p_s\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ e_3^1 &= p_s\left(0 \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \times 0\right), & e_4^1 &= p_s\left(0 \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ e_5^1 &= p_s\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times 0\right), & e_6^1 &= p_s\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right), \\ e_7^1 &= p_s\left(0 \times 0 \times \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

и двумерных клеток

$$\begin{aligned} e_1^2 &= p_s\left((0, 1) \times 0 \times \left(0, \frac{1}{2}\right)\right), & e_2^2 &= p_s\left(0 \times (0, 1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)\right), \\ e_3^2 &= p_s\left((0, 1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \times 0\right), & e_4^2 &= p_s\left((0, 1) \times \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Замыкания 1-клеток e_i^1 обозначим символами a_i , $i = 1, \dots, 7$, а замыкания 2-клеток e_j^2 символами V_j , $j = 1, \dots, 4$. Тогда $a_1 = [e_1^0 e_3^0]$, $a_2 = [e_2^0 e_4^0]$, $a_3 = [e_1^0 e_5^0]$, $a_4 = [e_2^0 e_6^0]$, $a_5 = [e_3^0 e_7^0]$, $a_6 = [e_4^0 e_8^0]$, $a_7 = [e_1^0 e_2^0]$. Каждая замкнутая 2-клетка V_j гомеоморфна сфере S^2 и является орбифолдом (“подушкой”) с четырьмя особыми точками. Более точно,

$$e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0 \in V_1, \quad e_1^0, e_2^0, e_5^0, e_6^0 \in V_2, \quad e_1^0, e_3^0, e_5^0, e_7^0 \in V_3, \quad e_2^0, e_4^0, e_6^0, e_8^0 \in V_4. \quad (4.1)$$

4.2. Относительные гомологии пары (M_P, N_P) . Для индексов $\zeta \in \{s, P\}$ точна гомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(N_\zeta) \xrightarrow{i_n^*} H_n(M_\zeta) \xrightarrow{j_n^*} H_n(M_\zeta, N_\zeta) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(N_\zeta) \rightarrow \dots \quad (4.2)$$

пары (M_ζ, N_ζ) .

Согласно построенному выше клеточному разбиению орбифолда M_s $\partial e_j^2 = \partial V_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, 4$ и при ориентациях 2-клеток, указанных на рис. 1, $\partial e^3 = 2V_3 - 2V_4$. Прямые вычисления показывают, что $Z_1(M_s) = 0$. Поэтому

$$H_3(M_s) = H_1(M_s) = 0, \quad H_0(M_s) \cong \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

$$H_2(M_s) = \langle [V_1], [V_2], [V_3], [V_3 - V_4] \parallel 2[V_3 - V_4] \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2. \quad (4.4)$$

По построению $\tilde{N} = (q|_{\tilde{M}})^{-1}(q(C^1 \setminus C^0)) \subset \bigsqcup_{i=1}^8 \tilde{B}_i$. Пусть $\tilde{N}_i = \tilde{N} \cap \tilde{B}_i$ и $N_{si} = \tilde{N}_i \cup \{e_i^0\}$ – замыкание множества \tilde{N}_i в орбифолде M_s . Тогда N_{si} – замкнутая окрестность особой точки e_i^0 и $N_s = \bigsqcup_{i=1}^8 N_{si}$.

Множества \tilde{N}_i гомеоморфны цилиндрам вида $\mathbb{R}P^2 \times (0, 1]$ или $\mathbb{R}P^2 \times [-1, 0)$, а окрестности N_{s_i} гомеоморфны конусам над $\mathbb{R}P^2$. Следовательно,

$$H_3(N_s) = H_2(N_s) = H_1(M_s) = 0, \quad H_0(N_s) \cong \mathbb{Z}^8. \quad (4.5)$$

Для всех $i = 1, \dots, 4$ положим $\bar{V}_i = V_i + C_2(N_s)$. Подставив (4.3)–(4.5) в (4.2) при $\zeta = s$, получим короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow H_3(M_s, N_s) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow H_1(M_s, N_s) \rightarrow \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j_*^2} H_3(M_s, N_s) \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

В силу (4.6)

$$H_3(M_s, N_s) = 0, \quad H_1(M_s, N_s) \cong \mathbb{Z}^7. \quad (4.8)$$

Так как $j_*^2([V_i]) = [\bar{V}_i]$, то согласно (4.7) и (4.4) имеем

$$H_2(M_s, N_s) = \langle [\bar{V}_1], [\bar{V}_2], [\bar{V}_3], [\bar{V}_3 - \bar{V}_4] \parallel 2[\bar{V}_3 - \bar{V}_4] \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2. \quad (4.9)$$

Пусть $V_{j1} = V_j \cap M_{s1}$, $V_{jP} = q(V_{j1})$ и $\bar{V}_{jP} = V_{jP} + C_2(N_P)$ для $j = 1, \dots, 4$. Тогда из (4.8), (4.9) и леммы 5 следует

ЛЕММА 6. *Имеют место формулы*

$$\begin{aligned} H_3(M_P, N_P) &= 0, & H_1(M_P, N_P) &\cong \mathbb{Z}^7, \\ H_2(M_P, N_P) &= \langle [\bar{V}_{1P}], [\bar{V}_{2P}], [\bar{V}_{3P}], [\bar{V}_{3P} - \bar{V}_{4P}] \parallel 2[\bar{V}_{3P} - \bar{V}_{4P}] \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

4.3. Гомологии многообразия M_P .

ЛЕММА 7. *Для любой перестановки $P = \{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4\}$ найдется такое $t \in \{1, 2, 3\}$, что*

$$H_3(M_P) = 0, \quad H_2(M_P) \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2, \quad H_1(M_P) \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q: C^1 \rightarrow N_P$ – гомеоморфизм, то

$$H_3(N_P) = H_2(N_P) = 0, \quad H_1(N_P) \cong H_0(N_P) \cong \mathbb{Z}_2^4. \quad (4.10)$$

В силу (4.10) и леммы 6 из (4.2) при $\zeta = P$ следует точная последовательность

$$0 \rightarrow H_3(M_P) \rightarrow 0 \rightarrow H_2(M_P) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}_2^4 \xrightarrow{i_*^1} H_1(M_P) \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Согласно (4.11) $H_3(M_P) = 0$ и $H_2(M_P) \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2^t$, где $t \in \{0, 1\}$. При этом по формуле универсальных коэффициентов

$$H_3(M_P, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2^t, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^t.$$

С другой стороны, поскольку M_P – замкнутое 3-многообразие, то

$$H_3(M_P, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Сравнивая эти формулы, приходим к выводу, что $t = 1$ и $H_2(M_P) \cong \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}_2$.

По построению $\tilde{N}_1 = \bigsqcup_{i=1}^8 \tilde{N}_{1i}$, где $\tilde{N}_{1i} \approx \mathbb{R}P^2$ и $\tilde{N}_{1i} \subset \tilde{B}_i$, а также $N_1 = q(\tilde{N}_1)$. Пусть \tilde{u}_i – 1-цикл в \tilde{N}_{1i} , гомологический класс которого является образующим элементом группы $H_1(\tilde{N}_{1i}) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда $H_1(\tilde{N}_1) = \langle [\tilde{u}_1], \dots, [\tilde{u}_8] \rangle \cong \mathbb{Z}^8$. Положим $u_i = q(\tilde{u}_i)$ для $i = 1, \dots, 8$. Поскольку циклы u_{i_k} и u_{j_k} гомологичны в N_P , то

$$H_1(N_P) = \langle [u_1], \dots, [u_8] \parallel [u_{i_k}] = [u_{j_k}], k = 1, \dots, 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^4. \quad (4.12)$$

Для любого $j = 1, \dots, 4$ граница ∂V_{j1} является суммой четырех циклов из набора $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_8$, соответствующих содержащимся в V_j особым вершинам. По определению гомоморфизм ∂_*^2 из последовательности (4.11) удовлетворяет равенствам $\partial_*^2([\bar{V}_{jP}]) = [\partial V_{jP}] = [q(\partial V_{j1})]$. Поэтому согласно формуле (4.1) и лемме 6 подгруппа $\text{im } \partial_*^2$ группы $H_1(N_P)$ порождается элементами

$$\partial_*^2([\bar{V}_{1P}]) = w_1 = [u_1] + [u_2] + [u_3] + [u_4], \quad (4.13)$$

$$\partial_*^2([\bar{V}_{2P}]) = w_2 = [u_1] + [u_2] + [u_5] + [u_6], \quad (4.14)$$

$$\partial_*^2([\bar{V}_{3P}]) = w_3 = [u_1] + [u_3] + [u_5] + [u_7], \quad (4.15)$$

$$\partial_*^2([\bar{V}_{3P}] - [\bar{V}_{4P}]) = w_4 = [u_1] + \dots + [u_8]. \quad (4.16)$$

Так как перестановка P содержит все элементы списка $\{1, \dots, 8\}$, то из (4.16) и (4.12) следует, что $w_4 = 0$. Поэтому $\text{im } \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}_2^s$, где $0 \leq s \leq 3$.

Если в перестановке $P = \{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4\}$ пару $\{i_k, j_k\}$ заменить на пару $\{j_k, i_k\}$, то получим $h(C_k^-) = \tilde{B}_{j_k}$ и $h(C_k^+) = \tilde{B}_{i_k}$. Поменяв в P местами целые пары $\{i_k, j_k\}$ и $\{i_l, j_l\}$, $k \neq l$, мы тем самым просто перенумеруем список цилиндров C_1, \dots, C_4 . Поскольку эти преобразования не меняют топологического типа многообразия M_P , то без ограничения общности далее будем считать, что

$$i_k < j_k \quad \text{для всех } k = 1, \dots, 4 \quad \text{и} \quad 1 = i_1 < i_2 < i_3 < i_4. \quad (4.17)$$

В силу (4.13), (4.12), (4.17) равенство $w_1 = 0$ возможно, только если $\{i_1, j_1, i_2, j_2\}$ – перестановка элементов списка $\{1, 2, 3, 4\}$, причем $i_1 = 1$, а $\{i_3, j_3, i_4, j_4\}$ – перестановка элементов списка $\{5, 6, 7, 8\}$. Если при этом еще $w_2 = 0$, то согласно (4.14) $j_1 = 2$. Но в силу (4.15) при $i_1 = 1$ и $j_1 = 2$ имеем $w_3 \neq 0$. Таким образом, $\text{im } \partial_*^2 \neq 0$ и потому $s > 0$.

Итак, $\text{im } \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}_2^s$, где $0 \leq s \leq 3$. При этом в силу (4.11) $\text{im } i_*^1 \cong \mathbb{Z}_2^m$, где $m = 4 - s$. Но тогда согласно той же формуле (4.11) $H_1(M_P) \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^m$ и $0 \leq m \leq 3$.

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Каждый из случаев $t = 1, 2, 3$ леммы 7 реализуется. Иначе говоря, для каждого $t \in \{1, 2, 3\}$ найдется такая перестановка P , что*

$$H_1(M_P) \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда $[u_1], [u_3], [u_5], [u_7]$ – базис группы $H_1(N_P)$ и в $H_1(N_P)$ имеют место соотношения $[u_1] = [u_2]$, $[u_3] = [u_4]$, $[u_5] = [u_6]$, $[u_7] = [u_8]$. Из указанных соотношений и формул (4.13) и (4.14) следуют равенства $w_1 = w_2 = 0$. Поэтому $\text{im } \partial_*^2 = \langle w_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации $s = 1$ и $m = 4 - s = 3$.

Для перестановки $P = \{1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8\}$ базис группы $H_1(N_P)$ образуют элементы $[u_1], [u_3], [u_4], [u_7]$, а соотношения из (4.12) имеют вид

$$[u_1] = [u_2], \quad [u_3] = [u_5], \quad [u_4] = [u_6], \quad [u_7] = [u_8].$$

При этом в силу (4.13)–(4.15) $w_1 = w_2 = [u_3] + [u_4]$ и $w_3 = [u_1] + [u_7]$. Координаты w_1 и w_2 в базисе $[u_1], [u_3], [u_4], [u_7]$ образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank } A = 2$, то $\text{im } \partial_*^2 = \langle w_1, w_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$. Следовательно, в данном случае $s = 2$ и $m = 2$.

Предположим наконец, что $P = \{1, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 8\}$. При этом $[u_1], [u_2], [u_4], [u_7]$ – базис группы $H_1(N)$ и $[u_1] = [u_3]$, $[u_2] = [u_5]$, $[u_4] = [u_6]$, $[u_7] = [u_8]$. В силу последних соотношений

$$w_1 = [u_2] + [u_4], \quad w_2 = [u_1] + [u_4], \quad w_3 = [u_2] + [u_7].$$

Поэтому координаты элементов w_1, w_2, w_3 в выбранном базисе образуют матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\text{rank } B = 3$, то $\text{im } \partial_*^2 = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^3$. В итоге для выбранной перестановки P имеем $s = 3$ и $m = 1$.

Лемма доказана.

Из лемм 7 и 8 следует теорема 2.

§ 5. Существование энергетической функции

Теперь покажем, что диффеоморфизмы из класса \mathcal{P} обладают энергетическими функциями, т.е. докажем теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f_P: M_P \rightarrow M_P$ – диффеоморфизм из класса \mathcal{P} с обобщенным аттрактором Плыкина Λ . По построению $M_P = C \cup_h \widetilde{M}$, где множество C состоит из четырех цилиндров над вещественной проективной плоскостью, т.е. $C = \bigsqcup_{k=1}^4 C_k$, $C_k = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}$, а образ множества \widetilde{M} под действием естественной проекции $q: C \sqcup \widetilde{M} \rightarrow M_P$ является устойчивым многообразием аттрактора Λ .

Напомним, что ограничение проекции q на множество C является диффеоморфизмом на образ $q(C) = M_P \setminus \Lambda$, гладко сопрягающим $f_P|_{M_P \setminus \Lambda}$ с диффеоморфизмом g , составленным из $g_k: C_k \rightarrow C_k$, каждый из которых имеет вид $g_k = g_{RP^2} \times g_R$, где g_{RP^2} – структурно устойчивый диффеоморфизм вещественной проективной плоскости, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек: источника α , стока ω и седла σ (см. рис. 7), а $g_R(x) = 2x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Д. Пикстон [9] в 1977 г. доказал существование энергетической функции для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на замкнутых поверхностях, таким образом g_{RP^2} обладает энергетической функцией. Приведем наглядный вариант ее построения в следующей лемме.

ЛЕММА 9. Пусть $p_{RP^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ – двулистное накрытие и $p_z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – каноническая проекция на ось Oz . Существует иммерсия $H: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такая, что функция $\varphi_{RP^2} = p_z \circ H \circ p_{RP^2}^{-1}: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ корректно определена и является энергетической для диффеоморфизма g_{RP^2} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{g}_{RP^2}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ – поднятие диффеоморфизма g_{RP^2} такое, что неблуждающее множество \bar{g}_{RP^2} состоит из шести неподвижных точек (рис. 9). Построим гладкое отображение $H: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ двумерной сферы в трехмерное евклидово пространство такое, что функция высоты $p_z \circ H$ коммутирует с накрытием p_{RP^2} , т.е. для всех $a \in \mathbb{R}P^2$ множество $p_z H p_{RP^2}^{-1}(a)$ состоит из одного элемента, и образ множества неподвижных точек диффеоморфизма \bar{g}_{RP^2} совпадает с множеством критических точек функции $p_z \circ H$.

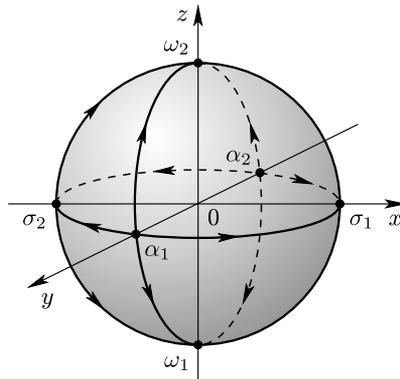


Рис. 9. Поднятие диффеоморфизма g_{RP^2} на двумерную сферу \mathbb{S}^2 .

Зададим искомый образ сферы $H(\mathbb{S}^2)$ в параметрическом виде. Для этого при $r \in [0, 8]$ и $s \in [0, 2\pi]$ определим отображение $\Theta = (\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z): [0, 8] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ с первыми двумя компонентами вида

$$\Theta_x(r, s) = f(r) \cos s, \quad \Theta_y(r, s) = f(r) \sin s,$$

где функция f имеет вид

$$f(r) = \begin{cases} r & \text{при } r \in [0, 3], \\ -r + 6 & \text{при } r \in (3, 5], \\ r - 4 & \text{при } r \in (5, 6], \\ -r + 8 & \text{при } r \in (6, 8], \end{cases}$$

и третьей компонентой $\Theta_z(r, s)$ следующего вида:

$$\Theta_z(r, s) = \begin{cases} -\sqrt{4 - r^2} & \text{при } r \in [0, 2], \\ 0.5(\cos(2s) + 3) \left(\frac{\arcsin(2r - 5)}{\pi} + 0.5 \right) + 2 & \text{при } r \in (2, 3], \\ \sqrt{1 - ((-r + 6) - 2)^2} + 0.5 \cos(2s) + 3.5 & \text{при } r \in (3, 5], \\ \sqrt{1 - ((-r + 6) - 2)^2} + 0.5 \cos(2s) + 3.5 & \text{при } r \in (5, 6], \\ -\sqrt{4 - (-r + 8)^2} + 2 & \text{при } r \in (6, 8]. \end{cases}$$

Полученное множество $H(\mathbb{S}^2)$ изображено на рис. 10.

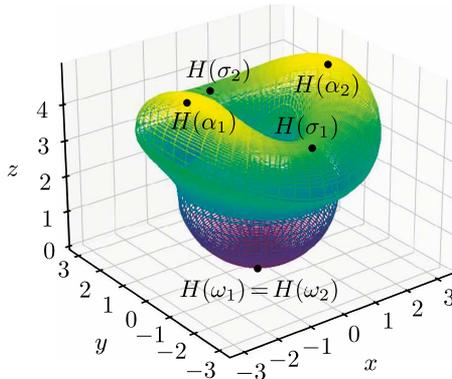


Рис. 10. Образ сферы под действием иммерсии H .

В свою очередь параметризацию сферы можно получить, определив отображение $\Upsilon = (\Upsilon_x, \Upsilon_y, \Upsilon_z): [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Upsilon_x = \cos(\phi) \cos(\psi), \quad \Upsilon_y = \sin(\phi) \cos(\psi), \quad \Upsilon_z = \sin(\psi),$$

где $\phi \in [0, 2\pi]$ и $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пусть $H_{sq}: [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [0, 8] \times [0, 2\pi]$ такое, что

$$H_{sq}(\phi, \psi) = \left(\frac{8(\psi + \pi/2)}{\pi}, \phi \right).$$

Тогда $H = \Theta \circ H_{sq} \circ \Upsilon^{-1}$ – искомая иммерсия. Функция $p_z \circ H$ является функцией Ляпунова для диффеоморфизма¹⁰ \bar{g}_{RP^2} , являющегося поднятием диффеоморфизма g_{RP^2} . Критические точки функции $p_z \circ H$ совпадают с неблуждающими точками диффеоморфизма \bar{g}_{RP^2} . Более того, непосредственно проверяется, что $p_z \circ H$ коммутирует с накрытием p_{RP^2} , а значит, функция $\varphi_{RP^2} = p_z H p_{RP^2}^{-1}$ является энергетической для нашей системы на $\mathbb{R}P^2$.

Лемма 9 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Для каскада g_R энергетической будет функция $\varphi_R(x) = -x^2$. Тогда существование энергетической функции $\varphi_k: C_k \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 4$, для прямого произведения g_{RP^2} и g_R следует из [20], причем ее можно выбрать в виде

$$\varphi_k(w, x) = \arctg(\varphi_{RP^2}(w) + \varphi_R(x)) + \frac{\pi}{2},$$

так что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k(w, x) = 0, \quad \text{где } w \in \mathbb{R}P^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть функция $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}$ составлена из $\varphi_k(w, x)$. Рассмотрим функцию $\Phi: M_P \rightarrow \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$\Phi(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in \Lambda, \\ \varphi((q|_C)^{-1}(a)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения функций φ_k , $k = 1, \dots, 4$, следует, что функция Φ непрерывна.

Функция Φ является энергетической для f_P на множестве $M_P \setminus \Lambda$, но в общем случае не является гладкой на всем многообразии M_P . По лемме о сглаживании функции [14], существует функция $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\xi \circ \Phi$ – искомая энергетическая функция для f_P .

Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [2] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Corr. reprint of the 1976 original, Grad. Texts in Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 2012, x+221 pp.
- [3] Р. В. Плыкин, “Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243–264; англ. пер.: R. V. Plykin, “Sources and sinks of A -diffeomorphisms of surfaces”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:2 (1974), 233–253.

¹⁰Заметим, что диффеоморфизмы g_{RP^2} и \bar{g}_{RP^2} определены нестрого, но рис. 7 определяет класс сопряженности диффеоморфизмов на вещественной проективной плоскости, в котором можно выбрать диффеоморфизм g_{RP^2} такой, что $p_z \circ H$ является функцией Ляпунова для поднятия этого диффеоморфизма.

- [4] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.; пер. с англ.: А. Katok, В. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xviii+802 pp.
- [5] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 83–104; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On non-orientable two-dimensional basic sets on 3-manifolds”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 869–888.
- [6] М. Barinova, О. Pochinka, Е. Yakovlev, “On a structure of non-wandering set of an Ω -stable 3-diffeomorphism possessing a hyperbolic attractor”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **44**:1 (2024), 1–17.
- [7] М. Barinova, *On isolated periodic points of diffeomorphisms with expanding attractors of codimension 1*, arXiv: 2404.156992.
- [8] В. З. Гринес, О. В. Починка, “Построение энергетических функций для Ω -устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **63**, № 2, РУДН, М., 2017, 191–222; англ. пер.: V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “The constructing of energy functions for Ω -stable diffeomorphisms on 2- and 3-manifolds”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **250**:4 (2020), 537–568.
- [9] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [10] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, “Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **278**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2012, 34–48; англ. пер.: V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, “Dynamically ordered energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278** (2012), 27–40.
- [11] В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка, “Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором”, *Тр. ММО*, **76**, № 2, МЦНМО, М., 2015, 271–286; англ. пер.: V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **76**:2 (2015), 237–249.
- [12] В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка, “Энергетическая функция для A-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами”, *Динамические системы*, **5(33)**:1-2 (2015), 31–37.
- [13] М. Barinova, V. Grines, О. Pochinka, В. Yu, “Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades”, *Chaos*, **31**:6 (2021), 063112, 8 pp.
- [14] М. К. Баринова, “On existence of an energy function for Ω -stable surface diffeomorphisms”, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:14 (2021), 3317–3323.
- [15] С. Робинсон, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, xiv+506 pp.
- [16] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
- [17] Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)**:2 (1971), 301–312; англ. пер.: R. V. Plykin, “The topology of basis sets for Smale diffeomorphisms”, *Math. USSR-Sb.*, **13**:2 (1971), 297–307.
- [18] М. Barinova, V. Grines, О. Pochinka, “Dynamics of three-dimensional A-diffeomorphisms with two-dimensional attractors and repellers”, *J. Difference Equ. Appl.*, **29**:9-12 (2023), 1275–1286.

- [19] M.-E. Hamstrom, “Homotopy properties of the space of homeomorphisms on P^2 and the Klein bottle”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120**:1 (1965), 37–45.
- [20] М. К. Барина, Е. К. Шустова, “Динамические свойства прямых произведений дискретных динамических систем”, *Журнал СВМО*, **24**:1 (2022), 21–30.

Марина Константиновна Барина
(**Marina K. Barinova**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: mkbarinova@yandex.ru

Поступила в редакцию
17.12.2023 и 27.04.2024

Ольга Александровна Кольчурина
(**Olga A. Kolchurina**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: oakolchurina@edu.hse.ru

Евгений Иванович Яковлев
(**Evgeniy I. Yakovlev**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: elptv@yandex.ru