DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-01

О СВОЙСТВАХ ПОЛУЯВНОЙ ВЕКТОРНОЙ КОМПАКТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Злотник[а], **Т. А. Ломоносов**[б]
НИУ Высшая школа экономики, г. Москва, Российская Федерация
[а] *ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2440-2816, ✍ azlotnik@hse.ru*
[б] *ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3262-5772, tlomonosov@hse.ru*

Аннотация: начально-краевая задача для n-мерного акустического волнового уравнения, $n \geqslant 1$, с переменной скоростью звука и неоднородным краевым условием Дирихле решается численно. С этой целью изучается нестандартная трехслойная полуявная по времени компактная схема. Схема является трехточечной по каждому пространственному направлению и использует n вспомогательных искомых функций, аппроксимирующих несмешанные вторые пространственные производные решения. На первом слое по времени применяется аналогичная двухслойная по времени схема, где производные данных не используются. Для реализации схемы требуется только решение систем с трехдиагональными матрицами по всем n пространственным направлениям. Даны теоремы об условной устойчивости схемы в расширенной энергетической норме и об оценке погрешности 4-го порядка в этой норме. Приведены результаты 3D численного эксперимента, в котором погрешность схемы убывает с 4-м порядком и очень мала уже на грубой сетке.

Ключевые слова: акустическое волновое уравнение, полуявная трехслойная векторная схема, компактная схема 4-го порядка точности, условная устойчивость, оценка погрешности.

Благодарности: работа выполнена при поддержке РНФ, проект 23-21-00061.

Для цитирования: Злотник А. А., Ломоносов Т. А. О свойствах полуявной векторной компактной схемы для акустического волнового уравнения. *Успехи кибернетики*. 2024;5(3):6–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-01.

Поступила в редакцию: 23.07.2024. *В окончательном варианте: 16.08.2024.*

ON PROPERTIES OF A SEMI-EXPLICIT VECTOR COMPACT SCHEME FOR THE ACOUSTIC WAVE EQUATION

A. A. Zlotnik[a], **T. A. Lomonosov**[b]
Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation
[a] *ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2440-2816, ✍ azlotnik@hse.ru*
[b] *ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3262-5772, tlomonosov@hse.ru*

Abstract: we numerically solved an initial-boundary value problem for the n-dimensional acoustic wave equation ($n \geqslant 1$) with variable sound speed and nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions. We studied a non-standard, three-level, semi-explicit compact scheme. The scheme uses three points per spatial direction and exploits n auxiliary functions to approximate second-order non-mixed spatial derivatives. At the first time level, we applied a two-level scheme without using data derivatives. The scheme involves solving tridiagonal matrix systems in all n spatial directions. We proved theorems on conditional stability and 4th-order error bounds. Our 3D experiments confirmed 4th-order accuracy with minimal error, even on coarse meshes.

Keywords: acoustic wave equation, semi-explicit three-level vector scheme, compact scheme of the 4-th order of accuracy, conditional stability, error bound.

Acknowledgements: the paper is supported by the RSF, project no. 23-21-00061.

Cite this article: Zlotnik A. A., Lomonosov T. A. On properties of a semi-explicit vector compact scheme for the acoustic wave equation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(3):6–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-3-01.

Original article submitted: 23.07.2024. *Revision submitted: 16.08.2024.*

Введение

В данной статье продолжается изучение трехслойной полуявной по времени векторной компактной разностной схемы 4-го порядка для n-мерного акустического волнового уравнения с переменной скоростью звука, $n \geqslant 1$, недавно построенной и исследованной в [1, 2]. В ней нестандартным является введение дополнительных искомых функций, аппроксимирующих несмешанные вторые пространственные производные решения, что приводит к простой прямой реализации схемы (без применения итерационных методов). На первом слое по времени применяется двухслойная аппроксимация по времени, аналогичная основным уравнениям схемы, без использования производных данных (в отличие от многих других работ). Условная устойчивость такой схемы в сильной энергетической норме и оценка погрешности порядка 3.5 в ней были выведены в [2]. При постоянной скорости звука устойчивость в стандартной энергетической норме и оценка погрешности 4-го порядка в ней также были доказаны, но доказательство не обобщается на случай переменной скорости звука. Отметим, что анализ устойчивости не так прост, поскольку исходная форма полуявной схемы не является самосопряженной.

Здесь применяется другой, более тонкий подход, основанный на теореме устойчивости в расширенной слабой энергетической норме для абстрактного трехслойного метода и симметризации изучаемой схемы. Он позволил доказать устойчивость в расширенной стандартной энергетической норме (без условия малости шагов сетки) и оценку погрешности 4-го порядка в ней. Также в дополнение к 2D численным экспериментам в [2] приводится 3D эксперимент, где и на практике погрешность схемы убывает с 4-м порядком и очень мала уже на грубых сетках для решений типа гладкой бегущей волны.

Полуявная векторная компактная схема была первоначально предложена для двумерного волнового уравнения в [3]. Также случай $n = 3$ был рассмотрен в [4], где для акустического волнового уравнения была применена отличная от нашей пространственная аппроксимация; для нее строгое обоснование устойчивости и вывод оценок 4-го порядка отсутствуют и представляются громоздкими задачами, в особенности без требования малости шагов сетки. Упомянем, что случай $n \geqslant 4$ представляет интерес в теоретической физике.

Разработка более стандартных компактных трехслойных схем 4-го порядка была начата гораздо раньше, и им посвящена обширная литература, в случае $n = 3$ см., в частности [5–9]. Но для схем такого типа для акустического волнового уравнения строгие теоремы устойчивости и оценки погрешности 4-го порядка были доказаны лишь недавно в [9]. Их эффективная реализация требует применения итерационных методов, что приводит к увеличению вычислительных затрат.

Естественным способом отказа от итерационных методов явился переход к экономичным методам типа переменных направлений (МПН), в случае $n = 3$ схемы 4-го порядка этого типа см., в частности, в [8, 10–13] и, в случае акустического волнового уравнения — в [14, 15]. Как и для изучаемого в статье метода, для их реализации необходимо решать только одномерные системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Однако для акустического волнового уравнения строгих теорем устойчивости и оценок погрешности 4-го порядка для МПИ методов нет, т.к. их вывод сталкивается с существенными трудностями. Заметим, что неявность и условная устойчивость присущи всем перечисленным выше трем типам компактных схем 4-го порядка. Для волнового уравнения разработано также много иных численных методов повышенного порядка аппроксимации, на которых здесь мы не будем останавливаться.

Статья организована следующим образом. Сначала выписана начально-краевая задача для акустического волнового уравнения, и для удобства кратко напомнены построение полуявной векторной компактной схемы решения этой задачи и ее быстрая прямая реализация. Затем для этой схемы сформулированы теорема устойчивости в расширенной энергетической норме и соответствующая теорема об оценке погрешности 4-го порядка. В заключение приведен пример 3D расчета, подтверждающего, что погрешность схемы убывает с 4-м порядком и очень мала.

Многомерное акустическое волновое уравнение и полуявная 4-го порядка векторная компактная схема для его численного решения

Рассмотрим начально-краевую задачу для n-мерного акустического волнового уравнения

$$\rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - Lu(x,t) = f(x,t),\ L := a_1^2\partial_1^2 + \ldots + a_n^2\partial_n^2,\ \text{в}\ Q_T := \Omega \times (0,T); \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_T} = g(x,t);\;\; u|_{t=0} = u_0(x),\;\; \partial_t u|_{t=0} = u_1(x),\;\; x \in \Omega := (0,X_1) \times \ldots \times (0,X_n), \tag{2}$$

при неоднородном краевом условии Дирихле. Здесь $0 < \underline{\rho} \leqslant \rho(x) \leqslant \bar{\rho}$, а $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ — постоянные (они берутся разными, как и в [2, 8, 9]), $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$. Также $\partial\Omega$ — граница Ω, а $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$ — боковая поверхность Q_T. Функции ρ и u предполагаются гладкими.

Введем равномерную сетку $\overline{\omega}_{h_t}$ с узлами $t_m = mh_t$, $0 \leqslant m \leqslant M$ и шагом $h_t = T/M > 0$ на $[0,T]$; здесь $M \geqslant 2$. Пусть $\omega_{h_t} = \{t_m\}_{m=1}^{M-1}$. Определим сеточное среднее, разностные операторы и оператор суммирования по времени с переменным верхним пределом

$$\bar{s}_t y = \frac{1}{2}(\check{y} + y),\;\; \bar{\delta}_t y = \frac{y - \check{y}}{h_t},\;\; \delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t},\;\; \Lambda_t y = \delta_t \bar{\delta}_t y = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{h_t^2},\;\; I_{h_t}^m y = h_t \sum_{l=1}^{m} y^l$$

при $1 \leqslant m \leqslant M$ и также $I_{h_t}^0 y = 0$, где $y^m = y(t_m)$, $\check{y}^m = y^{m-1}$, $\hat{y}^m = y^{m+1}$.

Введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{hk}$ с узлами $x_{ki} = ih_k$, $0 \leqslant i \leqslant N_k$ и шагом $h_k = X_k/N_k$ по x_k. Пусть $\omega_{hk} = \{x_{ki}\}_{i=1}^{N_k-1}$. Определим на ω_{hk} разностный аналог ∂_k^2 и среднее по Нумерову по x_k:

$$(\Lambda_k w)_i := \tfrac{1}{h_k^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}),\;\; s_{kN} w_i := \tfrac{1}{12}(w_{i-1} + 10w_i + w_{i+1}) = (I + \tfrac{1}{12}h_k^2 \Lambda_k) w_i,$$

где $w_i = w(x_{ki})$.

Далее, введем прямоугольную сетку $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h1} \times \ldots \times \bar{\omega}_{hn}$ в $\bar{\Omega}$, где $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Пусть $\omega_h = \omega_{h1} \times \ldots \times \omega_{hk}$ и $\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \backslash \omega_h$. Определим сетки $\omega_{\boldsymbol{h}} := \omega_h \times \omega_{h_t}$ в Q_T и $\partial\omega_{\boldsymbol{h}} = \partial\omega_h \times \{t_m\}_{m=1}^{M}$ на $\bar{\Gamma}_T$, с $\boldsymbol{h} = (h, h_t)$.

Пусть H_h — евклидово пространство функций со скалярным произведением $(v,w)_h$ и нормой $\|w\|_h = (w,w)_h^{1/2}$. Любой линейный оператор $C_h = C_h^* > 0$, действующий в H_h, порождает норму $\|w\|_{C_h} := (C_h w, w)_h^{1/2} = \|C_h^{1/2} w\|_h$ в H_h. Ниже везде (кроме леммы 1) H_h — пространство функций на $\bar{\omega}_h$, равных 0 на $\partial\omega_h$, со скалярным произведением L^2-типа

$$(v,w)_h = h_1 \ldots h_n \sum_{x_{\boldsymbol{i}} \in \omega_h} v(x_{\boldsymbol{i}}) w(x_{\boldsymbol{i}}),\;\; x_{\boldsymbol{i}} = (i_1 h_1, \ldots, i_n h_n),\;\; \boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_n).$$

Введем простейшую разностную аппроксимацию $L_h := a_1^2 \Lambda_1 + \ldots + a_n^2 \Lambda_n$ для L. Как известно,

$$\tfrac{4}{X_k^2} I < -\Lambda_k = -\Lambda_k^* < \tfrac{4}{h_k^2} I,\;\; \tfrac{2}{3} I < s_{kN} = s_{kN}^* < I,\;\; 0 < -L_h = -L_h^* < 4\big(\tfrac{a_1^2}{h_1^2} + \ldots + \tfrac{a_n^2}{h_n^2}\big) I.$$

Здесь и ниже все операторные неравенства относятся к самосопряженным операторам в H_h, а I — единичный оператор.

Кратко напомним вывод изучаемого метода. Сначала формально заменим уравнение (1) системой уравнений со вторыми частными производными по t или x_k:

$$\rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - (a_1^2 u_{11}(x,t) + \ldots + a_n^2 u_{nn}(x,t)) = f(x,t),\; u_{kk}(x,t) := \partial_k^2 u(x,t),\; 1 \leqslant k \leqslant n, \text{ в } Q_T, \tag{3}$$

где $u_{11}, \ldots, u_{nn}$ — дополнительные искомые функции. Дифференцирование уравнения (1) по t дает

$$\rho \partial_t^4 u = \partial_t^2 (Lu + f) = L\big[\tfrac{1}{\rho}(Lu + f)\big] + \partial_t^2 f.$$

Поэтому можно выполнить последовательные преобразования

$$\rho \Lambda_t u = \rho \partial_t^2 u + \tfrac{1}{12} h_t^2 \rho \partial_t^4 u + \mathcal{O}(h_t^4) = \big(\rho I + \tfrac{1}{12} h_t^2 L\big)\big(\tfrac{1}{\rho} L u\big) + f + \tfrac{1}{12} h_t^2 \big(\partial_t^2 f + L\tfrac{f}{\rho}\big) + \mathcal{O}(h_t^4)$$
$$= \big(\rho I + \tfrac{1}{12} h_t^2 L_h\big) \tfrac{1}{\rho} \big(a_1^2 u_{11} + \ldots + a_n^2 u_{nn}\big) + f_{\boldsymbol{h}} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^4),\;\; \text{с}\;\; f_{\boldsymbol{h}} := f + \tfrac{1}{12} h_t^2 \big(\Lambda_t f + L_h \tfrac{f}{\rho}\big).$$

Далее, поскольку вспомогательное второе уравнение в (3) — обыкновенное дифференциальное уравнение по x_k, то его хорошо известная аппроксимация Нумерова приводит к формуле $s_{kN} u_{kk} - \Lambda_k u = \mathcal{O}(h_k^4)$ на $\omega_{\boldsymbol{h}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Если опустить остаточные члены в последних двух разложениях, то получится *трехслойная полуявная векторная компактная схема*

$$\rho \Lambda_t v - \big(\rho I + \tfrac{1}{12} h_t^2 L_h\big) \tfrac{1}{\rho} (a_1^2 v_{11} + \ldots + a_n^2 v_{nn}) = f_{\boldsymbol{h}},\;\; s_{kN} v_{kk} = \Lambda_k v \;\; \text{на}\;\; \omega_{\boldsymbol{h}},\;\; 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{4}$$

с основной искомой функцией $v \approx u$, определенной на $\bar\omega_h \times \overline{\omega}_{h_t}$, и вспомогательными функциями $v_{11} \approx u_{11}, \ldots, v_{nn} \approx u_{nn}$, определенными на $\bar\omega_h \times \omega_{h_t}$. Набор этих функций составляет искомую вектор-функцию.

Эта схема дополняется сеточными краевыми условиями

$$v|_{\partial\omega_{\boldsymbol h}} = g,\ \ a_k^2 v_{kk}|_{\partial\omega_{\boldsymbol h}} = g_k,\ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

в соответствии с краевым условием $u|_{\Gamma_T} = g$ и акустическим волновым уравнением в $\bar Q_T$:

$$g_k = \rho\partial_t^2 g - \sum_{1\leqslant l\leqslant n,\, l\neq k} a_l^2\partial_l^2 g - f \ \text{ при } \ x_k = 0, X_k,\ \ g_k = a_k^2\partial_k^2 g \ \text{ при } \ x_l = 0, X_l,\ \ 1 \leqslant l \leqslant n,\ l \neq k,$$

на частях Γ_T. При $g = 0$ правые части этих формул равны соответственно $-f$ и 0.

Кроме того, должна быть задана функция $v^m|_{m=1}$ с 4-м порядком аппроксимации. Часто это делается явным образом с использованием формулы Тейлора и волнового уравнения, см., например, [3, 4, 7, 10]. Эти громоздкие формулы используют производные высшего порядка u_0 и u_1; они неприменимы при негладких u_0 и u_1. Вместо этого, следуя [2, 9], построим уравнение для v^1, аналогичное основным уравнениям схемы (4):

$$\rho(\delta_t v)^0 = \tfrac12 h_t\big(\rho I + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h\big)\tfrac{1}{\rho}\big(a_1^2 v_{11}^0 + \ldots + a_n^2 v_{nn}^0\big) + u_{1\boldsymbol h} + \tfrac12 h_t f_{\boldsymbol h}^0,\ \ s_{kN} v_{kk}^0 = \Lambda_k v^0 \ \text{ на } \ \omega_h, \tag{6}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ и используются специальные $u_{1\boldsymbol h} \approx \rho u_1$ и $f_{\boldsymbol h}^0 \approx f_0 = f|_{t=0}$ такие, что

$$u_{1\boldsymbol h} := \big(\rho I + \tfrac16 h_t^2 L_h\big)u_1,\ \ f_{\boldsymbol h}^0 := f_{dh_t}^{(0)} + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h \tfrac{f_0}{\rho} \ \text{ на } \ \omega_h,$$
$$f_{dh_t}^{(0)} = \tfrac{7}{12}f^0 + \tfrac12 f^1 - \tfrac{1}{12}f^2 \ \text{ или } \ f_{dh_t}^{(0)} = \tfrac13 f^0 + \tfrac23 f^{1/2},\ \text{ с } \ f^{1/2} := f|_{t=h_t/2}.$$

Значения v_{kk}^0 на $\partial\omega_h$ могут быть взяты как в (5) (или, для гладкой u_0, с использованием $\partial_k^2 u_0$ на $\partial\Omega$). Благодаря этим формулам погрешность первого уравнения (6) имеет 4-й порядок

$$\hat\psi^0 := \rho(\delta_t u)^0 - \tfrac12 h_t\big(\rho I + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h\big)\tfrac{1}{\rho}\big(a_1^2 u_{11\,0} + \ldots + a_n^2 u_{nn\,0}\big) - u_{1\boldsymbol h} - \tfrac12 h_t f_{\boldsymbol h}^0 = \mathcal{O}(|\boldsymbol h|^4) \ \text{ на } \ \omega_h,$$

см. [2], где $|\boldsymbol h|^4 = |h|^4 + h_t^4$. Здесь и ниже $y_0 := y|_{t=0}$ для любой зависящей от t функции y.

Построенная схема является полуявной по времени. Функция v^{m+1} находится явно на ω_h из первых уравнений (4) при $1 \leqslant m \leqslant M-1$ и (6) при $m = 0$, когда вспомогательные функции $v_{11}^m, \ldots, v_{nn}^m$ известны на $\bar\omega_h$. А эти функции вычисляются из простых одномерных трехточечных разностных вторых уравнений (4) при $1 \leqslant m \leqslant M-1$ и (6) при $m = 0$ в совокупности с краевыми условиями в (5), где v^m задана. Тем самым существует определенная аналогия с МПН-методами в характере реализации схемы. С другой стороны, функции $v_{11}^m, \ldots, v_{nn}^m$ независимы и допускают многопоточное вычисление (реализованное в наших вычислениях), и можно хранить только их взвешенную сумму для экономии памяти компьютера.

Устойчивость и оценки погрешности 4-го порядка в энергетической норме

Начнем со вспомогательного общего результата об устойчивости в слабой энергетической норме и его следствии, вытекающего из [8].

Лемма 1 *Рассмотрим абстрактную трехслойную схему*

$$B_h\Lambda_t v + A_h v = \varphi \ \text{ в } \ H_h \ \text{ на } \ \omega_{h_t},\ \ B_h(\delta_t v)^0 + \tfrac12 h_t A_h v^0 = u^{(1)} + \tfrac12 h_t\varphi^0 \ \text{ в } \ H_h$$

для функции v: $\bar\omega_{h_t} \to H_h$. Здесь $B_h = B_h^* > 0$ и $A_h = A_h^* > 0$ — линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве H_h и такие, что $\frac14 h_t^2 A_h \leqslant (1-\varepsilon_0^2)B_h$ при некотором $0 < \varepsilon_0 < 1$. Верны оценки, выражающие устойчивость в слабой энергетической норме и ее следствие

$$\max_{0\leqslant m\leqslant M}\max\big\{\varepsilon_0\|v^m\|_{B_h}, \|I_{h_t}^m \bar s_t v\|_{A_h}\big\} \leqslant \|v^0\|_{B_h} + 2\|A_h^{-1/2}u^{(1)}\|_h + 2\big\|A_h^{-1/2}\varphi\big\|_{\tilde L^1_{h_t}(H_h)},$$
$$\varepsilon_0\max_{1\leqslant m\leqslant M}\|A_h^{-1/2}B_h\bar\delta_t v\|_h \leqslant (1+\varepsilon_0)\|v^0\|_{B_h} + (3+2\varepsilon_0)\big(\|A_h^{-1/2}u^{(1)}\|_h + \big\|A_h^{-1/2}\varphi\big\|_{\tilde L^1_{h_t}(H_h)}\big).$$

Здесь стоит норма $\|y\|_{\tilde L^1_{h_t}(H_h)} := \frac12 h_t\|y^0\|_h + h_t\sum_{m=1}^{M-1}\|y^m\|_h$ для функций y: $\{t_m\}_{m=0}^{M-1} \to H_h$.

Замечание 1 *Верна дополнительная оценка (без оператора усреднения $\bar{s}_t$)*

$$\varepsilon_0 \max_{0\leqslant m\leqslant M} \|I_{h_t}^m v\|_{A_h} \leqslant (2+2\varepsilon_0)\big(\|v^0\|_{B_h} + \|A_h^{-1/2}u^{(1)}\|_h + \big\|A_h^{-1/2}\varphi\big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)}\big).$$

Введем неоднородную версию вторых уравнений (4), (6):

$$s_{kN}v_{kk}^m = \Lambda_k v^m + b_k^m \ \text{ на } \ \omega_h,\ 0\leqslant m\leqslant M-1,\ 1\leqslant k\leqslant n, \tag{7}$$

с заданными функциями $b_1,\ldots,b_n$. В практике вычислений не бывает $b_1=\ldots=b_n=0$ из-за ошибок округления, поэтому необходимо изучить влияние $b_1,\ldots,b_n$ на v. Это также необходимо для вывода оценок погрешности.

Введем два самосопряженных оператора в H_h:

$$E_h := -(a_1^2 s_{1N}^{-1}\Lambda_1 + \ldots + a_n^2 s_{nN}^{-1}\Lambda_n),\ \ I_{\rho h} := \tfrac{1}{\rho}I + \tfrac{1}{12}h_t^2\big(\tfrac{1}{\rho}L_h\big)\tfrac{1}{\rho}I.$$

Справедливы неравенства $-L_h < E_h < -(3/2)L_h$ и $I_{\rho\boldsymbol{h}} = I_{\rho\boldsymbol{h}}^* < \rho^{-1}I \leqslant \underline{\rho}^{-1}I$.

Введем первое условие на h_t и $h_1,\ldots,h_n$:

$$\tfrac{1}{3}h_t^2\big(\tfrac{a_1^2}{h_1^2} + \ldots + \tfrac{a_n^2}{h_n^2}\big) \leqslant (1-\varepsilon)\underline{\rho} \ \text{ при некотором } \ 0<\varepsilon<1. \tag{8}$$

С его помощью можно оценить $I_{\rho\boldsymbol{h}}$ снизу и вывести двусторонние оценки

$$\varepsilon\tfrac{1}{\bar{\rho}}I \leqslant \varepsilon\tfrac{1}{\rho}I < I_{\rho\boldsymbol{h}} < \tfrac{1}{\rho}I \leqslant \tfrac{1}{\underline{\rho}}I \ \Leftrightarrow\ \underline{\rho}I \leqslant \rho I < I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1} < \varepsilon^{-1}\rho I \leqslant \varepsilon^{-1}\bar{\rho}I.$$

С помощью леммы 1, исключения $v_{11},\ldots,v_{nn}$ и надлежащей симметризации выводится новый результат об условной устойчивости полуявного векторного компактного метода.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия* (8) *и*

$$\tfrac{1}{4}h_t^2 E_h \leqslant (1-\varepsilon_0^2)\underline{\rho}I \ \ \textit{при некотором} \ \ 0<\varepsilon_0<1, \tag{9}$$

а $g = g_1 = \ldots = g_n = 0$ в краевых условиях (5)*. Тогда для обобщенной схемы* (4)-(6) *(см.* (7)*) верны оценки, выражающие устойчивость схемы в расширенной энергетической норме*

$$\max_{0\leqslant m\leqslant M}\max\big\{\varepsilon_0\|v^m\|_{E_h}, \|I_{h_t}^m \bar{s}_t E_h v\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}}\big\} \leqslant \|v^0\|_{E_h} + 2\big\|\tfrac{1}{\rho}u_{1\boldsymbol{h}}\big\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1}} + 2\big\|I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1/2}\big[\tfrac{1}{\rho}(f_{\boldsymbol{h}}+\beta_{\boldsymbol{h}})\big]\big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)},$$

$$\varepsilon_0 \max_{1\leqslant m\leqslant M}\|\bar{\delta}_t v^m\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1}} \leqslant (1+\varepsilon_0)\|v^0\|_{E_h} + (3+2\varepsilon_0)\big(\big\|\tfrac{1}{\rho}u_{1\boldsymbol{h}}\big\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1}} + \big\|I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1/2}\big[\tfrac{1}{\rho}(f_{\boldsymbol{h}}+\beta_{\boldsymbol{h}})\big]\big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)}\big),$$

при любых функциях $f_{\boldsymbol{h}}$, $b_1,\ldots,b_n$: $\{t_m\}_{m=0}^{M-1}\to H_h$ и $v^0, u_{1\boldsymbol{h}} \in H_h$ (поэтому здесь $f_{\boldsymbol{h}}$ и $u_{1\boldsymbol{h}}$ — не только функции, определенные выше) и

$$\beta_{\boldsymbol{h}}^m := \rho I_{\rho\boldsymbol{h}}(a_1^2 s_{1N}^{-1}b_1^m + \ldots + a_n^2 s_{nN}^{-1}b_n^m) \ \ \textit{в} \ \ H_h,\ 0\leqslant m\leqslant M-1.$$

Поскольку $E_h < \frac{3}{2}(-L_h)$ в H_h, то оба условия устойчивости (8) и (9) выполнены при

$$h_t^2\big(\tfrac{a_1^2}{h_1^2} + \ldots + \tfrac{a_n^2}{h_n^2}\big) \leqslant \min\{3(1-\varepsilon), \tfrac{2}{3}(1-\varepsilon_0^2)\}\underline{\rho}.$$

При $0<\varepsilon\leqslant 7/9$ это условие только в 1.5 раза жестче, чем аналогичное условие для стандартной явной трехслойной схемы 2-го порядка точности. Множитель 1.5 — оценка нормы операторов s_{kN}^{-1}.

Правые и левые части указанных в теореме оценок можно упростить следующим образом

$$\big\|I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1/2}\big[\tfrac{1}{\rho}(f_{\boldsymbol{h}}+\beta_{\boldsymbol{h}})\big]\big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)} \leqslant \underline{\rho}^{-1/2}\Big(\varepsilon^{-1/2}\|f_{\boldsymbol{h}}\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)} + \tfrac{3}{2}\max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 \sum_{k=1}^n \|b_k\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)}\Big),$$

$$\big\|\tfrac{1}{\rho}u_{1\boldsymbol{h}}\big\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1}} = \big\|I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1/2}\big(\tfrac{1}{\rho}u_{1\boldsymbol{h}}\big)\big\|_h \leqslant (\varepsilon\underline{\rho})^{-1/2}\|u_{1\boldsymbol{h}}\|_h,\ \ \underline{\rho}^{1/2}\|\bar{\delta}_t v^m\|_h \leqslant \|\bar{\delta}_t v^m\|_{I_{\rho\boldsymbol{h}}^{-1}}.$$

Для $w\in H_h$ введем $\|w\|_{H_h^1} := \|w\|_{-L_h} = (-L_h w, w)_h^{1/2}$ — сеточный аналог нормы в подпространстве Соболева $H_0^1(\Omega)$. Введем также энергетическую норму $\|y\|_{\mathcal{E}_h} := \big(\|\bar{\delta}_t y\|_h^2 + \|y\|_{H_h^1}^2\big)^{1/2}$.

Следующая теорема выводится на основе теоремы устойчивости 1. Подчеркнем, что в ней g и $f|_{\Gamma_T}$ — произвольные (а не только нулевые).

Теорема 2 *Пусть выполнены условия* (8), (9), *и* $v^0 = u^0$ *на* $\bar{\omega}_h$. *Тогда для схемы* (4)-(6) *верны оценка погрешности* $u - v$ *в расширенной энергетической норме и оценки погрешности* $\partial_k^2 u - v_{kk}$ *в более слабых "негативных" нормах*

$$\sqrt{\varepsilon}\varepsilon_0 \max_{1\leqslant m\leqslant M} \left(\|\bar{\delta}_t(u-v)^m\|_h + \|(u-v)^m\|_{H_h^1} + \sqrt{\varepsilon}\|I_{h_t}^m L_h(u-v)\|_h\right) = \mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^4),$$

$$\sqrt{\varepsilon}\varepsilon_0 \max_{1\leqslant k\leqslant n}\max_{0\leqslant m\leqslant M-1} \|(-\Lambda_k)^{-1/2}(\partial_k^2 u^m - v_{kk}^m)\|_h = \mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^4).$$

Здесь величины $\mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^4)$ *не зависят от* ε *и* ε_0.

Численный эксперимент в случае трех пространственных переменных

Рассмотрим погрешность $e(h,h_t)$ некоторой схемы в выбранной норме при $h_1 = \ldots = h_n = h$ и предположим, что ее скорость сходимости равна $p > 0$ как по h, так и по h_t, т.е. $e(h,h_t) = c_1 h^p + c_2 h_t^p$ с некоторыми $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Тогда при некотором $q > 1$ получим $e(h/q,h_t/q) = e(h,h_t)/q^p$ и искомое p можно найти по известной формуле типа Рунге

$$p = p_e = \ln\frac{e(h,h_t)}{e(h/q,h_t/q)}\Big/\ln q.$$

Разумеется, эта практическая формула дает приближенный результат, но с уменьшением h и h_t ее точность растет, пока погрешность не становится столь мала, что начинает играть роль вычислительная погрешность. Выберем $q = 5/3$ меньше наиболее стандартного $q = 2$, что позволяет сократить вычислительные затраты более чем вдвое, т.к. $(5/3)^4 \approx 7.72$, а $2^4 = 16$.

Пусть $a_k = 1$ (даже в случае переменной скорости звука в отличие от [4]), область $\Omega = (0,1)^3$ — куб, а сетка — кубическая с $N_k = N$, т.е. с $h_k = h = 1/N$, где $k = 1,2,3$. Пусть $T = 0.5$. Возьмем переменный коэфициент $\rho(x) = \sqrt{3}(1 + \cos^2 2\pi x_1 \cdot \cos^2 2\pi x_2 \cdot \cos^2 2\pi x_3)$ ($1/\rho(x)$ — квадрат скорости звука) с $\underline{\rho} = \sqrt{3}$ и точное гладкое решение типа бегущей волны

$$u(x,t) = \cos(t - x_1 - x_2 - x_3).$$

Данные f, u_0, u_1 и g задаются в соответствии с ним, и все они отличны от тождественного нуля.

Значения $N = 81,135,225,375$ и $M = 54,90,150,250$ выбираем так, чтобы отношение последовательных значений как N, так и M было постоянным и равным $q = 5/3$.

Программный код схемы написан на языке Pure C для 64-битной архитектуры. Используется компьютер с 6-ядерным процессором AMD© Ryzen© 5 7600X и 64 ГБ оперативной памяти. Результаты вычислений даны в таблице 1. Ее столбцы содержат погрешности $e_{L_h^2}$ в $H_h = L_h^2$-норме, $e_{H_h^1}$ в H_h^1-норме, $e_{\mathcal{E}_h}$ в $\mathcal{E}_h$-норме, все взятые в конечный момент времени $t = T$, и соответствующие порядки $p_{L_h^2}$, $p_{H_h^1}$, $p_{\mathcal{E}_h}$. Для схемы 4-го порядка все погрешности очень малы даже для самой грубой сетки с $N = 81$, $M = 54$, а все порядки довольно близки к 4, только порядки $p_{H_h^1}$, $p_{\mathcal{E}_h}$ начинают отдаляться от 4 при максимальных взятых $N = 375$, $M = 250$ из-за влияния вычислительной погрешности, поскольку соответствующие нормы содержат разностные отношения, а сами погрешности уже достигли значений порядка 10^{-13}.

Последний столбец таблицы содержит отношения времен ЦПУ для последовательных значений N и M; они достаточно близки к теоретическому значению 7.72.

Таблица 1

Схема 4-го порядка: погрешности $e_{L_h^2}$, $e_{H_h^1}$, $e_{\mathcal{E}_h}$, *скорости сходимости* $p_{L_h^2}$, $p_{H_h^1}$, $p_{\mathcal{E}_h}$ *и отношение времен ЦПУ для переменного* ρ *и решения типа бегущей волны*

N	M	$e_{L_h^2}$	$e_{H_h^1}$	$e_{\mathcal{E}_h}$	$p_{L_h^2}$	$p_{H_h^1}$	$p_{\mathcal{E}_h}$	CPU_{rel}
81	54	3.025E-11	1.906E-10	2.155E-10	–	–	–	–
135	90	3.983E-12	2.499E-11	2.825E-11	3.969	3.977	3.977	6.98
225	150	5.212E-13	3.264E-12	3.693E-12	3.981	3.985	3.984	7.41
375	250	6.792E-14	5.065E-13	5.932E-13	3.989	3.648	3.579	7.87

Таблица 2

Схема 2-го порядка: погрешности $e_{L^2_h}$, $e_{H^1_h}$, $e_{\mathcal{E}_h}$, скорости сходимости $p_{L^2_h}$, $p_{H^1_h}$, $p_{\mathcal{E}_h}$ и отношение времен ЦПУ для переменного ρ и решения типа бегущей волны

N	M	$e_{L^2_h}$	$e_{H^1_h}$	$e_{\mathcal{E}_h}$	$p_{L^2_h}$	$p_{H^1_h}$	$p_{\mathcal{E}_h}$	CPU_{rel}
81	54	3.112E-07	2.213E-06	2.408E-06	–	–	–	–
135	90	1.125E-07	8.011E-07	8.715E-07	1.991	1.989	1.990	6.92
225	150	4.062E-08	2.894E-07	3.147E-07	1.995	1.993	1.994	7.44
375	250	1.465E-08	1.044E-07	1.135E-07	1.997	1.996	1.996	7.72

Для сравнения в таблице 2 представлены аналогичные результаты для стандартной трехслойной явной схемы 2-го порядка точности. Очевидно резкое уменьшение погрешностей и увеличение скорости их убывания для схемы 4-го порядка в сравнении со схемой 2-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zlotnik A. *On Properties of an Explicit in Time Fourth-Order Vector Compact Scheme for the Multidimensional Wave Equation*. Preprint. 2021;1–15. Режим доступа: https://arxiv.org/abs/2105.07206.
2. Zlotnik A., Lomonosov T. On Stability and Error Bounds of an Explicit in Time Higher-Order Vector Compact Scheme for the Multidimensional Wave and Acoustic Wave Equations. *Appl. Numer. Math.* 2024;195:54–74. DOI: 10.1016/j.apnum.2023.09.006.
3. Jiang Y., Ge Y. An Explicit Fourth-Order Compact Difference Scheme for Solving the 2D Wave Equation. *Adv. Difference Equat.* 2020;415:1–14. DOI: 10.1186/s13662-020-02870-z.
4. Jiang Y., Ge Y. An Explicit High-Order Compact Difference Scheme for the Three-Dimensional Acoustic Wave Equation with Variable Speed of Sound. *Int. J. Comput. Math.* 2023;100(2):321–341. DOI: 10.1080/00207160.2022.2118524.
5. Валиуллин А. Н. *Схемы повышенной точности для задач математической физики*. Новосибирск: Изд-во НГУ; 1973.
6. Matus P. P., Anh H. T. K. Compact Difference Schemes for the Multidimensional Klein-Gordon Equation. *Diff. Equat.* 2022;58(1):120–138. DOI: 10.1134/S0012266122010128.
7. Smith F., Tsynkov S., Turkel E. Compact High Order Accurate Schemes for the Three Dimensional Wave Equation. *J. Sci. Comput.* 2019;81(3):1181–1209. DOI: 10.1007/s10915-019-00970-x.
8. Zlotnik A., Kireeva O. On Compact 4th Order Finite-Difference Schemes for the Wave Equation. *Math. Model. Anal.* 2021;26(3):479–502. DOI: 10.3846/mma.2021.13770.
9. Zlotnik A., Čiegis R. On Construction and Properties of Compact 4th Order Finite-Difference Schemes for the Variable Coefficient Wave Equation. *J. Sci. Comput.* 2023;95(1):3. DOI: 10.1007/s10915-023-02127-3.
10. Deng D., Zhang C. Analysis of a Fourth-Order Compact ADI Method for a Linear Hyperbolic Equation with Three Spatial Variables. *Numer. Algorithms*. 2013;63:1–26. DOI: 10.1007/s11075-012-9604-8.
11. Liao H.-L., Sun Z.-Z. A Two-Level Compact ADI Method for Solving Second-Order Wave Equations. *Int. J. Comput. Math.* 2013;90(7):1471–1488. http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2012.754016.
12. Liao W. On the Dispersion and Accuracy of a Compact Higher-Order Difference Scheme for 3D Acoustic Wave Equation. *J. Comput. Appl. Math.* 2014;270:571–583. DOI: 10.1016/j.cam.2013.08.024.
13. Zhang W. A New Family of Fourth-Order Locally One-Dimensional Schemes for the 3D Elastic Wave Equation. *J. Comput. Appl. Math.* 2019;348:246–260. DOI: 10.1016/j.cam.2018.08.056.
14. Li K., Liao W., Lin Y. A Compact High Order Alternating Direction Implicit Method for Three-Dimensional Acoustic Wave Equation with Variable Coefficient. *J. Comput. Appl. Math.* 2019;361(1):113–129. DOI: 10.1016/j.cam.2019.04.013.
15. Zlotnik A., Čiegis R. On Higher-Order Compact ADI Schemes for the Variable Coefficient Wave Equation. *Appl. Math. Comput.* 2022;412:126565. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126565.