

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

**МЕТОДИКА «ПОЧЕМУ БОЛЬШИНСТВО ОШИБЛОСЬ?»:
МНЕНИЯ РЕШАТЕЛЕЙ О ПРИЧИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ
И ОШИБОЧНЫХ ОТВЕТОВ В ЗАДАЧАХ НА
НЕТРАНЗИТИВНОСТЬ ПРЕВОСХОДСТВА**

А.Н. ПОДДЬЯКОВ

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Впервые разработана методика и проведен эксперимент, в котором участникам ($n = 135$) помимо решения задач на логическое следование применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства (отношений по принципу игры «камень, ножницы, бумага»: А превосходит В, В превосходит С, С превосходит А) задавалась еще одна задача. Это задача на рефлексию – о причинах правильных и ошибочных решений таких задач другими людьми. Ранее представления людей о причинах чужих логических ошибок систематически не изучались.

Для первых двух использованных задач на логическое следование, сходных по структуре, но относящихся к разному предметному содержанию, был подтвержден ранее установленный факт. Ситуацию нетранзитивности превосходства, представленную в одной задаче (про три команды борцов, побеждающих друг друга по принципу «камень, ножницы, бумага»), подавляющее большинство участников считает возможной. И подавляющее большинство же считает невозможной ситуацию, представленную в другой задаче – про наборы карандашей, различающихся по длине (большинство карандашей из набора А длиннее большинства карандашей из набора В, большинство карандашей из набора В длиннее большинства карандашей из набора С, большинство карандашей из набора С длиннее большинства карандашей из набора А), при том что обе ситуации возможны.

Наиболее распространенные ответы участников о причинах чужих ошибок при решении указанных задач на нетранзитивность превосходства состояли в следующем. Задача про борцов – это задача про живое, динамичное, взаимодействующее, и здесь возможны самые разные варианты исходов, в отличие от задачи про карандаши – неживые, статичные, не взаимодействующие друг с другом, где парадоксальные исходы, выглядящие для многих людей противоречием с некоторыми правилами математики и логики, представляются невозможными.

Ключевые слова: психология мышления, решение задач и проблем, нетранзитивность превосходства, мнения о причинах правильных и ошибочных ответов.

Изучению причин ошибок, совершаемых при решении задач, посвящено множество работ, укажем лишь некоторые: (Аллахвердов, 2010; Аллахвердов, Воскресенская, 2011; Егоренко, Санина, 2021; Исаев, Марголис, Сафронова, 2023; Майкова, 2008; Основные ошибки..., 2022; Самые частые ошибки..., 2021; Санина, Соколов, 2021;

Соколов, 2023; Тарасова, 2004; Ahuja, 2018; Clements, 1980; Dörner, Güss, 2022; Kingsdorf, Krawec, 2014; Lai, 2012; Radatz, 1979). При этом малоизученным остается вопрос, каковы мнения обычных людей (не логиков, математиков, когнитивных психологов и дидактов) о причинах таких ошибок. Представления о причинах чужих ошибок – важная составляющая “theory of mind”, представлений о психике и психологии других. В профессиональной психологии мышления и решения задач и проблем «наиболее информативными выступают

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-18-00695 «Логико-когнитивные модели рассуждений: принципы демаркации нормативного и дескриптивного».

случаи ошибочного и затрудненного решения», позволяющие раскрыть те или иные механизмы мыслительной деятельности (Спиридонов, 2022, с. 161). К этому можно добавить, что суждения людей – не профессиональных психологов – о причинах ошибок большинства, или типичных ошибок (как мы увидим, суждения далеко не всегда наивные), могут быть важным дополнительным источником информации для размышления. Как отмечает Е.Г. Драгалина-Черная в комментарии к нашему исследованию, изучение представлений людей о причинах чужих ошибок может внести вклад в разработку теоретических моделей обыденных представлений о логике и психологии рассуждений.

В данной статье описан эксперимент, в котором участникам ($n=135$) помимо решения задач на логическое следование применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства (по принципу игры «камень, ножницы, бумага»: А превосходит В, В превосходит С, С превосходит А) задавалась еще одна задача. Это задача на рефлексию – о причинах правильных и ошибочных решений множества других людей в этих задачах.

Нетранзитивные отношения превосходства (предпочтительности) активно изучаются в различных науках: биологии, математике, теории принятия решений, поведенческой экономике, психологии, философии (см. междисциплинарные обзоры: Поддьяков, 2019; Fisher, 2008; Klimenko, 2015; Poddiakov, 2023). В контексте нашей статьи важно, что доступные обычным людям научно-популярные тексты с описаниями и объяснениями нетранзитивности превосходства и логико-математическими задачами по теме стали публиковаться с начала 60-х гг. прошлого века, вскоре после открытия этого явления польскими математиками Г. Штейнгаузом и С. Трибулой (Trybuła, 1961; Steinhaus, Trybuła, 1959). Прежде всего, это некоторые математические

колонки М. Гарднера в журнале “Scientific American” (Gardner, 1963, 1970, 1974); переводы на русский: (Гарднер, 1972, 1988, 1990). В настоящее время тексты о нетранзитивности представлены в образовательных и научно-популярных периодических изданиях – это «Учительская газета» (Буфеев, 2014), «Квант» (Ильков, 2009; Нестеренко, 2021; Фомин, 2022а,б), «Математическое просвещение» (Богданов, 2010), «Наука и жизнь» (Поддьяков, 2022), “Scientific American” (Murtagh, 2023), “QuantaMagazine” (Arnold, 2020; Klarreich, 2023), “Mathematics Magazine” (Conrey et al., 2016; Hulko, Whitmeyer, 2019), в задачном разделе портала «Элементы большой науки» (Авилов, 2021), в главах научно-популярных книг (Кодоньо, 2020; Сингх, 2016; Шейнерман, 2018) и др.

Таким образом, тема нетранзитивности представлена в общественном сознании – но лишь в определенном его сегменте: среди людей, интересующихся научно-популярными математическими источниками (профессиональных математиков и биологов здесь не рассматриваем). Большинство же обычных людей считает многие ситуации нетранзитивности превосходства невозможными, хотя на самом деле они возможны (Поддьяков, 2011), см. также работы, выполненные под нашим руководством (Быкова, 2018; Пермогорский, 2015).

Эта кажущаяся невозможность не выглядит странно, если учесть, что даже в математике данные ситуации квалифицируются как парадоксы и как возможный источник розыгрышей для не посвященных в тему (Сингх, 2016; Murtagh, 2023; Singh, 2004). «Нетранзитивные отношения абсурдны и противоречат здравому смыслу, но именно поэтому они приводят в восторг математиков», не без некоторого утрирования пишет С. Сингх (2016, с. 116). Как показало наше эмпирическое исследование, некоторые нетранзитивные

отношения, действительно, противоречат здравому смыслу обычных людей, но другие — вполне соответствуют здравому смыслу и выглядят достаточно логично и не абсурдно (Поддьяков, 2011).

Исходя из всего сказанного выше, можно заключить, что мнения, представления людей о причинах чужих правильных и ошибочных ответов в задачах на нетранзитивность превосходства, представления о здравом смысле в этой области могут быть весьма интересны для психологического исследования.

МЕТОДИКА «ПОЧЕМУ БОЛЬШИНСТВО ОШИБЛОСЬ?»

Участникам эксперимента последовательно предлагались две задачи с одной и той же логической структурой, но разными объектами, фигурирующими в этих задачах. В обеих задачах задавался вопрос о возможности логического следования «если — то» применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства.

После дачи ответов участниками им сообщалось на основе данных реальных психологических исследований (Быкова, 2018; Поддьяков, 2011), как люди по-разному решили эти две задачи. Вопрос участнику: «Как вы думаете, каковы могут быть причины такого расхождения в результатах? Почему большинство людей решило одну задачу правильно, а другую неправильно?».

Таким образом, участникам предлагалось решить три задачи:

а) две задачи на логическое следование, предъявленные в ранее проведенном реальном психологическом эксперименте (правильный ответ в инструкции изначально не дается, а сообщается после решения обеих задач);

б) метазадачу (на рефлексивный «взгляд сверху») — задачу объяснения, почему участники эксперимента по-разному решили две первые задачи.

Инструкция участнику

«В одном психологическом исследовании участников спрашивали, какие ситуации превосходства возможны, а какие нет. Среди прочих вопросов там были две следующие задачи.

1. Есть три команды борцов, в каждой команде по шесть борцов. В турнире каждый борец одной команды встречался с каждым из борцов двух других команд.

Если известно, что:

- борцы первой команды одержали больше побед над борцами второй команды, чем потерпели от них поражений

и

- борцы второй команды одержали больше побед над борцами третьей команды, чем потерпели от них поражений,

то может ли при этом быть так, что борцы третьей команды одержали больше побед над борцами первой команды, чем потерпели от них поражений?

Как вы считаете, каков правильный ответ?

Можете ли вы его обосновать? Если да, напишите, пожалуйста, обоснование.

2. Есть три различающихся набора карандашей. В каждом наборе по шесть карандашей разной длины. Сравниваем по длине каждый карандаш с каждым.

Если известно, что:

- карандаши из первого набора чаще оказывались длиннее карандашей из второго набора

и

- карандаши из второго набора чаще оказывались длиннее карандашей из третьего набора,

то может ли при этом быть так, что карандаши из третьего набора чаще оказывались длиннее карандашей из первого набора?

Как вы считаете, каков правильный ответ?

Можете ли вы его обосновать? Если да, напишите, пожалуйста, обоснование.

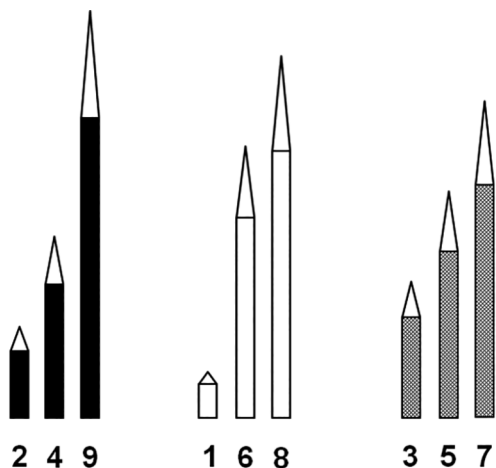


Рис. 1. Рисунок 1, предъявленный участником.

Черный цвет на данной черно-белой иллюстрации – в оригинале красный, белый – в оригинале зеленый, серый – в оригинале синий, оригинальные цвета см. в (Poddiakov, 2019). Подпись: «Рассмотрим 3 набора карандашей разной длины. Устраиваем турнир – у какой команды карандаши чаще длиннее. Сравниваем каждый карандаш одного набора с каждым из других наборов»

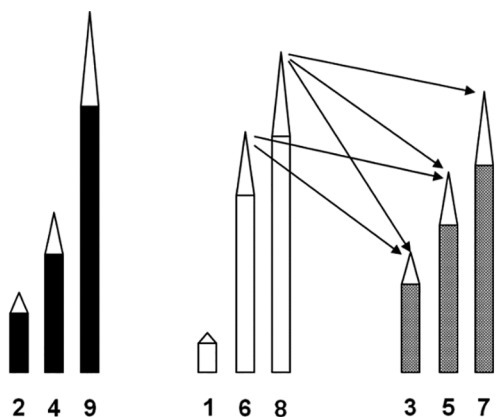


Рис. 3. Рисунок 3, предъявленный участником.

Подпись: «Зеленые карандаши побеждают синих 5 раз из 9»

3. Справка: правильный ответ в обеих задачах – и о карандашах, и о борцах – «да, так может быть».

Здесь участникам показывались четыре наглядные схемы, иллюстрирующие возможность нетранзитивных наборов

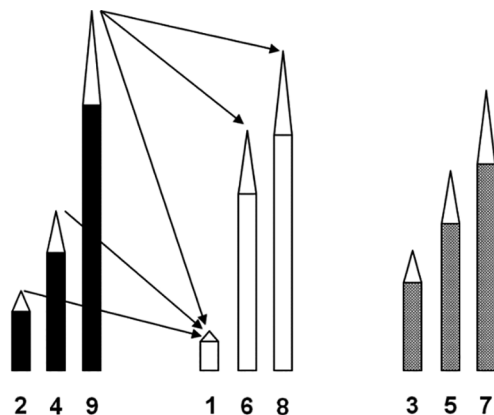


Рис. 2. Рисунок 2, предъявленный участником.

Подпись: «Красные карандаши побеждают зеленых 5 раз из 9»

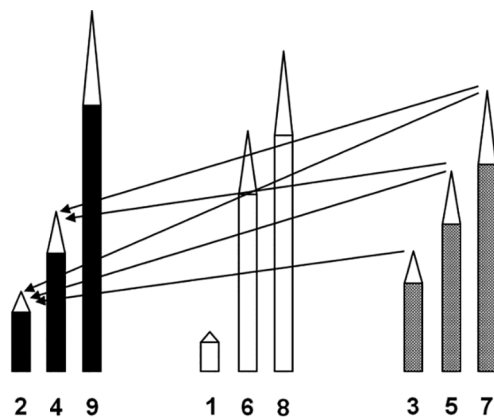


Рис. 4. Рисунок 4, предъявленный участником.

Подпись: «Синие карандаши побеждают красных 5 раз из 9»

карандашей – таких, где большинство карандашей из набора А длиннее большинства карандашей из набора В, большинство карандашей из набора В длиннее большинства карандашей из набора С, а большинство карандашей из набора С длиннее большинства карандашей из набора А. Числа для длин взяты из древнекитайского квадрата, описанного М. Гарднером в контексте нетранзитивности (Gardner, 1963; Гарднер, 1972, с. 344).

Далее экспериментатор говорил:

«Итак, карандаши из красного набора чаще оказывались длиннее карандашей из зеленого набора, карандаши из зеленого набора чаще оказывались длиннее карандашей из синего набора, карандаши из синего набора чаще оказывались длиннее карандашей из красного набора.

Но подавляющее большинство решило задачу о карандашах неправильно (они ответили, что так быть не может), а задачу о борцах – правильно (ответили, что так может быть).

Как вы думаете, каковы могут быть причины такого расхождения в результатах: почему большинство людей решило задачу о борцах правильно, а задачу о карандашах неправильно?».

Участники давали ответы в письменном виде.

Для изучения эффекта последовательности эти две задачи давались в одной экспериментальной группе в том порядке, который описан выше (сначала – задача про борцов, после нее – задача про карандаши), а в другой экспериментальной группе – наоборот: сначала задача про карандаши, после нее – задача про борцов.

Участники: 135 человек в возрасте от 17 до 21 года, студенты I курса гуманитарного факультета без вступительного экзамена по математике. В первой серии (где вначале давалась задача про борцов, затем – задача про карандаши) участвовали 70 человек (62 женщины, 8 мужчин), во второй серии (где вначале давалась задача про карандаши, затем – задача про борцов) – 65 человек (57 женщины, 8 мужчин).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Решения участниками задач про борцов и про карандаши

Распределение участников, давших правильные и ошибочные ответы в серии 1 и серии 2, представлено в табл. 1. Правильный ответ в обеих задачах – да, представленная ситуация возможна (и в турнире трех команд борцов, и при сравнении трех наборов карандашей по длине).

Можно видеть, что в обеих группах абсолютное большинство считало возможной ситуацию нетранзитивности превосходства с командами борцов (что правильно) и невозможной – с наборами карандашей, хотя она тоже возможна (т.е. в этой задаче большинство ошиблось). Это полностью согласуется с ранее полученными результатами (Быкова, 2018; Поддьяков, 2011) и еще раз подтверждает контринтуитивность некоторых ситуаций нетранзитивности, их «абсурдность с точки зрения здравого смысла», по С. Сингху.

Решили обе задачи правильно 13 человек (19%) в серии 1 и 10 человек (15%) в серии 2, обе задачи неправильно – 17 человек (24%) в серии 1 и только 4 человека (6%) в серии 2.

Уменьшение числа участников, ошибочно ответивших на вопросы первых двух задач, в серии 2 по сравнению с серией 1 связано со следующим. Когда задача про борцов дается второй – после задачи про карандаши (серия 2), число ошибочных ответов к ней уменьшается – с 31 до 11% (различия посчитаны для абсолютных значений, $p < 0,004$, критерий χ^2 двусторонний,

Таблица 1

Число участников, давших правильные и ошибочные ответы в серии 1 и серии 2

Номер серии и число участников	Задача про борцов		Задача про карандаши	
	правильные ответы дали	ошибочные ответы дали	правильные ответы дали	ошибочные ответы дали
Серия 1 (70 чел.)	48 (69%)	22 (31%)	18 (26%)	52 (74%)
Серия 2 (65 чел.)	58 (89%)	7 (11%)	13 (20%)	52 (80%)

$T = 8,529$). Для задачи про карандаши этот эффект не отмечается.

Диапазон ответов участников по параметру «правильность (соответствие нормативным требованиям к рассуждениям) — ошибочность» включал на одном конце оси математически выверенный правильный ответ на вопрос о карандашах с приведенным конкретным примером (одна участница) и ошибочные ответы, обоснования которых могли различаться. Приведем некоторые примеры обоснований ошибочных ответов к задаче о карандашах.

«Потому что карандаши из первого набора $>$ карандашей из второго набора, а в свою очередь карандаши из второго набора $>$ карандашей из третьего набора, т.е. имеем $1 > 2, 2 > 3 \Rightarrow 1 > 3$ ». «Так как 1 длиннее, чем 2, 2 длиннее, чем 3». В этих и других случаях участники не видят разницы между отношением «чаще быть длиннее», указанном в условии, и отношением «быть длиннее». Отношение «быть длиннее» связывает два карандаша (карандаш А длиннее карандаша В). На этой основе можно сделать так называемое транзитивное выведение, умозаключение (*transitive inference*): если карандаш А длиннее карандаша В, а карандаш В длиннее карандаша С, то карандаш А длиннее карандаша С. Отношение «быть длиннее» при неизменности длин карандашей всегда транзитивно (если $A > B, B > C$, то $A > C$). Онтогенез понимания транзитивного выведения изучается во многих психологических исследованиях (см., например: Phillips et al., 2009).

Отношение «чаще быть длиннее» связывает не два карандаша, а множество карандашей из одного набора и множество карандашей из другого набора, и здесь картина более сложная — в общем случае это отношение нетранзитивно. Самостоятельно обнаружить и понять это обычным людям достаточно сложно, изначально большинство не верит в такую возможность. При этом понимание нетранзитивности практически не изучается.

Вернемся к ответам участников. Также давались обоснования, свидетельствующие о том, что некоторые участники не поняли условия задачи и не учитывают их (при том, что другие участники поняли и учли).

Например, при решении задачи про карандаши одна из участниц пишет: «Нет [так не может быть]. Потому что длина карандашей не меняется».

Но подчеркнем, что в условии было написано: «Есть три различающихся набора карандашей. В каждом наборе по 6 карандашей разной длины». Итак, в каждом наборе — карандаши разной длины. Это условие было проигнорировано некоторыми участниками, и другая участница, решившая задачу неправильно, пишет о причинах: «Было ощущение, что они (карандаши) в наборах в точности все одинаковые».

Участница, решившая задачу правильно, поясняет: «Да [так может быть], так как в условии написано “чаще” [“чаще оказывались длиннее”], значит, нельзя исключать возможность того, что попадется более длинный карандаш». Она понимает, что карандаши могут быть разными. Далее она пишет о причине неправильных ответов большинства: «В задаче о карандашах большинство просто не читалось в условии и не заметило это “чаще”».

Пример правильного решения задачи о борцах: «Да [так может быть]. Например, команда 1 делает хороший проход в ноги и этим выигрывает у команды 2. Команда 2 по кулачке выигрывает у команды 3. Команда 3 умеет обороняться от прохода в ноги и побеждает». Судя по используемым словам («кулачка» — использование ударов кулаками в смешанных единоборствах, сочетающих множеств техник, «проход в ноги» — сближение с соперником и захват его ног), участник вполне ориентируется в том, о чем пишет, и может сделать обоснованный вывод о возможности нетранзитивного исхода в турнире трех команд

борцов. Фактически он, видимо, не зная этого, описал нечто сходное со структурой элементов в парадоксе нетранзитивного голосования Кондорсе (кондорсе-подобную структуру) в варианте «нападение — защита — уязвимые места» (Поддьяков, 2006; Poddiakov, Valsiner, 2013).

Другое обоснование правильного ответа в задаче о борцах связано со случайностью: «Потому что даже сильный опытный борец может проиграть, всё зависит от случая».

Пример обоснования ошибочного ответа в задаче о борцах: «Так как у 1-й команды > побед, чем у 2-й команды, а у 2-й команды > побед, чем у 3-й команды». Но в условии написано: «Борцы 1-й команды одержали больше побед над борцами 2-й команды, чем потерпели от них поражений, и борцы 2-й команды одержали больше побед над борцами 3-й команды, чем потерпели от них поражений». Здесь сравнивается число побед одной команды над другой с числом поражений от этой второй команды, а вовсе не число побед первой команды над второй с числом побед второй над третьей (как это делает участник). Либо он не понял условия, либо сделал неправильное заключение об эквивалентности двух указанных видов сравнения.

Мнения участников о причинах правильных и ошибочных ответов

Напомним, что третий вопрос участникам был: «Как вы думаете, каковы могут быть причины такого расхождения в результатах: почему большинство людей решило задачу о борцах правильно, а задачу о карандашах неправильно?». Можно выделить три вида объяснений, даваемых участниками.

1. Доминирующие ответы состояли в том, что задача про борцов — это задача про живое, динамичное, взаимодействующее, и здесь возможны самые разные варианты исходов, в отличие от задачи про карандаши — неживые, статичные,

не взаимодействующие друг с другом и больше подчиняющиеся законам логики. Приведем примеры таких ответов.

«Возможно, потому что бой — азартное спортивное событие — часто ассоциируется с везением, риском и т.д., т.е. предположить такой, на первый взгляд, нелогичный исход легче. Но карандаши — что-то сугубо материальное, существующее независимо от удачи и др. Поэтому в ситуации с карандашами хочется ответить отрицательно».

«Потому что в первой задаче всё напрямую связано с людьми и не всегда всё происходит в точности как планируешь (всё может измениться в моменте из-за физической подготовки или же самочувствия)».

«С карандашами нет таких факторов, как мотивация».

«Мы видим эти ситуации по-разному: в случае борьбы для нас это что-то непредсказуемое, зависящее от многих факторов и просто от случая; а с карандашами длина кажется нам чем-то объективным и не изменяющимся».

«Люди (борцы) более непредсказуемы в отличие от постоянных карандашей».

«В задаче с борцами на фактор победы могли повлиять разные социальные, физиологические факторы, т.е. изменяемые переменные, а в задаче о карандашах переменные неизменны».

«В задаче 1 (про борцов) играет (роль) человеческий фактор, а в задаче 2 — законы логики».

2. Также, как отмечено выше, некоторые участники видели причину ошибки в неправильной интерпретации условий задачи о карандашах: «Потому что в задаче о карандашах люди подумали, что в каждом наборе все карандаши равной длины и анализировали именно такую ситуацию, не предполагая разной длины карандашей в наборе».

3. Особый тип объяснений — через возможность или затрудненность зрительного представления содержания этих

задач и идентификации с теми субъектами или объектами, которые в них фигурируют. Участники писали, объясняя причины правильных ответов в задаче про борцов и ошибочных ответов про карандаши, что на позицию борцов стать проще. Приведем примеры соответствующих ответов.

«Задачу о борцах проще визуализировать и понять, потому что мы люди, а не карандаши».

«Потому что люди могли легче поставить себя на место борцов, так как они живые, одушевленные объекты, в то время как карандаши — это неодушевленные объекты, следовательно, поставить себя на их место сложнее».

«Тяжело представить набор карандашей с разной длиной, в то время как с людьми человек может представить этот случай у себя в голове».

«Потому что сложнее в голове нарисовать задачу с карандашами, чем с борцами».

И были участники, затруднившиеся в обнаружении причин чужих правильных и ошибочных ответов. «Честно, я не могу предположить примерную причину, почему большинство людей решило задачу о борцах правильно, а задачу о карандашах неправильно, потому что я по своим ответам вхожу в другую группу людей» (решила задачу о карандашах правильно, а о борцах — неправильно).

Неконтролируемая экспериментатором ориентация участников на «психологичность» исследования

Отметим обнаруженный важный факт, не имеющий прямого отношения к теме нетранзитивности. В ответах некоторых участников был представлен фактор рефлексии ими того, как может быть устроено психологическое исследование и связанное с этой рефлексией ожидание ловушки, «подвоха» от исследователя (использовалось именно слово «подвох»). Участники писали, что они и, возможно, другие участники исходили из следующего: раз

на задачу 1 (про борцов) правильный ответ — «да, так может быть», то на вторую, похожую, задачу правильный ответ должен быть другой («иначе смысла нет», как написал один из участников). Более развернутый ответ другой участницы: «Причина в том, что задачи достаточно идентичны между собой, и даже решив задачу 1 правильно, человек смотрит на задачу 2 и уже ищет какой-то подвох, ведь он считает, что не может быть двух одинаковых ответов».

Возможно, в провоцировании этого явления сыграла роль первая фраза инструкции: «В одном психологическом исследовании участников спрашивали, какие ситуации возможны, а какие нет». Однако в данном эксперименте эта логика и ожидания, возникшие у некоторых участников, не сработали: у задач был одинаковый ответ (что тоже может ощущаться как «подвох»).

Здесь следует упомянуть классификацию участников Р.М. Фрумкиной. Она выделила три типа участников по степени выраженности их рефлексивной позиции в отношении целей экспериментатора и готовности действовать тем или иным образом на основе этой рефлексии. «Простодушный» (он же «минималист») минимизирует умственную работу о целях экспериментатора и решает задачу как таковую, удовлетворяясь наиболее очевидными решениями. «Усердный» (он же «максималист») пытается понять замысел экспериментатора и добросовестно найти все правильные решения, задуманные последним, исходя из своего понимания этого замысла. «Оригинал» (или «подозрительный») тоже старается мысленно поставить себя на место экспериментатора и понять его замысел, но с другой установкой: «не попасть в ловушку экспериментатора, быть не таким, как все» (Фрумкина, 1984, с. 161), или как минимум быть не таким, как большинство попавшихся. Это может быть успешной стратегией, и в ряде случаев участники могут перехитрить экспериментатора,

но при этом есть риск перемудрить, как и произошло с некоторыми участниками в нашем эксперименте.

ВЫВОДЫ

1. Впервые разработана методика и проведен эксперимент, в котором участникам помимо решения задач на логическое следование применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства (по принципу игры «камень, ножницы, бумага») задавалась еще одна задача — на рефлексивный взгляд «сверху»: о причинах правильных и ошибочных решений этих задач другими людьми. Это позволило выявить разнообразие логических и математических ошибок, ведущих к неправильным ответам.

Мнение участников о причинах массовых правильных и ошибочных ответов других людей было запрошено впервые: ранее такие исследования, насколько нам известно, не проводились, представления обычных людей о причинах чужих логических и математических ошибок систематически не изучались.

2. Для первых двух использованных задач на логическое следование, сходных по структуре, но относящихся к разному предметному содержанию, был подтвержден ранее установленный факт. Ситуацию нетранзитивности превосходства, представленную в одной задаче (про три команды борцов, побеждающих друг друга по принципу «камень, ножницы, бумага»), подавляющее большинство участников считает возможной. И подавляющее большинство же считает невозможной ситуацию, представленную в другой задаче: про наборы карандашей, различающихся по длине (большинство карандашей из набора А длиннее большинства карандашей из набора В, большинство карандашей из набора В длиннее большинства карандашей из набора С, большинство карандашей из набора С длиннее большинства карандашей из набора А), при том, что обе ситуации возможны.

3. Можно выделить три вида обоснований, даваемых участниками при объяснении чужих ошибочных ответов при решении указанных задач.

А. Наиболее распространенные ответы участников состояли в следующем. Задача про борцов — это задача про живое, динамичное, взаимодействующее, и здесь возможны самые разные варианты исходов, в отличие от задачи про карандаши — неживые, статичные, не взаимодействующие друг с другом, где парадоксальные исходы, выглядящие для многих людей противоречием с некоторыми правилами математики и логики, представляются невозможными.

Б. Объяснения через неучет решающими условий задачи («не вчитались в условия»).

В. Объяснения через указание на возможность или затрудненность зрительного представления содержания этих задач и идентификации с теми субъектами или объектами, которые в них фигурируют («Задачу о борцах проще визуализировать и понять, потому что мы люди, а не карандаши»).

4. В ответах некоторых участников был представлен фактор рефлексии ими того, как может быть устроено психологическое исследование и связанное с этой рефлексией ожидание ловушки, «подвоха» от исследователя. Участники писали, что они и, возможно, другие участники исходили из того, что раз в первой задаче правильный ответ: «да, так может быть», то во второй, похожей задаче, правильный ответ должен быть другой. Причина, возможно, в первой фразе инструкции: «В одном психологическом исследовании участники спрашивали, какие ситуации возможны, а какие нет». Однако в данном эксперименте эта логика и ожидания, возникшие у некоторых участников, не сработали: у задач был одинаковый ответ (что тоже может ощущаться как «подвох»).

5. В дальнейшем представляет интерес проведение эксперимента по описанной

методике на двух других выборах: а) студентов, чья основная учебная деятельность связана с математикой и логикой; б) студентов, чья основная учебная деятельность связана с психологией. Это позволит получить более многомерную картину представлений о причинах правильных и ошибочных ответов.

1. *Авилов Н.* Нетранзитивные кубики. URL: <https://elementy.ru/problems/2590/>
2. *Аллахвердов В.А.* Зачем нужно сознание или почему мы делаем ошибки // Экспериментальная психология в России: традиции и перспективы / Под ред. В.А. Барабанщикова. М.: Ин-т психологии РАН, 2010. С. 345–349.
3. *Аллахвердов В.А., Воскресенская Е.Ю.* Ошибки как закономерный результат работы идеальной познающей системы // Современная экспериментальная психология: В 2 т. Т. 2 / Под ред. В.А. Барабанщикова. М.: Ин-т психологии РАН, 2011. С. 29–38.
4. *Богданов И.И.* Нетранзитивные рулетки // Математическое просвещение. 2010. Сер. 3. Вып. 14. С. 240–255.
5. *Быкова А.А.* Особенности понимания нетранзитивности превосходства в различных контекстах. Выпускная квалификационная работа. М.: НИУ ВШЭ, 2018.
6. *Буфеев С.* Парадокс нетранзитивных отношений // Учительская газета. 2014. № 48–49. 2 декабря 2014. URL: <https://web.archive.org/web/20221109222831/https://ug.ru/paradoks-netranzitivnyh-otnoshenij/>
7. *Гарднер М.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.
8. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972.
9. *Гарднер М.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.
10. *Егоренко Т.А., Санина С.П.* Подходы к выявлению типовых ошибок младших школьников при освоении естественно-научных понятий // Психолого-педагогич. исслед. 2021. Т. 13. № 4. С. 94–106. doi:10.17759/psyedu.2021130406
11. *Ильков Л.* Парадоксы командных соревнований // Квант. 2009. № 1. С. 44–46.
12. *Исаев Е.И., Марголис А.А., Сафронова М.А.* Психологический анализ компетентности учителя начальной школы в работе над предметными ошибками обучающихся // Психол. наука и образование. 2023. Т. 28. № 1. doi:10.17759/psr.2023000002
13. *Кодонь М.* Математика за чашечкой кофе. Минск: Дискурс, 2020.
14. *Майкова Н.С.* Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения // Известия Росс. гос. педагог. ун-та им. А.И. Герцена. Аспирантские тетради. 2008. № 33. Ч. 2: (Педагогика и психология, теория и методика обучения). С.113–118.
15. *Нестеренко А.* Нетранзитивные кости // Квант. 2021. № 10. С. 30–38.
16. Основные ошибки выпускников на ЕГЭ по химии: как их избежать. М.: Рособрнадзор. 24 мая 2022 г. URL: <https://obrnadzor.gov.ru/novosti-regionov/moskva-osnovnye-oshibki-vypusknikov-na-ege-po-himii-kak-ih-izbezhat>
17. *Пермогорский М.С.* Психологические предикторы актуализации эвристики транзитивности отношений превосходства: Дис. ... канд. психол. наук. М., 2016.
18. *Поддьяков А.Н.* Изменение представлений о непереходности превосходства под влиянием ознакомления с «нетранзитивными» объектами // Современная экспериментальная психология: В 2 т. / Под ред. В.А. Барабанщикова. М.: Ин-т психологии РАН, 2011. Т. 2. С. 193–205.
19. *Поддьяков А.Н.* Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений // Психология. Журнал Высшей школы экономики. 2006. № 3. С. 88–111.
20. *Поддьяков А.Н.* Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // Вопр. психол. 2019. № 2. С. 3–16.
21. *Поддьяков А.Н.* Циклы из игрушечных обезьянок и игральные кубики // Наука и жизнь. 2022. № 11. С. 104–105.
22. Самые частые ошибки на ЕГЭ по физике: как их избежать и набрать максимум баллов. Московский центр качества образования. 24 мая 2021. URL: <https://mcko.ru/articles/2547>
23. *Санина С.П., Соколов В.Л.* Подходы к типологии основных ошибок младших школьников при освоении математических понятий // Современная зарубежная психология. 2021. Т. 10. № 4. С. 138–146. doi:10.17759/jmfp.2021100413
24. *Сингх С.* Симпсоны и их математические секреты. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016.
25. *Спирidonov В.Ф.* Психология мышления. Решение задач и проблем. М.: Юрайт, 2022.
26. *Соколов В.Л.* Психолого-педагогические приемы работы над ошибками младших школьников при освоении математических понятий // Вестник практической психологии образования. 2023. Т. 20. № 1. С. 46–60. doi:10.17759/vprp.2023200105
27. *Тарасова О.А.* Предупреждение типичных ошибок учащихся в процессе обучения алгебре посредством формирования и использования

- рефлексивной деятельности: Дис. ... канд. психол. наук. Новосибирск, 2004.
28. Фомин Д. Игра в нетранзитивные кости (начало) // Квант. 2022а. № 6. С. 2–8.
 29. Фомин Д. Игра в нетранзитивные кости (окончание) // Квант. 2022б. № 7. С. 16–21.
 30. Фрумкина Р.М. Цвет, смысл, сходство: аспекты психолингвистического анализа. М.: Наука, 1984.
 31. Шейнерман Э. Путеводитель для влюбленных в математику. М.: Альпина нон-фикшн, 2018.
 32. Ahuja A. Errors as learning opportunities: cases from mathematics teaching learning // Kapur V., Ghose S. (eds). *Dynamic learning spaces in education*. Singapore: Springer, 2018. P. 125–140. doi:10.1007/978-981-10-8521-5_7
 33. Arnold C. Biodiversity may thrive through games of rock-paper-scissors // *Quantamagazine*. March 5, 2020. URL: <https://www.quantamagazine.org/biodiversity-may-thrive-through-games-of-rock-paper-scissors-20200305/>
 34. Brown J., Skow K., *The Iris Center*. Mathematics: Identifying and addressing student errors. 2016. URL: https://iris.peabody.vanderbilt.edu/wp-content/uploads/pdf_case_studies/ics_matherr.pdf
 35. Clements M.K. Analyzing children's errors on written mathematical tasks // *Educational Studies in Mathematics*. 1980. V. 11. P. 1–21. doi:10.1007/BF00369157
 36. Conrey B. et al. Intransitive dice / Conrey B., Gabbard J., Grant K., Liu A., Morrison K. // *Mathematics magazine*. 2016. V. 89(2). P. 133–143.
 37. Dörner D., Güss C.D. Human error in complex problem solving and dynamic decision making: A taxonomy of 24 errors and a theory // *Computers in Human Behavior Reports*. 2022. V. 7, 100222. doi:10.1016/j.chbr.2022.100222
 38. Fisher L. Rock, paper, scissors: Game theory in everyday life. N.Y.: Basic books, 2008.
 39. Gardner M. On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations // *Scientific American*. 1974. V. 231(4). P. 120–125.
 40. Gardner M. Permutations and paradoxes in combinatorial mathematics // *Scientific American*. 1963. V. 209(2). P. 112–119.
 41. Gardner M. The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference // *Scientific American*. 1970. V. 223(6). P. 110–114.
 42. Hulk A., Whitmeyer M.A. Game of nontransitive dice // *Mathematics Magazine*. 2019. V. 92(5). P. 368–373. doi:10.1080/0025570X.2019.1662263
 43. Kingsdorf S., Krawec J. Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities // *Learning Disabilities Research & Practice*. 2014. V. 29. P. 66–74. doi:10.1111/ldrp.12029
 44. Klarreich E. Mathematicians roll dice and get rock-paper-scissors // *Quantamagazine*. January 19, 2023. URL: <https://www.quantamagazine.org/mathematicians-roll-dice-and-get-rock-paper-scissors-20230119>
 45. Klimentko A.Y. Intransitivity in theory and in the real world // *Entropy*. 2015. V. 17 (6). P. 4364–4412. doi:10.3390/e17064364
 46. Lai C-F. Error analysis in mathematics. University of Oregon, 2012. URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED572252.pdf>
 47. Murtagh J. How Warren Buffett rigged a dice game with Bill Gates // *Scientific American*. September 19, 2023. URL: <https://www.scientificamerican.com/article/how-warren-buffett-rigged-a-dice-game-with-bill-gates>
 48. Phillips S., Wilson W.H., Halford G.S. What do transitive inference and class inclusion have in common? Categorical (co)products and cognitive development // *PLoS Comput. Biol.* 2009. 5(12): e1000599. doi:10.1371/journal.pcbi.1000599
 49. Poddiakov A. Are mathematicians, physicists and biologists irrational? Mathematical and natural science studies vs. the transitivity axiom. Preprint. 2023. doi:10.23668/psycharchives.12526
 50. Poddiakov A. 2019. Learning intransitivity: from intransitive geometrical objects to rhizomatic” intransitivity // *Proceedings of the PME and Yandex Russian conference: Technology and psychology for mathematics education / Shvarts A. (ed.)*. Moscow: HSE Publishing House, 2019. P. 178–185. URL: <https://www.researchgate.net/publication/338363121>
 51. Poddiakov A., Valsiner J. Intransitivity cycles and their transformations: How dynamically adapting systems function // Rudolph L. (ed.). *Qualitative mathematics for the social sciences: Mathematical models for research on cultural dynamics*. Abingdon, NY: Routledge, 2013. P. 343–391.
 52. Radatz H. Error analysis in mathematics education // *J. for Research in Mathematics Education*. 1979. V. 10(3). P. 163–172. doi:10.5951/jresmetheduc.10.3.0163
 53. Singh S. Rock, paper, scissors // *The Guardian – Life section*. 14 October 2004. URL: <https://simonsingh.net/media/articles/maths-and-science/rock-paper-scissors/>
 54. Steinhaus H., Trybula S. On a paradox in applied probabilities // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*. 1959. No. 7. P. 67–69.
 55. Trybula S. On the paradox of three random variables // *Applicationes Mathematicae*. 1961. V. 5 (4). P. 321–332.
- References in Russian:**
1. Avilov N. Netranzitivnye kubiki. URL: <https://elementy.ru/problems/2590/>

2. *Allakhverdov V.A.* Zachem nuzhno soznanie ili pochemu my delaem oshibki // Eksperimental'naya psikhologiya v Rossii: traditsii i perspektivy / Pod red. V.A. Barabanshchikova. M.: In-t psikhologii RAN, 2010. S. 345–349.
3. *Allakhverdov V.A., Voskresenskaya E.Yu.* Oshibki kak zakonomernyj rezul'tat raboty ideal'noj poznayushchej sistemy // Sovremennaya eksperimental'naya psikhologiya: V 2 t. T. 2 / Pod red. V.A. Barabanshchikova. M.: In-t psikhologii RAN, 2011. S. 29–38.
4. *Bogdanov I.I.* Netranzitivnye ruletki // Matematicheskoe prosveshchenie. 2010. Ser. 3. Vyp. 14. S. 240–255.
5. *Bykova A.A.* Osobennosti ponimaniya netranzitivnosti prevoskhodstva v razlichnykh kontekstakh. Vypusknaya kvalifikatsionnaya rabota. M.: NIU VSHE, 2014.
6. *Bufeev S.* Paradoks netranzitivnykh otnoshenij // Uchitel'skaya gazeta. 2014. N 48–49. 2 dekabr'ya 2014. URL: <https://web.archive.org/web/20221109222831/https://ug.ru/paradoks-netranzitivnyh-otnoshenij/>
7. *Gardner M.* Krestiki-noliki. M.: Mir, 1988.
8. *Gardner M.* Matematicheskie dosugi. M.: Mir, 1972.
9. *Gardner M.* Puteshestvie vo vremeni. M.: Mir, 1990.
10. *Egorenko T.A., Sanina S.P.* Podkhody k vyyavleniyu tipovykh oshibok mladshikh shkol'nikov pri osvoenii estestvenno-nauchnykh ponyatij // Psikhologo-pedagogich. issled. 2021. T. 13. N 4. S. 94–106. doi:10.17759/psyedu.2021130406
11. *Il'kov L.* Paradoksy komandnykh sorevnovaniy // Kvant. 2009. N 1. S. 44–46.
12. *Isaev E.I., Margolis A.A., Safronova M.A.* Psikhologicheskij analiz kompetentnosti uchitelya nachal'noj shkoly v rabote nad predmetnymi oshibkami obuchayushchikhsya // Psikhol. nauka i obrazovanie. 2023. T. 28. N 1. doi:10.17759/pse.2023000002
13. *Kodon'o M.* Matematika za chashechkoy kofe. Minsk: Diskurs, 2020.
14. *Majkova N.S.* Vidy oshibok uchashchikhsya pri obuchenii resheniyu geometricheskikh zadach, ikh prichiny i sposoby preduprezhdeniya // Izvestiya Ross. gos. pedagog. un-ta im. A.I. Gertsena. Aspirantskie tetradi. 2008. N 33. CH. 2: (Pedagogika i psikhologiya, teoriya i metodika obucheniya). S.113–118.
15. *Nesterenko A.* Netranzitivnye kosti // Kvant. 2021. N 10. S. 30–38.
16. Osnovnye oshibki vypusknikov na EGE po khimii: kak ikh izbezhat'. M.: Rosobrnadzor. 24 maya 2022 g. URL: <https://obrnadzor.gov.ru/novosti-regionov/moskva-osnovnye-oshibki-vypusknikov-na-ege-po-himii-kak-ih-izbezhat>
17. *Permogorskij M.S.* Psikhologicheskie prediktory aktualizatsii evristiki tranzitivnosti otnoshenij prevoskhodstva: Dis. ... kand. psikhol. nauk. M., 2016.
18. *Poddiakov A.N.* Izmenenie predstavlenij o neperekhodnosti prevoskhodstva pod vliyaniem oznakomleniya s «netranzitivnymi» ob'ektami // Sovremennaya eksperimental'naya psikhologiya: V 2 t. / Pod red. V.A. Barabanshchikova. M.: In-t psikhologii RAN, 2011. T. 2. S. 193–205.
19. *Poddiakov A.N.* Neperekhodnost' (netranzitivnost') otnoshenij prevoskhodstva i prinyatie reshenij // Psikhologiya. ZHurnal Vysshej shkoly ekonomiki. 2006. N 3. S. 88–111.
20. *Poddiakov A.N.* Printsip netranzitivnosti prevoskhodstva v raznykh paradigmakh [The principle of non-transitivity of superiority in different paradigms] // Voprosy psikhologii. 2019. N 2. S. 3–16.
21. *Poddiakov A.N.* TSikly iz igrushhechnykh obez'yanok i igral'nykh kubikov // Nauka i zhizn'. 2022. N 11. S. 104–105.
22. Samey chastye oshibki na EGE po fizike: kak ikh izbezhat' i nabrat' maksimum ballov. Moskovskij tsentr kachestva obrazovaniya. 24 maya 2021. URL: <https://mcko.ru/articles/2547>
23. *Sanina S.P., Sokolov V.L.* Podkhody k tipologii osnovnykh oshibok mladshikh shkol'nikov pri osvoenii matematicheskikh ponyatij // Sovremennaya zarubezhnaya psikhologiya. 2021. T. 10. N 4. S. 138–146. doi:10.17759/jmfp.2021100413
24. *Singkh S.* Simpsony i ikh matematicheskie sekrety. M.: Mann, Ivanov i Ferber, 2016.
25. *Spiridonov V.F.* Psikhologiya myshleniya. Reshenie zadach i problem. M.: Yurajt, 2022.
26. *Sokolov V.L.* Psikhologo-pedagogicheskie priemy raboty nad oshibkami mladshikh shkol'nikov pri osvoenii matematicheskikh ponyatij // Vestnik prakticheskij psikhologii obrazovaniya. 2023. T. 20. N 1. S. 46–60. doi: 10.17759/bppe.2023200105
27. *Tarasova O.A.* Preduprezhdenie tipichnykh oshibok uchashchikhsya v protsesse obucheniya algebre posredstvom formirovaniya i ispol'zovaniya refleksivnoj deyatel'nosti: Dis. ... kand. psikhol. nauk. Novosibirsk, 2004.
28. *Fomin D.* Igra v netranzitivnye kosti (nachalo) // Kvant. 2022a. N 6. S. 2–8.
29. *Fomin D.* Igra v netranzitivnye kosti (okonchanie) // Kvant. 2022b. N 7. S. 16–21.
30. *Frumkina R.M.* TSvet, smysl, skhodstvo: aspekty psikholingvistikheskogo analiza. M.: Nauka, 1984.
31. *Shejnerman E.* Putevoditel' dlya vlyublennykh v matematiku. M.: Al'pina non-fikshn, 2018.