Д. И. Гуревич, П. А. Сапонов, В. В. Соколов, О симметризаторах в квантовых матричных алгебрах, *УМН*, 2023, том 78, выпуск 4, 203–204

DOI: 10.4213/rm10111

О симметризаторах в квантовых матричных алгебрах

Д. И. Гуревич, П. А. Сапонов, В. В. Соколов

1. В этой заметке мы имеем дело со специальным классом квадратичных алгебр, которые называются квантовыми матричными алгебрами. Квадратичной алгеброй называется факторалгебра $A = T(V)/\langle J\rangle$, где V – векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = N < \infty$, $T(V) = \bigoplus_{k\geqslant 0} V^{\otimes k}$ – свободная тензорная алгебра пространства V, а $\langle J\rangle$ – идеал, порожденный подпространством $J \subset V^{\otimes 2}$. Алгебраические свойства таких алгебр и их неоднородных аналогов интенсивно обсуждаются в математической литературе (см., например, [4]). Мы рассматриваем задачу построения некоторых проекторов на однородные компоненты таких алгебр, являющихся аналогами обычных симметризаторов. В классическом случае эти симметризаторы строятся с помощью перестановки P. Ниже роль P играет так называемая симметрия Гекке.

Напомним, что оператор $R\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ называется R-матрицей, если он подчиняется соотношению кос: $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$, $R_{12} = R\otimes I$, $R_{23} = I\otimes R$ (здесь и далее символ I обозначает тождественный оператор в V или другом векторном пространстве). Если оператор R удовлетворяет дополнительному отношению $(R-qI)(R+q^{-1}I) = 0$, где $q\in\mathbb{C}$, то R называется *симметрией Гекке*. Далее мы будем считать, что $q^k \neq 1$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$. В работе [1] построены многочисленные примеры симметрий Гекке и определены симметризаторы для R-симметричной и R-кососимметричной алгебр пространства V.

2. Примерами квадратичных алгебр, связанных с R-матрицами, являются RTT-алгебра и алгебра уравнения отражений (RE). Первая из них определяется системой

$$RT_1T_2 = T_1T_2R, \qquad T_1 = T\otimes I, \quad T_2 = I\otimes T, \tag{1}$$

где $T = \|t_i^j\|_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ – матрица размером $N\times N$, элементы которой порождают RTT-алгебру. Метод построения других квантовых матричных алгебр предложен в [3].

Основная цель заметки – предложить метод, который, как мы надеемся, позволит построить симметризаторы на однородные компоненты RTT и других матричных алгебр. Мы иллюстрируем метод несколькими примерами в низших размерностях.

Определяющая система (1) может быть записана в виде $T_1T_2 = \mathcal{R}(T_1T_2)$, где $\mathcal{R}(T_1T_2) = R^{-1}T_1T_2R$. Если R является симметрией Гекке, то оператор $\mathcal{R}\colon W^{\otimes 2}\to W^{\otimes 2}$, где $W = \operatorname{span}(t_i^j)$, имеет три собственных значения 1, $-q^2$ и $-q^{-2}$. Следовательно, оператор $\mathcal{S} = 2_q^{-2}(\mathcal{R}+q^2I)(\mathcal{R}+q^{-2}I)$, где $k_q \overset{\mathrm{def}}{=} (q^k-q^{-k})/(q-q^{-1})$, $k\in\mathbb{Z}$, является идемпотентом, называемым *симметризатором*. Он отображает пространство $W^{\otimes 2}$ на его подпространство симметрических элементов, т. е. такое, что $\mathcal{S}(z) = z$. Таким образом, каждый элемент z второй однородной компоненты $A^{(2)}$ квадратичной алгебры $A = T(W)/\langle J\rangle$ совпадает со своей симметризованной формой $\mathcal{S}(z)$ по модулю идеала $\langle J\rangle$, где $J = \operatorname{Im}(\mathcal{R}-I)$.

Симметризатор третьего порядка $\mathcal{S}^{(3)}\colon W^{\otimes 3}\to W^{\otimes 3}$, проектирующий на однородную компоненту $A^{(3)}\subset A$, был построен в работе [2]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(3)} &:= \alpha\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12} + \beta\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12} + \gamma\mathcal{S}_{12} \\ &= \alpha\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23} + \beta\mathcal{S}_{23}\,\mathcal{S}_{12}\,\mathcal{S}_{23} + \gamma\mathcal{S}_{23}, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты α, β, γ удовлетворяют условию $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Здесь и далее нижние индексы оператора указывают номера компонент тензорного произведения, в которых действует данный оператор.

Поскольку оператор $\mathcal{S}^{(3)}$, определенный в (2), обладает свойством $\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}_{12}\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}^{(3)}\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_{23}\mathcal{S}^{(3)} = \mathcal{S}^{(3)}\mathcal{S}_{23}$, его можно записать в виде $\mathcal{S}^{(3)} = p(\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}) = p(\mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12})$, где p – многочлен степени 3. Минимальный многочлен оператора $\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23}$ имеет вид

$$m_3(x) = x(x-1)\biggl(x-\frac{1}{2_q^2}\biggr)\biggl(x-\frac{(2_q^2-2)^2}{2_q^4}\biggr). \tag{3}$$

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10111

Следовательно, оператор $p(\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{23})/\kappa$, где $p(x)=m(x)(x-1)^{-1}$ и $\kappa=p(1)$, проектирует пространство $W^{\otimes 3}$ на подпространство, соответствующее собственному значению 1. Отметим, что формула (3) позволяет вычислить все коэффициенты в (2).

3. Построим теперь следующий симметризатор $\mathcal{S}^{(4)}\colon W^{\otimes 4}\to W^{\otimes 4}$. С этой целью сначала найдем минимальный многочлен $m_4(x)$ оператора $\mathcal{S}^{(3)}_{123}\mathcal{S}^{(3)}_{234}\colon W^{\otimes 4}\to W^{\otimes 4}$. Это многочлен пятого порядка $m_4(x)=x(x-1)(x-\nu_1)(x-\nu_2)(x-\nu_3)$, где

$$\nu_1=\frac{1}{3_q^2}\,,\qquad \nu_2=\frac{(2_q^2-2)^2}{4\cdot 3_q^2}\,,\qquad \nu_3=\frac{(3_q^2-3)^2}{4\cdot 3_q^4}\,.$$

Подставляя произведение $\mathcal{S}^{(3)}_{123}\,\mathcal{S}^{(3)}_{234}$ в многочлен $p_4(x)=m_4(x)(x-1)^{-1}$, мы получим (после соответствующей нормировки) искомый симметризатор $S^{(4)}$. Нетрудно проверить, что ответ не зависит от порядка сомножителей: $p_4(\mathcal{S}^{(3)}_{123}\mathcal{S}^{(3)}_{234})=p_4(\mathcal{S}^{(3)}_{234}\mathcal{S}^{(3)}_{123})$.

По-видимому, аналогичная процедура позволит найти все высшие симметризаторы. Предполагая, что $\mathcal{S}^{(n)}$ известно, мы определяем $\mathcal{S}^{(n+1)}$ следующим образом:

$$S^{(n+1)}_{1,2,\dots,n+1}=\kappa^{-1}_{n+1}p_{n+1}(S^{(n)}_{1,2,\dots,n}S^{(n)}_{2,3,\dots,n+1}),\qquad p_{n+1}(x)=m_{n+1}(x)(x-1)^{-1},$$

где $m_{n+1}(x)$ – минимальный многочлен оператора $S^{(n)}_{1,2,\dots,n}S^{(n)}_{2,3,\dots,n+1}$ и $\kappa_{n+1}=p_{n+1}(1)$ – нормировочный множитель. Эта процедура основана на гипотезе, что 1 является простым корнем многочлена $m_n(x)$ для любого n. Предположительно степень многочлена $m_n(x)$ равна $n+1$ для общего q, но в пределе $q=1$ она становится равной трем.

Предложенная конструкция подтверждается нашими вычислениями для $n=5,6,7$. Корнями многочлена $m_5(x)$ являются 0, 1 и числа

$$\nu_1=\frac{1}{4_q^2}\,,\qquad \nu_2=\frac{(2\cdot 2_q^2-5)^2}{9\cdot 2_q^4}\,,\qquad \nu_3=\frac{(2\cdot 2_q^2-5)^2}{9\cdot 4_q^2}\,,\qquad \nu_4=\frac{(4_q^2-4)^2}{9\cdot 4_q^4}\,.$$

Было бы интересно найти закономерность для последовательности $m_n(x)$.

Заметим, что существование симметризатора $S^{(n)}$ влечет за собой следующее: если симметрия Гекке $R=R(q)$ является аналитической матричнозначной функцией параметра q в окрестности $q=1$, то в некоторой окрестности $q=1$ размерности однородных компонент $A^{(n)}$ совпадают с соответствующими размерностями для $q=1$.

Список литературы

[**1**] Д. И. Гуревич, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 119–148. [**2**] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 70–133. [**3**] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, *J. Phys. A*, **32**:9 (1999), L115–L121. [**4**] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, Univ. Lecture Ser., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, xii+159 pp.

Д. И. Гуревич (D. I. Gurevich)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: gurevich@ihes.fr

П. А. Сапонов (P. A. Saponov)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики";
Институт физики высоких энергий,
НИЦ "Курчатовский институт"
E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru

В. В. Соколов (V. V. Sokolov)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: sokolov@itp.ac.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
01.05.2023