



УДК 517.9

Диаграмма Кирби полярных потоков на четырехмерных многообразиях

Е. Я. Гуревич, И. А. Сараев

В работе решается проблема топологической классификации полярных потоков на замкнутых четырехмерных многообразиях, множество седловых состояний равновесия которых состоит только из точек, имеющих двумерные устойчивые и неустойчивые многообразия. Показывается, что полным топологическим инвариантом для таких потоков является диаграмма Кирби, представляющая собой оснащенное зацепление на сфере, секущей к траекториям потока.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: полярные потоки, градиентно-подобные потоки, структурно устойчивые потоки, топологическая классификация, диаграмма Кирби.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14151>

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что *гладким потоком* называется пара $\{F, M^n\}$, состоящая из гладкого многообразия M^n размерности n и гладкого отображения $F: M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$, удовлетворяющего следующим условиям (см. [1]):

- 1) $F(x, 0) = F(x)$, $F(F(x, t), s) = F(x, t + s)$ для любых $x \in M^n$, $t, s \in \mathbb{R}$;
- 2) отображение $F(x, t_*) : M^n \rightarrow M^n$ является диффеоморфизмом для любого фиксированного $t_* \in \mathbb{R}$;
- 3) $v(x) = \partial F / \partial t|_{t=0}$ — гладкое векторное поле на M^n .

Потоки $\{F, M^n\}$, $\{G, N^n\}$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow N^n$, переводящий траектории первого потока в траектории второго, и сохраняющий ориентацию траекторий, определенную векторными полями $\partial F / \partial t|_{t=0}$, $\partial G / \partial t|_{t=0}$.

Мы будем предполагать, если не оговорено противное, что многообразие M^n замкнутое. Положив $f^t(x) = F(x, t)$, мы будем обозначать поток через f^t , опуская, если это не приводит к разночтениям, указание многообразия, на котором этот поток задан. Гладкий поток f^t называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00010, <https://rscf.ru/project/21-11-00010/>, кроме раздела 3, выполненного при поддержке программы “Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)” в 2023 г., грант № 23-00-028.

множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально. Градиентно-подобный поток называется *полярным*, если множество его состояний равновесия состоит в точности из одного стокового, одного источникового и произвольного (конечного) числа седловых состояний равновесия.

Топологическая классификация градиентно-подобных потоков на замкнутых многообразиях размерности 2 и 3 следует из классических результатов [2]–[5]. Для случая $n \geq 4$ в работах [6], [7] получена топологическая классификация градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений в предположении, что все седловые состояния равновесия таких потоков имеют устойчивое или неустойчивое инвариантное многообразие размерности $(n - 1)$. Инварианты, построенные в этих работах, опираются на одну общую идею: замыкания $(n - 1)$ -мерных сепаратрис седловых состояний равновесия делят несущее многообразие на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий, и взаимное расположение этих областей определяет класс топологической эквивалентности. Если размерность многообразия M^n больше трех, то у градиентно-подобного потока на M^n могут быть седловые состояния равновесия, чьи инвариантные многообразия не делят M^n даже локально. Классификация таких потоков уже не сводится, вообще говоря, к комбинаторной задаче, и в получении классификационных результатов для этих потоков сделаны лишь первые шаги. Так, в работе [8] показано, что существуют негомеоморфные (и даже гомотопически неэквивалентные) замкнутые многообразия размерности 8 и 16, допускающие функцию Морса ровно с тремя критическими точками. Градиентный поток такой функции является полярным потоком с неблуждающим множеством, состоящим из источника, стока и седла, размерность устойчивого и неустойчивого многообразий которого равна половине размерности несущего многообразия. Отсюда сразу следует, что полярные потоки с одинаковым неблуждающим множеством, содержащим всего одно седло, могут быть заданы на негомеоморфных многообразиях размерности 8 или 16. В работе [9] доказано, что все полярные потоки на четырехмерных многообразиях, имеющие единственное седловое состояние равновесия, топологически эквивалентны (и, как следствие, несущее многообразие таких потоков единственно с точностью до гомеоморфизма).

В настоящей работе рассматривается класс P полярных потоков, заданных на произвольных четырехмерных замкнутых многообразиях, допускающих произвольное количество седловых состояний равновесия, при условии, что устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седел двумерны. Мы показываем, что уже в классе потоков из P ровно с двумя седловыми состояниями равновесия имеется счетное множество топологически неэквивалентных потоков, и получаем необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности для потоков с произвольным числом седел. Из [10], [11] следует, что для любого потока $f^t \in P$ существует энергетическая функция – функция Морса, строго убывающая вдоль незамкнутых траекторий и имеющая критическую точку в каждом состоянии равновесия потока f^t . Отсюда следует, что многообразие M^4 допускает разложение на ручки с одной ручкой индекса 0, несколькими ручками индекса 2 (их число равно числу седловых состояний равновесия) и одной ручкой индекса 4. Согласно [12], [13] такое разложение и, как следствие, топология многообразия M^4 определяется некоторым классом эквивалентности *диаграммы Кирби* – оснащенного зацепления на

сфере S^3 , несущего информацию о приклеивании ручек индекса 2 (см. предложение 8). Мы показываем, что диаграмма Кирби является полным топологическим инвариантом для потоков из класса P .

Сформулируем точный результат. Пусть $f^t \in P$ и $\varphi: M^4 \rightarrow [0, 4]$ – энергетическая функция для f^t такая, что $\varphi(p) = \dim W_p^u$ для любого $p \in \Omega_{f^t}$ (такая функция называется *самоиндексирующей*, алгоритм ее построения описан в [10]). Положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, $c \in [0, 4]$. Из свойств функции Морса следует, что для любых $c \in (0, 2) \cup (2, 4)$ множество Σ_c является гладко вложенной трехмерной сферой, трансверсальной к траекториям потока f^t .

Обозначим через α, ω источниковое и стоковое состояния равновесия, и через $\Omega_{f^t}^2$ – множество всех седловых состояний равновесия потока f^t . Из условия трансверсальности пересечения инвариантных многообразий следует, что $W_p^s \cap W_q^u = \emptyset$ для любых $p, q \in \Omega_{f^t}^2$, $p \neq q$. Тогда $dW_p^u = W_p^u \cup \omega$, $dW_p^s = W_p^s \cup \alpha$ для любой точки $p \in \Omega_{f^t}^2$, и множества dW_p^u, dW_p^s являются двумерными сферами, гладко вложенными в M^4 во всех точках, кроме, возможно, точек ω, α соответственно. Для $c_1 \in (0, 2)$, $c_2 \in (2, 4)$, $p \in \Omega_{f^t}^2$ положим $l_{p,c_1} = \Sigma_{c_1} \cap W_p^u$, $l_{p,c_2} = \Sigma_{c_2} \cap W_p^s$. Так как сферы $\Sigma_{c_1}, \Sigma_{c_2}$ пересекаются с траекториями потока, и, следовательно, с многообразиями W_p^u, W_p^s трансверсально, то множества l_{p,c_1}, l_{p,c_2} являются простыми замкнутыми гладкими кривыми (узлами). Положим

$$L_{c_1} = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^2} l_{p,c_1}, \quad L_{c_2} = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^2} l_{p,c_2}.$$

Здесь и всюду ниже для потока $f^t \in P$ будем обозначать через Σ'_{c_1}, L'_{c_1} и т.п. объекты, имеющие тот же смысл, что и Σ_{c_1}, L_{c_1} и т.п. для потока $f^t \in P$.

В п. 5.1 мы доказываем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть потоки $f^t, f'^t \in P$ топологически эквивалентны. Тогда существует гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ такой, что $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$.*

В разделе 3 приводятся примеры, показывающие, что необходимое условие топологической эквивалентности потоков из класса P , сформулированное в предложении 1, вообще говоря, не является достаточным. Для получения полного топологического инварианта оснастим зацепление L_{c_1} некоторой дополнительной информацией. Обозначим через N_{c_2} совокупность попарно непересекающихся полноториев, принадлежащих сфере Σ_{c_2} , являющихся замкнутыми трубчатыми окрестностями узлов, образующих зацепление L_{c_2} . Пусть $\Pi_{p,c_2} \in N_{c_2}$ – трубчатая окрестность узла l_{p,c_2} и $\mu_{p,c_2} \subset \partial\Pi_{p,c_2}$ – ее меридиан (то есть простая замкнутая кривая, негомотопная нулю на границе $\partial\Pi_{p,c_2}$ полнотория Π_{p,c_2} и ограничивающая диск $D^2 \subset \Pi_{p,c_2}$). Траектории потока f^t определяют диффеоморфизм $\eta_{c_1,c_2}: \Sigma_{c_2} \setminus L_{c_2} \rightarrow \Sigma_{c_1} \setminus L_{c_1}$, ставящий в соответствие произвольной точке $x \in \Sigma_{c_2} \setminus L_{c_2}$ точку пересечения ее траектории \mathcal{O}_x со сферой Σ_{c_1} . Узел $\tilde{l}_{p,c_1} = \eta_{c_1,c_2}(\mu_{p,c_2})$ будем называть *оснащением узла l_{p,c_1}* .

Совокупность оснащенных узлов $\{l_{p,c_1}, \tilde{l}_{p,c_1}\}$ на сфере Σ_{c_1} будем называть *диаграммой Кирби потока f^t* .

В пп. 5.1, 5.2 мы показываем, что определение диаграммы Кирби не зависит от выбора энергетической функции и констант c_1, c_2 , и доказываем следующую теорему, составляющую основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. *Потоки $f^t, f'^t \in P$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ такой, что*

- 1) $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$;
- 2) $h(\tilde{l}_{p,c_1}) = \tilde{l}'_{p',c_1}$ для каждой пары узлов $l_{p,c_1} \subset L_{c_1}$, $l'_{p',c_1} = h(l_{p,c_1})$.

2. Вспомогательные определения и факты

В этом разделе приводятся факты, используемые в описании примеров и при доказательстве теоремы 1.

Напомним, что m -компонентным *зацеплением* на трехмерной сфере S^3 называется гомеоморфный образ L топологического вложения в S^3 дизъюнктного объединения m копий окружности S^1 . Зацепление, состоящее из единственной компоненты, называется *узлом*. Всюду ниже, если не оговорено противное, рассматриваются узлы и зацепления, являющиеся образами гладких вложений. Следуя [14], [15], будем называть зацепления $L, L' \subset S^3$ *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: S^3 \rightarrow S^3$ такой, что $h(L) = L'$, и *изотопными*, если существует изотопия $h_t: S^3 \rightarrow S^3$ такая, что h_0 является тождественным гомеоморфизмом id и $h_1(L) = L'$. Очевидно, что изотопные зацепления эквивалентны. В [16; теоремы 15, 16] показано, что с точностью до изотопии существует ровно два класса гомеоморфизмов сферы S^3 : сохраняющие и меняющие ориентацию. Отсюда следует, что если зацепления L, L' эквивалентны при помощи сохраняющего ориентацию гомеоморфизма сферы, то они являются также и изотопными.

Диаграммой зацепления называется набор кривых, являющийся его проекцией на плоскость, имеющий лишь конечное множество пересечений и самопересечений, и таких, что в каждой точке пересечения сходятся в точности четыре отрезка. Зацепление называется *тривиальным*, если его диаграмма состоит из конечного числа попарно непересекающихся окружностей (без самопересечений). Тривиальное зацепление, состоящее из одного узла, называется *тривиальным узлом*.

Ручкой размерности n индекса k (или *k -ручкой*) называется прямое произведение $H_k^n = B^k \times B^{n-k}$ замкнутых шаров B^k, B^{n-k} размерностей $k, (n-k)$ соответственно. При этом первый шар называется *осевым*, второй – *секущим диском* ручки, множество $\partial B^k \times B^{n-k}$ называется *подошвой ручки*. Сферы $\partial B^k \times \{O_2\}$, $\{O_1\} \times \partial B^{n-k}$, где O_1, O_2 – центры осевого и секущего диска, называются *подошвенной* и *секущей сферами* соответственно.

Пусть X – ориентированное гладкое компактное многообразие с краем и $\psi: \partial B^k \times B^{n-k} \rightarrow \partial X$ – гладкое вложение, обращающее естественную ориентацию $\partial B^k \times B^{n-k}$ как подмногообразия края ручки H_k^n . Говорят, что многообразие Y получено *приклеиванием ручки H_k^n* к многообразию X , если Y получено из дизъюнктного объединения $X \sqcup H_k^n$ отождествлением точек $x \in \partial B^k \times B^{n-k}$ и $\psi(x)$. Существует стандартная процедура сглаживания многообразия Y (см., например, [17; замечание 1.3.3.]). Вложение ψ называется *приклеивающим отображением*. Представление многообразия Y в виде объединения ручек называется его *разбиением на ручки*.

Доказательство следующего предложения имеется, например, в [18; лемма 6.1].

Напомним, что вложения $\psi, \psi': N \rightarrow M$ называются *объемлюще изотопными*, если существует изотопия $h_t: M \rightarrow M$ такая, что $h_0 = \text{id}$, $h_1\psi = \psi'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если вложения*

$$\psi, \psi': \partial B^k \times B^{n-k} \rightarrow \partial X$$

объемлюще изотопны, то многообразия $Y = X \cup_{\psi} H_k^n$, $Y = X \cup_{\psi'} H_k^n$ гомеоморфны.

Остановимся более подробно на случае $n = 4, k = 2, X = H_0^4$. Так как любая ручка размерности n диффеоморфна стандартному шару, граница ручки H_2^4 является трехмерной сферой, естественным образом представляющей в виде объединения двух полноториев $\Pi_1 = \partial B^2 \times B^2$ и $\Pi_2 = B^2 \times \partial B^2$ с общим краем. Подошвенная и секущая сфера ручки H_2^4 в этом случае – это окружности, являющиеся средними линиями полноториев Π_1 и Π_2 соответственно. Пусть $L \subset S^3$ – m -компонентное зацепление на границе $S^3 = \partial B^4$ шара B^4 . Обозначим через Y_L компактное четырехмерное многообразие Y , полученное приклеиванием m ручек индекса 2 к шару B^4 таким образом, что подошвенная сфера каждой ручки приклеивается к одному из узлов, входящих в зацепление L . Такое многообразие называется *полным четырехмерным телом с 2-ручками*. Граница ∂Y многообразия Y является результатом удаления из сферы S^3 попарно непересекающихся полноториев и приклеиванием на их место новых полноториев, являющихся дополнениями к подошвам ручек. Первое семейство полноториев можно рассматривать как набор попарно непересекающихся трубчатых окрестностей узлов из L . Говорят, что *ручки приклеены по зацеплению L* , а многообразие ∂Y получено из сферы S^3 с помощью *хирургической операции* (или *перестройки*) *Дэна* вдоль зацепления L .

Отметим, что приклеивание 2-ручек к шару B^4 определяет лишь частный случай всех возможных перестроек Дэна. Действительно, при приклеивании 2-ручки полноторий Π_1 отождествляется с полноторием Π_{λ} , откуда следует, что образ меридиана первого полнотория является меридианом второго. Но тогда меридиан полнотория Π_2 , приклеиваемого к $S^3 \setminus \text{int } \Pi_{\lambda}$, переходит в простую замкнутую кривую $\tilde{\lambda} \subset \partial \Pi_{\lambda}$, пересекающуюся с меридианом полнотория Π_{λ} в единственной точке (такая кривая называется *параллелью*). Ниже будет показано, что число оборотов этой кривой вокруг меридиана полнотория Π_{λ} определяет топологию многообразия, полученного в результате приклеивания ручек вдоль этого зацепления. Если же рассматривать операцию приклеивания полнотория к множеству $S^3 \setminus \text{int } \Pi_{\lambda}$ независимо от приклеивания 2-ручки, то меридиан этого полнотория может переходить в произвольную простую замкнутую кривую, принадлежащую $\partial \Pi_{\lambda}$. Хирургическая операция Дэна, при которой меридиан приклеиваемого к $S^3 \setminus \text{int } \Pi_{\lambda}$ полнотория является меридианом полнотория Π_{λ} , называется *тривиальной*.

Назовем узел $\tilde{\lambda}$, введенный в предыдущем абзаце, *оснащением узла λ* . Отметим, что меридиан μ_{λ} полнотория Π_{λ} можно выбрать в качестве образующей группы гомологий $H_1(S^3 \setminus \lambda, \mathbb{Z})$, которая изоморфна группе \mathbb{Z} (см., например, [19; задача 3.9]). Тогда при фиксированной ориентации узлов $\mu_{\lambda}, \tilde{\lambda}$ и сферы S^3 существует единственное число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $[\tilde{\lambda}] = n[\mu_{\lambda}]$, где $[\tilde{\lambda}], [\mu_{\lambda}]$ – гомологические классы узлов $\tilde{\lambda}, \mu_{\lambda}$, соответственно. Это число называется *коэффициентом зацепления* узлов $\lambda, \tilde{\lambda}$ (см., например, [17; § 4.5]) и обозначается $\text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda})$. Коэффициент зацепления узлов можно интерпретировать как число оборотов узла $\tilde{\lambda}$ вокруг меридиана μ_{λ} ; он является изотопическим инвариантом пары $\lambda, \tilde{\lambda}$, и меняет знак на противоположный, если меняется ориентация λ или S^3 .

Пусть $\psi'_\lambda: \Pi_1 \rightarrow \Pi_\lambda$ – другое приклеивающее отображение, для которого определено оснащение $\tilde{\lambda}'$ узла λ аналогично тому, как это было сделано для отображения ψ_λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть полные тела Y_L, Y'_L получены приклеиванием ручек индекса 2 с помощью приклеивающих диффеоморфизмов $\psi, \psi': \Pi_1 \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \bigcup_{\lambda \subset L} \Pi_\lambda$ таких, что $\text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda}) = \text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda}')$ для любого узла $\lambda \in L$. Тогда Y_L, Y'_L гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ψ_λ ограничение приклеивающего отображения ψ на один из полноториев $\Pi_1 \times i, i \in \mathbb{Z}_m$, и определим диффеоморфизм $\Psi_\lambda: \Pi_1 \rightarrow \Pi_1$ формулой $\Psi_\lambda = \psi_\lambda^{-1} \psi'_\lambda$. Из условия следует, что Ψ_λ переводит узлы $\mu_1, \mu_2 \subset \partial \Pi_1$ (выбранные выше) в гомотопные им кривые. В силу [15; гл. 2, теорема 4, D] ограничение $\Psi_\lambda|_{\partial \Pi_1}$ диффеоморфизма Ψ_λ на границу $\partial \Pi_1$ полнотория Π_1 изотопно тождественному отображению. Из [20; следствие] следует, что $\Psi_\lambda|_{\partial \Pi_1}$ диффеотопно тождественному отображению, то есть существует гладкое отображение $h: \partial \Pi_1 \times [0, 1] \rightarrow \partial \Pi_1$ такое, что при каждом $t \in [0, 1]$ отображение $h_t = h(x, t)$ является диффеоморфизмом, и $h_0(x) = x, h_1(x) = \Psi_\lambda(x), x \in \partial \Pi_1$. В силу теоремы о продолжении изотопии (см., например, [21; гл. 8, теорема 1.3]), диффеотопия h продолжается до диффеотопии $H: \Pi_1 \times [0, 1] \rightarrow \Pi_1$, соединяющей Ψ_λ с тождественным отображением. Тогда суперпозиция $g = \psi_\lambda H: \Pi_1 \times [0, 1] \rightarrow \Pi_\lambda$ является диффеотопией, соединяющую вложения $\psi_\lambda, \psi'_\lambda$. Снова применим теорему о продолжении изотопии, в силу которой диффеотопия g продолжается до объемлющей изотопии $G_\lambda: \partial B^4 \times [0, 1] \rightarrow \partial B^4$, тождественной в окрестностях узлов из множества $L \setminus \lambda$. В силу предложения 2 многообразия, полученные приклеиванием ручки H^4_2 вдоль узла λ при помощи отображений $\psi_\lambda, \psi'_\lambda$, гомеоморфны. Повторяя эти рассуждения для каждого узла из зацепления L , через конечное число шагов получим требуемое утверждение.

Предложение 3 не зависит от выбора трубчатой окрестности узла $\lambda \subset L$. Действительно, пусть $\psi_\lambda(\Pi_1) \neq \psi'_\lambda(\Pi_1)$. По теореме о единственности трубчатой окрестности (см., например, [21; гл. 4, теорема 5.3]) существует гладкая объемлющая изотопия $h_t: \partial B^4 \rightarrow \partial B^4$ такая, что $h_1 \psi_\lambda = \psi'_\lambda$. Тогда приклеивающий диффеоморфизм $\tilde{\psi}_\lambda = h_1 \psi_\lambda$ удовлетворяет условию $\tilde{\psi}_\lambda(\Pi_1) = \psi'_\lambda$, при этом $\text{lk}(h_1(\tilde{\lambda}), \lambda) = \text{lk}(\tilde{\lambda}, \lambda)$, так что условия предложения 3 выполняются для $\tilde{\psi}_\lambda$. Следующее техническое предложение 4 показывает, что требование гладкости приклеивающих отображений также можно ослабить.

Напомним определения, использующиеся в предложении 4. Пусть X^k – компактное топологическое многообразие размерности $k \geq 1$, возможно, с непустым краем, M^n – топологическое многообразие без края размерности $n \geq 1$, $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ – координатная гиперплоскость, заданная условиями $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, и

$$\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_k \geq 0\}.$$

Вложение $\eta: X^k \rightarrow M^n$ называется *локально плоским*, если для любой точки $x \in \eta(X^k)$ существует окрестность $U_x \subset M^n$ и гомеоморфизм $h: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $h(\eta(X^k) \cap U_x) = \mathbb{R}^k$, если $x \in \text{int } X^k$, и $h(\eta(X^k) \cap U_x) = \mathbb{R}^k_+$, если $x \in \partial X^k$. Из определения следует, что образ $\eta(X^k)$ многообразия X^k при локально плоском вложении является топологическим подмногообразием многообразия M^n . Если вложение

$\eta: X^k \rightarrow M^n$ не является локально плоским хотя бы в одной точке $x \in X^k$, то вложение η и образ $\eta(X^k)$ называются *диким*, а точка x – *точкой дикости*. Если X^k, M^n – триангулируемые многообразия (полиэдры) и $\xi: X^k \rightarrow M^n$ – такое вложение, что множество $\xi(X^k)$ является носителем подкомплекса некоторой триангуляции многообразия M^n , то вложение ξ называется *ручным*, а множество $\xi(X^k)$ – *подполиэдром*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\lambda \subset S^3$ – гладкий узел, $\Pi_\lambda \subset S^3$ – его трубчатая окрестность и $\xi, \xi': S^1 \times B^2 \rightarrow \text{int } \Pi_\lambda$ – локально плоские вложения такие, что

- 1) $\xi(S^1 \times \{O\}) = \xi'(S^1 \times \{O\}) = \lambda$, где O – центр диска B^2 ;
- 2) $\text{lk}(\xi(S^1 \times \{x\}), \lambda) = \text{lk}(\xi'(S^1 \times \{x\}), \lambda)$, где $x \in \partial B^2$ – фиксированная точка.

Тогда существует гомеоморфизм $\theta: S^3 \rightarrow S^3$ такой, что

- 1) $\theta\xi = \xi'$;
- 2) $\theta|_{S^3 \setminus \text{int } \Pi_\lambda} = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через μ меридиан полнотория $S^1 \times B^2$. Положим $\Pi = \xi(S^1 \times B^2)$, $\Pi' = \xi'(S^1 \times B^2)$, $\tilde{\lambda} = \xi(S^1 \times \{x\})$, $\tilde{\lambda}' = \xi'(S^1 \times \{x\})$, $m = \xi(\mu)$, $m' = \xi'(\mu)$.

В силу результатов Бинга и Мойса, см. [22; теорема 8], компактное локально плоско вложенное подмножество замкнутого трехмерного многообразия является подполиэдром, поэтому узел λ и полнотории Π_λ, Π, Π' являются подполиэдрами S^3 . Тогда Π_λ, Π, Π' являются регулярными (в терминологии [18]) кусочно-линейными окрестностями узла λ . В силу [18; следствие 3.18] многообразия $\Pi_\lambda \setminus \text{int } \Pi$, $\Pi_\lambda \setminus \text{int } \Pi'$ гомеоморфны прямому произведению $T^2 \times [0, 1]$ тора T^2 на отрезок. Поэтому каждая точка y из множества $\Pi_\lambda \setminus \text{int } \Pi$ определяется двумя координатами (p, q) , $p \in \partial \Pi_\lambda$, $q \in [0, 1]$. Будем считать, что точки с координатами $(p, 0)$ принадлежат $\partial \Pi_\lambda$ и $\text{pr}: \Pi_\lambda \setminus \text{int } \Pi \rightarrow \partial \Pi_\lambda$ обозначает отображение такое, что $\text{pr}(p, q) = (p, 0)$. Аналогичную проекцию для многообразия $\Pi_\lambda \setminus \text{int } \Pi'$ будем обозначать через pr' .

Узлы $\text{pr}(m), \text{pr}(m')$ являются меридианами полнотория Π_λ , и

$$\text{lk}(\text{pr}(\tilde{\lambda}), \lambda) = \text{lk}(\tilde{\lambda}, \lambda) = \text{lk}(\text{pr}'(\tilde{\lambda}'), \lambda).$$

Положим $h(\text{pr}(\xi(z))) = \text{pr}'(\xi'(z))$, $z \in S^1 \times \partial B^2$. Гомеоморфизм $h: \partial \Pi_\lambda \rightarrow \partial \Pi_\lambda$ сохраняет изотопический класс меридиана. Поскольку узлы $\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'$ имеют одинаковые коэффициенты зацепления с узлом λ , то же самое справедливо и для узлов $h(\text{pr}(\tilde{\lambda})), \text{pr}'(\tilde{\lambda}')$. Тогда из [15; гл. 2, теорема 4, D] следует, что существует изотопия $h_t: \partial \Pi_\lambda \rightarrow \partial \Pi_\lambda$ такая, что $h_0 = \text{id}$, $h_1 = h$. Определим искомый гомеоморфизм $\theta: S^3 \rightarrow S^3$, положив

$$\theta(y) = \begin{cases} y, & y \in S^3 \setminus \Pi_\lambda; \\ (h_q(p), q), & y = (p, q) \in \Pi_\lambda \setminus \Pi; \\ \xi'(\xi^{-1}(y)), & y \in \Pi. \end{cases}$$

В силу предложения 3 оснащение каждого узла $\lambda \subset L$ однозначно определяется коэффициентом его зацепления с узлом λ , поэтому в дальнейшем при изображении диаграммы оснащенного зацепления вместо изображения оснащения будем писать около каждого узла λ коэффициент $\text{lk}(\lambda, \tilde{\lambda})$.

Каждому оснащённому m -компонентному зацеплению $L = \{\lambda_i, \tilde{\lambda}_i\}$ поставим в соответствие матрицу коэффициентов зацепления A_L – симметричную целочисленную

матрицу $m \times m$ с элементами $a_{i,j} = \text{lk}(\lambda_i, \lambda_j)$ при $i \neq j$, и $a_{i,i} = \text{lk}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i)$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Напомним, что *формой пересечения* ориентированного компактного четырехмерного многообразия X называется симметричная билинейная форма $Q_X: H_2(X, \mathbb{Z}) \times H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящее в соответствие каждой паре классов $(a, b) \in H_2(X, \mathbb{Z})$ их гомологический индекс пересечения (см. определение в [19; § 5.3]).

В силу [17; предложение 4.5.11] справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть Y_L – полное тело с 2-ручками, приклеивание которых задается оснащенный ориентированным зацеплением L . Тогда матрица формы пересечений Q_{Y_L} в некотором каноническом базисе совпадает с матрицей коэффициентов зацепления A_L .

Если граница полного тела Y_L диффеоморфна трехмерной сфере, то приклеивание ручки H_4^1 к Y дает гладкое замкнутое многообразие M^4 . Далее в этом разделе рассматриваются только такие замкнутые многообразия. Поскольку любой гомеоморфизм сферы продолжается до гомеоморфизма шара, который эта сфера ограничивает, многообразие M^4 с точностью до гомеоморфизма полностью определяется топологией полного тела Y_L . Многообразие M^4 односвязно, так как любая петля в M^4 гомотопна петле в Y_L , а Y_L гомотопически эквивалентно букету двумерных сфер, следовательно является односвязным. Из односвязности M^4 следует его ориентируемость. С помощью последовательности Майера-Виеториса доказывается, что группа $H_2(M^4, \mathbb{Z})$ изоморфна группе $H_2(Y_L, \mathbb{Z})$, которая, в свою очередь, изоморфна группе \mathbb{Z}^m . Поэтому для многообразия M^4 верно следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Матрица формы пересечений Q_{M^4} в некотором базисе совпадает с матрицей A_L .

Из предложения 5, в частности, вытекает следующий факт: если $\overline{M^4}$ – многообразие, полученное из M^4 обращением его ориентации, то $Q_{\overline{M^4}} = -Q_{M^4}$. При замене базиса в группе $H_2(M^4, \mathbb{Z})$ матрица, представляющая форму пересечения в новом базисе, имеет вид $C^T A_L C$, где C – невырожденная унимодулярная целочисленная матрица (говорят, что такая матрица *конгруэнтна* матрице A_L).

Известно, что форма пересечений замкнутого четырехмерного многообразия унимодулярна (см. [17; упражнение 1.2.10]). Из результатов Дж. Уайтхеда и Л. С. Понтрягина (см. [17; теорема 1.2.25] и комментарии к этой теореме там же) следует, что два таких многообразия M^4, N^4 гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечений *эквивалентны*, то есть существуют такие ориентации M^4, N^4 , что матрицы, определяющие их формы пересечений в некоторых базисах, конгруэнтны с помощью целочисленной матрицы. М. Фридман доказал следующее утверждение (см. [23], [17; 1.2.27]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для каждой унимодулярной симметричной билинейной формы Q существует односвязное замкнутое топологическое четырехмерное многообразие M^4 , форма пересечения которого эквивалентна Q . Если форма Q четна, то это многообразие единственно с точностью до гомеоморфизма, если форма Q нечетна, то существует ровно два негомеоморфных топологических многообразия с данной формой пересечений, и не более чем одно из них допускает гладкую

структуру. Следовательно, гладкие односвязные замкнутые многообразия определяются своей формой пересечения с точностью до гомеоморфизма.

Определим условия, при которых неизотопные оснащенные зацепления определяют диффеоморфные полные тела и замкнутые многообразия. Серф (см. [17; теорема 4.2.12]) показал, что любые два разбиения на ручки произвольного компактного многообразия получаются одно из другого последовательностью послойных изотопий и всего двух дополнительных операций: вставки (или сокращения) устранимой пары ручек и протаскивания ручек.

Пара ручек H_1^4, H_2^4 индексов 1 и 2 соответственно называется *устранимой парой ручек*, если они приклеены к Y_L так, что образ подошвенной сферы ручки H_2^4 пересекает секущую сферу ручки H_1^4 трансверсально (на крае ручки ∂H_1^4) и в единственной точке. Можно считать, что при добавлении пары устранимых ручек ручка H_1^4 приклеивается в первую очередь, поэтому ее приклеивание определяется положением образа ее подошвы, являющимся дизъюнктивным объединением пары трехмерных шаров, а след подошвенной окружности ручки H_2^4 представляет собой дугу без самопересечений, соединяющий границы этих шаров. Аналогично дается определение устранимой пары ручек индексов 2 и 3, но как показано в [24], топология полученного в результате многообразия не зависит от способа приклеивания ручек индекса 3.

Совокупность пар трехмерных шаров и соединяющих их оснащенных отрезков вместе с оснащенный зацеплением L на сфере S^3 , определяющих приклеивание ручек индексов 1 и 2, называется *диаграммой Кирби многообразия M^4* .

Операция добавления или удаления из диаграммы Кирби многообразия M^4 образцов подошвенных сфер устранимых пар ручек называется *преобразованием Кирби первого типа*.

Опишем преобразование Кирби второго типа. Пусть $L \subset S^3$ – оснащенное зацепление, в котором узлы $\lambda_i, \lambda_j \subset L$ имеют оснащения $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_j$ с коэффициентами зацепления n_i, n_j соответственно. Пусть $e: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^3$ – гладкое вложение такое, что пересечение множества $R = e([0, 1] \times [0, 1])$ с L состоит из двух отрезков $I_0 = e(\{0\} \times [0, 1]) \subset \lambda_i$ и $I_1 = e(\{1\} \times [0, 1]) \subset \tilde{\lambda}_j$. Узел

$$\lambda'_i = \lambda_i \cup \tilde{\lambda}_j \cup \partial R \setminus \text{int}(I_0 \cup I_1)$$

называется *ленточной суммой* узлов $\lambda_j, \tilde{\lambda}_j$. Положим

$$n'_i = n_i + n_j \pm 2 \text{lk}(\lambda_i, \lambda_j),$$

где знак “+” берется, если ориентация отрезков I_0, I_1 , индуцированная ориентацией края ленты $[0, 1] \times [0, 1]$, противоположна ориентации обоих узлов $\lambda_i, \tilde{\lambda}_j$, а знак “–” берется в противоположном случае. Замена в оснащении L пары $(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i)$ на пару $(\lambda'_i, \tilde{\lambda}'_i)$ с коэффициентом зацепления n'_i называется *преобразованием Кирби второго типа*. На рис. 1, (d) изображено это преобразование, приводящее от зацепления 1, (c) к зацеплению 1, (e). Преобразование Кирби второго типа соответствует *протаскиванию ручки A_i* , приклеенной по узлу λ_i , вдоль ручки A_j , приклеенной по узлу λ_j (см. [17; определение 4.2.10] и комментарии в [17; § 5.1], [25; § 3.1]). При этой операции подошва ручки A_i сдвигается гладкой изотопией $h_t: \partial(B^4 \cup A_j) \rightarrow \partial(B^4 \cup A_j)$ по ленте R .

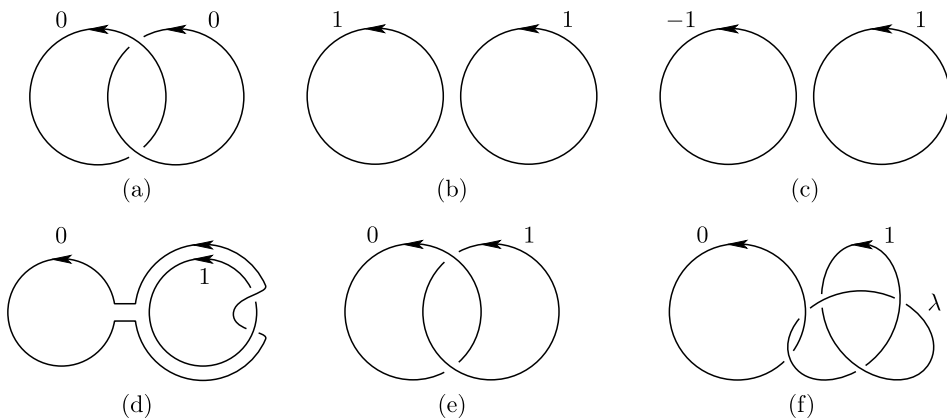


Рис. 1. Примеры оснащенных зацеплений из двух узлов

В силу [12] (см. также [17; § 5.1]) справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если оснащенное зацепление L' получено из зацепления L с помощью преобразования Кирби второго типа, то трехмерные многообразия, полученные хирургией Дэна вдоль зацеплений L, L' , диффеоморфны.

Будем говорить, что диаграммы Кирби замкнутых многообразий M^4, N^4 эквивалентны с точностью до преобразований Кирби, если от одного из них к другому можно перейти с помощью конечной последовательности преобразований Кирби первого и второго типа.

Из [12], [13] (см. также [25; теорема 3.3']) вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть M^4, N^4 – гладкие замкнутые многообразия, полученные из полных четырехмерных тел с 2-ручками приклеиванием ручки индекса 4. M^4 и N^4 гомеоморфны тогда и только тогда, когда их диаграммы Кирби эквивалентны с точностью до преобразований Кирби и объемлющих изотопий.

Отметим, что существуют примеры оснащенных зацеплений, не эквивалентных с помощью одного только преобразования Кирби второго типа, определяющие диффеоморфные полные тела с 2-ручками (см. комментарий в конце [25; § 3.4]). Поэтому условия предложения 8, вообще говоря, нельзя ослабить, исключив из рассмотрения преобразования Кирби первого типа.

3. Примеры потоков из класса P и их диаграмм Кирби

Пусть $L \subset S^3$ – оснащенное зацепление такое, что трехмерное многообразие, полученное хирургией Дэна вдоль L , диффеоморфно сфере. Тогда такое зацепление реализуется как диаграмма Кирби некоторого потока $f^t \in P$. Действительно, в этом случае граница полного тела Y_L , полученного приклейкой 2-ручек к шару B^4 , ограниченному сферой S^3 , по зацеплению L , диффеоморфна S^3 . Тогда приклеивание к Y_L еще одного шара (или 4-ручки) даст замкнутое многообразие M^4 . На первом шаре B^4 определим векторное поле $\dot{x} = -x$, на каждой ручке $H_2^4 = B^2 \times B^2$

определим векторное поле $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$, где $x \in B^2 \times \{O_2\}, y \in \{O_1\} \times B^2$, и, наконец, на 4-ручке определим векторное поле $\dot{x} = x$. Тогда приклейка ручек (при аккуратном выборе приклеивающих отображений, обеспечивающих гладкую склейку векторных полей) определяет на M^4 векторное поле, индуцирующее поток $f^t \in P$, диаграмма Кирби которого совпадает с оснащенный зацеплением L .

В силу [26; теорема 2] справедлив следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Трехмерное многообразие, полученное нетривиальной хирургией Дэна вдоль нетривиального узла, не гомеоморфно сфере.*

Из предложения 9 сразу следует, что граница полного тела Y_L , полученного приклейкой единственной 2-ручки, диффеоморфна сфере в том и только в том случае, когда ручка приклеивается по тривиальному узлу (отсюда и из теоремы 1 вытекает, что все потоки из P с единственным седлом топологически эквивалентны). Насколько известно авторам, похожих результатов для произвольных зацеплений или алгоритмов проверки их эквивалентности относительно преобразований Кирби, не существует, и ответ на вопрос, какие из зацеплений приводят в результате хирургии Дэна к сфере, имеется лишь в частных случаях (см., например, [27]).

3.1. “Источник-сток”. Рассмотрим стандартную единичную сферу

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}, \quad n \geq 1,$$

и функцию Морса $\varphi: \mathbb{S}^n \rightarrow [-1, 1]$, ставящую точке $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ значение x_{n+1} . Эта функция имеет две критические точки: минимум в точке $(0, \dots, 0, -1)$ и максимум в точке $(0, \dots, 1)$. Эти точки являются стоковым и источниковым состояниями равновесия градиентного потока $\text{grad } \varphi$ функции φ , исчерпывающими его неблуждающее множество. При $n = 4$ поток $\text{grad } \varphi$ принадлежит классу P . Из формулы Пуанкаре-Хопфа следует, что если несущее многообразие полярного потока из класса P является сферой, то множество седловых состояний равновесия этого потока пусто. Используя энергетическую функцию, нетрудно доказать, что если неблуждающее множество потока f^t , заданного на замкнутом многообразии M^n , состоит из двух гиперболических состояний равновесия, то эти состояния равновесия являются источником и стоком, все такие потоки топологически эквивалентны, а многообразие M^n гомеоморфно сфере S^n . Диаграмма Кирби всех таких потоков представляет собой пустое множество.

3.2. Потоки с тремя состояниями равновесия. Напомним, что *комплексной проективной плоскостью* называется фактор-пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ пространства $\mathbb{C}^3 \setminus \{O\}$ по отношению эквивалентности $(z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$. $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ является ориентируемым гладким замкнутым многообразием размерности четыре. Будем считать, что $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ снабжено ориентацией, индуцированной стандартной ориентацией \mathbb{C}^3 , и обозначать через $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ то же многообразие, оснащенное противоположной ориентацией. Если класс эквивалентности точки $Q \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ содержит точку $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, то говорят, что точка Q имеет однородные координаты $[z_1 : z_2 : z_3]$.

Функция $\varphi: \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданная в однородных координатах формулой

$$\varphi = \frac{|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 3|z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2},$$

является функцией Морса, множество критических точек которой состоит из трех точек: минимума, седла индекса 2 и максимума (см., например, [28; § 19]). Градиентный поток этой функции имеет ровно три состояния равновесия: сток, седло с двумерными инвариантными многообразиями и источник, следовательно, принадлежит классу P . В работе [9] доказано, что все градиентно-подобные потоки на четырехмерных многообразиях, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, топологически эквивалентны. Отсюда следует, что любое многообразие, допускающее такой поток, гомеоморфно $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, и его диаграмма Кирби совпадает с диаграммой Кирби $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ или $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$. В обоих случаях такая диаграмма Кирби состоит из тривиального узла. В первом случае коэффициент зацепления этого узла со своим оснащением равен единице, во втором – минус единице (см., например, [17; § 4.4]).

3.3. Топологически не эквивалентные потоки с двумя седлами. В отличие от классов потоков, описанных в предыдущих двух разделах, в классе полярных потоков, имеющих ровно два седловых состояния равновесия с двумерными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, существует счетное множество топологически неэквивалентных потоков. При этом многообразия, допускающие такие потоки, тоже могут быть негомеоморфны, но из теоремы Фридмана (см. предложение 6) следует, что существует лишь конечное число таких негомеоморфных многообразий. Мы описываем все типы этих многообразий и показываем, как можно построить топологически неэквивалентные потоки из рассматриваемого класса на каждом из многообразий.

На рис. 1, (a)–(f) приведены диаграммы Кирби потоков и замкнутых многообразий, несущих потоки из класса P , которые будут описаны ниже по порядку.

Пример (a). Пусть g^t – поток типа “источник-сток” на двумерной сфере S^2 , α, ω – его источниковое и стоковое состояние равновесия. Определим поток f_a^t на прямом произведении $S^2 \times S^2$ формулой $f_a^t(x, y) = (g^t(x), g^t(y))$ для каждой пары точек $x, y \in S^2$. Неблуждающее множество потока f_a^t состоит из четырех точек: стока (ω, ω) , двух седел (ω, α) , (α, ω) , и источника (α, α) . Покажем, что на рис. 1, (a) изображена диаграмма Кирби потока f_a^t . Представим сферу S^2 как объединение двух замкнутых гладких дисков D_ω, D_α таких, что $\omega \subset \text{int } D_\omega$, $\alpha \subset \text{int } D_\alpha$ и $D_\omega \cap D_\alpha = \partial D_\omega = \partial D_\alpha$. При этом будем считать, что общая граница этих дисков пересекается с траекториями потока g^t трансверсально. Формула

$$S^2 \times S^2 = (D_\omega \times D_\omega) \cup (D_\omega \times D_\alpha) \cup (D_\alpha \times D_\omega) \cup (D_\alpha \times D_\alpha)$$

определяет разбиение многообразия $S^2 \times S^2$ на ручки с 0-ручкой $D_\omega \times D_\omega$, двумя 2-ручками $D_\omega \times D_\alpha$, $D_\alpha \times D_\omega$ и одной 4-ручкой $D_\alpha \times D_\alpha$, каждая из которых содержит единственное состояние равновесия потока f^t . Ручки индекса 2 приклеиваются по узлам $\{\omega\} \times \partial D_\omega$, $\partial D_\omega \times \{\omega\}$, являющихся средними линиями полноториев $\Pi_2 = D_\omega \times \partial D_\omega$, $\Pi_1 = \partial D_\omega \times D_\omega$, объединение которых дает границу ручки $D_\omega \times D_\omega$. Узел $\{\omega\} \times \partial D_\omega$ изотопен в $\Pi_1 \cup \Pi_2$ узлу $\{x\} \times \partial D_\omega$, где $x \in \partial D_\omega \times \{\omega\}$. Узел $\{x\} \times \partial D_\omega$ ограничивает диск $\{x\} \times D_\omega$, пересекающийся с узлом $\partial D_\omega \times \{\omega\}$ в единственной точке, поэтому его коэффициент зацепления с узлом $\partial D_\omega \times \{\omega\}$ равен единице. Следовательно, и коэффициент зацепления узлов $\{\omega\} \times \partial D_\omega$, $\partial D_\omega \times \{\omega\}$ равен единице. С другой стороны, узел $\{x\} \times \partial D_\omega$ является оснащением узла $\{\omega\} \times \partial D_\omega$,

по которому к $D_\omega \times D_\omega$ приклеивается ручка $D_\omega \times D_\alpha$. Действительно, $\{x\} \times \partial D_\omega$ является меридианом полнотория $\partial D_\alpha \times D_\omega$ (так как $\partial D_\alpha = \partial D_\omega$), дополнительного к подошвенному полноторию $\partial D_\omega \times D_\alpha$ ручки $D_\omega \times D_\alpha$. Так как узлы $\{x\} \times \partial D_\omega$, $\{\omega\} \times D_\omega \times \partial D_\omega$ изотопны, то их коэффициент зацепления равен нулю. Аналогично доказывается, что и коэффициент зацепления узла $\partial D_\omega \times \{\omega\}$ со своим оснащением равен нулю. Следовательно, в силу теоремы 1, диаграмма Кирби потока f_α^t с точностью до объемлющей изотопии сферы $\partial(D_\omega \times D_\omega)$ совпадает с диаграммой, изображенной на рис. 1, (a).

Примеры (b), (c). Напомним, что *связной суммой* двух связных ориентированных замкнутых многообразий M, N размерности n называется многообразие $M \sharp N$, полученное удалением из многообразий M, N внутренности пары шаров $B_M^n \subset M$, $B_N^n \subset N$ и склейкой оставшихся многообразий с краем $M \setminus \text{int } B_M^n$, $N \setminus \text{int } B_N^n$ по диффеоморфизму $\xi: \partial B_M^n \rightarrow \partial B_N^n$, обращающему естественную ориентацию края. При этом многообразии $M \sharp N$ наследует ориентацию многообразий M, N .

Возьмем две копии $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, на каждой из которых определен полярный поток f^t с единственным седлом, описанный в разделе 3.2. Выберем в каждой копии $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ по шару, ограниченному сферой, трансверсально пересекающей траектории потока f^t , причем первый шар, обозначим его B_+ , возьмем в устойчивом многообразии стокового состояния равновесия, а второй, B_- – в неустойчивом многообразии источника. Обозначим через $\lambda_+ \subset \partial B_+$, $\lambda_- \subset \partial B_-$ узлы, являющиеся следами инвариантных многообразий седлового состояния равновесия потока f^t на сферах, ограничивающих шары B_+, B_- , соответственно, и через $N_+ \subset \partial B_+$, $N_- \subset \partial B_-$ – трехмерные замкнутые шары, такие, что $\lambda_+ \subset \text{int } N_+$, $\lambda_- \subset \text{int } N_-$. Пусть $\xi: \partial B_+ \rightarrow \partial B_-$ – обращающий ориентацию диффеоморфизм, обеспечивающий гладкую склейку траекторий потоков и такой, что $\xi(N_+) \cap N_- = \emptyset$. Тогда склейка $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \text{int } B_+$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \text{int } B_-$ по ξ определяет связную сумму $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ и полярный поток f_b^t из класса P на ней.

Диаграмма Кирби построенного потока состоит из тривиальных узлов, иначе при обратной к связной сумме операции мы не смогли бы вернуться к потокам на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. По построению индекс зацепления этих узлов равен нулю. Поэтому матрица коэффициентов зацепления диагональна, и диагональные элементы равны ± 1 . В силу следствия 1 матрица коэффициентов зацепления определяет форму пересечения построенного многообразия в некотором базисе, а в силу [17; упражнение 1.3.5, а)] форма пересечения связной суммы многообразий является прямой суммой форм пересечения этих многообразий. Следовательно, на диагонали матрицы коэффициентов зацепления стоят единицы, а диаграмма Кирби полученного потока изоморфна диаграмме, изображенной на рис. 1, (b).

Если вместо первой копии $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ взять многообразие $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ и проделать аналогичную процедуру, то получим поток f_c^t из класса P на многообразии $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, диаграмма Кирби которого изображена на рис. 1, (c). Матрица формы пересечений этого многообразия равна $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица не конгруэнтна единичной, поэтому, в силу предложения 6, многообразия $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ и $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ не гомеоморфны. Следовательно, построенные потоки не являются топологически эквивалентными, хотя соответствующие им зацепления (без учета оснащений), эквивалентны, то есть выполняется условие предложения 1.

Примеры (d), (e). На рис. 1, (d) изображено преобразование Кирби второго типа, примененное к зацеплению, изображенному на рис. 1, (c), в результате которого получается диаграмма, изображенная на рис. 1, (e). Из предложения 7 следует, что перестройка Дэна вдоль обоих зацеплений дает одно и то же трехмерное многообразие. В предыдущем разделе построен поток f_c^t , реализующий диаграмму 1, (c), значит, трехмерное многообразие, полученное перестройкой Дэна вдоль этого зацепления, диффеоморфно сфере (эта сфера является границей множества $\varphi^{-1}([0, 3])$, где $\varphi: \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow [0, 4]$ – самоиндексирующаяся энергетическая функция потока f_c^t). Тогда, следуя схеме, изложенной в начале раздела 3, можно построить поток f_e^t , диаграммой которого является диграмма 1, (e).

Применяя индукцию по числу k можно показать, что применение последовательности из k преобразований Кирби второго типа к зацеплению, изображенному на рис. 1, (e), приводит к зацеплению двух тривиальных узлов с коэффициентом зацепления, равным $k + 1$. Каждая из этих диаграмм реализуется потоком из класса P аналогично построению потока f_e^t . Из предложения 1 следует, что на одном и том же многообразии $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ существует счетное множество топологически неэквивалентных полярных потоков, множество седловых состояний равновесия которых содержит всего два седла. Эта же конструкция позволяет построить счетное множество неэквивалентных потоков из класса P на каждом из описанных многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть неблуждающее множество потока $f^t \in P$ содержит ровно два седловых состояний равновесия. Тогда несущее многообразие M^4 потока f^t гомеоморфно одному из следующих многообразий: $M_1^4 = S^2 \times S^2$, $M_2^4 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $M_3^4 = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграммы Кирби многообразий, перечисленных в формулировке предложения, приведены на рис. 1 (a), (b), (c), соответственно. Каждому из этих многообразий соответствует одна из следующих матриц коэффициентов зацепления:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу следствия 1 каждая из матриц A_1, A_2, A_3 определяет форму пересечения соответствующего ей замкнутого многообразия M_1^4, M_2, M_3^4 , построение которого описано выше. Непосредственно проверяется, что эти матрицы попарно не конгруэнтны, а из [29] (см. также [30]) следует, что классы всех конгруэнтных целочисленных матриц 2×2 исчерпываются четырьмя матрицами A_1, A_2, A_3 и $A_4 = -A_2$. Но матрицы A_4 и A_2 соответствуют одному и тому же многообразию, оснащенному противоположными ориентациями. В силу предложения 6, многообразие M^4 гомеоморфно одному из многообразий M_1^4, M_2^4, M_3^4 .

Пример (f). Поток из класса P с дикими замыканиями сепаратрис. В [9; теорема 6] описан пример полярного потока $f_g^t \in P$, множество седловых состояний равновесия которого состоит в точности из двух точек, замыкание одного инвариантного многообразия каждой из которых является дико вложенной двумерной сферой. Мы приводим здесь описание этого примера с некоторыми уточнениями, показываем, что его диаграмма Кирби совпадает с диаграммой, изображенной на

рис. 1, (f), а также описываем топологию несущего многообразия M^4 . Вначале приведем еще одно вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ – стандартный единичный шар с границей S^3 , и $D_\lambda^2 \subset B^4$ – диск, образованный отрезками, соединяющими точки некоторого узла $\lambda \subset S^3$ с центром O шара B^4 . Диск D_λ^2 является локально плоским в точке O тогда и только тогда, когда узел λ – тривиальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале достаточность. Пусть узел λ тривиален. Тогда существует гомеоморфизм $\psi: S^3 \rightarrow S^3$, переводящий λ в узел, лежащий в пересечении S^3 и координатной плоскости Ox_1x_2 . Гомеоморфизм h продолжается по радиусам до гомеоморфизма $\Psi: B^4 \rightarrow B^4$, который переводит диск D_λ^2 в диск, лежащий в плоскости Ox_1x_2 , следовательно, D_λ^2 является локально плоским в точке O .

Докажем необходимость. Предположим, что диск D_λ^2 локально плоский, тогда существует окрестность $U \subset \text{int } B^4$ точки O и гомеоморфизм $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ такой, что $\psi(D_\lambda^2 \cap U) = Ox_1x_2$. Отсюда следует, что фундаментальная группа $\pi_1(U \setminus D_\lambda^2)$ множества $U \setminus D_\lambda^2$ изоморфна группе $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus Ox_1x_2)$, которая, в свою очередь, изоморфна группе $\pi_1(Ox_3x_4 \setminus \{O\})$, изоморфной \mathbb{Z} . Положим $C = S^3 \setminus \lambda$. Из определения диска D_λ^2 следует, что множество $B^4 \setminus D_\lambda^2$ гомеоморфно прямому произведению $C \times [0, 1)$, поэтому группа $\pi_1(B^4 \setminus D_\lambda^2)$ изоморфна группе $\pi_1(C)$. Кроме того, поскольку множество $B^4 \setminus D_\lambda^2$ можно сжать по радиусам до гомеоморфного ему подмножества $U \setminus D_\lambda^2$, то отображение включения $i: U \setminus D_\lambda^2 \rightarrow B^4 \setminus D_\lambda^2$ индуцирует гомоморфизм $i_*: \pi_1(U \setminus D_\lambda^2) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D_\lambda^2)$, являющийся сюръекцией. Сюръективный образ циклической группы является циклической группой, следовательно $\pi_1(B^4 \setminus D_\lambda^2)$ циклическая. Если узел λ нетривиальный, то группа $\pi_1(C)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (см., например, [15; гл. 4, В.4.]). Следовательно, и $\pi_1(B^4 \setminus D_\lambda^2)$ содержит такую подгруппу и не является циклической. Полученное противоречие доказывает, что узел λ является тривиальным.

Отметим, что из предложения 11 не следует, что нетривиальный узел $\lambda \subset S^3$ не может ограничивать гладкий или локально плоский диск D^2 такой, что $\text{int } D^2 \subset \text{int } B^4$ (но такой диск не совпадает с диском D_λ^2).

Пусть, как и ранее, на шаре B^4 задано векторное поле $\dot{x} = x$, а на ручке $H_2^4 = B^2 \times B^2$ – векторное поле $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$. Приклеим ручку H_2^4 к шару B^4 по трилистнику $\lambda \subset S^3$ (на рис. 1, (f) он изображен справа) с оснащением $+1$. Обозначим через N полученное многообразие, через F_+ – полученное векторное поле и через f_+^t индуцированный поток.

Траектории потока f_+^t трансверсальны краю многообразия N , а неблуждающее множество состоит из двух состояний равновесия: стока ω и седла p_+ , инвариантные многообразия которого двумерны. Неустойчивое многообразие $W_{p_+}^u$ седла p_+ пересекает S^3 по узлу λ , а его замыкание $dW_{p_+}^u$ содержит диск D_λ , определенный в предложении 11. Следовательно, $dW_{p_+}^u$ является диким в точке ω .

Устойчивое многообразие седла пересекает ∂N по простой замкнутой кривой $\beta_+ \subset \Pi_2$, являющейся секущей окружностью приклеенной ручки. Пусть $\Pi_+ \subset \partial N$ – полноторий, являющийся трубчатой окрестностью кривой β_+ и $h_t: \Pi_+ \rightarrow \Pi_+$ – гладкая изотопия такая, что $h_0 = \text{id}$, $h_1(\beta_+) \cap \beta_+ = \emptyset$. По теореме о продолжении изотопии существует гладкая изотопия $H_t: \partial N \rightarrow \partial N$ такая, что $H_t|_{\Pi_+} = h_t|_{\Pi_+}$.

Обратим ориентацию многообразия N , обозначим через \overline{N} и рассмотрим на нем поток $f_-^t = f_+^{-t}$. Неблуждающее множество потока f_-^t состоит из источника α и седла p_- , неустойчивое многообразие которого пересекает $\partial\overline{N}$ по простой замкнутой кривой β_- , являющейся копией кривой β_+ . Склеим \overline{N} и N диффеоморфизмом $H_1: \partial\overline{N} \rightarrow \partial N$. В результате получим замкнутое гладкое многообразие M^4 и поток $f_g^t \in P$. Покажем, что диаграмма потока f_g^t совпадает с оснащенный зацеплением, приведенным на рис. 1, (f). По построению $W_{p_+}^u \cap \partial B^4 = \lambda$. При приклеивании \overline{N} к N ручка индекса 2, содержащая точку p_- , приклеивается к ∂N по дополнению к своему подошвенному полноторию, следовательно, вторую компоненту зацепления определяет образ секущей окружности ручки, то есть простая замкнутая кривая $H_1(\beta_-)$. По построению кривая $H_1(\beta_-)$ объемлемо изотопна замкнутой кривой β_+ , являющейся секущей окружностью ручки индекса 2, содержащей седло p_+ . Как показано в примере (а), секущая окружность 2-ручки имеет с подошвенной окружностью этой ручки коэффициент зацепления, равный единице. Так как подошвенная окружность первой ручки отождествлена с узлом λ , то ее секущая окружность изотопна тривиальному узлу, принадлежащему ∂B^4 , имеющему с узлом λ коэффициент зацепления, равный единице. Так как склейка велась по диффеоморфизму, изотопному тождественному, то оснащение этого узла равно нулю.

Матрицы коэффициентов зацеплений, определенной зацеплениями, изображенным на рис. 1, (e) и 1, (f), совпадают, откуда следует, что многообразие M^4 гомеоморфно $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

4. Локальная топологическая сопряженность потоков из класса P в окрестности седловых состояний равновесия

Напомним, что состояние равновесия $p \in M^n$ гладкого потока f^t на M^n называется *гиперболическим*, если все собственные значения матрицы Якоби $J_p = (\partial F / \partial x)|_p$ векторного поля $F = (\partial f^t(x) / \partial t)|_{t=0}$, вычисленной в точке p , имеют ненулевую вещественную часть. В силу теоремы Гробмана–Хартмана (см. [31]–[33]) для любого гиперболического состояния равновесия существует окрестность такая, что ограничение потока f^t на эту окрестность топологически эквивалентно линейному потоку, определяемому векторным полем $\dot{x} = J_p x$. Отсюда и из топологической классификации линейных гиперболических векторных полей (см., например, [34; гл. 2, теорема 5.1, (б)]) следует, что любой поток из класса P в некоторой окрестности седлового состояния равновесия топологически эквивалентен градиентному потоку своей энергетической функции φ (но, вообще говоря, не совпадает с ним, в частности, матрица Якоби J_p может иметь комплексные собственные значения). Таким образом любые два потока $f^t, f'^t \in P$ топологически эквивалентны в некоторых окрестностях седловых состояний равновесия. Цель этого раздела состоит в описании семейства $\{V_p\}_{p \in \Omega_{f^t}^2}$ попарно непересекающихся компактных окрестностей седловых состояний равновесия потока $f^t \in P$ и построении канонических гомеоморфизмов $h_{p,p'}: V_p \rightarrow V_{p'}$, топологически сопрягающих ограничения потоков $f^t, f'^t \in P$ на выбранные окрестности, удобных для доказательства теоремы 1. Идеи, которые приводятся ниже, являются одним из вариантов доказательства теоремы Гробмана–

Хартмана (см. [34; § 7, гл. 2]). Мы приводим их, фокусируя внимание на ряде технических моментов, позволяющих проследить за оснащениями узлов при доказательстве теоремы 1.

Пусть $p \in \Omega_{f^t}^2$ и $U_p \subset M^4$ – окрестность точки p , не содержащая состояний равновесия, отличных от p . Из теоремы об устойчивом многообразии (см. [35; гл. 9, теорема 6.1], а также [34; теорема 6.2]) и теоремы [36; теорема 2.3] следует, что инвариантные многообразия W_p^s, W_p^u являются гладкими подмногообразиями многообразия M^4 , поэтому существует гладкое вложение $e_p: B^2 \times B^2 \rightarrow U_p$ такое, что

$$e_p(B^2 \times \{O_2\}) \subset W_p^u, \quad e(\{O_1\} \times B^2) \subset W_p^s, \quad e_p(\{O_1\} \times \{O_2\}) = p.$$

Положим $B_p^u = e_p(B^2 \times \{O_2\})$, $B_p^s = e_p(\{O_1\} \times B^2)$. Будем обозначать образ $e_p(B^2 \times B^2)$ через $B_p^u \times B_p^s$. Следующее утверждение, являющееся адаптацией классической λ -леммы (см. [34; лемма 7.1 и замечание на с. 117]), позволяет ввести в окрестности $B_p^u \times B_p^s$ пару трансверсальных слоений, инвариантных относительно потока $f^t \in P$.

Напомним, что за Σ_{c_1} во введении обозначена сфера, образованная точками, в которых самоиндексирующаяся энергетическая функция потока $f^t \in P$ принимает значения, равные $c_1 \in (0, 2)$, и $l_{p,c_1}^u = W_p^u \cap \Sigma_{c_1}$. Обозначим через $\Pi_{p,c_1} \subset \Sigma_{c_1}$ полноторий, являющийся замкнутой трубчатой окрестностью узла l_{p,c_1}^u и через $\{D_q^s\}_{q \in l_{p,c_1}^u}$ семейство двумерных дисков, трансверсальных (в Σ_{c_1}) к l_{p,c_1}^u , образующих слоение полнотория Π_{p,c_1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть p – седловое состояние равновесия потока $f^t \in P$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t > T(\varepsilon)$ и всех $q \in l_{p,c_1}^u$ компонента связности $D_{q,t}^{s,t}$ множества $f^{-t}(D_q^s) \cap (B_p^u \times B_p^s)$, содержащая точку $f^{-t}(q)$, является диском, ε -близким к B_p^s в C^1 -топологии.

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что для любого ε -близкого к B_p^u двумерного диска D_r^u , $r \in B_p^s$, и каждого $t > T(\varepsilon)$ диск $D_{q,t}^s$, определенный в предложении 12, пересекается с D_r^u трансверсально. Объединение $\bigcup_{t \geq T+1} D_{q,t}^s \cup B_p^s$ является компактной окрестностью, оснащенной f^t -инвариантным слоением, порожденным итерациями диска $D_{q,T+1}^s$, каждый слой которого трансверсален к диску B_p^u . Применяя предложение 12 к f^{-t} , получим компактную окрестность точки p , оснащенную f^t -инвариантным слоением, слои которого трансверсальны к слоям первого слоения. Пересечение этих окрестностей определяет окрестность V_p со следующими свойствами.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть p – седловое состояние равновесия потока $f^t \in P$. Тогда существует компактная окрестность $V_p \subset U_p$ точки p и непрерывные отображения $\pi_u: V_p \rightarrow V_p \cap W_p^u$, $\pi_s: V_p \rightarrow V_p \cap W_p^s$ со следующими свойствами:

- 1) для любых точек $x \in V_p \cap W_p^u$, $y \in V_p \cap W_p^s$ полные прообразы $\pi_u^{-1}(x)$, $\pi_s^{-1}(y)$ являются замкнутыми двумерными дисками, пересекающимися трансверсально;
- 2) $\pi_u^{-1}(p) \subset B_p^s$, $\pi_s^{-1}(p) \subset B_p^u$;
- 3) $f^{-t}(\pi_u^{-1}(x)) \subset \pi_u^{-1}(f^{-t}(x))$, $f^t(\pi_s^{-1}(x)) \supset \pi_s^{-1}(f^t(x))$;
- 4) граница ∂V_p является объединением двух полноториев $\Pi_{p,1}, \Pi_{p,2}$ с общим краем таких, что $f^{t_1}(\Pi_{p,1}) \subset \Sigma_{c_1}$, $f^{t_2}(\Pi_{p,2}) \subset \Sigma_{c_2}$ для некоторых t_1, t_2 , $c_1 \in (0, 2)$, $c_2 \in (2, 4)$.

Будем называть множество V_p *компактной канонической окрестностью состояния равновесия p* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть p и p' – седловые состояния равновесия потоков $f^t, f'^t \in P$ соответственно, и $V_p, V_{p'}$ – их компактные канонические окрестности. Тогда существует гомеоморфизм $h_{p,p'}: V_p \rightarrow V_{p'}$ такой, что:

- 1) $h_{p,p'} f^t = f'^t h_{p,p'}$ для всех t , при которых определены правая и левая часть равенства;
- 2) $h_{p,p'}$ переводит меридианы полноториев $\Pi_{p,1}, \Pi_{p,2}$ в меридианы полноториев $\Pi_{p',1}, \Pi_{p',2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\widehat{B}_p^u = V_p \cap W_p^u$, $\widehat{B}_p^s = V_p \cap W_p^s$. Пусть $\pi_u: V_p \rightarrow \widehat{B}_p^u$, $\pi_s: V_p \rightarrow \widehat{B}_p^s$ – непрерывные отображения, определенные в следствии 2. Обозначим через $\pi'_u: V_{p'} \rightarrow \widehat{B}_{p'}^u$, $\pi'_s: V_{p'} \rightarrow \widehat{B}_{p'}^s$ аналогичные отображения для потока f'^t .

Пусть $g_u: \partial \widehat{B}_p^u \rightarrow \partial \widehat{B}_{p'}^u$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Каждой точке $x \in \widehat{B}_p^u$ поставим в соответствие время $t_x \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_x}(x) \in \partial \widehat{B}_p^u$. Определим гомеоморфизм $h_u: \widehat{B}_p^u \rightarrow \widehat{B}_{p'}^u$, положив

$$h_u(x) = \begin{cases} f'^{-t_x}(g_u(f^{t_x}(x))), & x \in \widehat{B}_p^u \setminus p; \\ p', & x = p. \end{cases}$$

Аналогично определим гомеоморфизм $h_s: \widehat{B}_p^s \rightarrow \widehat{B}_{p'}^s$ такой, что

$$h_s f^t|_{\widehat{B}_p^s} = f'^t h_s|_{\widehat{B}_p^s}.$$

Тогда искомым гомеоморфизм $h_{p,p'}$ определяется соотношением

$$h_{p,p'}(z) = \pi'_u{}^{-1}(h_u(\pi_u(z))) \cap \pi'_s{}^{-1}(h_s(\pi_s(z))), \quad z \in V_p.$$

Узлы $\partial \widehat{B}_p^u, \partial \widehat{B}_p^s$ являются меридианами полноториев $\Pi_{p,2}, \Pi_{p,1} \subset \partial V_p$, соответственно. По построению гомеоморфизм $h_{p,p'}$ переводит эти узлы в узлы $\partial \widehat{B}_{p'}^u, \partial \widehat{B}_{p'}^s$, являющиеся меридианами полноториев $\Pi_{p',2}, \Pi_{p',1} \subset \partial V_{p'}$.

5. Доказательство предложения 1 и теоремы 1

5.1. Доказательство предложения 1. Пусть $f^t, f'^t \in P$ – топологически эквивалентные потоки. Тогда они заданы на одном и том же (с точностью до гомеоморфизма) многообразии M^4 , и существует гомеоморфизм $\chi: M^4 \rightarrow M^4$, переводящий траектории первого потока в траектории второго потока. Пусть $\varphi, \varphi': M^4 \rightarrow [0, 4]$ – самоиндексирующие энергетические функции потоков f^t, f'^t соответственно. Напомним, что $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, а L_{c_1} обозначает объединение следов неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия потока f^t на сфере Σ_{c_1} , $c_1 \in (0, 2)$. Докажем, что существует гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ такой, что $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$.

Отметим, что $\Sigma_{c_1} \subset W_\omega^s \setminus \omega$, где ω – стоковая точка потока f^t , и траектория \mathcal{O}_x любой точки $x \in W_\omega^s \setminus \omega$ пересекает Σ_{c_1} в единственной точке (так как функция φ строго убывает вдоль траекторий потока f^t , отличных от состояний равновесия).

Положим $\widehat{\Sigma} = \chi(\Sigma_{c_1})$, $\widehat{L} = \chi(L_{c_1})$. Так как χ – гомеоморфизм многообразия M^4 , то $\widehat{\Sigma}$ является сферой, локально плоско вложенной в M^4 . Так как χ переводит траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях, то сфера $\widehat{\Sigma}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\widehat{\Sigma} \subset W_{\omega'}^s$;
- 2) для любой точки $y \in W_{\omega'}^s \setminus \omega'$ ее траектория \mathcal{O}'_y пересекает сферу $\widehat{\Sigma}$ в единственной точке;
- 3) $\widehat{L} = \widehat{\Sigma} \cap \bigcup_{p' \in \Omega_{f'^t}^2} W_{p'}^u$.

Каждой точке $y \in \widehat{\Sigma}$ поставим в соответствие точку $\theta'(y) = \Sigma'_{c_1} \cap \mathcal{O}'_y$. Из свойств сфер $\widehat{\Sigma}, \Sigma'_{c_1}$ следует, что отображение $\theta': \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ является биекцией, а из определения потока следует, что эта биекция непрерывна. Так как сфера компактна, то θ' является гомеоморфизмом. Тогда искомым гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ определяется формулой $h = \theta' \chi|_{\Sigma_{c_1}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Пусть $\tilde{c}_1 \in (0, 2)$ – число, отличное от c_1 . Тогда $\Sigma_{\tilde{c}_1} \subset W_{\omega}^s \setminus \omega$ и поток f^t индуцирует диффеоморфизм $\theta: \Sigma_{\tilde{c}_1} \rightarrow \Sigma_{c_1}$, ставящий каждой точке $x \in \Sigma_{\tilde{c}_1}$ точку $\mathcal{O}_x \cap \Sigma_{c_1}$ и переводящего множество $\Sigma_{\tilde{c}_1} \cap \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^2} W_p^u$ в зацепление L_{c_1} , поэтому определение зацепления L_{c_1} не зависит от выбора константы c_1 . Аналогично доказывается, что определение зацепления L_{c_2} не зависит от выбора константы $c_2 \in (2, 4)$ и выбор обоих зацеплений не зависит от выбора энергетической функции φ .

2) Из теоремы о единственности трубчатой окрестности (см. рассуждения после доказательства предложения 3) следует, что определение диаграммы Кирби потока f^t не зависит от выбора семейства окрестностей $N_{c_2} \subset \Sigma_{c_2}$. Из построений предыдущего пункта следует, что определение оснащения узлов, составляющих зацепление L_{c_1} , а, следовательно, и диаграммы Кирби потока f^t , не зависит от выбора констант c_1, c_2 и энергетических функций.

5.2. Доказательство теоремы 1. Доказательство необходимости условий теоремы является модификацией доказательства предложения 1. Докажем достаточность. Пусть потоки f^t, f'^t принадлежат классу P , $\{l_{p,c_1}, \tilde{l}_{p,c_1}\}, \{l'_{p',c_1}, \tilde{l}'_{p',c_1}\}$ – их диаграммы Кирби, определенные для некоторых фиксированных энергетических функций φ, φ' таких, что существует гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ такой, что $h(L_{c_1}) = L'_{c_1}$, $h(\tilde{l}_{p,c_1}) = \tilde{l}'_{p',c_1}$ для каждой пары узлов $l_{p,c_1} \in L_{c_1}, l'_{p',c_1} = h(l_{p,c_1})$. Построим гомеоморфизм $G: M^4 \rightarrow M^4$ такой, что $f^t = G^{-1} f'^t G$, т.е. докажем, что потоки f^t, f'^t топологически сопряжены (и, следовательно, топологически эквивалентны).

Пусть $V_p(V_{p'})$ обозначает каноническую окрестность седловой точки $p \in \Omega_{f^t}^2, p' \in \Omega_{f'^t}^2$, выбранную в соответствии с энергетическими функциями φ, φ' . Напомним, что граница компактной канонической окрестности V_p каждого седлового состояния равновесия p представляется каноническим образом в виде объединения двух полноториев $\Pi_{p,1}, \Pi_{p,2}$ (см. следствие 2). Не уменьшая общности будем предполагать, что каноническая окрестность V_p любого седлового состояния равновесия p пересекается со сферой Σ_{c_1} по полноторию $\Pi_{p,1}$, и аналогичное предположение выполняется для потока f'^t . Если это не так, то сферу Σ_{c_1} можно “продавить” по траекториям потока f^t в попарно непересекающихся окрестностях каждого из многообразий W_p^u так, чтобы получить секущую с нужными свойствами (см., например, [37; предложение 12]).

Сфера Σ_{c_2} гомеоморфна объединению Σ множеств

$$\Sigma_{c_1} \setminus \bigcup_{p \in \Omega_{f,t}^2} \text{int } \Pi_{p,1} \quad \text{и} \quad \bigcup_{p \in \Omega_{f,t}^2} \Pi_{p,2}$$

при помощи гомеоморфизма η , ставящего каждой точке $x \in \Sigma_{c_2}$ точку пересечения ее орбиты \mathcal{O}_x со множеством Σ . Будем предполагать, что полноторий $\Pi_{p,c_2} \subset \Sigma_{c_2}$ выбран так, что $\eta(\Pi_{p,c_2}) = \Pi_{p,2}$ (см. рис. 2, где изображен двумерный аналог всех описываемых здесь объектов на диске, являющемся моделью вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, при этом для получения проективной плоскости необходимо склеить диаметрально противоположные точки граничной окружности). Это предположение также не уменьшает общности, так как все трубчатые окрестности гладкого подмногообразия объемлемо изотопны. Тогда оснащение \tilde{l}_{p,c_1} узла l_{p,c_1} является меридианом полнотория $\Pi_{p,2}$.

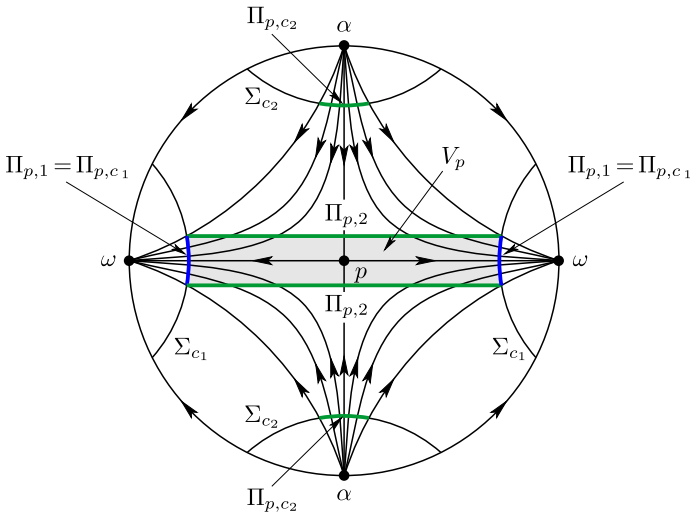


Рис. 2. Взаимное расположение полноториев $\Pi_{p,1}, \Pi_{p,2}, \Pi_{p,c_1}, \Pi_{p,c_2}$

С каждым узлом $l_{p',c_1} \subset \Sigma'_{c_1}$ связаны два полнотория, принадлежащие сфере Σ'_{c_1} : $\Pi'_{p',1} = h_{p,p'}(\Pi_{p,1})$ (где $h_{p,p'}$ – гомеоморфизм, определенный в предложении 13) и $\tilde{\Pi}_{p',1} = h(\Pi_{p,1})$. По построению $\Pi'_{p',1} = \Sigma'_{c_1} \cap V_{p'}$, в силу следствия 2 полноторий $\Pi'_{p',1}$ является гладко вложенным, поэтому ограничение $h_{p,p'}|_{\Pi_{p,c_1}}$ является локально плоским вложением. Гомеоморфизм $h: \Sigma_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ отображает $\Pi_{p,1}$ на образ вместе с окрестностью, поэтому ограничение $h|_{\Pi_{p,1}}$ также является локально плоским вложением. Кроме того, в силу свойств гомеоморфизмов $h_{p,p'}, h$, узел $\mu_2 = h_{p,p'}^{-1}(\tilde{l}_{p',c_1})$ является канонической параллелью полнотория $\Pi_{p,1}$, и $h_{p,p'}(\mu_2) = h(\mu_2) = \tilde{l}_{p',c_1}$. Пусть $\Pi_{p'} \subset \Sigma'_{c_1}$ – замкнутая трубчатая окрестность узла l'_{p',c_1} , не пересекающаяся с полноториями $\bigcup_{q \in \Omega_{f,t}^2 \setminus p'} \Pi'_{q,1} \cup \tilde{\Pi}_{q,1}$ и такая, что $\hat{\Pi}_{p,1} \cup \Pi'_{p',1} \subset \text{int } \Pi_{p'}$.

Из предложения 4 следует, что существует гомеоморфизм $h'_{p'}: \Sigma'_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ со следующими свойствами:

- 1) $h'_{p'}h|_{\Pi_{p,1}} = h_{p,p'}|_{\Pi_{p,1}}$;
- 2) $h'_{p'}|_{\Sigma'_{c_1} \setminus \text{int } \Pi_{p'}}$ = id.

Обозначим через $h': \Sigma'_{c_1} \rightarrow \Sigma'_{c_1}$ суперпозицию гомеоморфизмов $h'_{p'}$, построенных для каждой пары седловых точек $p \in \Omega_{ft}^2, p' \in \Omega_{f't}^2$, и положим $\chi = h'h$. По построению $\chi|_{\Pi_{p,1}} = h_{p,p'}|_{\Pi_{p,1}}$ для каждой точки $p \in \Omega_{ft}^2$.

Каждой точке $z \in M^4 \setminus \Omega_{ft}$ поставим в соответст­вие время $t_z \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_z}(z) \subset \Sigma_{c_1} \cup (\bigcup_{p \in \Omega_{ft}^2} V_p)$ и положим

$$G(z) = \begin{cases} f'^{-t_z}(\chi(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in \Sigma_{c_1}, \\ f'^{-t_z}(h_{p,p'}(f^{t_z}(z))), & f^{t_z}(z) \in V_p. \end{cases}$$

Отметим, что несмотря на то, что время t_z , вообще говоря, определяется неоднозначно для тех точек z , для которых $f^{t_z}(z) \in V_p$, отображение G является непрерывной биекцией. Действительно, пусть τ_z, ν_z такие, что $f^{\tau_z}(z) \in V_p, f^{\nu_z}(z) \in V_p$ и $t = \nu_z - \tau_z > 0$. Тогда

$$G(z) = f'^{-\tau_z}(h_{p,p'}(f^{\tau_z}(z))) = f'^{-\tau_z}(f'^{-t}(h_{p,p'}(f^t(f^{\tau_z}(z))))) = f'^{-\nu_z}(h_{p,p'}(f^{\nu_z}(z))).$$

Построенное отображение единственным образом по непрерывности продолжается на множество Ω_{ft} до искомого гомеоморфизма.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 156–178.
- [2] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257.
- [3] M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems* (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York–London, 1973, 389–419.
- [4] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.
- [5] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239.
- [6] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254.
- [7] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, “Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *Матем. сб.*, **214**:5 (2023), 97–127.
- [8] J. Eells, N. Kuiper, “Manifolds which are like projective planes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **14** (1962), 5–46.
- [9] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия”, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92.
- [10] S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math.* (2), **74** (1961), 199–206.
- [11] K. R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.
- [12] R. Kirby, “A calculus for framed links in S^3 ”, *Invent. Math.*, **45**:1 (1978), 35–56.
- [13] E. César de Sá, “A link calculus for 4-manifolds”, *Topology of low-dimensional manifolds* (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., **722**, Springer, Berlin, 1979, 16–30.

- [14] Р. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов*, Мир, М., 1967.
- [15] D. Rolfsen, *Knots and links*, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.
- [16] G. M. Fisher, “On the group of all homeomorphisms of a manifold”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 193–212.
- [17] Р. Гомпф, А. Штипшиц, *Четырехмерные многообразия и исчисление Курби*, МЦНМО, М., 2013.
- [18] К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М., 1974.
- [19] В. В. Прасолов, *Элементы теории гомологий*, МЦНМО, М., 2006.
- [20] C. Earle, J. Eells, “The diffeomorphism group of a compact Riemann surface”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 557–559.
- [21] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [22] R. H. Bing, “Locally tame sets are tame”, *Ann. of Math. (2)*, **59**:1 (1954), 145–158.
- [23] M. Freedman, “The topology of four-dimensional manifolds”, *J. Differential Geometry*, **17**:3 (1982), 357–453.
- [24] F. Laudenbach, V. Poenaru, “A note on 4-dimensional handlebodies”, *Bull. Soc. Math. France*, **100** (1972), 337–344.
- [25] Р. Мандельбаум, *Четырехмерная топология*, Мир, М., 1981.
- [26] C. McA. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**:2 (1989), 371–415.
- [27] K. Ishihara, “On tunnel number one links with surgeries yielding the 3-sphere”, *Osaka J. Math.*, **47**:1 (2010), 189–208.
- [28] В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, МЦНМО, М., 2004.
- [29] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Yale University Press, New Haven, 1966.
- [30] J. H. Conway, N. J. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [31] Д. М. Гробман, “О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **128**:5 (1959), 880–881.
- [32] Д. М. Гробман, “Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве”, *Матем. сб.*, **56 (98)**:1 (1962), 77–94.
- [33] P. Hartman, “On the local linearization of differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:4 (1963), 568–573.
- [34] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986.
- [35] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [36] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.
- [37] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, “О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **86**:5 (2022), 43–72.

Е. Я. Гуревич

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: egurevich@hse.ru

Поступило

31.08.2023

После доработки

06.02.2024

И. А. Сараев

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: isaraev@hse.ru

Принято к публикации

15.02.2024