

О расширенной модели перехода Джозефсона, линейных  
системах с полиномиальными решениями,  
детерминантных поверхностях и уравнениях Пенлеве 3

А.А.Глуцюк\*<sup>†‡</sup>

19 июня 2024 г.

*Дорогому Виктору Матвеевичу Бухштаберу к его 80-летию*

**Аннотация**

Мы рассматриваем трёхпараметрическое семейство линейных дифференциальных уравнений второго порядка: специальных дважды конфлюэнтных уравнений Гойна, введенных и исследованных В.М.Бухштабером и С.И.Тертычным. Оно даёт эквивалентное описание модели сильно шунтированного перехода Джозефсона в сверхпроводимости. В.М.Бухштабер и С.И.Тертычный показали, что множество тех комплексных значений параметров, при которых уравнение Гойна имеет полиномиальное решение, есть объединение так называемых спектральных кривых: явно заданных алгебраических кривых в  $\mathbb{C}^2$ , занумерованных индексом  $\ell \in \mathbb{N}$ . Как было показано автором в его совместной работе с И.В.Нетаяем, каждая спектральная кривая неприводима в пространстве параметров уравнения Гойна (соответственно, состоит из двух неприводимых компонент в пространстве параметров модели перехода Джозефсона). В той же статье И.В.Нетай представил гипотетическую формулу для рода спектральных кривых, полученную им в результате численных экспериментов. Он свёл эту его гипотезу о роде к гипотезе о регулярности спектральных кривых в дополнении к подходящей координатной оси. В настоящей статье эти гипотезы И.В.Нетая о регулярности и о роде доказаны. Для доказательства мы исследуем четырёхпараметрическое семейство линейных систем на сфере Римана, расширяющее семейство линейных систем, эквивалентных вышеупомянутым уравнениям Гойна. Оно эквивалентно описывает расширение модели перехода Джозефсона, введенное автором в его совместной статье с Ю.П.Бибило. Мы явно опишем так называемые детерминантные поверхности в расширенном пространстве параметров  $\mathbb{C}^3$ , занумерованные индексом  $\ell \in \mathbb{N}$ , состоящие из линейных систем с полиномиальными решениями. Спектральные кривые являются их пересечениями с гиперплоскостью, отвечающей исходной модели. Мы докажем, что каждая детерминантная поверхность регулярна вне подходящей гиперплоскости и состоит из двух рациональных неприводимых компонент. В доказательствах

---

\*CNRS, UMR 5669 (UMPA, ENS de Lyon), France. E-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr

<sup>†</sup>Национальный исследовательский университет "Высшая Школа Экономики", Москва, Россия

<sup>‡</sup>Институт Проблем Передачи Информации (ИППИ РАН) им. А.А.Харкевича, Москва, Россия

мы используем теорию явления Стокса, технику голоморфных векторных расслоений, слоение детерминантных поверхностей на изомонодромные семейства линейных систем, управляемое уравнением Пенлеве 3, и его трансверсальность исходной модели.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Введение, краткое описание основных результатов и их доказательств . . .	3
1.2	Род и регулярность спектральных кривых . . . . .	6
1.3	Детерминантные поверхности: формула, регулярность и параметризация	8
1.4	Связь с моделью перехода Джозефсона. Исторические замечания . . . . .	12
1.5	Четырёхпараметрическое расширение "Джозефсоновского" семейства динамических систем на двумерном торе и изомонодромное слоение . . . . .	15
1.6	План доказательства основных результатов . . . . .	17
1.7	Открытые задачи . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Доказательства основных результатов</b>	<b>21</b>
2.1	Подготовительный материал: явление Стокса, данные монодромии–Стокса и изомонодромные деформации . . . . .	21
2.2	Степень полиномиального решения. Доказательство Предложения 1.9 . . .	25
2.3	Симметричные системы класса $S$ и их данные монодромии–Стокса . . . . .	26
2.4	Полиномиальные решения и детерминантные поверхности. Доказательство Теоремы 1.12. . . . .	32
2.5	Системы с полиномиальными решениями. Параболичность данных монодромии–Стокса . . . . .	33
2.6	Локальная параметризация формальным инвариантом $s$ и двойным отношением $\mathcal{R}$ . . . . .	36
2.7	Реализация параболических данных монодромии–Стокса векторными расслоениями со связностями . . . . .	38
2.8	Фактор-семейство расслоений. Глобальная параметризация поверхностей $S_{\ell, \pm}^o$ . . . . .	47
2.9	Регулярность и рациональность. Доказательство Теоремы 1.14 . . . . .	49
2.10	Неприводимость многочленов и поверхностей. Доказательство Теоремы 1.13 . . . . .	51
2.11	Гладкость спектральных кривых и формула для рода. Доказательство Теорем 1.6 и 1.5 . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Изомонодромные слоения детерминантных поверхностей</b>	<b>53</b>
3.1	Случай $\ell = 0$ . . . . .	53
3.2	Случай $\ell = 1$ . . . . .	53
3.3	Случай $\ell = 2$ . . . . .	56

## 1 Введение

### 1.1 Введение, краткое описание основных результатов и их доказательств

Трёхмерное семейство специальных дважды конфлюэнтных уравнений Гойна

$$z^2 E'' + ((-\ell + 1)z + \mu(1 - z^2))E' + (\lambda + \mu(\ell - 1)z)E = 0 \quad (1.1)$$

принадлежит известному классу уравнений Гойна, см. [54]. Оно было исследовано В.М.Бухштабером и С.И.Тертычным в [57, 18, 19, 20, 21, 22] и в совместных статьях [12, 13] Бухштабера и автора. Бухштабер и Тертычный показали в их совместных статьях [18, 19], что его ограничение на множество вещественных параметров, удовлетворяющих неравенству  $\lambda + \mu^2 > 0$ , эквивалентно модели сильно шунтированного Джозефсоновского перехода в сверхпроводимости; см. соответствующий материал в разделе 1.4. В статье [18] они описали множество тех комплексных параметров  $(\ell, \lambda, \mu)$  с  $\mu \neq 0$ , при которых уравнение (1.1) имеет полиномиальное решение: это выполнено в точности тогда, когда  $\ell \in \mathbb{N}$  и точка  $(\lambda, \mu)$  лежит на алгебраической кривой  $\Gamma_\ell \subset \mathbb{C}_{\lambda, \mu}^2$ , называемой *спектральной кривой*. А именно,  $\Gamma_\ell$  – это множество нулей детерминанта замечательной трёхдиагональной  $\ell \times \ell$ -матрицы, см. [18, формула (21)] и Теорему 1.2 ниже. Автором было доказано, см. [29, теорема 1.3], что каждая спектральная кривая  $\Gamma_\ell$  неприводима.

Один из основных результатов (совместный И.В.Нетаям) настоящей статьи – формула для рода спектральной кривой, см. раздел 1.2. Нетай открыл её в результате численных экспериментов, сформулировал её как гипотезу, см. [29, гипотеза 1.5], и свёл её к гипотезе, утверждающей, что кривая

$$\Gamma_\ell^o := \Gamma_\ell \setminus \{\mu = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

регулярна, см. [29, следствие 3.6]. В настоящей статье мы докажем гипотезы Нетая о регулярности, а следовательно, и о роде.

Семейство уравнений Гойна (1.1) эквивалентно семейству линейных систем

$$Y' = \left( \frac{1}{z^2} \text{diag}(-\mu, 0) + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \ell & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix} + \text{diag}(0, \mu) \right) Y, \quad (1.2)$$

$$\lambda = \frac{a^2}{4} - \mu^2, \quad (1.3)$$

в следующем смысле: для любого решения  $Y(z) = (Y_1(z), Y_2(z))$  системы (1.2) функция

$$E(z) = Y_2(z)$$

удовлетворяет уравнению (1.1), и обратно: для каждого решения  $E(z)$  уравнения (1.1) вектор-функция

$$Y = (Y_1, Y_2), \quad Y_2(z) = E(z), \quad Y_1(z) = \frac{2z}{a}(E'(z) - \mu E(z)) \quad (1.4)$$

является решением системы (1.2). Эквивалентное утверждение сформулировано в неявном виде в [12, раздел 3.2, стр. 3869].

**Замечание 1.1** Функция  $E(z)$  является полиномиальным решением дважды конфлюэнтного уравнения Гойна (1.1), если и только если соответствующая вектор-функция  $Y(z)$ , определённая формулой (1.4), является векторным полиномиальным решением системы (1.2).

Для доказательства гипотез о роде и о регулярности мы рассмотрим четырёхпараметрическое расширение семейства линейных систем (1.2), зависящее от дополнительного параметра  $\chi$ : а именно, семейство

$$Y' = \left( \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} -\frac{s}{2} & -s\chi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \ell - \chi a & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \chi a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s\chi & \frac{s}{2} \end{pmatrix} \right) Y. \quad (1.5)$$

Исходное семейство (1.2) есть подсемейство в (1.5) с  $\chi = 0$ , где параметр  $s$  заменён на параметр  $\mu := \frac{s}{2}$ . Ограничение семейства (1.5) на вещественные параметры эквивалентно четырёхмерному расширению модели перехода Джозефсона, введённому автором в [8, раздел 6.2]. См. соответствующий материал в разделе 1.5.

Следующая серия основных результатов, представленных в разделе 1.3, относится ко множеству тех комплексных значений параметров в (1.5) с  $s \neq 0$ , для которых система (1.5) имеет векторное полиномиальное решение. Мы покажем, что это множество параметров есть объединение аффинных алгебраических поверхностей  $S_\ell \subset \mathbb{C}_{\chi, a, s}^3$  (нумерованных индексом  $\ell \in \mathbb{N}$ ), называемых *детерминантными поверхностями*; каждая поверхность  $S_\ell$  состоит из двух неприводимых компонент  $S_{\ell, \pm}$ , переставляемых инволюцией  $(\chi, a, s) \mapsto (-\chi, -a, s)$ . Каждая поверхность  $S_{\ell, \pm}$  будет представлена как множество нулей явно выписанного многочлена: определителя некоторой матрицы размера  $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ . Мы покажем, что поверхность  $S_{\ell, \pm}$  рациональна, и дополнение

$$S_{\ell, \pm}^o := S_{\ell, \pm} \setminus \{s = 0\}$$

– регулярная поверхность, биголоморфно параметризованная дополнением произведения  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к аналитической гиперповерхности (кривой, которая, а priori, может быть ни неприводимой, ни алгебраической), и поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  не пересекаются. Последние утверждения о регулярности и о параметризации будут доказаны в разделах 2.8, 2.9 с использованием теории явления Стокса и техники голоморфных векторных расслоений, аналогичной технике, использованной А.А.Болибрухом в его знаменитых работах о Проблеме Римана–Гильберта и смежных вопросах: см. статьи [9]–[11] и библиографию к ним.

Используя вышеупомянутые результаты о детерминантных поверхностях, мы докажем гипотезы Нетая о регулярности и о роде спектральных кривых  $\Gamma_\ell$  в разделе 2.11 следующим образом. Известно, что кривая  $\Gamma_\ell^o$ , записанная в координатах  $(a, s)$  вместо координат  $(\lambda, \mu)$ , где  $s = 2\mu$ ,  $\lambda = \frac{a^2 - s^2}{4}$ , см. (1.3), состоит из двух неприводимых компонент  $\Gamma_{\ell, \pm}^o$ , переставляемых инволюцией  $(a, s) \mapsto (-a, s)$  и биективно проектирующихся на кривую  $\Gamma_\ell^o$  с помощью проекции  $(a, s) \mapsto (\lambda, \mu)$ . Это было доказано в [29, section 3] с использованием результатов [29] и [18, раздел 3]. Регулярность кривой  $\Gamma_\ell^o$  эквивалентна регулярности произвольной из двух кривых  $\Gamma_{\ell, \pm}^o$ . Имеет место равенство

$$\Gamma_{\ell, \pm}^o = S_{\ell, \pm}^o \cap \{\chi = 0\}.$$

Тем самым, для доказательства регулярности кривой  $\Gamma_{\ell, \pm}^o$ , а значит, и гипотезы о роде, достаточно доказать трансверсальность (регулярной) поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  и гиперплоскости  $\{\chi = 0\}$ .

Для доказательства трансверсальности мы рассмотрим поле направлений на пространстве параметров, введенное автором в [8, раздел 6.2]:

$$\begin{cases} \ell'_s = 0 \\ \chi'_s = \frac{a - 2\chi(2\chi a - \ell)}{2s} \\ a'_s = -2s\chi + \frac{a}{s}(2\chi a - \ell) \end{cases}. \quad (1.6)$$

Как было показано автором, см. [8, теорема 6.6], каждая его интегральная кривая (т.е., график решения системы (1.6)) отвечает изомонодромному семейству линейных систем<sup>1</sup> (1.5), и для любого  $\ell \in \mathbb{C}$  функция

$$w(s) := \frac{a(s)}{2s\chi(s)} = \frac{a(s)}{\psi(s)} \quad (1.7)$$

удовлетворяет уравнению<sup>2</sup> Пенлеве 3

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{s} + 2\ell \frac{w^2}{s} - (2\ell + 2) \frac{1}{s} + w^3 - \frac{1}{w}. \quad (1.8)$$

вдоль решений системы (1.6). Как было показано в *loc. cit.*, вышеупомянутые изомонодромные семейства индуцированы из изомонодромных деформаций Джимбо, представленных в его статье [35]. Мы покажем, что изомонодромная деформация сохраняет свойство линейной системы (1.5) иметь полиномиальное решение, а значит, каждая детерминантная поверхность  $S_{\ell, \pm}^o$  касается поля направлений на  $\mathbb{C}_{\chi, a, s}^3$ , индуцируемого системой (1.6). Гиперплоскость  $\{\chi = 0\}$ , очевидным образом, трансверсальна полю направлений (1.6) в тех её точках, где  $s, a \neq 0$ . Мы покажем, что поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  не

<sup>1</sup>На самом деле, это было доказано в [8] для эквивалентных линейных систем, которые получены из систем (1.5) заменой пространственной переменной  $\hat{Y} = e^{-\frac{s}{2}z}Y$ .

<sup>2</sup>В системе (1.6) и в уравнении Пенлеве 3 (1.8), представленных в [8], параметр  $\ell$  заменён на  $-\ell$ .

пересекают ось  $s$ , т.е., прямую  $\{\chi = a = 0\}$ . Это вместе с их касанием поля (1.6) влечёт трансверсальность, а значит, регулярность пересечений  $\Gamma_{\ell,\pm}^o = S_{\ell,\pm}^o \cap \{\chi = 0\}$ . Это завершит доказательство гипотез о регулярности и о роде.

Слоение каждой поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$  на интегральные кривые поля направлений, индуцированного системой (1.6), называется её *изомонодромным слоением*. Мы обсудим изомонодромные слоения поверхностей  $S_{\ell,\pm}^o$  с  $\ell = 1, 2$  (а также аналогичное слоение для  $\ell = 0$ ) в разделе 3. Для  $\ell = 0, 1$  мы покажем, что они эквивалентным образом описываются явными уравнениями Риккати.

План доказательства основных результатов представлен в разделе 1.6.

Некоторые открытые задачи представлены в разделе 1.7.

## 1.2 Род и регулярность спектральных кривых

Напомним описание множества параметров, отвечающих уравнениям (1.1), имеющим полиномиальные решения. Для этого рассмотрим следующую трёхдиагональную матрицу размера  $\ell \times \ell$ :

$$H_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \mu(\ell-1) & 1-\ell & 2\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu(\ell-2) & -2(\ell-2) & 3\mu & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2\mu & -2(\ell-2) & (\ell-1)\mu \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu & 1-\ell \end{pmatrix} : \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} H_{\ell;ij} &= 0 \text{ если } |i-j| \geq 2; & H_{\ell;jj} &= (1-j)(\ell-j+1); \\ H_{\ell;j,j+1} &= \mu j; & H_{\ell;j,j-1} &= \mu(\ell-j+1). \end{aligned}$$

Матрица  $H_\ell$  принадлежит классу так называемых Якобиевых матриц, возникающих в различных вопросах математики и математической физики, см. [31].

**Теорема 1.2** [18, раздел 3] *Специальное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (1.1) с  $\mu \neq 0$  имеет полиномиальное решение, если и только если  $\ell \in \mathbb{N}$  и трёхдиагональная матрица  $H_\ell + \lambda \text{Id}$  имеет нулевой определитель. Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  определитель  $\det(H_\ell + \lambda \text{Id})$  является многочленом от  $(u, v) = (\lambda, \mu^2)$  степени  $\ell$  (который также имеет степень  $\ell$  по переменным  $(\lambda, \mu)$ ):*

$$Q_\ell(\lambda, \mu^2) := \det(H_\ell + \lambda \text{Id}). \quad (1.10)$$

О несуществовании полиномиальных решений при  $\ell \notin \mathbb{N}$  и  $s \neq 0$  см. также [13, замечание 4.13].

**Определение 1.3** Для каждого  $\ell \in \mathbb{N}$   $\ell$ -й спектральной кривой называется кривая

$$\Gamma_\ell := \{Q_\ell(\lambda, \mu^2) = 0\} \subset \mathbb{C}_{\lambda,\mu}^2. \quad (1.11)$$

Следующие результаты были доказаны автором в [29].

**Теорема 1.4** [29, теоремы 1.2 и 1.3] Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  многочлен  $Q_\ell(u, v)$  в (1.10) неприводим, и спектральная кривая  $\Gamma_\ell$  неприводима.

Напомним, что *геометрическим родом* неприводимой алгебраической кривой называется род Римановой поверхности, биективно параметризующей её (за исключением возможных самопересечений), т.е., род её нормализации.

Следующая теорема, являющаяся совместным результатом И.В.Нетая и автора, является одним из основных результатов статьи.

**Теорема 1.5** *Геометрический род кривой  $\Gamma_\ell$  равен*

$$\begin{cases} \left(\frac{\ell-2}{2}\right)^2, & \ell \text{ чётное;} \\ \left(\frac{\ell-1}{2}\right)\left(\frac{\ell-3}{2}\right), & \ell \text{ нечётное.} \end{cases}$$

И.В.Нетай открыл вышепредставленную формулу для рода в результате численных экспериментов и сформулировал её в виде гипотезы, см. [29, гипотеза 1.5]. Он свёл её к гипотезе, утверждающей, что кривая

$$\Gamma_\ell^\circ := \Gamma_\ell \setminus \{\mu = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

регулярна, см. [29, следствие 3.6]. Здесь мы докажем его гипотезу о регулярности. А из неё и из [29, следствие 3.6] следует гипотеза о роде.

**Теорема 1.6** *Кривая  $\Gamma_\ell^\circ$  регулярна для любого  $\ell \in \mathbb{N}$ .*

**Замечание 1.7** Уравнение (1.10), задающее кривую  $\Gamma_\ell$ , принадлежит к замечательному классу детерминантных представлений плоских кривых: уравнений вида

$$\det(x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3) = 0,$$

где  $(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , а  $L_1, L_2, L_3$  – матрицы размера  $\ell \times \ell$ . Детерминантные представления кривых возникают в алгебраической геометрии и в интегрируемых системах, см. статьи [58, 59] и библиографию к ним. Полное описание детерминантных представлений гладких комплексных неприводимых проективных кривых было получено в [58]. Самосопряжённые детерминантные представления вещественных гладких плоских кривых были описаны в [59].

### 1.3 Детерминантные поверхности: формула, регулярность и параметризация

**Определение 1.8** Степенью полиномиальной вектор-функции называется максимальная степень её компоненты.

**Предложение 1.9** Пусть  $s \neq 0$ . Если векторное полиномиальное решение системы (1.5) существует, то  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , полиномиальное решение имеет степень  $\ell$  и единственно с точностью до постоянного множителя.

**Предложение 1.10** Пусть  $\ell = 0$  и  $(a, s) \neq (0, 0)$ . Система (1.5) имеет полиномиальное решение, если и только если  $\chi = \pm \frac{1}{2}$ : тогда данное решение является постоянным вектором  $(1, \mp 1)$  с точностью до постоянного множителя.

**Доказательство** Если полиномиальное решение существует, то оно постоянно (Предложение 1.9). При  $(a, s) \neq (0, 0)$ ,  $\ell = 0$  пересечение ядер матриц из (1.5) есть подпространство, состоящее из векторов  $(v_1, v_2)$ , удовлетворяющих системе линейных уравнений  $\frac{1}{2}v_1 + \chi v_2 = 0$ ,  $\chi v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 0$ . Последняя система имеет ненулевое решение, если и только если её детерминант  $\frac{1}{4} - \chi^2$  равен нулю, т.е.,  $\chi = \pm \frac{1}{2}$ , и тогда решение равно  $(1, \mp 1)$  с точностью до постоянного множителя.  $\square$

**Замечание 1.11** Пусть  $s = 0$ . Тогда система (1.5) Фуксова и имеет две особые точки: ноль и бесконечность. Она имеет полиномиальное решение, если и только если её матрица вычета имеет по крайней мере одно целое неотрицательное собственное значение. В случае, когда матрица вычета диагонализуема и оба её собственных значения целые и неотрицательные, система имеет два линейно независимых полиномиальных решения.

Для каждого  $\ell \in \mathbb{N}$  введём следующие матричнозначные функции размера  $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ :

$$G_{1,\ell} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} & \chi a - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} & \chi a - 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{2} & \chi a - \ell \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$G_{2,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a}{2} & \chi s \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a}{2} & \chi s & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a}{2} & \chi s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

Следующие три теоремы и следствие являются основными результатами статьи.

**Теорема 1.12** Система (1.5) с  $\ell \in \mathbb{N}$  и  $s \neq 0$  имеет векторное полиномиальное решение, если и только если

$$\mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s) := \det(G_{1,\ell} \pm G_{2,\ell}) = 0 \text{ для некоторого выбора знака } \pm.$$



**Теорема 1.13** 1) Вышеупомянутые детерминанты  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$  являются неприводимыми многочленами от  $(\chi, a, s)$ , получаемыми друг из друга заменой знака при двух переменных:  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ .

2) Их множества нулей

$$S_{\ell,\pm} := \{\mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s) = 0\} \subset \mathbb{C}_{\chi,a,s}^3, \quad (1.14)$$

называемые **детерминантными поверхностями**, являются неприводимыми аффинными поверхностями, переставляемыми инволюцией

$$\mathcal{I} : (\chi, a, s) \mapsto (-\chi, -a, s).$$

Положим

$$S_{\ell,\pm}^o := S_{\ell,\pm} \setminus \{s = 0\}.$$

**Теорема 1.14** 1) Поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$  регулярны, не пересекаются между собой и не пересекают оси  $s$ , т.е., прямой  $\{\chi = a = 0\}$ .

2) Каждая поверхность  $S_{\ell,\pm}^o$  расслоена над осью  $s$  с выколотым началом координат на регулярные рациональные кривые степени  $2\ell + 1$ , конформно параметризованные сферами Римана с не более чем  $2\ell + 1$  проколами; их проективные замыкания в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \supset \mathbb{C}_{\chi,a,s}^3$  параметризованы сферой Римана  $\overline{\mathbb{C}}$ .

3) Каждая поверхность  $S_{\ell,\pm}^o$  биголоморфно параметризована дополнением произведения  $\mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к аналитической гиперповерхности (кривой), так что параметризация сохраняет координату  $s$ : переводит каждый  $s$ -слой  $\{s\} \times \overline{\mathbb{C}}$  в  $s$ -слой поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$ .

**Следствие 1.15** Проективные замыкания в  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  детерминантных поверхностей  $S_{\ell,\pm} \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^3$  являются рациональными поверхностями.

**Доказательство** Проекция  $\pi_s : S_{\ell,\pm} \rightarrow \mathbb{C}_s$  рациональна, и прообраз каждого  $s \neq 0$  – рациональная кривая, в силу утверждения 2) Теоремы 1.14. Отсюда и из [7, теорема III.4] следует, что поверхность  $S_{\ell,\pm}$  рациональна.  $\square$

Теперь проверим, что пересечение каждой поверхности  $S_{\ell,\pm} \subset \mathbb{C}_{\chi,a,s}^3$  с гиперплоскостью  $\{\chi = 0\}$  является компонентой  $\Gamma_{\ell,\pm}$  прообраза спектральной кривой  $\Gamma_\ell$  при двулистной проекции  $(a, s) \mapsto (\lambda = \frac{a^2 - s^2}{4}, \mu = \frac{s}{2})$ . С одной стороны, это следует "a posteriori" из Теоремы 1.12 и Замечания 1.1. С другой стороны, мы представим следующее прямое и полное доказательство этого факта. Для этого перемасштабируем координаты  $(a, s)$  в новые координаты  $(\mu, r)$ :

$$\mu = \frac{s}{2}, \quad r = \frac{a}{2}; \quad \lambda = r^2 - \mu^2.$$

Рассмотрим следующие матрицы размера  $\ell \times \ell$ :

$$\mathcal{G}_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mu \\ \vdots & & \ddots & -(\ell-1) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \mu & -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее соотношение (найденное в [18, раздел 3, ур. (30)]):

$$H_\ell + (r^2 - \mu^2) \text{Id} = -(\mathcal{G}_\ell + r \text{Id})(\mathcal{G}_\ell - r \text{Id}).$$

Из него следует, что

$$Q_\ell(\lambda, \mu^2) = (-1)^\ell Q_{\ell,+}(\mu, r) Q_{\ell,-}(\mu, r), \quad Q_{\ell,\pm}(\mu, r) := \det(\mathcal{G}_\ell \pm r \text{Id}). \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что прообраз кривой  $\Gamma_\ell \subset \mathbb{C}_{\lambda,\mu}^2$  при вышеупомянутой проекции состоит из двух кривых

$$\Gamma_{\ell,\pm} = \{Q_{\ell,\pm}(\mu, r) = 0\}.$$

Они неприводимы, как и  $\Gamma_\ell$ , в силу двулистности проекции, см. [29, раздел 3].

**Предложение 1.16** *Ограничение многочлена  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$  на гиперплоскость  $\{\chi = 0\}$  совпадает с многочленом  $Q_{\ell,\pm}$  с точностью до ненулевого постоянного множителя. В частности,  $S_{\ell,\pm} \cap \{\chi = 0\} = \Gamma_{\ell,\pm}$ .*

**Доказательство** Подставляя  $\chi = 0$  в матрицы  $G_{1,\ell}$  и  $G_{2,\ell}$  вычёркивает элементы  $\chi a$  в матрице  $G_{1,\ell}$  и преобразует матрицу  $G_{2,\ell}$  в матрицу, нижняя строка которой зануляется и у которой только элементы, равные  $\frac{a}{2}$ , не обращаются в нуль. Следовательно, каждый детерминантный многочлен  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$  преобразуется в  $\frac{1}{2}$ , умноженную на детерминант подматрицы размера  $\ell \times \ell$ , образованной первыми  $\ell$  строками и столбцами в матрице  $G_{1,\ell} \pm G_{2,\ell}$ . Эта подматрица получается из матрицы  $\mathcal{G}_\ell \pm r \text{Id}$  отражающей перестановкой строк, переставляющей первую и последние строки, вторую и  $\ell - 1$ -ю и т.д. Эта перестановка умножает определитель на степень числа  $-1$ . В итоге ограничения детерминантов  $\mathcal{P}_{\ell,\pm} = \det(G_{1,\ell} \pm G_{2,\ell})$  и  $Q_{\ell,\pm} = \det(\mathcal{G}_\ell \pm r \text{Id})$  на гиперплоскость  $\{\chi = 0\}$  отличаются друг от друга ненулевым постоянным множителем. Предложение доказано.  $\square$

**Пример 1.17** При  $\ell = 1$  с точностью до постоянного множителя,

$$\pm 4\mathcal{P}_{1,\pm}(\chi, a, s) := (a \pm s)(1 - 4\chi^2) + 4\chi; \quad (1.16)$$

$$S_{1,\pm} = \{\mathcal{P}_{1,\pm} = 0\} = \{(a \pm s)(1 - 4\chi^2) + 4\chi = 0\}.$$

Поверхности  $S_{1,\pm}$  рациональны, параметризованы координатами  $(\chi, s)$  и переставляются инволюцией  $\mathcal{I}$ . Из этой параметризации также следует рациональность  $s$ -слоёв поверхностей  $S_{1,\pm}$  из утверждения 2) Теоремы 1.14.

**Пример 1.18** При  $\ell = 2$  имеем

$$\pm 8\mathcal{P}_{2,\pm}(\chi, a, s) = (2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1)(a^2 - s^2) - 2a(2\chi \pm 1)(6\chi \mp 1) + 16\chi. \quad (1.17)$$

Каждая поверхность  $S_{2,\pm} = \{\mathcal{P}_{2,\pm} = 0\}$  неприводима и рациональна. Действительно, для любого фиксированного  $\chi \in \mathbb{C}$  уравнение  $\mathcal{P}_{2,\pm} = 0$  определяет конику  $\mathcal{C}_{\chi,\pm} \subset \mathbb{C}_{a,s}^2$ , проективное замыкание которой  $\bar{\mathcal{C}}_{\chi,\pm}$  в  $\mathbb{CP}_{a:s:t}^2 \supset \mathbb{C}_{a,s}^2 = \{t = 1\}$  проходит через точку  $D$  на бесконечности с однородными координатами  $[1 : -1 : 0]$ . Проекция проективной коники  $\bar{\mathcal{C}}_{\chi,\pm}$  из точки  $D$  на ось  $a$  даёт её рациональную параметризацию сферой Римана  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_a \cup \{\infty\}$ , рационально зависящую от  $\chi$ . Это даёт бирациональную параметризацию поверхности  $S_{2,\pm}$  двумя параметрами: параметром  $\chi$  и вышеупомянутой проекцией.

**Замечание 1.19** Вышеприведенный аргумент не доказывает рациональность  $s$ -слоёв поверхности  $S_{2,\pm}$ . Каждый её  $s$ -слой

$$\gamma_{s,\pm} = \{(\chi, a) \mid \mathcal{P}_{2,\pm}(\chi, a, s) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

есть квинтика, являющаяся множеством нулей многочлена (1.17) с фиксированным  $s$ . Хотя мы и докажем рациональность  $s$ -слоёв в полной общности для всех  $\ell$ , ниже мы представим и другое доказательство в специальном случае, при  $\ell = 2$ , вместе с описанием их точек ветвления над осью  $\chi$ .

Всюду ниже для любого  $s \neq 0$  через  $\tilde{\gamma}_{s,\pm}$  будем обозначать нормализацию: компактную Риманову поверхность, голоморфно параметризующую проективное замыкание  $\bar{\gamma}_{s,\pm}$   $s$ -слоя  $\gamma_{s,\pm}$  (биективно с точностью до самопересечений).

**Предложение 1.20** Пусть  $\ell = 2$ . Проекция на координату  $\chi$  индуцирует двулистное разветвлённое накрытие  $\pi_\chi : \tilde{\gamma}_{s,\pm} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}_\chi$  с двумя точками ветвления, т.е., критическими значениями, с  $\chi$ -координатами

$$\chi_{\pm,+} = \pm \frac{1}{2}(1 + is^{-1}), \quad \chi_{\pm,-} = \pm \frac{1}{2}(1 - is^{-1}). \quad (1.18)$$

В частности, нормализация  $\tilde{\gamma}_{s,\pm}$  – сфера Римана, и кривая  $\gamma_{s,\pm}$  рациональна.

**Доказательство** Утверждение о том, что  $\pi_\chi$  – двойное накрытие, следует из квадратичности по  $a$  многочлена (1.17). Её точки ветвления лежат во множестве нулей дискриминанта  $\Delta = \Delta_s(\chi)$  многочлена (1.17) как квадратичного многочлена от  $a$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_s(\chi) &= 4(2\chi \pm 1)^2((6\chi \mp 1)^2 - 16\chi(2\chi \mp 1) + s^2(4\chi^2 - 1)^2) \\ &= 4(2\chi \pm 1)^2(36\chi^2 \mp 12\chi + 1 - 32\chi^2 \pm 16\chi + s^2(4\chi^2 - 1)^2) \\ &= 4(2\chi \pm 1)^4(1 + s^2(2\chi \mp 1)^2). \end{aligned}$$

Тем самым, нули дискриминанта суть точки  $\mp \frac{1}{2}$  (нули кратности 4) и точки (1.18) (нули кратности один). Его нуль является точкой ветвления, если и только если её кратность нечётна. Бесконечность не является критической точкой, так как многочлен  $\Delta_s$  имеет чётную степень. Тем самым, единственные точки ветвления – это точки (1.18). Значит,  $\tilde{\gamma}_{s,\pm}$  – сфера Римана, по теореме Римана–Гурвица. Предложение 1.20 доказано.  $\square$

## 1.4 Связь с моделью перехода Джозефсона. Исторические замечания

В 1962 г. Б.Джозефсон [36] предсказал эффект туннелирования для *перехода Джозефсона*: системы двух сверхпроводников, разделённых узкой прослойкой диэлектрика (Нобелевская премия по физике, 1973). Этот эффект был затем экспериментально подтверждён П.В.Андерсоном и Ж.М.Ровелом в 1963 [1]. *Сильно шунтированный переход Джозефсона*, см. [55, 47, 40, 50], [6, р. 306], [41, pp. 337–340], [42, p.193], [43, р. 88] описывается семейством нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi + B + A \cos \omega t, \quad \omega > 0, \quad B \geq 0. \quad (1.19)$$

Здесь  $\phi$  – это разность фаз (аргументов) комплексно-значных волновых функций, описывающих квантовомеханические состояния двух сверхпроводников. Её производная равна напряжению с точностью до известного постоянного множителя.

Замены переменных и параметров

$$\tau := \omega t, \quad \theta := \phi + \frac{\pi}{2}, \quad \ell := \frac{B}{\omega}, \quad a = \frac{1}{\omega}, \quad s := \frac{A}{\omega}, \quad (1.20)$$

переводят (1.19) в неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение на 2-торе  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  с координатами  $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ :

$$\frac{d\theta}{d\tau} = a \cos \theta + \ell + s \cos \tau. \quad (1.21)$$

Число вращения динамической системы (1.21), см. [2, стр. 97], есть функция от параметров  $a, \ell, s$ . Для любого фиксированного  $a$  функция числа вращения рассматривается как функция от параметров  $(B, A)$ . Двумерные зоны фазового захвата семейства (1.21) – это в точности те подмножества уровня функции числа вращения в  $\mathbb{R}_{B,A}^2$ , которые имеют непустые внутренности. Как показали В.М.Бухштабер, О.В.Карпов и С.И.Тертычный [16], зоны захвата существуют только для целых значений числа вращения. Зоны захвата семейства (1.21) были исследованы В.М.Бухштабером, О.В.Карповым, С.И.Тертычным, Ю.С.Ильяшенко, Д.А.Филимоновым, Д.А.Рыжовым, А.В.Клименко, О.Л.Ромаскевич, В.А.Клепцыным, И.В.Щуровым, Ю.П.Бибило и автором, см. статьи [12]–[19], [8], [34, 38, 39], [26]–[29], [56, 57] и библиографии к ним.

Уравнения вида (1.19), (1.21) возникают в разных областях математики, например, в планиметрах, см. [24, 25]. Некоторое подсемейство семейства (1.21) было исследовано Ю.С.Ильяшенко и Дж.Гукенхеймером [32] с точки зрения теории быстро-медленных систем. Они получили результаты о поведении предельных циклов при  $\omega \rightarrow 0$ .

Модель (1.21) имеет следующее эквивалентное описание с помощью семейства двумерных линейных систем дифференциальных уравнений на сфере Римана, см. [14, 16, 19, 24, 25, 34], [12, раздел 3.2]. Замена переменных

$$z = e^{i\tau} = e^{i\omega t}, \quad \Phi = e^{i\theta} = ie^{i\phi}$$

переводит уравнение (1.21) на функцию  $\theta(\tau)$  в уравнение Риккати

$$\frac{d\Phi}{dz} = z^{-2}((\ell z + \frac{s}{2}(z^2 + 1))\Phi + \frac{a}{2}z(\Phi^2 + 1)). \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) является проективизацией двумерной линейной системы

$$Y' = \left( \frac{\text{diag}(-\frac{s}{2}, 0)}{z^2} + \frac{B}{z} + \text{diag}(0, \frac{s}{2}) \right) Y, \quad B = \begin{pmatrix} -\ell & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

в следующем смысле: функция  $\Phi(z)$  является решением уравнения (1.22), если и только если  $\Phi(z) = \frac{Y_2}{Y_1}(z)$ , где вектор-функция  $Y(z) = (Y_1(z), Y_2(z))$  есть решение системы (1.23). При  $s \neq 0$  система (1.23) имеет две иррегулярные нерезонансные особые точки в нуле и в бесконечности. В новых параметрах

$$\mu := \frac{s}{2} = \frac{A}{2\omega}, \quad \lambda := \frac{a^2 - s^2}{4} = \frac{1}{4\omega^2} - \mu^2 \quad (1.24)$$

семейство систем (1.23) эквивалентно следующему семейству *специальных дважды конфлюэнтных уравнений Гойна* на функцию  $E = Y_2(z)$ , см. [57], [18]–[22]:

$$z^2 E'' + ((\ell + 1)z + \mu(1 - z^2))E' + (\lambda - \mu(\ell + 1)z)E = 0. \quad (1.25)$$

Мы будем рассматривать и так называемое *сопряжённое* специальное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна, полученное из уравнения (1.25) заменой знака при  $\ell$ :

$$z^2 E'' + ((-\ell + 1)z + \mu(1 - z^2))E' + (\lambda + \mu(\ell - 1)z)E = 0. \quad (1.26)$$

Пусть  $\rho = \rho(B, A) = \rho(B, A; \omega)$  обозначает функцию числа вращения семейства (1.21). Для каждого  $r \in \mathbb{Z}$  через  $L_r$  будем обозначать зону фазового захвата семейства с числом вращения  $r$ :

$$L_r = \{(B, A) \mid \rho(B, A) = r\} \subset \mathbb{R}_{B,A}^2.$$

Известно, что каждая зона фазового захвата  $L_r$  является бесконечной гирляндой областей, уходящих на бесконечность в "асимптотически вертикальном" направлении, где каждые две соседние области разделены одной точкой. Более точно, граница  $\partial L_r$  состоит из двух графиков  $\{B = g_{r,\pm}(A)\}$  функций  $g_{r,\pm}$ , аналитических на оси  $\mathbb{R}_A$  и имеющих Бесселеву асимптотику при  $A \rightarrow \infty$  (обнаружено и доказано на физическом уровне строгости в [51], см. также [41, р. 338], [6, section 11.1], [15]; доказано математически в [39]). Вышеупомянутые графики имеют бесконечно много точек пересечения (которые разделяют примыкающие области). Одна из них лежит на оси абсцисс  $B$  и называется *точкой роста* (она существует только при  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ); её абсцисса равна  $\text{sign } r \sqrt{r^2 \omega^2 + 1}$ , см. [17, следствие 3]. Все остальные точки пересечения (раздела) называются *перемычками*. Согласно [8, теорема 1.4], все перемычки зоны  $L_r$  лежат на одной вертикальной прямой

$$\Lambda_r := \{B = r\omega\},$$

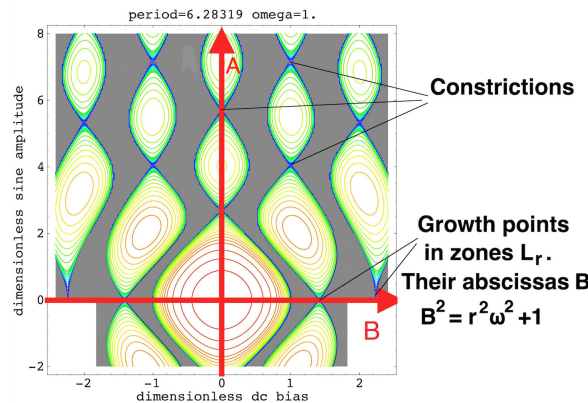


Рис. 1: Зоны фазового захвата при  $\omega = 1$ , их перемычки и точки роста. Координата  $B$  есть абсцисса,  $A$  – ордината. Английское слово "constrictions" означает "перемычки". Рисунок взят из статьи [13, fig. 1b)] с разрешения авторов, с добавленными осями координат.

которая называется *осью* зоны фазового захвата  $L_r$ . См. Рис. 1. Перемычки отвечают в точности тем значениям параметров  $\ell = r$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda + \mu^2 > 0$ , см. (1.24), при которых специальное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна (1.25) имеет целое решение, т.е., голоморфное в  $\mathbb{C}_z$ , как было показано в [12, теорема 3.3]. Множество тех параметров  $(\lambda, \mu)$ , при которых целое решение существует, задаётся явным аналитическим уравнением в терминах бесконечного матричного произведения, введенного в [19, pp. 332, 337]. Это утверждение было сформулировано в виде гипотезы в loc. cit. и доказано в [12, теорема 3.5].

Для данного  $\omega > 0$  точка  $(B, A) \in L_r$  называется *обобщённым простым пересечением*, если она является точкой пересечения границы  $\partial L_r$  с осью  $\Lambda_\ell = \{B = \ell\omega\}$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ , некоторой зоны фазового захвата  $L_\ell$  с  $\ell \equiv r \pmod{2}$  и не является перемычкой. См. Рис. 2. Известно, что обобщённые простые пересечения отвечают, в точности, тем параметрам  $\ell$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  с  $\mu \neq 0$ ,  $\lambda + \mu^2 > 0$ , при которых сопряжённое уравнение Гойна (1.26) имеет полиномиальное решение, как было показано в [13, теорема 1.15]. Доказательство этого результата основано на предыдущем совместном результате В.М.Бухштабера и автора [12, теорема 3.10], утверждающем, что если сопряжённое уравнение Гойна (1.26) имеет полиномиальное решение, то уравнение Гойна (1.25) не имеет целого решения. Это было решением серии гипотез В.М.Бухштабера и С.И.Тертычного, сформулированных и частично исследованных в [19, 20].

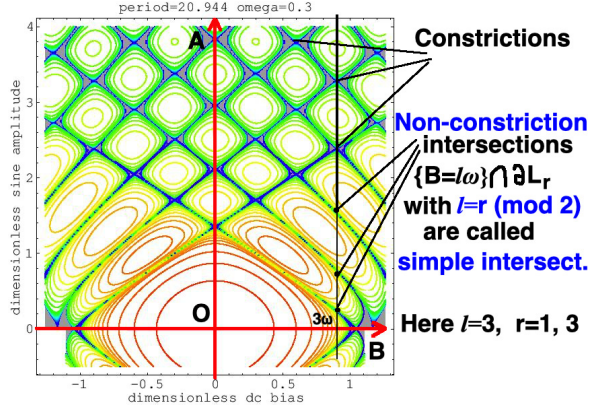


Рис. 2: Зоны фазового захвата при  $\omega = 0.3$ : перемычки (отвечают уравнениям Гойна (1.25), имеющим целые решения) и обобщённые простые пересечения (отвечают сопряжённым уравнениям Гойна (1.26) с полиномиальными решениями).

### 1.5 Четырёхпараметрическое расширение "Джозефсоновского" семейства динамических систем на двумерном торе и изомонодромное слоение

Четырёхпараметрическое расширение трёхпараметрического "Джозефсоновского" семейства динамических систем (1.21), введенное автором в [8, раздел 6.2], есть семейство

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \nu + a \cos \theta + s \cos \tau + \psi \cos(\theta - \tau); \quad \nu, a, \psi \in \mathbb{R}, \quad s > 0, \quad (a, \psi) \neq (0, 0). \quad (1.27)$$

Замена переменных  $\Phi = e^{i\theta}$ ,  $z = e^{i\tau}$  преобразует (1.27) в уравнение Риккати

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{z^2} \left( \frac{s}{2} \Phi + \frac{\psi}{2} \Phi^2 \right) + \frac{1}{z} \left( \nu \Phi + \frac{a}{2} (\Phi^2 + 1) \right) + \left( \frac{s}{2} \Phi + \frac{\psi}{2} \right). \quad (1.28)$$

Функция  $\Phi(z)$  является решением последнего уравнения Риккати, если и только если  $\Phi(z) = \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)}$ , где  $Y = (Y_1, Y_2)(z)$  – решение линейной системы

$$Y' = \left( -s \frac{\mathbf{K}}{z^2} + \frac{\mathbf{R}}{z} + s \mathbf{N} \right) Y, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \chi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -(\ell + \chi a) & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \chi a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\chi = \frac{\psi}{2s}, \quad \ell = \nu - \frac{\psi a}{s} = \nu - 2\chi a.$$

Формальные нормальные формы системы (1.29) в нуле и в бесконечности имеют одинаковую матрицу вычета, равную

$$\text{diag}(-\ell, 0), \quad \ell = \nu - 2\chi a. \quad (1.30)$$

См. соответствующий подготовительный материал о формальных нормальных формах, матрицах Стокса и изомонодромных деформациях в разделе 2.1.

**Теорема 1.21** [8, раздел 6.2] *Четырёхпараметрическое семейство линейных систем (1.29) аналитически расслоено (как слоение) на одномерные изомонодромные семейства, заданные следующей неавтономной системой дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \chi'_s = \frac{a-2\chi(\ell+2\chi a)}{2s} \\ a'_s = -2s\chi + \frac{a}{s}(\ell + 2\chi a) \\ \ell'_s = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

Для любого  $\ell \in \mathbb{R}$  функция (1.7), т.е.,

$$w(s) := \frac{a(s)}{2s\chi(s)} = \frac{a(s)}{\psi(s)} \quad (1.32)$$

удовлетворяет уравнению Пенлеве 3 (1.8) с  $\ell$ , заменённым на  $-\ell$ , вдоль решений системы (1.31):

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{s} - 2\ell \frac{w^2}{s} + (2\ell - 2) \frac{1}{s} + w^3 - \frac{1}{w}. \quad (1.33)$$

**Замечание 1.22** На самом деле, изомонодромность была доказана в loc. cit. для систем, полученных из систем (1.29), прибавлением скалярной матрицы  $-\frac{1}{2}Id$  к матрице  $N$  в (1.29). Но прибавление последнего члена не меняет ни проективизации (т.е., уравнения Риккати), ни изомонодромности. Дифференциальное уравнение (1.31) Гамильтоново с зависящей от времени  $s$  функцией Гамильтона

$$H(\chi, a, s) := -\frac{\chi^2 a^2}{s} + \frac{a^2}{4s} + s\chi^2 - \frac{\ell\chi a}{s}, \quad (1.34)$$

см. [27, предложение 1.14]. Представления уравнений Пенлеве в виде Гамильтоновых систем были найдены Ж.Мальмквистом [46] (для всех уравнений Пенлеве, за исключением уравнения Пенлеве 3) и К.Окамото [48, р. 265] (для всех, включая Пенлеве 3). Вышеупомянутое Гамильтоново представление уравнения Пенлеве 3 (1.33) с функцией Гамильтона (1.34) может быть получено из Гамильтонова представления Окамото с помощью замены переменных: см. [27, замечание 1.15].

Мы будем рассматривать линейные системы, полученные из систем (1.29) заменой знака при  $\ell$ :

$$Y' = \left( -s \frac{\mathbf{K}}{z^2} + \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{z} + s\mathbf{N} \right) Y, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \chi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \ell - \chi a & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \chi a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \chi & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Заметим, что при  $\chi = 0$  система (1.35) совпадает с системой (1.23), где  $\ell$  заменено на  $-\ell$ . Тем самым, она эквивалентна сопряжённому уравнению Гойна (1.26) на функцию  $E = Y_2(z)$ , аналогично похожему утверждению о (1.23) и уравнении Гойна (1.25), см. конец раздела 1.4.

Аналогично приведенному выше обсуждению, пространство параметров семейства (1.35) расслоено на изомодромные семейства, заданные решениями системы дифференциальных уравнений (1.6), вдоль которых функция  $w(s)$  удовлетворяет уравнению Пенлеве 3 (1.8).

## 1.6 План доказательства основных результатов

Доказательство основных результатов основано на аналитической теории линейных систем с иррегулярными особыми точками: теории формальных нормальных форм, явления Стокса (канонические решения в секторах Стокса и данные монодромии–Стокса) и теории изомодромных деформаций. Соответствующий подготовительный материал представлен в разделе 2.1.

В разделе 2.2 мы докажем Предложение 1.9. Мы выведем его из более общего предложения, относящегося к общим линейным системам вида

$$Y' = \left( \frac{K}{z^2} + \frac{R}{z} + N \right) Y, \quad K, R, N - 2 \times 2 - \text{матрицы}, \quad (1.36)$$

имеющим иррегулярные нерезонансные особые точки ранга Пуанкаре 1 в нуле и в бесконечности. Оно утверждает, что система имеет векторное полиномиальное решение, если и только если два подходящих канонических решения, отвечающих особым точкам ноль и бесконечность, совпадают и образуют решение, голоморфное на  $\mathbb{C}$ , и тогда это и есть единственное полиномиальное решение. Его степень равна соответствующему собственному значению матрицы вычета формальной нормальной формы на бесконечности.

В разделе 2.4 мы докажем Теорему 1.12, описывающую множество параметров тех систем (1.5), которые имеют полиномиальные решения, как объединение множеств нулей  $S_{\ell, \pm} = \{\mathcal{P}_{\ell, \pm} = 0\}$ . Для этого в разделе 2.3 мы введём и исследуем более общий класс систем (1.36), так называемый класс S, который содержит системы (1.5), и покажем, что класс S совпадает с классом тех систем (1.36), которые имеют симметрию вида  $(Y_1(z), Y_2(z)) \mapsto z^\ell (Y_2(z^{-1}), Y_1(z^{-1}))$ ; для систем (1.5), последнее  $\ell$  совпадает с числом  $\ell$  в (1.5). Мы покажем, что если полиномиальное решение системы (1.5) существует, то оно либо инвариантно, либо антиинвариантно относительно вышеупомянутой симметрии, и далее выведем, что параметры  $(\chi, a, s)$  системы лежат в  $S_{\ell, +}$ , соответственно,  $S_{\ell, -}$ . А затем мы докажем обратное.

Для доказательства Теоремы 1.14 мы рассмотрим аналитические продолжения подходящих канонических секториальных решений системы (1.5) в нуле и в бесконечности в отмеченную точку  $z_0 = 1$  вдоль путей  $\alpha_0^{-1}$  и  $\alpha_\infty^{-1}$  в  $\mathbb{C}_z^*$ , выходящих из подходящих секторов Стокса в точку  $z_0$ ; и сектора, и пути переставляются инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$  (такие наборы секторов и путей будем называть симметричными). Проективизации векторных

значений в точке  $z_0$  таким образом продолженных решений образуют четвёрку точек  $q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty} \in \mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ . Набор из четырёх точек  $q_{jp}$ , взятый вместе с оператором монодромии (с точностью до естественного действия группы  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ) называется *данными монодромии–Стокса*, см. раздел 2.1. Мы также рассмотрим и дополнительную точку  $q'_{10}$ , являющуюся образом точки  $q_{10}$  относительно проективизированной монодромии системы (1.5), действующей на пространстве проективизированных начальных условий (локальных решений) в точке  $z_0$ . Другими словами, возьмём аналитическое продолжение решения  $\Phi(z)$  уравнения Риккати (проективизации нашей системы (1.5)) с начальным условием  $\Phi(z_0) = q_{10}$  вдоль обхода вокруг нуля против часовой стрелки. Обозначим через  $q'_{10}$  значение таким образом продолженного в точку  $z_0$  решения.

Наша цель – построить параметризацию каждой поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  дополнением плоскости  $\mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к аналитической гиперповерхности (кривой). В разделе 2.5 мы покажем, что (1.5) имеет полиномиальное решение, если и только если  $\ell \in \mathbb{N}$  и данные монодромии–Стокса параболичны и не вырождены. Параболичность означает, что некоторые из вышеупомянутых точек  $q_{jp}$  совпадают, а именно,  $q_{20} = q_{1\infty}$ , монодромия унипотентна, и её проективизация оставляет на месте точку  $q_{20}$ . Невырожденность означает, что набор точек  $q_{10'}, q_{10}, q_{20}, q_{2\infty}$  состоит из как минимум трёх различных точек. Мы аналогично опишем все системы (1.36), калибровочно эквивалентные системам (1.5) с полиномиальными решениями.

В разделе 2.6 мы покажем, что параболические невырожденные данные монодромии–Стокса однозначно определены двойным отношением

$$\mathcal{R} := \frac{(q_{20} - q'_{10})(q_{10} - q_{2\infty})}{(q_{20} - q_{2\infty})(q_{10} - q'_{10})}.$$

Затем мы покажем, что две системы вида (1.5) с одинаковым  $\ell$ , имеющие полиномиальные решения, совпадают с точностью до замены знака параметров  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ , если и только если у них равны соответствующие значения параметра  $s$  и двойные отношения  $\mathcal{R}$  (построенные для заданных путей  $\alpha_{0, \infty}$ , одних и тех же для обеих систем). Это уже даёт локальную параметризацию поверхностей  $S_{\ell, \pm}^o$  координатами  $(s, \mathcal{R}) \in \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  (хотя в этом месте мы этого не будем доказывать). Но двойное отношение  $\mathcal{R}$  определено не единственным образом: оно зависит от классов гомотопии путей  $\alpha_{0, \infty}$ .

Для того, чтобы получить глобальную параметризацию поверхностей  $S_{\ell, \pm}^o$ , в разделе 2.7 мы вначале построим голоморфное семейство векторных расслоений  $\mathcal{E}_{t, \mathcal{R}} = \mathcal{E}_{t, \mathcal{R}, \ell}$  с мероморфными связностями на  $\overline{\mathbb{C}}$ , зависящее от двух параметров  $(t, \mathcal{R}) \in \mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}}$ , положим  $s := e^t$ , и непрерывное семейство пар путей  $\alpha_{0, t}$  и  $\alpha_{\infty, t}$ , идущих из точки  $z_0 = 1$  в подходящие сектора Стокса в нуле и в бесконечности, соответственно, и переставляемых инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ , которые удовлетворяют следующим утверждениям:

1) связности имеют иррегулярные нерезонансные особые точки ранга Пуанкаре 1 в нуле и в бесконечности с формальными нормальными формами

$$Y' = \left( \frac{\mathrm{diag}(-\frac{s}{2}, 0)}{z^2} + \frac{\mathrm{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{в } 0, \quad (1.37)$$

$$Y' = \left( \text{diag}(0, \frac{s}{2}) + \frac{\text{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{в } \infty; \quad (1.38)$$

2) вышеупомянутые сектора Стокса являются секторами Стокса для нормальных форм;

3) данные монодромии–Стокса, определённые путями  $\alpha_{0,t}$  и  $\alpha_{\infty,t}$ , параболичны и не вырождены, и соответствующее двойное отношение равно  $\mathcal{R}$ ;

4) два расслоения  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{E}_{t',\mathcal{R}'}$  со связностями аналитически калибровочно эквивалентны, если и только если

$$(t', \mathcal{R}') = (t, \mathcal{R}) + (2\pi i n, 2n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из параболичности следует, что каждое расслоение со связностью имеет мероморфное плоское сечение с единственным полюсом, в бесконечности, являющееся векторным многочленом степени  $\ell$  в тривиализующей карте в окрестности бесконечности.

В разделе 2.8 мы перейдём к фактору пространства параметров по действию группы, порождённой параллельным переносом на вектор  $(2\pi i, 2)$ , которое оставляет инвариантной координату  $\xi := \pi i \mathcal{R} - t$ . Мы получим голоморфное семейство расслоений со связностями, параметризованное пространством  $(s, \xi) \in \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$ , где все расслоения различны: попарно калибровочно не эквивалентны. В силу хорошо известной теоремы, см. [45, предложение 4.1], [11, приложение 3], [49, теорема 2.2, р.449], подмножество  $\text{Triv}_\ell \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  значений параметров, отвечающих голоморфно тривиальным расслоениям, является дополнением к аналитической гиперповерхности (кривой). Они отвечают линейным системам вида (1.36) на сфере Римана. Из параболичности данных монодромии–Стокса следует, что все рассматриваемые системы калибровочно эквивалентны системам вида  $S$ , имеющим векторное полиномиальное решение и вышеупомянутые формальные нормальные формы. Как показано в разделе 2.3, система вида  $S$  с этими нормальными формами калибровочно эквивалентна системе вида (1.5), если и только если она удовлетворяет следующему *условию несовпадения прямых*: собственные прямые матриц главных частей в 0 и в  $\infty$ , отвечающие ненулевым собственным значениям, различны. Исключая из множества  $\text{Triv}_\ell$  дополнительную кривую, состоящую из систем, не удовлетворяющих условию несовпадения прямых, мы получим новое открытое всюду плотное подмножество  $\text{Triv}_\ell^o \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  точек, отвечающих системам, калибровочно эквивалентным системам (1.5) с полиномиальными решениями; для любой точки  $(s, \xi) \in \text{Triv}_\ell^o$  соответствующая система (1.5) определена единственным образом с точностью до замены знака  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, a)$ . Это даёт биголоморфную параметризацию поверхностей  $S_{\ell,\pm}^o$  областью  $\text{Triv}_\ell^o$ . Затем мы покажем, что дополнение  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Triv}_\ell^o$  является аналитической кривой. Для этого мы докажем, что потенциальные точки непродолжимости замыкания второй удалённой кривой изолированы, и следовательно, устранимы по теореме Шиффмана, см. [52] и [23, раздел 4.4].

В разделе 2.9 мы выведем регулярность поверхностей  $S_{\ell,\pm}^o$  и рациональность их  $s$ -слоёв из параметризации и окончим доказательство Теоремы 1.14. Теорема 1.13 (неприводимость поверхностей  $S_{\ell,\pm}$  и многочленов  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$ ) доказана в разделе 2.10. Регулярность спектральных кривых  $\Gamma_{\ell,\pm}^o$  и формула для их рода доказаны в разделе 2.11.

## 1.7 Открытые задачи

Список открытых задач о модели сильно шунтированного перехода Джозефсона, о её четырёхпараметрическом расширении (1.27), изомонодромном слоении, заданном системой (1.31), и о смежных вопросах представлен в [8, раздел 6].

Для каждого  $r \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$  положим

$$L_r^+ = L_r \cap \{A > 0\}, \quad A_r := \text{ордината наивысшего простого пересечения в } L_r,$$

$$\Lambda_r := \{B = r\}, \quad Sr = \Lambda_r \cap \{A \geq A_r\}.$$

**Гипотеза о связности**, см. [26, гипотеза 1.14], утверждает, что *пересечение*  $L_r^+ \cap \Lambda_r$  *совпадает с лучом*  $Sr$ , *и тем самым, связно*. В силу [8, следствие 6.1 и замечание 6.2], она сводится к чисто вещественно-алгебро-геометрической гипотезе о вещественных спектральных кривых  $\Gamma_\ell$ , см. [8, гипотеза 6.3], которую мы переформулируем в следующей чуть более сильной форме.

**Гипотеза 1.23** 1) Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  пересечение вещественной спектральной кривой  $\Gamma_\ell$ , определённой в (1.11), с областью  $\{\lambda + \mu^2 > 0\}$  содержит единственную связную компоненту  $\Gamma_\ell^*$ , точки которой отвечают уравнениям (1.21) на  $\mathbb{T}^2$  с числом вращения  $\ell$ . Её другие компоненты отвечают положительным числам вращения, меньшим чем  $\ell$ .

2) Проекция  $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda + \mu^2$  отображает компоненту  $\Gamma_\ell^*$  диффеоморфно на  $\mathbb{R}_+$ .

**Задача 1.24** Исследовать вещественные (комплексные) детерминантные поверхности  $S_{\ell, \pm}$  и их вещественные (комплексные) изомонодромные слоения, заданные вещественными (комплексными) решениями системы дифференциальных уравнений (1.6). Для каких вещественных начальных условий  $(a_0, s_0)$  на гиперплоскости  $\{\chi = 0\}$  (отвечающей модели (1.21) перехода Джозефсона) соответствующие вещественные решения  $(\chi(s), a(s))$  системы (1.6) возвращаются на гиперплоскость  $\{\chi = 0\}$  для некоторого  $s > s_0$  и для бесконечно многих значений  $s > s_0$ ? Другими словами, исследовать отображение Пуанкаре первого возвращения (и его итерации) на вышеупомянутую гиперплоскость для вещественного изомонодромного слоения (1.6).

Известно, что возвращения на гиперплоскость  $\{\chi = 0\}$  отвечают простым полюсам с вычетом 1 решения уравнения Пенлеве (1.8), управляющего рассматриваемым решением системы (1.6), см. [8, замечание 6.14]. Некоторая малая часть решений уравнения Пенлеве 3, например, так называемые *усечённые решения* (tronquée решения, см. [44]), ограничены на полуинтервале  $[C, +\infty)$ , и тем самым, не имеют полюсов на нём.

**Задача 1.25** Описать те решения системы (1.6), графики которых лежат на поверхности  $S_{\ell, \pm}$  и которые отвечают усечённым решениям соответствующего уравнения Пенлеве 3 (1.8).

## 2 Доказательства основных результатов

### 2.1 Подготовительный материал: явление Стокса, данные монодромии–Стокса и изомонодромные деформации

Нижеследующий материал об иррегулярных особенностях линейных систем и о явлении Стокса содержится в [3, 4, 5, 33, 37, 53].

Рассмотрим двумерную линейную систему

$$Y' = \left( \frac{K}{z^2} + \frac{R}{z} + N \right) Y, \quad Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{C}^2, \quad (2.1)$$

над окрестностью нуля в  $\mathbb{C}_z$ . Здесь  $K, R, N$  – матрицы размера  $2 \times 2$ . Мы считаем, что  $K$  имеет различные собственные значения  $\lambda_{10} \neq \lambda_{20}$ , и  $N$  имеет различные собственные значения  $\lambda_{1\infty} \neq \lambda_{2\infty}$ . По определению, два последних условия на собственные значения эквивалентны условию, что особая точка  $0$  (соответственно,  $\infty$ ) системы (2.1) *иррегулярна, нерезонансна и имеет ранг Пуанкаре 1*. Матрица  $K$  сопряжена матрице  $\tilde{K} = \text{diag}(\lambda_{10}, \lambda_{20})$ ,  $\tilde{K} = \mathbf{H}_0^{-1} K \mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{H}_0 \in GL_2(\mathbb{C})$ , и постоянной линейной заменой  $Y = \mathbf{H}_0 \tilde{Y}$  (постоянным калибровочным преобразованием) можно добиться того, что  $K = \tilde{K}$ .

Напомним, что две системы вида (2.1) *аналитически эквивалентны* в окрестности нуля, если одна из них может быть преобразована в другую линейной заменой пространственной переменной  $Y = H_0(z) \tilde{Y}$ , где  $H_0(z)$  –  $GL_2(\mathbb{C})$ -значная функция на окрестности нуля. Две системы (2.1) *формально эквивалентны* в нуле, если вышеупомянутая замена  $H_0(z)$  существует в классе обратимых формальных степенных рядов с матричными коэффициентами. Аналитическая (формальная) эквивалентность на бесконечности определяется аналогично, где в качестве "степенных рядов" выступают ряды Лорана, содержащие только неотрицательные степени переменной  $z$ .

Система (2.1) формально эквивалентна в нуле единственной *формальной нормальной форме*

$$\tilde{Y}' = \left( \frac{\tilde{K}}{z^2} + \frac{\tilde{R}_0}{z} \right) \tilde{Y}, \quad \tilde{K} = \text{diag}(\lambda_{10}, \lambda_{20}), \quad \tilde{R}_0 = \text{diag}(b_{10}, b_{20}), \quad (2.2)$$

$$\tilde{R}_0 \text{ – диагональная часть матрицы } \mathbf{H}_0^{-1} R \mathbf{H}_0. \quad (2.3)$$

Матричный коэффициент  $K$  в системе (2.1) и соответствующая матрица  $\tilde{K}$  в (2.2) называются *матрицами главных членов*, а  $R, \tilde{R}_0$  – *матрицами вычетов* в нуле. Однако нормализующий ряд  $H_0(z)$ , переводящий систему (2.1) в формальную нормальную форму (2.2), как правило, расходится. В то же время, существует покрытие проколотой окрестности нуля двумя секторами  $S_0^0$  и  $S_1^0$  с вершиной в нуле, в которых существуют голоморфные  $GL_2(\mathbb{C})$ -значные матричные функции  $H_{j;0}(z)$ ,  $j = 0, 1$ ,  $C^\infty$ -гладкие на  $\bar{S}_j^0 \cap D_r$  для некоторого  $r > 0$ , и такие, что замены переменных  $Y = H_{j;0}(z) \tilde{Y}$  переводят

(2.1) в (2.2). Эта Теорема о Секториальной Нормализации выполнена для так называемых *секторов Стокса*. А именно, рассмотрим лучи, выходящие из нуля и образующие подмножество

$$\left\{ \operatorname{Re} \frac{\lambda_{10} - \lambda_{20}}{z} = 0 \right\}. \quad (2.4)$$

Они называются *мнимыми лучами раздела* или *лучами Стокса*. Сектор  $S_j^0$  называется *сектором Стокса*, если он содержит один мнимый луч раздела, а его замыкание не содержит второго луча раздела.

Стандартное каноническое диагональное матричное решение формальной нормальной формы (2.2) в нуле имеет вид  $W_0(z) = \operatorname{diag}(e^{-\frac{\lambda_{10}}{z}} z^{b_{10}}, e^{-\frac{\lambda_{20}}{z}} z^{b_{20}})$ . Матрицы  $X_0^j(z) := H_{j;0}(z)W_0(z)$  суть фундаментальные матричные решения исходной системы (2.1). Они определяют базисы решений в  $S_j^0$ , называемые *каноническими секториальными базисами*. Здесь мы выбираем ветви  $W_0(z) = W_0^j(z)$  матричнозначной функции  $W_0(z)$  в  $S_j^0$  так чтобы матрица  $W_0^1(z)$  получалась из матрицы  $W_0^0(z)$  аналитическим продолжением против часовой стрелки из сектора  $S_0^0$  в сектор  $S_1^0$ . И мы также определим ветвь  $W_0^2(z)$  матричнозначной функции  $W_0(z)$  в секторе  $S_2^0 := S_0^0$ , полученную из ветви  $W_0^1(z)$  аналитическим продолжением против часовой стрелки из сектора  $S_1^0$  в сектор  $S_0^0$ . Это даёт другое каноническое матричное решение  $X_0^2(z) := H_{0;0}(z)W_0^2(z)$  системы (2.1) в  $S_0^0$ , которое получается из решения  $X_0^0(z)$  умножением справа на матрицу монодромии  $\exp(2\pi i \tilde{R}_0)$  формальной нормальной формы (2.2). Пусть  $S_{j,j+1}^0$  обозначает связную компоненту пересечения  $S_{j+1}^0 \cap S_j^0$ ,  $j = 0, 1$ , которая проходится, когда мы идём из  $S_j^0$  в  $S_{j+1}^0$  против часовой стрелки, см. Рис. 3. Матрицы перехода  $C_{00}$ ,  $C_{10}$  между таким образом определёнными базисами  $X_0^j$ ,

$$X_0^1(z) = X_0^0(z)C_{00} \text{ на } S_{0,1}^0, \quad X_0^2(z) = X_0^1(z)C_{10} \text{ на } S_{1,2}^0, \quad (2.5)$$

называются *матрицами Стокса* в начале координат.

Вышеупомянутые теоремы о формальной нормальной форме и о секториальной нормализации верны также и на бесконечности. А именно, формальная нормальная форма на бесконечности имеет вид

$$\tilde{Y}' = \left( \tilde{N} + \frac{\tilde{R}_\infty}{z} \right) \tilde{Y}, \quad \tilde{N} = \operatorname{diag}(\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}), \quad \tilde{R}_\infty = \operatorname{diag}(b_{1\infty}, b_{2\infty}). \quad (2.6)$$

Здесь  $\lambda_{1\infty}$  и  $\lambda_{2\infty}$  – собственные значения матрицы  $N$ .

Более подробно, пусть  $\mathbf{H}_\infty$  – матрица, такая что  $\mathbf{H}_\infty^{-1}N\mathbf{H}_\infty = \operatorname{diag}(\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty})$ . Тогда

$$\tilde{R}_\infty \text{ – диагональная часть матрицы } \mathbf{H}_\infty^{-1}R\mathbf{H}_\infty.$$

Лучи Стокса на бесконечности определяются уравнением

$$\{\operatorname{Re}(\lambda_{1\infty} - \lambda_{2\infty})z = 0\}. \quad (2.7)$$

**Пример 2.1** Пусть  $K = \text{diag}(\lambda_{10}, \lambda_{20})$  и  $\lambda_{20} - \lambda_{10} > 0$ . Тогда лучи Стокса – положительная и отрицательная мнимые полуоси. Сектора Стокса  $S_0^0$  и  $S_1^0$ , образующие покрытие проколотой прямой  $\mathbb{C}^*$ , удовлетворяют следующим условиям:

- сектор  $S_0^0$  содержит положительную мнимую полуось, а его замыкание не содержит отрицательной мнимой полуоси;
- сектор  $S_1^0$  удовлетворяет противоположному условию. См. Рис. 3.

Матрицы Стокса  $C_{00}$  и  $C_{10}$  – унитарны и являются, соответственно, верхне- и нижнетреугольными. Случай особой точки на бесконечности с  $\lambda_{2\infty} - \lambda_{1\infty} > 0$  рассматривается аналогично. Лучи Стокса будут теми же, и сектора Стокса также могут быть выбраны теми же, что и выше. Но на бесконечности матрицы Стокса  $C_{0\infty}$ ,  $C_{1\infty}$  имеют противоположный треугольный вид: унитарные нижне- (соответственно, верхне-) треугольные.

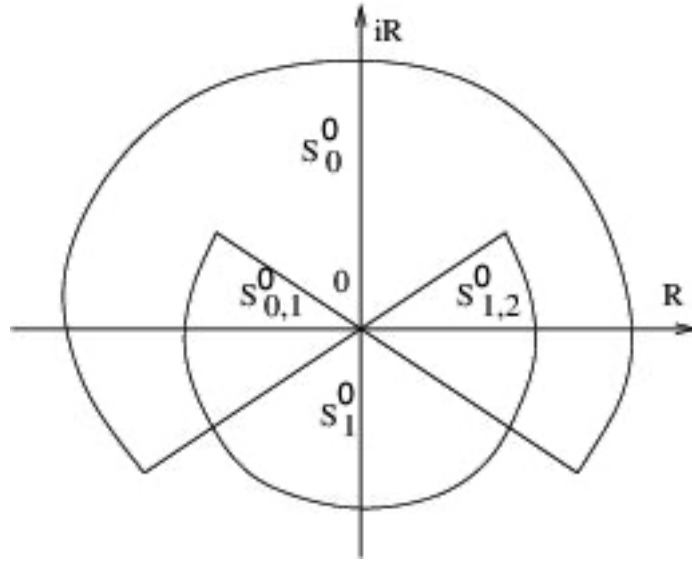


Рис. 3: Сектора Стокса в нуле в случае, когда  $\lambda_{10} - \lambda_{20} \in \mathbb{R}$ .

Напомним, что *оператор монодромии* системы (2.1) действует на пространстве локальных решений (начальных условий) в отмеченной точке  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  (или на пространстве решений в заданной односвязной области (секторе) в  $\mathbb{C}^*$ ) аналитическим продолжением вдоль обхода вокруг нуля против часовой стрелки. Как хорошо известно, имеет место следующая формула для матрицы монодромии в каноническом базисе в секторе  $S_0^p$  в особой точке  $p \in 0, \infty$ , см. [33, p.35]:

$$M = M_{norm,p} C_{1p}^{-1} C_{0p}^{-1}, \quad (2.8)$$

где

$$M_{norm,p} = \text{diag}(e^{2\pi i b_{1p}}, e^{2\pi i b_{2p}})$$

– матрица монодромии формальной нормальной формы в точке  $p$ . В силу формулы (2.8) и унитарности матриц Стокса,

$$\det M = \det M_{norm,p} = \exp(2\pi i \operatorname{Tr} R). \quad (2.9)$$

**Замечание 2.2** (см. [8, замечание 2.3]). Канонические решения  $Y(z)$  системы (2.1) в секторе Стокса  $S_j^p$  (являющиеся столбцами фундаментальной матрицы  $X_p^j$ ) занумерованы собственными значениями  $\lambda_{sp}$  соответствующей матрицы главной части в  $p$  (или, эквивалентно, собственными значениями  $b_{sp}$  матрицы вычета соответствующей формальной нормальной формы). Проективизированные канонические секториальные решения  $\Phi(z) = \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)}$  (принимаяющие значения в  $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}_\Phi$ ) суть единственные решения уравнения Риккати, отвечающего системе (2.1), которые голоморфны в  $S_j^p$  и непрерывно продолжаются в точку  $p$ . Значение продолженного проективизированного канонического решения в точке  $p$  есть тавтологическая проекция в  $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}$  собственной прямой  $L_{sp}$  матрицы главной части с собственным значением  $\lambda_{sp}$  (нумерующим рассматриваемое решение линейной системы).

**Определение 2.3** [8, определение 2.7]. Рассмотрим линейную систему  $\mathcal{L}$  вида (2.1). Фиксируем точку  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  и две пары секторов Стокса  $(S_0^0, S_1^0), (S_0^\infty, S_1^\infty)$  относительно матриц главных частей  $K$  в нуле и  $N$  в бесконечности, соответственно. Фиксируем два пути  $\alpha_p$  в  $\mathbb{C}^*$ , занумерованных точками  $p = 0, \infty$ , идущих из точки  $z_0$  в точку сектора  $S_0^p$ . Пусть  $f_{1p}, f_{2p}$  – канонический секториальный базис решений системы  $\mathcal{L}$  в точке  $p$  в секторе  $S_0^p$ . Рассмотрим аналитические продолжения базисных функций  $f_{kp}$  в точку  $z_0$  вдоль путей  $\alpha_p^{-1}$ . Пусть  $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  обозначает тавтологическую проекцию. Положим  $\Phi := \frac{Y_2}{Y_1}$ ,

$$q_{kp} := \pi(f_{kp}(z_0)) \in \mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}_\Phi. \quad (2.10)$$

Пусть  $M$  обозначает оператор монодромии системы  $\mathcal{L}$ , действующий на пространстве локальных решений в точке  $z_0$  (отождествлённом с пространством  $\mathbb{C}^2$  начальных условий в  $z_0$ ) аналитическим продолжением вдоль обхода вокруг нуля против часовой стрелки. Набор

$$(q, M) := (q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty}; M), \quad (2.11)$$

взятый с точностью до следующего отношения эквивалентности, называется *данными монодромии – Стокса* системы  $\mathcal{L}$ . А именно, два набора  $(q, M), (q', M') \in (\mathbb{CP}^1)^4 \times \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$  называются *эквивалентными*<sup>3</sup>, если существует линейный оператор  $H \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ , проективизация которого переводит  $q_{kp}$  в  $q'_{kp}$ , такой что  $H^{-1} \circ M' \circ H = M$ .

**Замечание 2.4** [8, замечание 2.8] Данные монодромии–Стокса системы (2.1) зависят только от класса гомотопии пары путей  $(\alpha_0, \alpha_\infty)$  в пространстве пар путей в  $\mathbb{C}^*$  с общей

<sup>3</sup>Вот – эквивалентное определение в терминах действия группы. Группа  $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$  действует на  $\overline{\mathbb{C}}^4 \times \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$  как дробно-линейное преобразование  $h : q_{kp} \mapsto hq_{kp}$  на точках в  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1$  и сопряжение  $M \mapsto hMh^{-1}$  на матрицах. Данные монодромии–Стокса – это орбита набора  $(q, M)$  под действием группы  $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ .



(переменной) начальной точкой  $z_0$  и концами, лежащими в заданных секторах  $S_0^0$  и  $S_0^\infty$ , соответственно.

Здесь и далее две линейные системы на  $\overline{\mathbb{C}}$  будут называться *калибровочно эквивалентными*, если они “постоянно калибровочно эквивалентны”: получаются друг из друга постоянной линейной заменой переменной  $Y \mapsto HY$ ,  $H \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . Калибровочная эквивалентность голоморфных векторных расслоений с мероморфными связностями определяется аналогично; здесь  $H$  – голоморфный изоморфизм векторных расслоений.

**Теорема 2.5** [8, теорема 2.11]. *Две линейные системы вида (2.1) калибровочно эквивалентны, если и только если они имеют одинаковые формальные нормальные формы в каждой особой точке и одинаковые данные монодромии–Стокса (определённые по фиксированному набору секторов и путей). В этом случае каждый линейный автоморфизм слоя  $\mathbb{C}^2 \times \{z_0\}$ , переводящий данные монодромии–Стокса одной системы в данные другой системы, продолжается до калибровочной эквивалентности систем. Здесь данные монодромии–Стокса отвечают одним и тем же секторам и парам путей.*

**Определение 2.6** Семейство линейных систем (2.1) с иррегулярными нерезонансными особыми точками в нуле и в бесконечности называется *изомонодромным*, если собственные значения матриц вычетов формальных нормальных форм в особых точках и данные монодромии–Стокса остаются постоянными: не зависят от параметра семейства.

**Замечание 2.7** Известно, что в данном случае (две особенности ранга Пуанкаре 1) приведенное выше определение, представленное в [8, определение 3.1], эквивалентно классическому определению, говорящему, что семейство линейных систем изомонодромно, если матрица монодромии (в подходящем каноническом секториальном базисе), матрицы Стокса, матрица перехода между двумя каноническими базисами в нуле и в бесконечности и вышеупомянутые матрицы вычетов постоянны: см. [8, предложение 2.9]. Хорошо известно, что если семейство линейных систем (2.1) непрерывно зависит от параметра, пробегающего связное многообразие, то из постоянства данных монодромии–Стокса автоматически следует постоянство собственных значений матриц вычетов формальных нормальных форм.

## 2.2 Степень полиномиального решения. Доказательство Предложения 1.9

**Предложение 2.8** *Система (2.1) с иррегулярными нерезонансными особыми точками ранга Пуанкаре 1 в нуле и в бесконечности имеет векторное полиномиальное решение, если и только если каждая из её матриц главной части в нуле и в бесконечности имеет нулевое собственное значение, а соответствующее ему собственное значение матрицы вычета формальной нормальной формы равно нулю в 0 и числу  $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  в  $\infty$ , и соответствующие канонические секториальные решения в нуле и в бесконечности*

совпадают (с точностью до постоянного множителя) и голоморфны в  $\mathbb{C}^*$ . В этом случае полиномиальное решение единственно, совпадает с вышеупомянутым каноническим решением и имеет степень  $\ell$ .

**Доказательство** В каждой особой точке  $p = 0, \infty$  соответствующая матрица главной части имеет, по крайней мере, одно ненулевое собственное значение  $\lambda$  (условие нерезонансности). В каждом секторе Стокса  $S$  соответствующее каноническое решение имеет вид экспоненциальной функции, умноженной на произведение монома (некоторой не обязательно целой степени) и функции, голоморфной на  $S$ , непрерывно продолжающейся в точку  $p$ . Сектор Стокса  $S$  содержит меньший сектор  $S'$  (лежащий с подходящей стороны от луча Стокса, содержащегося в  $S$ ), в котором экспоненциальная функция стремится к бесконечности экспоненциально при  $z \rightarrow p, z \in S'$ . Следовательно, если полиномиальное решение существует, то его ограничение на  $S'$  имеет меньший рост. Другими словами, оно асимптотически доминируется вышеупомянутым "экспоненциальным" каноническим решением. Но как хорошо известно из теории явления Стокса, если в некотором секторе  $S'$  одно решение двумерной линейной системы (2.1) доминирует другое, то меньшее, доминируемое решение является каноническим секториальным решением, и оно является таковым в каждом секторе Стокса, содержащем сектор  $S'$ . Именно этот факт объясняет унипотентность и треугольность матриц Стокса. Тем самым, полиномиальное решение является каноническим в обеих особых точках  $p = 0, \infty$ . Оно отвечает нулевому собственному значению матриц главной части, ввиду его мероморфности, и соответствующие собственные значения матриц вычетов формальных нормальных форм равны нулю в нуле и некоторому числу  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  на бесконечности (равному степени решения). Обратно, если существует решение, голоморфное на  $\mathbb{C}^*$ , являющееся каноническим в каждой особой точке и отвечающее нулевому собственному значению обеих матриц главной части, так что соответствующие собственные значения матриц вычета формальной нормальной формы равны нулю в нуле и  $\ell$  в бесконечности, то тогда данное решение полиномиально и имеет степень  $\ell$ , и  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Единственность полиномиального решения следует из приведенного выше рассуждения об экспоненциальном росте и доминировании. Предложение 2.8 доказано.  $\square$

Предложение 1.9 следует непосредственно из Предложения 2.8.

### 2.3 Симметричные системы класса S и их данные монодромии–Стокса

Для матрицы  $K$  размера  $2 \times 2$  обозначим через  $K^{tt}$  матрицу, получаемую сопряжением матрицы  $K$  матрицей транспозиции  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , т.е., получаемую из матрицы  $K$  перестановкой диагональных членов и перестановкой внедиагональных членов.

**Определение 2.9** Будем говорить, что линейная система принадлежит классу (имеет тип)  $S$ , если она имеет вид

$$Y' = \left( \frac{K}{z^2} + \frac{R}{z} - K^{tt} \right) Y, \quad R_{12} = -R_{21}. \quad (2.12)$$

**Пример 2.10** Всякая система (1.35) имеет тип  $S$ .

**Предложение 2.11** *Линейная система (2.1) имеет тип  $S$ , если и только если она допускает симметрию вида*

$$\mathbb{I} : (Y_1(z), Y_2(z)) \mapsto z^\ell (Y_2(z^{-1}), Y_1(z^{-1})). \quad (2.13)$$

В этом случае

$$\ell = \text{Tr } R. \quad (2.14)$$

**Доказательство** Преобразование  $(Y_1, Y_2, z) \mapsto (Y_2, Y_1, z^{-1})$  переводит графики решений системы (2.1) с матрицами  $K, N, R$  в графики решений новой системы аналогичного вида с новыми матрицами

$$\widehat{K} = -PNP^{-1}, \widehat{N} = -PKP^{-1}, \widehat{R} = -PRP^{-1}; \quad P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Умножение на  $z^\ell$  прибавляет  $\ell Id$  к  $R$ . Утверждение о том, что  $\mathbb{I}$  – симметрия исходного уравнения (2.1), эквивалентно тому, что таким образом полученные новые матрицы равны, соответственно,  $K, N$  и  $R$ :

$$K = -PNP^{-1} = -N^{tt}, \quad R = -PRP^{-1} + \ell Id = -R^{tt} + \ell Id. \quad (2.16)$$

Последнее уравнение эквивалентно утверждению о том, что внедиагональные элементы матрицы  $R$  противоположны и  $\ell = \text{Tr } R$ . Предложение доказано.  $\square$

Напомним, что канонические базисные решения системы (2.1) в точке  $p \in \{0, \infty\}$  в секторе Стокса  $S_j^p$  занумерованы собственными значениями  $\lambda_{1p}, \lambda_{2p}$  соответствующей матрицы главной части  $K$  (соответственно,  $N$ ). Или, что эквивалентно, занумерованы собственными значениями  $b_{1p}, b_{2p}$  матрицы вычета<sup>4</sup> соответствующей формальной нормальной формы (2.2), см. Замечание 2.2.

**Определение 2.12** Пусть линейная система (2.1) имеет иррегулярные нерезонансные особые точки ранга Пуанкаре 1 в нуле и на бесконечности. Пусть  $(q; M) = (q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty}; M)$  – её данные монодромии–Стокса, определённые отмеченной точкой  $z_0 = 1$ , секторами  $S_0^0$  и  $S_0^\infty$ , переставляемыми инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ , и путями  $\alpha_0, \alpha_\infty$ , идущими из точки  $z_0$  в  $S_0^0$  и в  $S_0^\infty$ , соответственно, и переставляемыми той же инволюцией. (Вышеупомянутые пары секторов и путей будем называть *симметричными*.) Будем говорить, что данные монодромии–Стокса  $(q, M)$  *(1,1)-симметричны*, если существует линейная инволюция  $\sigma : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  с собственными значениями 1,  $-1$  (т.е., сопряжённая вышеупомянутой матрице перестановки  $P$ ), сопрягающая преобразование монодромии и обратное

<sup>4</sup>Собственные значения матрицы главной части всегда различны (рассматриваемая особенность нерезонансна), а значит, нумеруют канонические базисные решения. Но собственные значения матрицы вычета могут совпадать. Можно сказать, что они нумеруют канонические базисные решения, только если они различны.

к нему, умноженное на скалярный множитель, так что проективизация инволюции  $\sigma$  переставляет  $q_{10}$  и  $q_{2\infty}$  и переставляет  $q_{20}$  и  $q_{1\infty}$ . В этом случае

$$\sigma M \sigma^{-1} = \exp(2\pi i \operatorname{Tr} R) M^{-1},$$

где  $R$  – матрица вычета системы (2.1), что следует из (2.9).

**Замечание 2.13** Пусть в системе (2.1) разности  $\lambda_{20} - \lambda_{10}$ ,  $\lambda_{2\infty} - \lambda_{1\infty}$  собственных значений матриц главной части  $K$  и  $N$  вещественно-пропорциональны. (Это выполнено, например, для систем типа S, где наборы собственных значений отличаются знаком.) Тогда наборы лучей Стокса в нуле и на бесконечности переставляются инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ . Отсюда следует, что наборы секторов Стокса в нуле и на бесконечности могут быть выбраны так, чтобы  $S_j^0$  и  $S_j^\infty$  переставлялись той же инволюцией для любого  $j = 0, 1$ . Тем самым, можно определить данные монодромии–Стокса путями  $\alpha_0$  и  $\alpha_\infty$ , переставляемыми той же инволюцией, и понятие (1,1)-симметричных данных монодромии–Стокса корректно определено.

**Теорема 2.14** *Линейная система (2.1) калибровочно эквивалентна линейной системе типа S, если и только если*

$$(\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}; b_{1\infty}, b_{2\infty}) = (-\lambda_{20}, -\lambda_{10}; b_{10}, b_{20}), \quad (2.17)$$

и её данные монодромии–Стокса  $(q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty}; M)$  (занумерованные собственными значениями  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}$  и построенные по некоторым заданным симметричным парам секторов и путей) (1,1)-симметричны. (В этом случае они (1,1)-симметричны для любых симметричных пар секторов и путей.) По определению, равенство (2.17) означает, что её формальные нормальные формы в нуле и на бесконечности имеют вид, соответственно,

$$Y' = \left( \frac{\operatorname{diag}(\lambda_{10}, \lambda_{20})}{z^2} + \frac{\operatorname{diag}(b_{10}, b_{20})}{z} \right) Y \quad \text{в } 0,$$

$$Y' = \left( -\operatorname{diag}(\lambda_{20}, \lambda_{10}) + \frac{\operatorname{diag}(b_{10}, b_{20})}{z} \right) Y \quad \text{в } \infty.$$

**Доказательство** Докажем утверждения теоремы для системы типа S. Вначале докажем (2.17). Равенство  $\{\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}\} = \{-\lambda_{20}, -\lambda_{10}\}$  следует из определения. Занумеруем последние собственные значения так, чтобы  $\lambda_{1\infty} = -\lambda_{20}$ ,  $\lambda_{2\infty} = -\lambda_{10}$ . Пусть  $H$  – матрица, диагонализующая  $K$ :  $H^{-1}KH = \operatorname{diag}(\lambda_{10}, \lambda_{20})$ , и пусть  $P$  – матрица перестановки, см. (2.15). Имеем  $P^2 = Id$ . Матрица  $PHP$  диагонализует матрицу  $N = -K^{tt} = -PKP$ :

$$P^{-1}H^{-1}P^{-1}NPHP = -P^{-1}H^{-1}KHP = -\operatorname{diag}(\lambda_{20}, \lambda_{10}) = \operatorname{diag}(\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}).$$

Имеем

$$\operatorname{diag}(b_{10}, b_{20}) = \text{диагональная часть матрицы } H^{-1}RH,$$

$\text{diag}(b_{1\infty}, b_{2\infty}) =$  диагональная часть матрицы  $P^{-1}H^{-1}P^{-1}RPHP$ ,  
 $P^{-1}RP = -R + (\text{Tr } R)Id$ , по определению и так как  $R_{12} = -R_{21}$ . Тем самым,

$$\begin{aligned} \text{diag}(b_{1\infty}, b_{2\infty}) &= -(\text{диагональная часть матрицы } P^{-1}H^{-1}RHP) + (\text{Tr } R)Id \\ &= -\text{diag}(b_{20}, b_{10}) + (\text{Tr } R)Id = \text{diag}(b_{10}, b_{20}). \end{aligned}$$

Докажем симметрию данных монодромии–Стокса. Вначале покажем, что

$$PMP^{-1} = e^{2\pi i\ell} M^{-1}, \quad \ell = \text{Tr } R. \quad (2.18)$$

Действительно, оператор монодромии  $M$  действует на пространстве начальных условий  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \times \{1\}$  в точке  $z_0 = 1$  так, что начальное условие  $Y^0$  переводится в значение в точке 1 аналитического продолжения соответствующего ростка решения вдоль обхода вокруг нуля против часовой стрелки. Запишем его матрицу в стандартном базисе  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Преобразование (2.13) является симметрией системы (2.1) (Предложение 2.11). Оно является композицией трёх следующих операций:

- (i) Замена пространственной переменной  $Y \mapsto PY$  (постоянное калибровочное преобразование), оно сопрягает монодромию с помощью инволюции  $P$ ;
- (ii) замена времени  $z \mapsto z^{-1}$ , она заменяет оператор монодромии на обратный к нему;
- (iii) умножение на функцию  $z^\ell$ , она умножает монодромию на скалярный множитель  $e^{2\pi i\ell}$ .

Следовательно, преобразование  $\mathbb{I}$  задаётся формулой (2.13) на пространстве вектор-функций и переводит решения начальной системы (с матрицей монодромии  $M$ ) в решения новой системы, матрица монодромии которой равна  $e^{2\pi i\ell} PM^{-1}P^{-1}$ . Последняя матрица совпадает с  $M$ , так как рассматриваемые системы совпадают ( $\mathbb{I}$  – симметрия). Это доказывает (2.18).

Теперь покажем, что преобразование  $\mathbb{I}$  переводит канонические решения в канонические решения. Для любого  $p = 0, \infty$  преобразование (i) переводит канонические решения исходной системы в точке  $p$  в канонические решения её образа в той же точке  $p$ , и нумерация собственными значениями  $\lambda_{jp}$  сохраняется. Преобразование (ii) переводит каноническое решение в точке 0 в секторе Стокса  $S^0$ , отвечающее собственному значению  $\lambda_{j0}$ , в каноническое решение преобразованной системы на бесконечности в секторе Стокса  $S^\infty$ , являющемся образом сектора  $S^0$  относительно инволюции  $z \mapsto z^{-1}$ , и соответствующее собственное значение матрицы главной части на бесконечности равно  $-\lambda_{j0} = \lambda_{2-j, \infty}$ . Это следует из Замечания 2.2. Отсюда следует, что проективизация оператора  $P$  есть инволюция  $\overline{\mathbb{C}}_{\mathbb{F}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_{\mathbb{F}}$  переставляющая  $q_{10}$  и  $q_{2\infty}$  и переставляющая  $q_{20}$  и  $q_{1\infty}$ . Отсюда и из (2.18) следует симметрия данных монодромии–Стокса.

Теперь докажем обратное. Пусть для заданной системы (2.1) выполнены равенства (2.17) на собственные значения, и данные монодромии–Стокса, построенные по некоторым симметричным парам секторов и путей,  $(1,1)$ -симметричны. Докажем, что (2.1) имеет тип S. Пусть  $\sigma : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  – соответствующая линейная инволюция, относительно которой они симметричны. Применяя калибровочное преобразование, будем

считать, что  $\sigma = P$ . Положим  $\ell = \text{Tr } R$ . Тогда преобразование (2.13) переводит исходную систему (2.1) в систему аналогичного вида, обозначим её через (2.1)', с теми же данными монодромии–Стокса. Это следует из предыдущего рассуждения о действии операций (i)–(iii). В каждой особой точке собственные значения матрицы главной части в обеих системах совпадают, и собственные значения матриц вычетов формальной нормальной формы также совпадают. В обеих системах они одинаково нумеруют данные монодромии–Стокса, по построению и в силу (2.17). Итак, системы (2.1) и (2.1)' имеют одинаковые формальные нормальные формы и данные монодромии–Стокса. Следовательно, они калибровочно эквивалентны: получаются друг из друга постоянной линейной заменой  $Y \mapsto HY$ ,  $H \in GL_2(\mathbb{C})$  (Теорема 2.5).

Выберем координаты  $(Y_1, Y_2)$  в  $\mathbb{C}^2$ , Пусть  $\Phi = \frac{Y_2}{Y_1}$  – соответствующая координата на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ . Мы выберем координаты так, чтобы записанные в них данные  $(q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty}; M)$  монодромии–Стокса систем (2.1) и (2.1)' совпадали. Покажем, что оператор  $H$  скалярен: равен тождественному с точностью до мультипликативной константы. Действие оператора  $H$  на пространстве начальных условий  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \times \{1\}$  сохраняет данные монодромии–Стокса. Следовательно, его проективизация сохраняет точки  $q_{jp}$  и их образы под действием проективизированной монодромии, т.е., монодромии уравнения Риккати, отвечающего системе (2.1). Пусть общее число точек  $q_{jp}$  и их вышеупомянутых образов больше двух. Тогда проективизированный оператор  $H$  сохраняет, как минимум, три различные точки в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Следовательно, он тождественен, т.е.,  $H$  скалярен, и вышеупомянутая замена переменных умножает  $Y$  на константу. Эта скалярная замена не меняет соответствующую линейную систему. Значит, системы (2.1) и (2.1)' совпадают, и тем самым, преобразование  $\mathbb{I}$ , см. (2.13), является симметрией системы (2.1). Следовательно, система (2.1) имеет тип S (Предложение 2.11).

Рассмотрим противоположный случай: вышеупомянутое число различных точек не больше двух. Для любой заданной особой точки  $p = 0, \infty$  точки  $q_{1p}, q_{2p}$  различны как проективизации начальных условий двух линейно независимых базисных решений системы (2.1). Отсюда следует, что  $\{q_{10}, q_{20}\} = \{q_{1\infty}, q_{2\infty}\}$ , и проективизированная монодромия либо сохраняет каждую точку  $q_{jp}$ , либо переставляет  $q_{1p}$  и  $q_{2p}$ . Второй случай не возможен. Действительно, в противном случае, если бы  $q_{10}$  и  $q_{20}$  переставлялись проективизированной монодромией, то в каноническом базисе в нуле матрица монодромии системы (2.1) имела бы нулевые диагональные члены. Но как минимум один из них должен быть ненулевым и равным некоторому собственному значению  $e^{2\pi i b_{j0}}$  монодромии формальной нормальной формы (следует из (2.8), противоположной треугольности и унипотентности матриц Стокса), – противоречие. В первом случае, когда проективизированная монодромия сохраняет каждую точку  $q_{jp}$ , монодромия линейной системы диагональна в каноническом секториальном базисе в точке  $p$ . Следовательно, соответствующие операторы Стокса тривиальны, в силу их противоположной треугольности и (2.8) (как в [28, доказательство леммы 3.3]). Это выполнено в обеих точках  $p = 0, \infty$ . Отсюда и из Замечания 2.2 следует, что проективизированные канонические решения  $g_{jp}(z) = \pi \circ f_{jp}(z)$ , т.е., решения уравнения Риккати с начальными условиями  $q_{j0}$  в точке  $z_0 = 1$  мероморфны на всей сфере Римана, и их значения в каждой точ-

ке  $p = 0, \infty$  совпадают с двумя различными собственными прямыми соответствующей матрицы главной части ( $K$  или  $N$ ). Следовательно, графики  $\{\Phi = g_{j0}(z)\}$ ,  $j = 1, 2$ , являются непересекающимися рациональными кривыми в  $\overline{\mathbb{C}}_\Phi \times \overline{\mathbb{C}}_z$ , параметризованными сферой Римана  $\overline{\mathbb{C}}_z$  с помощью проекции. Но они могут быть различными только если  $g_{j0} \equiv const$ . Действительно, в противном случае, если некоторая из функций  $g_{j0}$  не постоянна, то индекс пересечения графиков был бы положителен, в силу формулы Кюннета для гомологий произведения и рассуждения о бистепенях, см. доказательство того же утверждения в конце [8, доказательство предложения 4.8], – противоречие. Значит,  $g_{10}(z)$  и  $g_{20}(z)$  постоянны. Применяя калибровочное преобразование, мы будем считать, что  $g_{10} \equiv 0$ ,  $g_{2,0} \equiv \infty$ . Тогда матрицы в линейной системе (2.1) диагональны, как в loc. cit., и рассматриваемая система, очевидным образом, имеет тип S. Теорема 2.14 доказана.  $\square$

**Лемма 2.15** Система типа S с матрицей главной части  $K$ , имеющей различные собственные значения (условие нерезонансности), калибровочно эквивалентна системе вида (1.35), если и только если в (2.17) выполнено равенство  $\lambda_{20} = b_{20} = 0$  и выполнено следующее условие несовпадения прямых:

(\*) собственные прямые  $L_{10}$ ,  $L_{2\infty}$  матрицы главной части в 0 и в  $\infty$ , соответственно, отвечающие ненулевым собственным значениям  $\lambda_{10}$  и  $\lambda_{2\infty} = -\lambda_{10}$  различны.

**Доказательство** Каждая система (1.35), очевидным образом, удовлетворяет равенству  $\lambda_{20} = b_{20} = 0$  и условию (\*). Докажем обратное. Оператор перестановки  $P$  переставляет собственные прямые  $L_{10}$  и  $L_{2\infty}$ , см. (2.16) и приведенное выше доказательство первой части Теоремы 2.14. Применение калибровочного преобразования  $Y \mapsto HY$ , где  $H$  коммутирует с  $P$ , сохраняет класс S линейных систем, так как оно не меняет соотношений (2.16). Мы можем применить оператор  $H$ , коммутирующий с  $P$ , переводящий собственную прямую  $L_{10}$  в первую координатную прямую, так как прямые  $L_{10}$ ,  $L_{2\infty}$ , переставляемые оператором  $P$ , различны в силу (\*). А тогда  $L_{2\infty}$  перейдет во вторую координатную прямую. Это даёт новую систему типа S с верхне-треугольной матрицей  $K$  и нижне-треугольной матрицей  $N = -K^{tt}$ . Тем самым, новая система имеет вид (1.35), в силу (2.16). Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 2.16** Система (2.1) калибровочно эквивалентна системе вида (1.35), если и только если выполнены следующие условия:

- a) выполнены равенства (2.17), и  $\lambda_{20} = \lambda_{1\infty} = 0$ ,  $b_{20} = b_{2\infty} = 0$ ;
- b) данные монодромии–Стокса, построенные по некоторым заданным симметричным парам секторов и путей, (1,1)-симметричны;
- c) выполнено вышеупомянутое условие (\*) несовпадения прямых.

В этом случае данные монодромии–Стокса, построенные по любым симметричным парам секторов и путей, (1,1)-симметричны.

**Доказательство** Каждая система (1.35), очевидным образом, удовлетворяет условиям a) и c), а условие b) следует из Теоремы 2.14. Обратно, пусть система (2.1) удо-

влетворяет условиям а)–с). Тогда она калибровочно эквивалентна системе типа S, в силу симметрии данных монодромии–Стокса и Теоремы 2.14. Последняя система калибровочно эквивалентна системе вида (1.35), в силу Леммы 2.15. Следствие доказано.  $\square$

## 2.4 Полиномиальные решения и детерминантные поверхности. Доказательство Теоремы 1.12.

Всюду ниже мы считаем, что  $s \neq 0$ .

**Предложение 2.17** Пусть  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Преобразование (2.13) является инволюцией, переводящей каждое векторное полиномиальное решение  $Y(z)$  системы (1.35) (если оно существует) в  $\pm Y(z)$ .

**Доказательство** Преобразование (2.13), очевидным образом, является инволюцией. Это – симметрия системы (1.35), в силу Предложения 2.11 и поскольку (1.35) – система типа S, см. Пример 2.10. Если полиномиальное решение существует, то оно единственно (с точностью до постоянного множителя) и имеет степень  $\ell$  (Предложение 2.8). Преобразование (2.13) сохраняет пространство векторных многочленов степени не больше  $\ell$  и действует на нём как линейная инволюция, переводящая решение системы (1.35) в решение. Следовательно, единственное полиномиальное решение является его собственным вектором с собственным значением  $\pm 1$ .  $\square$

**Предложение 2.18** Векторный многочлен  $Y(z) = (Y_1(z), Y_2(z))$  является решением линейной системы (1.5), если и только если он удовлетворяет системе следующих двух уравнений для хотя бы одного выбора знака  $\pm$ :

$$(Y_1(z), Y_2(z)) = \pm z^\ell (Y_2(z^{-1}), Y_1(z^{-1})) \quad (2.19)$$

$$Y_2'(z) = \pm \left( \frac{a}{2z} + s\chi \right) z^\ell Y_2(z^{-1}) + \left( \frac{\chi a}{z} + \frac{s}{2} \right) Y_2(z) \quad (2.20)$$

**Доказательство** Пусть векторный многочлен  $Y(z)$  является решением системы (1.5). Тогда равенство (2.19) выполнено для некоторого выбора знака  $\pm$ , в силу Предложения 2.17. Подставляя таким образом найденное  $Y_1(z) = \pm z^\ell Y_2(z^{-1})$  во вторую строку системы (1.5), получаем (2.20). Обратно, пусть векторный многочлен  $Y(z)$  является решением системы уравнений (2.19) и (2.20). Тогда выполнено второе уравнение системы (1.5), как в предыдущем рассуждении. Осталось показать, что его первое уравнение также выполнено. Дифференцируя  $Y_1(z) = \pm z^\ell Y_2(z^{-1})$  и подставляя (2.20), получаем

$$Y_1'(z) = \frac{\ell}{z} Y_1(z) \mp z^{\ell-2} Y_2'(z^{-1}), \quad (2.21)$$

$$\mp z^{\ell-2} Y_2'(z^{-1}) = -z^{\ell-2} \left( \frac{az}{2} + s\chi \right) z^{-\ell} Y_2(z) \mp z^{\ell-2} \left( \chi az + \frac{s}{2} \right) Y_2(z^{-1}).$$



Подставляя равенство  $Y_2(z^{-1}) = \pm z^{-\ell} Y_1(z)$  в предыдущую правую часть и затем подставляя всё в (2.21), получаем первое уравнение в (1.5):

$$Y_1'(z) = \left( \frac{\ell - \chi a}{z} - \frac{s}{2z^2} \right) Y_1(z) - \left( \frac{a}{2z} + \frac{s\chi}{z^2} \right) Y_2(z).$$

□

**Доказательство Теоремы 1.12.** Достаточно показать, что существование полиномиального решения системы уравнений (2.19) и (2.20) для заданного выбора знака  $\pm$  эквивалентно включению  $(\chi, a, s) \in S_{\ell, \pm}$ . Пространство полиномиальных решений уравнения (2.19) изоморфно пространству многочленов  $Y_2(z)$  степени не больше  $\ell$  относительно соответствия  $Y_1(z) = \pm z^\ell Y_2(z^{-1})$ . Заданный многочлен  $Y_2(z) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j z^j$  степени не больше  $\ell$  является решением уравнения (2.20), если и только если его коэффициенты удовлетворяют следующим соотношениям, отвечающим равенству членов степени  $j$  в (2.20) для  $j = 0, \dots, \ell$ :

$$\pm \left( \frac{a}{2} c_{\ell-(j+1)} + s\chi c_{\ell-j} \right) + (\chi a - (j+1)) c_{j+1} + \frac{s}{2} c_j = 0. \quad (2.22)$$

Здесь мы полагаем  $c_k = 0$  при  $k \notin \{0, \dots, \ell\}$ . Система соотношений (2.22) эквивалентна утверждению о том, что вектор из коэффициентов  $(c_0, \dots, c_\ell)$  лежит в ядре матрицы  $G_{1, \ell} \pm G_{2, \ell}$ . Тем самым, существование полиномиального решения системы уравнений (2.19), (2.20) эквивалентно утверждению о том, что последняя матрица имеет нулевой определитель, т.е.,  $(\chi, a, s) \in S_{\ell, \pm}$ . Отсюда и из Предложения 2.18 следует утверждение Теоремы 1.12. □

**Замечание 2.19** Вышеупомянутое доказательство Теоремы 1.12 остаётся в силе для  $\ell = 0$  и даёт доказательство Предложения 1.10 при  $s \neq 0$ . Действительно, при  $\ell = 0$  уравнение (2.22) записывается в виде  $\pm s\chi c_0 + \frac{s}{2} c_0 = 0$  и имеет ненулевое решение, если и только если  $\chi = \mp \frac{1}{2}$ .

## 2.5 Системы с полиномиальными решениями. Параболичность данных монодромии–Стокса

**Определение 2.20** Мы будем рассматривать *абстрактные данные монодромии–Стокса*: набор  $(q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty}; M)$ , где  $q_{jp} \in \overline{\mathbb{C}}_\Phi = \mathbb{C}P^1_{[Y_1:Y_2]}$ ,  $\Phi = \frac{Y_2}{Y_1}$ ,  $q_{10} \neq q_{20}$ ,  $q_{1\infty} \neq q_{2\infty}$ , и  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  – невырожденный линейный оператор, действующий на пространстве  $\mathbb{C}^2_{Y_1, Y_2}$ , называемый *оператором монодромии*. Вышеупомянутый набор взят с точностью до эквивалентности из определения данных монодромии–Стокса. Будем говорить, что абстрактные данные монодромии–Стокса *параболичны*, если  $q_{20} = q_{1\infty}$ , и проективизированный оператор монодромии является либо параболическим преобразованием  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  с единственной неподвижной точкой  $q_{20}$ , либо тождественным. Обозначим через  $q'_{10}$  образ точки  $q_{10}$  под действием проективизированного преобразования монодромии. Параболические данные монодромии–Стокса называются *невырожденными*, если среди четырёх точек  $q'_{10}, q_{10}, q_{20}, q_{2\infty}$  как минимум три различны.

**Замечание 2.21** Рассмотрим данные монодромии–Стокса линейной системы (2.1), определённые симметричными парами секторов и путей. Если данные монодромии–Стокса параболически, то тогда они автоматически (1,1)-симметричны. Это следует из того, что каждая конформная инволюция  $\sigma : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , фиксирующая  $q_{20} = q_{1\infty}$  (например, инволюция, переставляющая  $q_{10}$  и  $q_{2\infty}$ ) сопрягает каждое параболическое преобразование с неподвижной точкой  $q_{20}$  (например, проективизированную монодромию) с его обратным. А именно, если мы выберем координату  $w$  на  $\overline{\mathbb{C}}$  так, что  $q_{20} = \infty$  и начало координат является второй неподвижной точкой инволюции  $\sigma$ , то  $\sigma(w) = -w$ , проективизированная монодромия является сдвигом  $w \mapsto w + u$ , а значит,  $\sigma$  сопрягает её с её обратным  $w \mapsto w - u$ .

Здесь мы докажем следующую теорему.

**Теорема 2.22** Система (2.1) с иррегулярной нерезонансной особой точкой ранга Пуанкаре 1 в 0 и в  $\infty$  калибровочно эквивалентна системе вида (1.5), имеющей непостоянное полиномиальное решение, если и только если она удовлетворяет следующим условиям:

a)  $(\lambda_{1\infty}, \lambda_{2\infty}; b_{1\infty}, b_{2\infty}) = (-\lambda_{20}, -\lambda_{10}; b_{10}, b_{20})$ ,  $\lambda_{20} = \lambda_{1\infty} = 0$ ,  $b_{20} = b_{2\infty} = 0$ .

b)  $\ell := b_{10} = b_{1\infty} \in \mathbb{N}$ .

c) Данные монодромии–Стокса, определённые некоторыми заданными симметричными парами путей и секторов, параболически и не вырождены.

d) Выполнено вышесформулированное условие (\*) несовпадения прямых.

В этом случае утверждение c) выполнено для данных монодромии–Стокса, определённых любыми симметричными парами секторов и путей.

**Доказательство** Вначале покажем, что каждая система (1.5), имеющая непостоянное полиномиальное решение, удовлетворяет утверждениям a)–d). Утверждения a) и d) выполнены для любой системы (1.5). Утверждение b) следует из Предложения 1.9. Теперь докажем параболическость данных монодромии–Стокса. Оператор монодромии имеет единичный определитель, поскольку он является произведением унитарных матриц и монодромии формальной нормальной формы, т.е., формальной монодромии, см. (2.8), а формальная монодромия равна  $\text{diag}(e^{2\pi i \ell}, 1) = Id$ , так как  $\ell \in \mathbb{N}$ . Значит, монодромия унитарна: она имеет единичный определитель и, по крайней мере, одно единичное собственное значение, отвечающее полиномиальному решению (инвариантному относительно монодромии). Значение в точке  $z = 1$  проективизированного полиномиального решения равно  $q_{20} = q_{1\infty}$ , и это – неподвижная точка проективизированной монодромии, в силу предыдущего аналогичного утверждения о монодромии. Отсюда и из унитарности монодромии следует параболическость данных монодромии–Стокса. Докажем их невырожденность.

Предположим противное: среди точек  $q_{jp}$ ,  $q'_{10}$  имеется не более двух различных. Тогда  $q_{10} = q_{2\infty} = q'_{10}$ , так как  $q_{10} \neq q_{20} = q_{1\infty}$ ,  $q_{1\infty} \neq q_{2\infty}$ ,  $q_{20}$  – неподвижная точка проективизированного преобразования монодромии, а значит, образ  $q'_{10}$  точки  $q_{10}$  при проективизированной монодромии не равен  $q_{20}$ . Итак,  $q_{10} = q_{2\infty}$ ,  $q_{20} = q_{1\infty}$ , и это –

неподвижные точки относительно проективизированной монодромии. Тем самым, соответствующая линейная система калибровочно эквивалентна диагональной системе, как в конце доказательства Теоремы 2.14. Следовательно,  $\chi = a = 0$ , а значит, система (1.5) диагональна. Но тогда у неё нет непостоянного векторного полиномиального решения, так как она является прямой суммой одномерных уравнений  $Y_1' = (-\frac{s}{2z^2} + \frac{\ell - \chi a}{z})Y_1$ ,  $Y_2' = (\frac{\chi a}{z} + \frac{s}{2})Y_2$ , и ни одно из них не имеет непостоянного полиномиального решения, – противоречие.

Докажем обратное: предполагая условия а)-д) выполненными, покажем, что рассматриваемая система (2.1) калибровочно эквивалентна системе (1.5) имеющей непостоянное полиномиальное решение. Мы уже знаем, что данная система калибровочно эквивалентна системе (1.5), в силу Следствия 2.16: данные монодромии–Стокса (1,1)-симметричны, см. Замечание 2.21. Тем самым, будем считать, что наша система имеет вид (1.5). Её проективизированные канонические решения, отвечающие собственным значениям  $\lambda_{20} = \lambda_{1\infty} = 0$  в нуле и на бесконечности, склеиваются в проективизацию одного решения  $Y(z)$  линейной системы, так как  $q_{20} = q_{1\infty}$  (параболичность).

Проективизированное решение  $Y(z)$  инвариантно относительно проективизированной монодромии, так как последняя оставляет точку  $q_{20}$  неподвижной (параболичность). Значит,  $Y(z)$  – каноническое решение линейной системы, и монодромия умножает  $Y(z)$  на постоянный множитель. Собственные значения формальных матриц вычета в 0 и в  $\infty$ , отвечающие  $Y(z)$ , равны, соответственно,  $b_{20} = 0$  и  $b_{1\infty} = \ell$ , по определению, и  $\ell \in \mathbb{N}$  по предположению. Отсюда и из (2.8) следует, что в базисе канонических секториальных решений в нуле монодромия треугольна и  $Y(z)$  – её собственный вектор с единичным собственным значением. Значит,  $Y(z)$  голоморфна на  $\mathbb{C}^*$ . Напомним, что каноническое решение  $Y(z)$  отвечает нулевым собственным значениям матриц главной части в 0 и на  $\infty$ . Отсюда и из предыдущего утверждения о собственных значениях формальной матрицы вычета следует, что  $Y(z)$  голоморфно продолжается в ноль и имеет рост порядка  $z^\ell$  (умноженного на ненулевой постоянный вектор) при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно это – непостоянное полиномиальное решение. Теорема 2.22 доказана.  $\square$

Ниже мы будем использовать следующее общее свойство расслоений со связностью, имеющей параболические данные монодромии–Стокса.

**Предложение 2.23** Пусть голоморфное векторное расслоение  $\mathcal{E}$  на сфере Римана  $\overline{\mathbb{C}}_z$  снабжено мероморфной связностью, имеющей иррегулярные нерезонансные особые точки в 0 и на  $\infty$  с формальными нормальными формами

$$\dot{Y} = \left( \frac{\text{diag}(-\frac{s}{2}, 0)}{z^2} + \frac{\text{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{в } 0,$$

$$\dot{Y} = \left( \text{diag}(0, \frac{s}{2}) + \frac{\text{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{в } \infty.$$

Пусть  $S_0^0$  и  $S_0^\infty$  – сектора Стокса в 0 и на  $\infty$ , соответственно, переставляемые инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ . Пусть  $\alpha_0$  и  $\alpha_\infty$  – пути, идущие из точки 1 в  $S_0^0$  и  $S_0^\infty$ , соответственно, также переставляемые той же инволюцией.

1) Связность имеет мероморфное решение (т.е., плоское сечение), если и только если  $\ell \in \mathbb{Z}$  и данные монодромии–Стокса<sup>5</sup>  $(q_{10}, q_{20}, q_{1\infty}, q_{2\infty})$ , определённые путями  $\alpha_r$ ,  $r = 0, \infty$ , и занумерованные собственными значениями  $-\frac{s}{2}, 0, 0, \frac{s}{2}$  матриц главной части, параболичны. В этом случае мероморфное решение единственно с точностью до постоянного множителя и голоморфно на  $\mathbb{C}$ .

2) Пусть мероморфное решение существует. Тогда расслоение со связностью диагонально, т.е., является прямой суммой одномерных голоморфных векторных расслоений со связностями, если и только если данные монодромии–Стокса вырождены.

**Доказательство** Мероморфное решение  $f$  должно совпадать с каноническим решением в нуле и на бесконечности, отвечающим нулевому собственному значению матрицы главной части: тем самым, эти решения склеиваются, а значит,  $q_{20} = q_{1\infty}$ . Отсюда и из равенства  $b_{20} = 0$  следует его голоморфность на  $\mathbb{C}$  и единственность. Соответствующее собственное значение матрицы вычета формальной нормальной формы должно быть целым, ввиду мероморфности. Значит,  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Тем самым, в каждой особой точке  $0, \infty$  формальная монодромия тривиальна, и хотя бы одна матрица Стокса тоже тривиальна, так как каноническое решение  $f$  мероморфно. Значит, монодромия связности унипотентна, в силу (2.8). Отсюда и из равенства  $q_{20} = q_{1\infty}$  следует параболичность данных монодромии–Стокса. Обратное утверждение доказывается аналогично приведенному выше доказательству Теоремы 2.22. Утверждение 1) доказано.

Пусть в тех же предположениях, что и выше, расслоение со связностью диагонально. Тогда решения связности, лежащие в одномерных подрасслоениях, являются каноническими решениями в обеих особых точках: в нуле и на бесконечности. Отсюда следует, что связность аналитически эквивалентна её формальной нормальной форме, и её монодромия тривиальна, как и монодромия нормальной формы. Проективизации вышеупомянутых решений – голоморфные сечения проективизации объемлющего расслоения на  $\mathbb{C}^*$ . Их значения в точке  $z = 1$  – это точки  $q_{jp}$  из данных монодромии–Стокса. Отсюда и из предыдущего утверждения следует, что  $q_{10} = q_{2\infty}$ ,  $q_{20} = q_{1\infty}$ . Следовательно, данные монодромии–Стокса вырождены. Обратное утверждение доказывается аналогично доказательству Теоремы 2.22.  $\square$

## 2.6 Локальная параметризация формальным инвариантом $s$ и двойным отношением $\mathcal{R}$

**Определение 2.24** Пусть  $(q_{10}, q_{20} = q_{1\infty}, q_{2\infty}; M)$  – абстрактные невырожденные параболические данные монодромии–Стокса. Их *характеризующим двойным отношением* называется двойное отношение четырёх точек  $q_{20}, q_{10}, q'_{10}, q_{2\infty}$ , см. Определение

<sup>5</sup>Понятие данных монодромии–Стокса корректно определено для связностей в общих (не обязательно тривиальных) расслоениях над сферой Римана, имеющих иррегулярные нерезонансные особые точки ранга Пуанкаре 1 в 0 и на  $\infty$ . В нашем случае, когда наборы собственных значений матрицы главной части отличаются знаком, понятие параболических данных монодромии–Стокса также корректно определено.

2.20:

$$\mathcal{R} := \frac{(q_{20} - q'_{10})(q_{10} - q_{2\infty})}{(q_{20} - q_{2\infty})(q_{10} - q'_{10})}. \quad (2.23)$$

**Предложение 2.25** *Каждые абстрактные невырожденные параболические данные монодромии–Стокса однозначно определены из характеризующим двойным отношением с точностью до умножения оператора монодромии на скалярный множитель.*

**Доказательство** Двойное отношение  $\mathcal{R}$  определяет четыре точки  $q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q_{2\infty}$  на сфере Римана  $\overline{\mathbb{C}}$  с точностью до Мёбиусова преобразования. За исключением, быть может, некоторых случаев, когда некоторые из них совпадают. Проверим, что это остаётся в силе и в случае совпадений. Действительно,  $q_{10}, q_{2\infty} \neq q_{20} = q_{1\infty}$ . Имеем  $q'_{10} \neq q_{20}$ : точка  $q'_{10}$  есть образ точки  $q_{10} \neq q_{20}$  под действием проективизированной монодромии, имеющей неподвижную точку  $q_{20}$ . Тем самым, единственные а priori возможные совпадения могут были либо  $q_{10} = q_{2\infty}$ , либо  $q'_{10} = q_{2\infty}$ , либо  $q'_{10} = q_{10}$ : может возникнуть не более одного совпадения, так как среди точек  $q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q_{2\infty}$  имеется по крайней мере три различных (невырожденность). В случае, когда  $q_{10} = q_{2\infty}$ , имеем  $\mathcal{R} = 0$ . В случае, когда  $q'_{10} = q_{2\infty}$ , имеем  $\mathcal{R} = 1$ . В случае, когда  $q'_{10} = q_{10}$ , имеем  $\mathcal{R} = \infty$ . Тем самым, три возможных совпадения отвечают трём различным значениям двойного отношения  $\mathcal{R}$ .

Для простоты предположим вначале, что  $q_{10} \neq q_{2\infty}$ . Применяя Мёбиусово преобразование, мы можем и будем считать, что  $q_{20} = \infty, q_{10} = 0, q_{2\infty} = 1$ . Тогда в координате на  $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{q_{20}\}$ , которую мы обозначим через  $w$ , проективизированный оператор монодромии есть сдвиг  $w \mapsto w + u, u \in \mathbb{C}$ . Имеем  $q'_{10} = q_{10} + u = u$ , так как  $q'_{10}$  – образ точки  $q_{10} = 0$ . Следовательно,

$$\mathcal{R} = \frac{q_{2\infty} - q_{10}}{q'_{10} - q_{10}} = \frac{1}{u}.$$

Тем самым, соответствие  $\mathcal{R} \mapsto u$  биективно, и проективизированная монодромия может быть восстановлена из двойного отношения  $\mathcal{R}$ , как и  $u$ . Случай, когда  $q_{10} = q_{2\infty}$ , т.е.,  $\mathcal{R} = 0$ , рассматривается аналогично. А именно, в этом случае  $q'_{10} \neq q_{10}, q_{20}$  (невырожденность). Применяя Мёбиусово преобразование, будем считать, что  $q_{20} = q_{1\infty} = \infty, q_{10} = q_{2\infty} = 0$  и  $q'_{10} = 1$  в стандартной аффинной координате  $w$  на  $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{q_{20}\}$ . Тогда проективизированная монодромия – это сдвиг  $w \mapsto w + 1$ . Тем самым, значение  $\mathcal{R} = 0$  определяет данные монодромии–Стокса однозначно, с точностью до умножения монодромии на скалярный множитель. Предложение 2.25 доказано.  $\square$

**Теорема 2.26** *Две системы вида (1.5) с  $s \neq 0$ , имеющие полиномиальное решение степени  $\ell \geq 1$ , совпадают с точностью до замены параметров  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ , если и только если соответствующие значения параметра  $s$  и двойного отношения  $\mathcal{R}$  (построенного по заданной симметричной паре классов гомотопии путей  $\alpha_{jp}$ ) одинаковы для обеих систем.*

**Доказательство** Если две системы вида (1.5) калибровочно эквивалентны, то калибровочная эквивалентность задаётся матрицей вида  $\text{diag}(1, \pm 1)$ . Действительно, матрица калибровочной эквивалентности должна быть одновременно и верхне-, и нижнетреугольной, так как соответствующее сопряжение должно сохранять (противоположные) треугольные типы матриц  $K$  и  $S$ , и каждая из последних матриц имеет различные собственные значения. Следовательно, калибровочное преобразование задаётся диагональной матрицей  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ . Оно действует на матрицу вычета умножением её внедиагональных элементов  $\pm a$  на отношения собственных значений: на числа  $\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\right)^{\pm 1}$ . Таким образом преобразованная матрица вычета имеет противоположные внедиагональные элементы, как и исходная матрица, если и только если последние отношения равны  $\pm 1$ . То есть, если и только если  $\Lambda = \text{diag}(1, \pm 1)$  с точностью до скалярного множителя. Рассматриваемое калибровочное преобразование не меняет  $s$ , и оно умножает  $\chi$ ,  $a$  на одно и то же число  $\pm 1$ . Оно не меняет данных монодромии–Стокса, а значит, и двойного отношения  $\mathcal{R}$ . Обратно, пусть две системы (1.5) с полиномиальными решениями степени  $\ell \geq 1$  имеют одинаковые значения параметра  $s$ , и пусть соответствующие данные монодромии–Стокса имеют одно и то же двойное отношение. Тогда соответствующие операторы монодромии совпадают. Действительно, одна из матриц Стокса в нуле тривиальна: это выполнено для любой иррегулярной нерезонансной особой точки ранга Пуанкаре 1, как только одно из канонических решений голоморфно на  $\mathbb{C}^*$ ; в нашем случае полиномиальное решение таковым является. Следовательно, в каноническом базисе секториальных решений в 0 монодромия имеет треугольную матрицу с теми же собственными значениями, что и формальная монодромия, в силу (2.8). Собственные значения формальной монодромии суть  $e^{2\pi i \ell} = 1$  и  $e^0 = 1$ . Тем самым, монодромия рассматриваемой системы (1.5) унипотентна. А тогда она однозначно определена проектизированной монодромией, которая, в свою очередь, однозначно определена двойным отношением  $\mathcal{R}$  (Предложение 2.25). Итак, полные данные монодромии–Стокса однозначно определяются двойным отношением  $\mathcal{R}$ . Тем самым, рассматриваемые системы имеют одинаковые формальные нормальные формы в каждой особой точке  $p = 0, \infty$  и одинаковые данные монодромии–Стокса. Следовательно, они калибровочно эквивалентны, по Теореме 2.5. Отсюда и из вышеприведенной характеристики калибровочно эквивалентных систем (1.5) следует, что рассматриваемые системы получаются друг из друга одновременной заменой знака  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ . Теорема 2.26 доказана.  $\square$

## 2.7 Реализация параболических данных монодромии–Стокса векторными расслоениями со связностями

Наша цель – доказать Теорему 1.14, утверждающую, что каждая детерминантная поверхность  $S_{\ell, \pm}$  биголоморфно параметризуется (вне множества  $\{s = 0\}$ ) дополнением произведения  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к аналитической гиперповерхности (кривой), и её слои  $\{s = \text{const} \neq 0\}$  – рациональные кривые, параметризованные слоями  $\{s\} \times \overline{\mathbb{C}}$  с конечным числом проколов. Из результатов предыдущего подраздела и из [11, приложение 3, лемма 1] следует, что параметры  $(s, \mathcal{R})$  задают локально биголоморфную параметриза-

цию каждой поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$ . Но значение параметра  $\mathcal{R}$  зависит от класса гомотопии определяющей его пары путей  $\alpha_0, \alpha_\infty$  и соответствующих секторов Стокса  $S_0^0, S_0^\infty$ ; пути и сектора должны переставляться инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ . Когда  $s$  делает один оборот вокруг нуля, сектора Стокса поворачиваются, концы путей (которые лежат в секторах Стокса) также поворачиваются, и класс гомотопии каждого пути меняется. Тем самым, когда  $s$  делает оборот, в то время как  $\mathcal{R}$  остаётся постоянным, данные монодромии–Стокса, определённые исходными путями (в значит, и рассматриваемая система), вообще говоря, меняются.

Для построения глобальной биголоморфной параметризации поверхностей  $S_{\ell, \pm}^o$ , перейдём к универсальному накрытию  $\mathbb{C}_t$  над проколотой прямой  $\mathbb{C}_s^*$ ,  $s = e^t$ , и построим непрерывные семейства секторов Стокса  $S_{0,t}^0, S_{0,t}^\infty$  и путей  $\alpha_{0,t}, \alpha_{\infty,t}$ . Затем мы построим голоморфное семейство  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  голоморфных векторных расслоений со связностями над  $\overline{\mathbb{C}}_z$ , параметризованных параметрами  $(t, \mathcal{R})$ , с формальными нормальными формами (1.37) и (1.38) в 0 и на  $\infty$ , соответственно, у которых данные монодромии–Стокса, определённые вышеупомянутыми путями и секторами, параболичны и имеют двойное отношение  $\mathcal{R}$ . Мы покажем, что два расслоения  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{E}_{t',\mathcal{R}'}$  со связностями калибровочно эквивалентны, если и только если

$$(t', \mathcal{R}') = (t, \mathcal{R}) + (2\pi in, 2n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

Затем в следующем подразделе мы перейдём к фактору пространства  $\mathbb{C}_t \times \overline{\mathbb{C}}_{\mathcal{R}}$  по действию циклической группы, порождённой сдвигом на вектор  $(2\pi i, 2)$ , и получим семейство расслоений со связностями, параметризованными  $\mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}$ . Мы покажем, что все параметры в  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$ , за исключением аналитической гиперповерхности (кривой), отвечают тривиальным расслоениям, снабжённым линейной системой вида (1.5) с полиномиальными решениями. Это даст биголоморфную параметризацию каждой поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  вышеупомянутыми параметрами.

Вышеупомянутые семейства секторов и путей задаются следующим образом:

$$S_{0,t}^0 = \left\{ \operatorname{Im} t - \arg z \in \left( -\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{3\pi}{2} - \delta \right) \right\}, \quad S_{0,t}^\infty = \left\{ \operatorname{Im} t + \arg z \in \left( -\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{3\pi}{2} - \delta \right) \right\},$$

$$\alpha_{0,t}(\tau) = e^{i\tau(\operatorname{Im} t + \pi)}, \quad \alpha_{\infty,t}(\tau) = \overline{\alpha_{0,t}(\tau)}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (2.25)$$

Они переставляются инволюцией  $z \mapsto z^{-1}$ . Данные сектора являются секторами Стокса для формальных нормальных форм (1.37) и (1.38), соответственно. Это следует из определения.

**Теорема 2.27** *Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  существует двумерное голоморфное векторное расслоение  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\ell$  над  $\overline{\mathbb{C}}_z \times \mathbb{C}_t \times \overline{\mathbb{C}}_{\mathcal{R}}$ , такое что для любого  $t \in \mathbb{C}$ , положим  $s := e^t$ , и любого  $\mathcal{R} \in \overline{\mathbb{C}}$  ограничение  $\mathcal{E}_{t,\chi} = \mathcal{E}_{t,\chi,\ell}$  расслоения  $\mathcal{E}$  на  $\overline{\mathbb{C}}_z = \overline{\mathbb{C}}_z \times \{(t, \chi)\}$  снабжено мероморфной связностью, зависящей голоморфно от  $(t, \chi)$ , имеющей формальные нормальные формы*

$$Y' = \left( \frac{\operatorname{diag}(-\frac{s}{2}, 0)}{z^2} + \frac{\operatorname{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{в } 0,$$

$$Y' = \left( \text{diag}\left(0, \frac{s}{2}\right) + \frac{\text{diag}(\ell, 0)}{z} \right) Y \quad \text{на } \infty \quad (2.26)$$

и удовлетворяющей следующим утверждениям:

a) Данные монодромии–Стокса связности, заданные вышеприведенными секторами Стокса и путями, параболичны и имеют заданное двойное отношение  $\mathcal{R}$ .

b) Два расслоения  $\mathcal{E}_{t, \mathcal{R}}$ ,  $\mathcal{E}_{t', \mathcal{R}'}$  со связностями, отвечающие двум различным  $(t, \mathcal{R})$  и  $(t', \mathcal{R}')$ , аналитически эквивалентны, если и только если выполнено соотношение (2.24).

**Доказательство** Фиксируем  $\ell \in \mathbb{N}$ . Положим

$$d_\ell = d_\ell(s) := \frac{\ell!}{2\pi i} \left( \frac{2}{s} \right)^\ell e^{\frac{s}{2}}.$$

Рассмотрим следующие модельные линейные системы, зависящие от параметров  $s \in \mathbb{C}^*$ ,  $u \in \mathbb{C}$ :

$$Y' = \left( \frac{\text{diag}\left(-\frac{s}{2}, 0\right)}{z^2} + \frac{\begin{pmatrix} \ell & 0 \\ ud_\ell & 0 \end{pmatrix}}{z} \right) Y \quad \text{над диском } D_2 := \{|z| < 2\}; \quad (2.27)$$

$$Y' = \left( \text{diag}\left(0, \frac{s}{2}\right) + \frac{\begin{pmatrix} \ell & ud_\ell \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} \right) Y \quad \text{над } \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_{\frac{1}{2}}}. \quad (2.28)$$

Эти системы имеют заданные формальные нормальные формы (2.26) в нуле и на бесконечности, соответственно. Легко проверить, что их операторы монодромии в подходящем базисе локальных решений имеют нижне- (верхне-) треугольные унитарные матрицы с треугольными элементами, равными  $\pm u$ . Мы склеим их вместе над кольцом

$$\mathcal{A} := \left\{ \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\} = D_2 \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_{\frac{1}{2}}})$$

подходящим способом, в зависимости от  $(t, \mathcal{R})$ , сохраняя дифференциальные уравнения как уравнения связностей на тривиальных расслоениях, чтобы получить голоморфное векторное расслоение  $\mathcal{E}_{t, \mathcal{R}}$  со связностью, имеющей искомого двойное отношение  $\mathcal{R}$  данных монодромии–Стокса. Напомним, что  $\mathcal{R}$  – это двойное отношение между подходящими аналитическими продолжениями канонических секториальных решений. Чтобы определить склейку, мы вначале найдём канонические решения и их аналитические продолжения в  $z_0 = 1$  вдоль путей  $\alpha_{0,t}^{-1}$ ,  $\alpha_{\infty,t}^{-1}$  и найдём матрицы монодромии систем (2.27), (2.28). Для этого введём пути

$$\beta_{0,t}(\tau) = (1 - \tau)\alpha_{0,t}(1) = (1 - \tau)e^{i(\text{Im } t + \pi)},$$



$$\beta_{\infty,t}(\tau) = \frac{1}{\beta_{0,t}(\tau)} = \frac{1}{1-\tau} e^{-i(\operatorname{Im} t + \pi)},$$

$$\gamma_{p,t} := \beta_{p,t}^{-1} \circ \alpha_{p,t}^{-1}$$

Каждый путь  $\gamma_{p,t}$  – это путь из точки  $p$  к точке 1.

Мы будем работать с функциями, определёнными на диске  $U \subset \mathbb{C}^*$  с центром в  $z_0 = 1$ . Для любого  $z \in U$  через  $\gamma_{p,t,z}$  будем обозначать композицию пути  $\gamma_{p,t}$  из  $p$  в 1 с прямолинейным путем из 1 в  $z$ .

Канонические секториальные базисные решения системы (2.27) в 0 в секторе  $S_{0,t}^0$ , занумерованные собственными значениями  $-\frac{s}{2}$  и 0 матрицы главной части, будут обозначаться через  $f_{10}, f_{20}$ . Аналогично, канонические базисные решения системы (2.28) в  $\infty$  в секторе  $S_{0,t}^\infty$ , занумерованные собственными значениями 0 и  $\frac{s}{2}$  матрицы главной части, будут обозначаться через  $f_{1\infty}, f_{2\infty}$ .

**Предложение 2.28** 1) Аналитические продолжения в диск  $U$  секториальных решений  $f_{10}, f_{20}$  системы (2.27) и  $f_{1\infty}, f_{2\infty}$  для системы (2.28) вдоль путей  $\alpha_{0,t}$  и  $\alpha_{\infty,t}$ , соответственно, (после их нормировок умножением на постоянные множители) задаются следующими формулами:

$$f_{10}(z) = (e^{\frac{s}{2}(\frac{1}{z}-1)} z^\ell, d_{\ell u} \int_{\gamma_{0,t,z}} \zeta^{\ell-1} e^{\frac{s}{2}(\frac{1}{\zeta}-1)} d\zeta), \quad f_{20}(z) = (0, 1), \quad (2.29)$$

$$f_{1\infty}(z) = (z^\ell, 0), \quad f_{2\infty}(z) = (d_{\ell u} z^\ell \int_{\gamma_{\infty,t,z}} \zeta^{-(\ell+1)} e^{\frac{s}{2}(\zeta-1)} d\zeta, e^{\frac{s}{2}(z-1)}). \quad (2.30)$$

2) В вышеупомянутых канонических базисах матрицы монодромии  $M_0, M_\infty$  систем (2.27) и (2.28), соответственно, равны

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\infty = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

**Доказательство** Вектор-функции  $f_{20}$  и  $f_{1\infty}$ , очевидным образом, являются решениями систем (2.27) и (2.28), соответственно. Они являются каноническими ввиду их голоморфности в нуле зего и мероморфности на бесконечности, соответственно. Покажем, что другие вектор-функции  $f_{10}, f_{2\infty}$  также являются каноническими решениями. Вначале докажем их корректную определённость: сходимость соответствующих интегралов. Интеграл в (2.29) имеет подынтегральное выражение  $\zeta^{\ell-1} e^{\frac{s}{2}(\frac{1}{\zeta}-1)}$ , имеющее особую точку в нуле. Интеграл берётся вдоль пути  $\gamma_{0,t,z}$ , идущего из начала координат в прямолинейном направлении с азимутом  $\operatorname{Im} t + \pi$  относительно вещественной оси (как и путь  $\beta_{0,t}^{-1}$ ). Следовательно, вдоль последней прямолинейной части пути интегрирования имеем

$$\arg \zeta = \operatorname{Im} t + \pi, \quad \frac{s}{2\zeta} = \frac{e^t}{2|\zeta|e^{i(\operatorname{Im} t + \pi)}} = -\frac{e^{\operatorname{Re} t}}{2|\zeta|}.$$

Тем самым, подынтегральная экспонента является плоской функцией в нуле вдоль пути  $\gamma_{0,t,z}$ , а значит, интеграл в (2.29) сходится. Сходимость интеграла в (2.30) доказывается

аналогично. Утверждение о том, что вектор-функции  $f_{10}$  и  $f_{2\infty}$  являются решениями систем (2.27) и (2.28), соответственно, доказывается прямым дифференцированием. Покажем, что их аналитические продолжения вдоль путей  $\alpha_{0,t}$  и  $\alpha_{\infty,t}$  являются каноническими секториальными решениями в  $S_{0,t}^0$  и  $S_{0,t}^\infty$ , соответственно, нумерованными собственными значениями  $-\frac{s}{2}$  и  $\frac{s}{2}$  матрицы главной части. Докажем это для  $f_{10}$ : для вектор-функции  $f_{2\infty}$  доказательство аналогично. Достаточно доказать последнее утверждение для обратного аналитического продолжения вектор-функции  $f_{10}$  вдоль пути  $\gamma_{0,t,z}^{-1}$  в точку  $w \in \gamma_{0,t,z}$ , близкую к началу координат, с  $\arg w = \operatorname{Im} t + \pi$ . Обратное продолжение задаётся интегралом (2.29), взятым вдоль прямолинейного пути  $[0, w]$ . Интеграл является плоской функцией от  $w$ , как и подинтегральная функция, см. предыдущее рассуждение, и аналогично, первая компонента вектор-функции  $f_{10}$  также плоска. Следовательно,  $f_{10}(w) = o(1)$  когда  $w \rightarrow 0$  так что  $\arg w = \operatorname{Im} t + \pi$ , в то время как  $f_{20} \equiv (0, 1)$ . Каноническое решение в  $S_{0,t}^0$  однозначно определяется (с точностью до постоянного множителя) условием, что оно должно стремиться к нулю, когда  $w \rightarrow 0$  вдоль луча, вдоль которого функция  $e^{\frac{s}{2w}}$  плоска, так как другое каноническое решение  $(0, 1)$  не стремится к нулю. Значит,  $f_{10}$  – каноническое решение.

Теперь для доказательства предложения остаётся вычислить монодромию. Очевидным образом, монодромия действует тривиально на функциях  $f_{20}$  и  $f_{1\infty}$ . Вычислим образы других функций  $f_{10}$  и  $f_{2\infty}$  при монодромии. Когда  $z$  делает один обход вокруг нуля против часовой стрелки, к интегралу в (2.29) прибавляется аддитивная константа

$$2\pi i e^{-\frac{s}{2}} \operatorname{Res}_0(z^{\ell-1} e^{\frac{s}{2z}}) = \frac{2\pi i}{\ell!} e^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{s}{2}\right)^\ell = d_\ell^{-1}.$$

Отсюда и из (2.29) следует формула для матрицы монодромии  $M_0$  в (2.31). Аналогично, когда  $z$  делает один обход против часовой стрелки, к интегралу в (2.30) прибавляется аддитивная константа, равная  $2\pi i e^{-\frac{s}{2}}$  умножить на коэффициент Лорана при  $\zeta^{-1}$  функции  $\zeta^{-(\ell+1)} e^{\frac{s}{2}\zeta}$ . Последний коэффициент Лорана равен  $\frac{(\frac{s}{2})^\ell}{\ell!}$ . Тем самым, полученная аддитивная константа равна  $d_\ell^{-1}$ . Отсюда следует формула для матрицы монодромии  $M_\infty$  в (2.31). Предложение 2.28 доказано.  $\square$

Пусть

$$\mathcal{Y}^0(z) = (f_{10}, f_{20})(z), \quad \mathcal{Y}^\infty(z) = (f_{1\infty}, f_{2\infty})(z)$$

– фундаментальные матрицы, образованные базисами канонических решений (2.29) и (2.30) систем (2.27) и (2.28), соответственно. Здесь вектор-функции  $f_{jp}(z)$  – столбцы соответствующей матрицы  $\mathcal{Y}^p$ . Их матрицы монодромии  $M_0$  и  $M_\infty$ , которые находятся по формуле (2.31), сопряжены:

$$M_0 = \Psi_\zeta^{-1} M_\infty \Psi_\zeta, \quad \Psi_\zeta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Здесь  $\zeta$  – произвольное комплексное число. Тем самым, перенормированная фундаментальная матрица

$$\tilde{\mathcal{Y}}^\infty(z) = \mathcal{Y}^\infty(z) \Psi_\zeta \quad (2.33)$$

системы (2.28) имеет ту же матрицу монодромии  $M_0$ , что и фундаментальная матрица  $\mathcal{Y}^0(z)$ .

Теперь мы склеим фундаментальные матрицы  $\mathcal{Y}^0(z)$  и  $\tilde{\mathcal{Y}}^\infty(z)$  над кольцом  $\mathcal{A} := D_2 \setminus \overline{D_{\frac{1}{2}}}$  для того, чтобы склеить системы (2.27) и (2.28) и получить голоморфное векторное расслоение со связностью, индуцированной склеенными системами. А именно, мы отождествим прямые произведения

$$\mathcal{F}_0 := \mathbb{C}^2 \times D_2, \quad \mathcal{F}_\infty := \mathbb{C}^2 \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_{\frac{1}{2}}})$$

следующим образом: для любого  $z \in \mathcal{A}$ ,

$$(v, z) \in \mathcal{F}_0 \text{ эквивалентно } (w, z) \in \mathcal{F}_\infty, \text{ если и только если}$$

$$v = X_{t,u,\zeta}(z)w, \quad X_{t,u,\zeta}(z) := \mathcal{Y}^0(z) \left( \tilde{\mathcal{Y}}^\infty(z) \right)^{-1}. \quad (2.34)$$

Здесь матричнозначная функция  $X_{t,u,\zeta}(z)$  определена по формуле (2.34) для  $z$ , близких к 1, а для других  $z$  она определяется аналитическим продолжением вдоль пути, идущего от 1 к  $z$  в кольце  $\mathcal{A}$ .

**Предложение 2.29** 1) Матричнозначная функция  $X_{t,u,\zeta}(z)$  голоморфна на кольце  $\mathcal{A}$ , и голоморфно зависит от параметров  $(t, u, \zeta) \in \mathbb{C}^3$ .

2) Соответствующая склейка (2.34) склеивает прямые произведения  $\mathcal{F}_0 \times \mathbb{C}_{t,u,\zeta}^3$  и  $\mathcal{F}_\infty \times \mathbb{C}_{t,u,\zeta}^3$  в голоморфное векторное расслоение над  $\overline{\mathbb{C}}_z \times \mathbb{C}_{t,u,\zeta}^3$ , которое мы обозначим через  $\tilde{\mathcal{E}}$  и будем рассматривать как голоморфное семейство голоморфных векторных расслоений  $\mathcal{E}_{t,u,\zeta}$  над  $\overline{\mathbb{C}}_z$

3) Склейка (2.34) переводит связность на  $\mathcal{F}_\infty$ , определённую системой (2.28), в связность на  $\mathcal{F}_0$ , определённую системой (2.27), и тем самым, индуцирует мероморфную связность  $\nabla_{t,u,\zeta}$  на каждом расслоении  $\mathcal{E}_{t,u,\zeta}$ ; семейство связностей  $\nabla_{t,u,\zeta}$  голоморфно зависит от параметров  $(t, u, \zeta)$ .

4) Данные монодромии–Стокса каждой связности  $\nabla_{t,u,\zeta}$ , определённые путями  $\alpha_{0,t}$  и  $\alpha_{\infty,t}$ , параболичны. Они не вырождены, если и только если  $(u, \zeta) \neq (0, 0)$ , и в этом случае соответствующее двойное отношение равно

$$\mathcal{R} = \frac{\zeta}{u}. \quad (2.35)$$

**Доказательство** Голоморфность матричнозначной функции  $X_{t,u,\zeta}(z)$  на кольце  $\mathcal{A}$ , т.е., её однозначность (независимость от пути аналитического продолжения) следует из совпадения матриц монодромии фундаментальных матриц  $\mathcal{Y}^0$  и  $\tilde{\mathcal{Y}}^\infty$ : когда  $z$  делает оборот вокруг начала координат против часовой стрелки, обе фундаментальные матрицы умножаются на  $M_0$ , и в отношении  $X_{t,u,\zeta}(z) = \mathcal{Y}^0(\tilde{\mathcal{Y}}^\infty)^{-1}$  этот множитель  $M_0$  сокращается. Это доказывает Утверждение 1), из которого, в свою очередь (вместе с голоморфностью фундаментальных матриц по параметрам  $t, u, \zeta$ ), следует Утверждение 2). Склейка (2.34) переводит каждый столбец фундаментальной матрицы решений  $\tilde{\mathcal{Y}}^\infty$

системы (2.28) в соответствующий столбец фундаментальной матрицы решений  $\mathcal{Y}^0$  системы (2.27), по определению. Значит, она склеивает системы в одну мероморфную связность в расслоении  $\mathcal{E}_{t,u,\zeta}$ , которая голоморфно зависит от параметров, как и системы, и фундаментальные матрицы. Вторые столбцы обеих фундаментальных матриц являются каноническими решениями  $f_{1\infty}$  и  $f_{20}$ , и они склеиваются между собой. Отсюда следует параболичность данных монодромии–Стокса склеенной связности. Критерий их невырожденности, имеющий вид неравенства  $(u, \zeta) \neq (0, 0)$ , следует по построению.

Теперь вычислим двойное отношение  $\mathcal{R}$  данных монодромии–Стокса в случае, когда  $(u, \zeta) \neq (0, 0)$ . Для этого найдём значения  $f_{jp}(1)$  канонических решений после склейки (2.34) в тривиализующей карте расслоения  $\mathcal{F}_0$  и их проективизации  $q_{jp}$  и точку  $q'_{10}$ . Отметим, что

$$\tilde{\mathcal{Y}}^\infty = (f_{2\infty} - \zeta f_{1\infty}, f_{1\infty}) : \quad (2.36)$$

столбцы фундаментальной матрицы  $\tilde{\mathcal{Y}}^\infty$  – вектор-функции  $f_{2\infty} - \zeta f_{1\infty}$  и  $f_{1\infty}$ , в силу (2.32) и (2.33). Они отождествлены с  $f_{10}$  и  $f_{20}$ . Следовательно, вектор  $f_{1\infty}(1)$  отождествлён с  $f_{20}(1)$ , и  $f_{2\infty}(1)$  отождествлён с  $f_{10}(1) + \zeta f_{20}(1)$ . Пусть  $\tilde{f}_{10}(z)$  обозначает результат аналитического продолжения против часовой стрелки вектор-функции  $f_{10}(z)$ , рассматриваемой как росток вектор-функции в  $z = 1$ . Имеем

$$\tilde{f}_{10}(1) = f_{10}(1) + u f_{20}(1),$$

в силу формулы (2.31) для матрицы монодромии  $M_0$ . Тем самым, в карте  $\mathcal{F}_0$ , четыре точки  $q_{20}$ ,  $q_{10}$ ,  $q'_{10}$ ,  $q_{2\infty}$  суть проекции на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}$  четырёх векторов  $f_{20}(1)$ ,  $f_{10}(1)$ ,  $\tilde{f}_{10}(1) = f_{10}(1) + u f_{20}(1)$ ,  $f_{10}(1) + \zeta f_{20}(1) \simeq f_{2\infty}(1)$ . В базисе  $f_{10}(1)$ ,  $f_{20}(1)$  (пусть  $(w_1, w_2)$  обозначают соответствующие координаты на  $\mathbb{C}^2$ ) последние векторы суть  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, u)$ ,  $(1, \zeta)$ . Их проекции на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}_\Phi$ ,  $\Phi = \frac{w_2}{w_1}$ , суть точки  $\infty$ ,  $0$ ,  $u$ ,  $\zeta$ . Их двойное отношение (2.23) равно  $\frac{\zeta}{u}$ . Это доказывает (2.35) и завершает доказательство Предложения 2.29.  $\square$

**Предложение 2.30** *Для любого заданного  $t \in \mathbb{C}$  два голоморфных векторных расслоения со связностями  $(\mathcal{E}_{t,u,\zeta}, \nabla_{t,u,\zeta})$ ,  $(\mathcal{E}_{t,u',\zeta'}, \nabla_{t,u',\zeta'})$ , отвечающими одному и тому же значению  $t$  и некоторым  $(u, \zeta)$ ,  $(u', \zeta') \neq (0, 0)$  голоморфно калибровочно эквивалентны, если и только если соответствующие двойные отношения одинаковы, т.е., если и только если  $[u : \zeta] = [u' : \zeta']$  как точки проективной прямой  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .*

**Доказательство** Рассматриваемые расслоения имеют одни и те же формальные нормальные формы в каждой особой точке. Пути  $\alpha_{p,t}$ ,  $p = 0, \infty$ , определяющие их данные монодромии–Стокса, одинаковы для обеих систем, так как они зависят только от  $t$ . Тем самым, расслоения калибровочно эквивалентны, если и только если их данные монодромии–Стокса одинаковы. Итак, из калибровочной эквивалентности следует равенство двойных отношений. Докажем обратное. Напомним, что двойное отношение определяет данные монодромии–Стокса единственным образом, с точностью до умножения оператора монодромии на постоянный множитель (Предложение 2.25). В обеих

связностях операторы монодромии унитарны. Следовательно, из равенства двойных отношений следует совпадение данных монодромии–Стокса, а значит, и калибровочная эквивалентность. Предложение 2.30 доказано.  $\square$

Ниже калибровочно эквивалентные расслоения  $\mathcal{E}_{t,u,\zeta}$  с заданным значением  $\mathcal{R} := \frac{\zeta}{u}$  будут обозначаться одним и тем же символом

$$\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}} := \mathcal{E}_{t,u,\zeta}, \quad \mathcal{R} = \frac{\zeta}{u}.$$

**Предложение 2.31** Семейство векторных расслоений  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  образует голоморфное векторное расслоение над  $\overline{\mathbb{C}}_z \times \mathbb{C}_t \times \overline{\mathbb{C}}_{\mathcal{R}}$ , которое будет обозначаться через  $\mathcal{E}$ . Оно снабжено голоморфным семейством мероморфных связностей над  $\overline{\mathbb{C}}_z$  с иррегулярными нерезонансными особыми точками в нуле и в бесконечности.

**Доказательство** Семейство векторных расслоений  $\mathcal{E}_{t,u,\zeta}$  образует голоморфное векторное расслоение (обозначаемое через  $\tilde{\mathcal{E}}$ ) над  $\overline{\mathbb{C}} \times (\mathbb{C}_{u,\zeta}^2 \setminus \{(0,0)\})$  с голоморфным семейством связностей на  $\overline{\mathbb{C}}$ . А именно, расслоение  $\tilde{\mathcal{E}}$  определено склейкой (2.34) двух тривиальных расслоений  $\mathbb{C}^2 \times D_2 \times \mathbb{C}_t \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$  и  $\mathbb{C}^2 \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_1) \times \mathbb{C}_t \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$ : матричнозначная функция склейки  $X_{t,u,\zeta}(z)$  голоморфна по  $(z, t, u, \zeta)$ . Рассмотрим тавтологическое расслоение  $\pi : \mathbb{C}_{u,\zeta}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}_{\mathcal{R}}$ ,  $\mathcal{R} = \frac{\zeta}{u}$ , и два его сечения  $\sigma_0, \sigma_\infty$  над двумя аффинными картами  $\mathbb{C} = \{\mathcal{R} \neq \infty\}$  и  $\{\mathcal{R} \neq 0\}$ :

$$\sigma_0 : \mathcal{R} \mapsto (1, \mathcal{R}), \quad \sigma_1 : \mathcal{R} \mapsto (\mathcal{R}^{-1}, 1).$$

Пусть  $\mathcal{E}^0$  и  $\mathcal{E}^\infty$  обозначают прообразы расслоения  $\tilde{\mathcal{E}}$  под действием отображений  $(z, t, \mathcal{R}) \mapsto (z, t, \sigma_p(\mathcal{R}))$ ,  $p = 0, \infty$ . Это даёт два семейства голоморфных векторных расслоений  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}^p$  над  $\overline{\mathbb{C}}_z$ , с  $p = 0, \infty$ ,  $\mathcal{R} \neq 0, \infty$ . Для любого  $(t, \mathcal{R}) \in \mathbb{C}^2$  с  $\mathcal{R} \neq 0$  расслоения  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}^0$  и  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}^\infty$  изоморфны как голоморфные расслоения со связностями. Изоморфизм однозначно определён нормированием так, чтобы в тривиализующей карте  $\mathcal{F}^0$  решение  $f_{20}(z) = (0, 1)$  связности в одном расслоении переводилось в то же решение связности на другом расслоении. Единственность следует из невырожденности данных монодромии–Стокса. Действительно, ограничение проективизированного изоморфизма на слой  $\overline{\mathbb{C}} \times \{z = 1\}$  должно переводить множество  $\{q_{20}, q_{10}, q'_{10}, q_{2\infty}\}$ , отвечающее одной связности, в аналогичное множество, отвечающее другой связности. В каждом из последних наборов имеется как минимум три различных точки (невырожденность). Это однозначно определяет проективизированный изоморфизм. Тем самым, изоморфизм расслоений определён однозначно с точностью до постоянного множителя, а последний множитель однозначно определён вышеупомянутым нормированием. Таким образом построенный изоморфизм голоморфно зависит от параметров, как и данные монодромии–Стокса. Итак, построенное семейство изоморфизмов склеивает расслоения  $\mathcal{E}^0$  и  $\mathcal{E}^\infty$  в одно голоморфное векторное расслоение  $\mathcal{E}$ . Предложение 2.31 доказано.  $\square$

**Лемма 2.32** Два расслоения со связностями  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{E}_{t',\mathcal{R}'}$  голоморфно калибровочно эквивалентны, если и только если выполнено соотношение (2.24).

**Доказательство** Ясно, что расслоения со связностями калибровочно эквивалентны, если и только если у них одинаковые формальные нормальные формы и данные монодромии–Стокса data (или что эквивалентно, одинаковые двойные отношения  $\mathcal{R}$ ), определённые одними и теми же парами путей и секторов Стокса. Совпадение формальных нормальных форм эквивалентно равенству, утверждающему, что  $s = e^t$  равно  $s' = e^{t'}$ . Это выполнено, если и только если  $t' - t = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Вышеупомянутые данные монодромии–Стокса расслоений  $\mathcal{E}_{t,\mathcal{R}}$  и  $\mathcal{E}_{t',\mathcal{R}'}$  определены двумя различными парами путей:  $(\alpha_{0,t}, \alpha_{\infty,t})$  и  $(\alpha_{0,t'}, \alpha_{\infty,t'})$ . Покажем, что данные монодромии–Стокса, определённые первой парой путей, одинаковы для обеих связностей, если и только если  $\mathcal{R}' - \mathcal{R} = 2n$ . Для этого мы используем следующее предложение, которое показывает, как меняется двойное отношение, когда мы заменяем определяющие его пути  $\alpha_{p,t}$  на  $\alpha_{p,t'}$ ,  $p = 0, \infty$ .

**Предложение 2.33** Пусть  $\mathcal{E}$  – голоморфное векторное расслоение со связностью на  $\overline{\mathbb{C}}$ , имеющей формальные нормальные формы (2.26) в нуле и на бесконечности и не “диагональной”, т.е., не являющееся прямой суммой одномерных голоморфных расслоений со связностями. Пусть связность имеет мероморфное решение. Пусть  $s$  – соответствующий параметр из формальных нормальных форм. Для любого значения  $t = \ln s$  логарифма пусть  $\alpha_{p,t}$ ,  $p = 0, \infty$ , – пути, определённые в (2.25), и пусть  $\mathcal{R}_t$  обозначает характеризующее двойное отношение соответствующих данных монодромии–Стокса. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{R}_{t+2\pi i} = \mathcal{R}_t + 2. \quad (2.37)$$

**Доказательство** Когда к  $t$  прибавляется  $2\pi i$ , новый путь  $\alpha_{0,t}$  получается из старого умножением на один оборот против часовой стрелки. Это означает, что аналитическое продолжение вдоль нового пути  $\alpha_{0,t}^{-1}$  канонического секториального решения  $f_{10}$  (плоского сечения относительно связности) получается из его продолжения вдоль старого пути применением обратного к оператору монодромии. Аналогичное утверждение выполнено для  $\alpha_{\infty,t}$  и  $f_{2\infty}$ : новая вектор-функция  $f_{2\infty}$  получается из старой применением монодромии. Напомним, что данные монодромии–Стокса, определённые путями  $\alpha_{0,t}$  и  $\alpha_{\infty,t}$ , параболичны и не вырождены, в силу Предложения 2.23. Мы считаем, что вектор-функция  $f_{2\infty}$  не пропорциональна вектор-функции  $f_{10}$ ; противный случай рассматривается аналогично (а также может быть разобран с помощью предельного перехода в семействе склеенных расслоений со связностями). Итак,  $q_{2\infty} \neq q_{10}$ , и  $q_{10}$ ,  $q_{20}$ ,  $q_{2\infty}$  различны. Выбирая подходящую координату на  $\overline{\mathbb{C}}$ , будем считать, что данные монодромии–Стокса, отвечающие старому  $t$ , задаются точками

$$q_{10} = 0, \quad q_{20} = q_{1\infty} = \infty, \quad q'_{10} = u, \quad q_{2\infty} = 1.$$

Тогда для нового  $t$  получаем

$$q_{10} = -u, \quad q_{20} = q_{1\infty} = \infty, \quad q'_{10} = 0, \quad q_{2\infty} = 1 + u,$$

в силу предыдущих рассуждений о путях и о монодромии. Тем самым, старое двойное отношение (2.23) равно  $\frac{1}{u}$ , а новое равно  $\frac{1}{u} + 2$ . Это доказывает предложение.  $\square$

Лемма 2.32 следует из Предложения 2.33 и предыдущего рассуждения.  $\square$

Теорема 2.27 следует из Предложений 2.29, 2.30, 2.31 и Леммы 2.32.  $\square$

## 2.8 Фактор-семейство расслоений. Глобальная параметризация поверхностей $S_{\ell, \pm}^o$

Рассмотрим фактор пространства  $\mathbb{C}_t \times \overline{\mathbb{C}}_{\mathcal{R}}$  по действию циклической группы, порождённой сдвигом  $F$  на вектор  $(2\pi i, 2)$ . Фактор-пространство  $(\mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}})/F$  отождествляется с  $\mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}_{\xi}$ , и проекция на фактор задаётся формулой

$$\pi_{tr} : (t, \mathcal{R}) \mapsto (s = e^t, \xi = \pi i \mathcal{R} - t).$$

**Лемма 2.34** *Существует голоморфное векторное расслоение  $\widehat{\mathcal{E}}$  над  $\overline{\mathbb{C}}_z \times \mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}_{\xi}$  с семейством мероморфных связностей над  $\overline{\mathbb{C}}_z$ , такое что расслоение  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{t, \mathcal{R}})$  является его обратным образом при проекции  $z \times (t, \mathcal{R}) \mapsto z \times \pi_{tr}(t, \mathcal{R})$ .*

**Доказательство** Для любых  $(t, \mathcal{R})$  и  $(t', \mathcal{R}') = F^n(t, \mathcal{R})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , существует единственный изоморфизм соответствующих расслоений  $\mathcal{E}_{t, \mathcal{R}}$  и  $\mathcal{E}_{t', \mathcal{R}'}$  со связностями с точностью до скалярного множителя. Этот изоморфизм можно нормировать как в доказательстве Предложения 2.31, и тогда он зависит локально голоморфно от параметров  $(t, \mathcal{R})$ , как в том же доказательстве. Отсюда следует Лемма 2.34, как и в том же доказательстве.  $\square$

Рассмотрим расслоение  $\widehat{\mathcal{E}}$  как семейство голоморфных векторных расслоений  $\widehat{\mathcal{E}}_{s, \xi}$  над  $\overline{\mathbb{C}}_z$  со связностями. Пусть  $\ell \in \mathbb{N}$  – соответствующий параметр в формальных нормальных формах связностей. Положим

$$\text{Triv}_{\ell} := \{(s, \xi) \in \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}} \mid \text{голоморфное расслоение } \widehat{\mathcal{E}}_{s, \xi} \text{ тривиально}\},$$

$$\Sigma_{\ell} := (\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \text{Triv}_{\ell}.$$

Пусть  $\Sigma'_{\ell} \subset \text{Triv}_{\ell}$  обозначает подмножество тех  $(s, \xi)$ , для которых в соответствующей связности в тривиальном расслоении на  $\overline{\mathbb{C}}$  условие несовпадения прямых не выполнено: то есть, собственная прямая матрицы главной части в 0 с собственным значением  $-\frac{s}{2}$  совпадает с собственной прямой матрицы главной части на бесконечности с собственным значением  $\frac{s}{2}$ .

**Теорема 2.35** 1) *Подмножество  $\text{Triv}_{\ell} \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  есть дополнение до комплексной аналитической гиперповерхности (кривой)  $\Sigma_{\ell}$ : комплексного аналитического подмножества чистой коразмерности 1.*

2) Подмножество  $\Sigma' \subset \text{Triv}_\ell$  – также комплексная аналитическая гиперповерхность (кривая), в частности, оба подмножества  $\text{Triv}_\ell$  и

$$\text{Triv}_\ell^o := \text{Triv}_\ell \setminus \Sigma' \subset \mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}_\xi$$

открыты, связны и плотны в  $\mathbb{C}_s^* \times \overline{\mathbb{C}}_\xi$ .

3) Для любого  $(s, \xi) \in \text{Triv}_\ell^o$  тривиальное расслоение  $\widehat{\mathcal{E}}_{s, \xi}$  со связностью аналитически калибровочно эквивалентно системе вида (1.5), имеющей полиномиальное решение. Параметры  $(\chi, a)$  соответствующей системы (1.5) определены однозначно с точностью до замены знака  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ , и  $(\chi, a) \neq (0, 0)$ .

4) Таким образом определённое двузначное отображение  $\mathcal{T} : \text{Triv}_\ell^o \rightarrow \mathbb{C}_{\chi, a, s}^3$ , ставящее в соответствие каждому  $(s, \xi)$  параметры соответствующей системы (1.5) из Утверждения 3), имеет две голоморфные ветви  $\mathcal{T}_\pm$ , биективно параметризующие две детерминантные поверхности  $S_{\ell, \pm}^o = \{\det(G_{1, \ell}(\chi, a, s) \pm G_{2, \ell}(\chi, a, s)) = 0\} \setminus \{s = 0\}$  область  $\text{Triv}_\ell^o \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$ .

**Доказательство** Подмножество  $\text{Triv}_\ell^o \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  не пусто. Действительно, множество  $S_{\ell, +} \cup S_{\ell, -}$  систем (1.5) с полиномиальными решениями не пусто, их данные монодромии–Стокса, отвечающие симметричным секторам и путям, параболичны, и соответствующие параметры  $(s, \xi)$ , очевидным образом, лежат в  $\text{Triv}_\ell^o$ . Отсюда следует, что  $\Sigma_\ell$  – аналитическая гиперповерхность, в силу [45, предложение 4.1] (см. также его короткое доказательство в [11, приложение 3]); см. также более общее утверждение [49, теорема 2.2, р.449]. Множество  $\Sigma'_\ell$  есть множество тех параметров  $(s, \xi) \in \text{Triv}_\ell$ , которые отвечают тем связностям в тривиальном расслоении, где подходящие собственные прямые матриц главной части совпадают. Это – нетривиальное условие коразмерности один, так как дополнение  $\text{Triv}_\ell^o = \text{Triv}_\ell \setminus \Sigma'_\ell$  имеет непустую внутренность. Тем самым,  $\Sigma'_\ell$  – комплексная гиперповерхность в  $\text{Triv}_\ell$ . Утверждения 1) и 2) доказаны.

**Предложение 2.36** Поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  не пересекают координатной оси  $s$ , т.е., прямой  $\{\chi = a = 0\}$ .

**Доказательство** Способ 1. Система (1.5) с  $\chi = a = 0$  диагональна и имеет матрицы главной части  $\text{diag}(-\frac{s}{2}, 0)$  и  $\text{diag}(0, \frac{s}{2})$  в нуле и на бесконечности, соответственно. Тем самым, если  $s \neq 0$ , то она не имеет векторного полиномиального решения, будучи прямой суммой одномерных уравнений с решениями  $z^\ell e^{\frac{s}{2z}}$  и  $e^{\frac{s}{2}z}$ .

Способ 2. При  $\chi = a = 0$  имеем  $G_{2, \ell} = 0$ , и  $G_{1, \ell} = G_{1, \ell} \pm G_{2, \ell}$  – верхне-треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами  $\frac{s}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, она имеет ненулевой определитель.  $\square$

Утверждение 3) следует из Теорем 2.22 и 2.26; неравенство  $(\chi, a) \neq (0, 0)$  следует из Предложения 2.36.

Докажем Утверждение 4). Во-первых, каждая точка  $(s_0, \xi_0) \in \text{Triv}_\ell^o$  имеет окрестность, где отображение  $\mathcal{T} : (s, \xi) \mapsto (\chi, a, s)$  имеет две локальные голоморфные ветви. Это следует из [11, приложение 3, теорема 2], из которой также следует голоморфность нормированной тривиализации расслоения  $\mathcal{E}_{s, \xi}$  по параметрам  $(s, \xi)$ , и значит,



голоморфность по  $(s, \xi)$  семейства таким образом построенных линейных систем (образов связностей) в тривиальном расслоении. Две вышеупомянутые голоморфные ветви, очевидным образом, отличаются знаком (Утверждение 3)). Значит, их образы лежат в разных поверхностях  $S_{\ell, \pm}$ , так как последние поверхности переставляются заменой знака  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ . Подмножество  $\text{Triv}_\ell^o$  в пространстве параметров открыто и связно, будучи дополнением многообразия  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к объединению  $\Sigma_\ell \cup \Sigma'_\ell$ . Значит, аналитическое продолжение каждой начальной голоморфной ветви отображения  $\mathcal{T}$  вдоль каждого пути в  $\text{Triv}_\ell^o$  может лежать только в одной из поверхностей  $S_{\ell, \pm}$ . Отсюда и из предыдущего утверждения следует, что каждая ветвь даёт глобальное голоморфное отображение

$$\mathcal{T}_\pm : \text{Triv}_\ell^o \rightarrow S_{\ell, \pm}^o = S_{\ell, \pm} \setminus \{s = 0\}. \quad (2.38)$$

Его биективность следует из Утверждения 3) и того факта, что каждая система (1.5) с  $s \neq 0$ , имеющая полиномиальное решение, имеет невырожденные параболические данные монодромии–Стокса, а значит, отвечает связности, определённой некоторыми  $(s, \xi) \in \text{Triv}_\ell^o$  (Теорема 2.22). Теорема 2.35 доказана.  $\square$

## 2.9 Регулярность и рациональность. Доказательство Теоремы 1.14

**Лемма 2.37** *Поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  суть непересекающиеся регулярные подмногообразия в  $\mathbb{C}^3 \setminus \{s = 0\}$ , диффеоморфно параметризованные биективными отображениями  $\mathcal{T}_\pm$ , см. (2.38). В частности, они связны, а значит, не приводимы.*

**Доказательство** Отображения  $\mathcal{T}_\pm$  голоморфны и биективны. Поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  – аналитические подмножества в  $\mathbb{C}^3 \setminus \{s = 0\}$ . Чтобы доказать, что они – подмногообразия, достаточно показать, что отображения  $\mathcal{T}_\pm$  – иммерсии, и это достаточно доказать для одного знака, скажем "+". (Связность (а значит, и неприводимость) следует из связности параметризующей области  $\text{Triv}_\ell^o$ .) Для этого фиксируем точку  $(s_0, \xi_0) \in \text{Triv}_\ell^o$  и рассмотрим новые локальные координаты  $(s, \mathcal{R})$  на её окрестности, где  $\mathcal{R} = -i\pi^{-1}(\xi + t)$  – характеризующее двойное отношение данных монодромии–Стокса, отвечающих путям  $\alpha_{0,t}, \alpha_{\infty,t}$ ,  $t = \ln s$ . Положим  $(\chi_0, a_0, s_0) = \mathcal{T}_+(s_0, \xi_0) \in S_{\ell,+}^o$ . Мы утверждаем, что значение двойного отношения  $\mathcal{R}$  корректно определено для всех систем (1.5) с параметрами  $(\chi, a, s)$ , достаточно близкими к  $(\chi_0, a_0, s_0)$ , и является голоморфной функцией от  $(\chi, a, s)$ . Действительно, напомним, что  $\mathcal{R}$  – это двойное отношение точек  $q_{20}, q_{10}, q'_{10}, q_{2\infty}$ , где  $q_{10}, q_{20}, q_{2\infty}$  – проективизации значений в точке  $z = 1$  канонических решений  $f_{10}, f_{20}, f_{2\infty}$ , а  $q'_{10}$  – проективизация значения в точке 1 образа решения  $f_{10}$  под действием монодромии. Все четыре вышеупомянутые точки  $q$  голоморфно зависят от параметров системы, как и канонические решения. Следовательно,  $\mathcal{R}$  голоморфно. Это даёт обратное отображение  $(\chi, a, s) \mapsto (s, \mathcal{R})$ , голоморфное на окрестности точки  $(\chi_0, a_0, s_0)$  в  $\mathbb{C}^3$ . Оно обратное к  $\mathcal{T}_+$ : его композиция справа с  $\mathcal{T}_+$  тождественна. Отсюда следует, что  $\mathcal{T}_+$  – иммерсия.

Теперь покажем, что поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  не пересекаются. Предположим противное: они пересекаются в некоторой точке  $(\chi_0, a_0, s_0)$ ,  $s_0 \neq 0$ . Имеем  $(\chi_0, a_0) \neq (0, 0)$ , в силу

Предложения 2.36, и

$$(\chi_0, a_0, s_0) = \mathcal{T}_\pm(s_0, \xi_\pm) \text{ для некоторых } \xi_\pm \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Но  $\xi_+ = \xi_-$ , так как они равны (с точностью до известных мультипликативных и аддитивных констант) характеризующему двойному отношению параболических данных монодромии–Стокса (определённых одной и той же парой путей) одной и той же линейной системы (1.5) с параметрами  $(\chi_0, a_0, s_0)$ . Тем самым, два различных отображения  $\mathcal{T}_\pm$  принимают одинаковое значение  $(\chi_0, a_0, s_0)$  в точке  $(s_0, \xi_+)$  и отличаются знаком их  $(\chi, a)$ -компонент. Значит,  $\chi_0 = a_0 = 0$ . Полученное противоречие доказывает Лемму 2.37.  $\square$

**Предложение 2.38** *Поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  расслоены на регулярные рациональные кривые (сферы Римана с конечным числом проколов) степени  $2\ell + 1$  над координатной осью  $s$ , проколотой в нуле. Существует  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \leq 2\ell + 1$ , такое что для всех значений параметра  $s$ , за исключением дискретного подмножества  $Coll_\ell \subset \mathbb{C}_s^*$ , соответствующий  $s$ -слой поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  имеет в точности  $d$  различных проколов, и для  $s \in Coll_\ell$  соответствующее число проколов меньше  $d$ .*

**Доказательство** Для любого  $s \neq 0$  пусть  $\mathcal{X}_{s, \pm}$  обозначает соответствующий  $s$ -слой: прообраз при проекции  $\pi_s : S_{\ell, \pm}^o \rightarrow \mathbb{C}_s$ . Это – непустая алгебраическая кривая. Действительно, это – множество нулей многочлена  $\mathcal{P}_{\ell, \pm}(\chi, a, s)$  от переменных  $(\chi, a)$  с фиксированным  $s$ . Этот многочлен от  $(\chi, a)$  не постоянен для любого  $s$ : подставляя  $\chi = 0$ , мы получим многочлен  $Q_{\ell, \pm}(\mu, r) = \det(\mathcal{G}_\ell \pm r \text{Id})$ , определяющий кривую  $\Gamma_{\ell, \pm}$  (с точностью до постоянного множителя),  $\mu = \frac{s}{2}$ ,  $r = \frac{a}{2}$ . Это – многочлен степени  $\ell > 0$  по  $r$ , а значит, он не постоянен. Тем самым, множество  $\mathcal{X}_{s, \pm}$  – непустое множество нулей многочлена, а значит, алгебраическая кривая. Следовательно, она параметризована (биективно за исключением возможных особенностей) проколотой компактной Римановой поверхностью. Проколы отвечают пересечениям проективного замыкания  $\overline{\mathcal{X}_{s, \pm}}$  с бесконечно удалённой гиперплоскостью, которая будет обозначаться через  $\mathcal{H}$ . Каждый прокол мы берём с кратностью, равной соответствующему индексу пересечения компактной кривой  $\overline{\mathcal{X}_{s, \pm}}$  с  $\mathcal{H}$ . Итак, общее число проколов с кратностями ограничено степенями кривых  $\overline{\mathcal{X}_{s, \pm}}$ . Их степени не превосходят степеней многочленов  $\mathcal{P}_{\ell, \pm}$ , которые не больше  $2\ell + 1$ .

С другой стороны, отображение  $\mathcal{T}_\pm$  биголоморфно параметризует кривую  $\mathcal{X}_{s, \pm}$  открытым подмножеством  $X_s \subset \overline{\mathbb{C}}_\xi$ , являющимся  $s$ -слоем открытого подмножества  $\text{Triv}_\ell^o \subset \mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$ . Следовательно, слой  $X_s$  есть сфера Римана с не более, чем  $2\ell$  проколами. Значит, каждый слой  $\mathcal{X}_{s, \pm}$  – рациональная кривая, регулярная в силу биголоморфности параметризации  $\mathcal{T}_\pm$ . Различные проколы могут сливаться только над дискретным подмножеством  $Coll_\ell \subset \mathbb{C}^*$  значений  $s$ . Действительно, разрешение особенностей поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$ , существующее по теореме Хиронаки, см. [30], преобразует (особое) расслоение на  $s$ -слои в особое расслоение регулярной поверхности на рациональные кривые. Проколы на рациональных слоях отвечают их пересечениям с другой алгебраической кривой: с образом пересечения поверхности  $S_{\ell, \pm}^o$  с бесконечно удалённой плоскостью

при раздутии. Слияния вышеупомянутых пересечений отвечают, очевидным образом, дискретному подмножеству значений  $s$ . Отсюда следует последнее утверждение Предложения 2.38.

Каждая кривая  $\mathcal{S}_{s,\pm}$  не приводима, в силу её рациональности. Покажем, что она имеет степень  $2\ell + 1$ . Действительно, она является множеством нулей ограничения на заданное значение параметра  $s$  многочлена  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s) = \det(G_{1,\ell} \pm G_{2,\ell})$ . Моном старшей степени последнего многочлена от переменных  $(\chi, a)$  с фиксированным  $s$  равен  $\chi^{\ell+1}a^\ell$  с точностью до знака, в силу формул (1.12), (1.13) для матриц  $G_{1,\ell}$  и  $G_{2,\ell}$ . Значит, кривая  $\mathcal{X}_{s,\pm}$  имеет степень  $2\ell + 1$ , за исключением случая, когда многочлен  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s)$  с фиксированным  $s \neq 0$  имеет кратный нуль вдоль своего неприводимого множества нулей  $\mathcal{X}_{s,\pm}$ . Этот последний случай не возможен. Действительно, в этом случае существовали бы другой многочлен  $\Psi_{s,\pm}(\chi, a)$ , обращающийся в нуль на  $\mathcal{X}_{s,\pm}$ , и  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ , такие что  $\Psi_{s,\pm}^m(\chi, a) = \mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s)$  с точностью до постоянного множителя. Пусть  $\chi^\alpha a^\beta$  – моном старшей степени многочлена  $\Psi_{s,\pm}$ . Тогда  $\alpha m = \ell + 1$ ,  $\beta m = \ell$ , а значит,  $m(\alpha - \beta) = 1$ , и  $m = 1$ , – противоречие. Предложение доказано.  $\square$

Утверждение 1) Теоремы 1.14 следует из Леммы 2.37 и Предложения 2.36. Её Утверждение 2) следует из Предложения 2.38. Осталось доказать Утверждение 3). Прообраз  $\mathcal{T}_\pm^{-1}(S_{\ell,\pm}^o)$  есть дополнение произведения  $\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}$  к объединению  $\Sigma_\ell \cup \Sigma'_\ell$ . Покажем, что последнее объединение – аналитическая гиперповерхность. Мы уже знаем, что  $\Sigma_\ell$  – аналитическая гиперповерхность, и  $\Sigma'_\ell$  – аналитическая гиперповерхность в  $(\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \Sigma_\ell$ . Осталось доказать, что замыкание  $\overline{\Sigma'_\ell}$  – аналитическая гиперповерхность (если оно не пусто), т.е., что её а priori потенциальные особенности, содержащиеся в  $\Sigma_\ell$ , устранимы. Под неустранимой особенностью мы здесь понимаем точку, куда аналитическое множество не продолжается (как аналитическое множество): те точки, где аналитическое множество определено но не регулярно, считаются устранимыми по определению. Действительно, в силу определения и аналитичности, единственные а priori возможные неустранимые особенности суть точки пересечения  $\overline{\Sigma'_\ell} \cap \Sigma_\ell$ . Последние имеют  $s$ -координаты, лежащие в дискретном подмножестве  $Coll_\ell$  из Предложения 2.38, и каждая из этих точек пересечения отвечает проколу: лежит в дополнении  $\overline{\mathbb{C}} \setminus X_{s,\pm}$  соответствующего слоя в  $\text{Triv}_\ell^o = (\mathbb{C}^* \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus (\Sigma_\ell \cup \Sigma'_\ell)$ . Значит, каждая точка пересечения изолирована. Изолированная точка пересечения есть устранимая особенность гиперповерхности  $\Sigma'_\ell$ , по теореме Шиффмана, см. [52] и [23, раздел 4.4]. Следовательно,  $\overline{\Sigma'_\ell}$  – гиперповерхность, а значит, и  $\Sigma_\ell \cup \Sigma'_\ell$  тоже. Теорема 1.14 доказана.

## 2.10 Неприводимость многочленов и поверхностей. Доказательство Теоремы 1.13

Неприводимость поверхности  $S_{\ell,\pm}$  эквивалентна связности её регулярной части. Её открытое подмножество  $S_{\ell,\pm}^o = S_{\ell,\pm} \setminus \{s = 0\}$  связно и лежит в её регулярной части (Лемма 2.37). Тем самым, для доказательства неприводимости осталось показать, что  $S_{\ell,\pm}$  не содержит гиперплоскости  $\{s = 0\}$ .

**Предложение 2.39** Многочлен  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$  не обращается в нуль тождественно на гиперплоскости  $\{s = 0\}$ .

**Доказательство** Многочлен  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}(0, a, 0)$  есть многочлен от одной переменной  $a$  с мономом старшей степени  $\frac{a^\ell}{2^{\ell+1}}$  с точностью до знака, в силу формул (1.12), (1.13) для матриц  $G_{1,\ell}$  и  $G_{2,\ell}$ .  $\square$

Поверхности  $S_{\ell,\pm}$  не содержат гиперплоскости  $\{s = 0\}$ , в силу Предложения 2.39. Отсюда и из предыдущих рассуждений следует их неприводимость.

Докажем неприводимость многочлена  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$ . Множество его нулей – неприводимая поверхность  $S_{\ell,\pm}$ . Тем самым, достаточно показать, что  $S_{\ell,\pm}$  не является кратным множеством нулей. А это следует из того, что для любого фиксированного  $s \neq 0$  множество нулей многочлена  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}(\chi, a, s)$  с фиксированным  $s$  есть  $s$ -слой поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$ , и он не является его кратным множеством нулей, как было показано в доказательстве Предложения 2.38. Теорема 1.13 доказана.

## 2.11 Гладкость спектральных кривых и формула для рода. Доказательство Теорем 1.6 и 1.5

Как показал И.В.Нетай, из Теоремы 1.6 (гладкость кривой  $\Gamma_\ell^o = \Gamma_\ell \setminus \{\mu = 0\} \subset \mathbb{C}_{\lambda,\mu}^2$ ) следует формула для рода из Теоремы 1.5. Тем самым, для доказательства формулы для рода, достаточно доказать Теорему 1.6. Для этого мы рассмотрим поле направлений на  $\mathbb{C}_{\chi,a,s}^3$ , заданное системой из второго и третьего дифференциальных уравнений в (1.6). Оно порождается векторным полем

$$v := (v_\chi, v_a, v_s), \quad v_\chi = \frac{1}{2}(a(1 - 4\chi^2) + 2\ell\chi), \quad v_a = 2\chi(a^2 - s^2) - \ell a, \quad v_s = s, \quad (2.39)$$

которое мы будем называть *PЗ-изомодромным векторным полем*.

**Теорема 2.40** Каждая поверхность  $S_{\ell,\pm}$  касается PЗ-изомодромного векторного поля  $v$ .

**Доказательство** Поверхность  $S_{\ell,\pm}$  описана в терминах данных монодромии–Стокса: условиями параболичности и невырожденности, см. Теорему 2.22, инвариантными относительно изомодромных деформаций. Значит, она касается PЗ-изомодромного векторного поля  $v$ .  $\square$

Гладкость кривой  $\Gamma_\ell^o$  эквивалентна гладкости одной (или, что эквивалентно, обеих) компонент  $\Gamma_{\ell,\pm}^o \subset \mathbb{C}_{a,s}^2$  её прообраза при отображении  $(a, s) \mapsto (\lambda = \frac{1}{4}(a^2 - s^2), \mu = \frac{s}{2})$ . Кривая  $\Gamma_{\ell,\pm}^o$  есть дополнение множества нулей  $\Gamma_{\ell,\pm} = \{Q_{\ell,\pm} = 0\}$  к прямой  $\{s = 0\}$ . Она является пересечением гладкой поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$  с гиперплоскостью  $\{\chi = 0\}$ . Это пересечение трансверсально, так как поле направлений (1.6) касается поверхности  $S_{\ell,\pm}^o$  и трансверсально гиперплоскости  $\{\chi = 0\}$  вне прямой  $\{a = \chi = 0\}$ . Но мы уже знаем, что  $S_{\ell,\pm}^o$  не пересекает прямую  $\{\chi = a = 0\}$ , в силу Утверждения 1) Теоремы 1.14. Следовательно, поле направлений на  $\mathbb{C}_{\chi,a,s}^3$ , заданное системой (1.6), трансверсально

гиперплоскости  $\{\chi = 0\}$  в точках её пересечения с  $S_{\ell,\pm}^o$ , которые суть, в точности, точки кривой  $\Gamma_{\ell,\pm}^o$ , в силу Предложения 1.16. Тем самым, их пересечение трансверсально. Следовательно, кривая  $\Gamma_{\ell,\pm}^o$  гладка, а значит, и  $\Gamma_\ell^o$  тоже. Теорема 1.6, а значит, и Теорема 1.5 доказаны.

### 3 Изонодромные слоения детерминантных поверхностей

Здесь мы исследуем изонодромные слоения комплексных поверхностей  $S_{\ell,\pm}$  для  $\ell = 0, 1$ : слоения на фазовые кривые РЗ-изонодромного векторного поля  $v$ , см. (2.39).

Из Теоремы 2.40 вытекает следствие:

**Следствие 3.1** *Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  имеем*

$$\frac{d\mathcal{P}_{\ell,\pm}}{dv} = h_{\ell,\pm}\mathcal{P}_{\ell,\pm}, \quad h_{\ell,\pm} = h_{\ell,\pm}(\chi, a, s) \text{ — многочлен.} \quad (3.1)$$

**Доказательство** Поверхность  $S_{\ell,\pm}$  — множество нулей неприводимого многочлена  $\mathcal{P}_{\ell,\pm}$ , а векторное поле  $v$  полиномиально и касается  $S_{\ell,\pm}$  (Теорема 2.40). Отсюда следует (3.1).  $\square$

**Задача 3.2** Для любого  $\ell$  найти полиномиальный множитель  $h_{\ell,\pm}$  в (3.1).

Ниже мы представим формулы для полиномиальных множителей  $h_{\ell,\pm}$  для  $\ell = 1, 2$ .

#### 3.1 Случай $\ell = 0$

При  $\ell = 0$  множество тех параметров  $(\chi, a, s)$ , при которых соответствующая система (1.5) имеет векторное полиномиальное решение, является объединением двух плоскостей  $\{\chi = \pm\frac{1}{2}\}$ , каждая из которых снабжена координатами  $(a, s)$ . Изонодромные слоения последних плоскостей задаются уравнением Риккати, которое выводится из второго уравнения в (1.6):

$$a'_s = \pm\frac{1}{s}(a^2 - s^2).$$

#### 3.2 Случай $\ell = 1$

Вычислим  $h_{1,\pm}$ . Затем мы покажем, что соответствующее изонодромное слоение задаётся уравнением Риккати. Мы также представим результат о монодромии и операторах Стокса линейной системы, проективизацией которой является последнее уравнение Риккати.

**Предложение 3.3** *При  $\ell = 1$  имеем*

$$\frac{d\mathcal{P}_{1,\pm}}{dv} = h_{1,\pm}\mathcal{P}_{1,\pm}, \quad h_{1,\pm}(\chi, a, s) = \pm\frac{1}{4}(1 - 2\chi(a \pm s)). \quad (3.2)$$

**Доказательство** Умножим  $\mathcal{P}_{1,\pm}$  на  $\pm 4$ . Получим

$$\tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm} := \pm 4\mathcal{P}_{1,\pm} = (a \pm s)(1 - 4\chi^2) + 4\chi,$$

$$\begin{aligned} v_a \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm}}{\partial a} + v_s \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm}}{\partial s} &= (1 - 4\chi^2)(2\chi(a^2 - s^2) - a \pm s) \\ &= (\tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm} - 4\chi)(2\chi(a \mp s) + 1) - 2a(1 - 4\chi^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} v_\chi \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm}}{\partial \chi} &= (-8\chi(a \pm s) + 4) \frac{1}{2}(a(1 - 4\chi^2) + 2\chi) = (-4\chi(a \pm s) + 2)(a(1 - 4\chi^2) + 2\chi) \\ &= -8\chi^2(a \pm s) + 4\chi + 2a(1 - 4\chi^2) - 4a\chi(1 - 4\chi^2)(a \pm s) \\ &= -8\chi^2(a \pm s) + 4\chi + 2a(1 - 4\chi^2) - 4a\chi(\tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm} - 4\chi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Суммируя выражения (3.4) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_{1,\pm}}{dv} &= -8\chi^2 a \mp 8\chi^2 s + 4\chi + \tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm}(1 - 2\chi(a \pm s)) + 16a\chi^2 - 4\chi \\ &\quad - 8\chi^2 a \pm 8\chi^2 s = \tilde{\mathcal{P}}_{1,\pm}(1 - 2\chi(a \pm s)). \end{aligned}$$

Это доказывает (3.2).  $\square$

Ниже мы рассмотрим только случай "-"; случай "+" затем получается заменой знака  $(\chi, a) \mapsto (-\chi, -a)$ .

**Предложение 3.4** В координатах  $(\chi, s)$  на поверхности  $\Gamma_{1,-} = \{\mathcal{P}_{1,-} = 0\}$  векторное поле (2.39) порождает поле направлений, заданное уравнением Риккати

$$\chi'_s = \frac{1 - 4\chi^2}{2} - \frac{\chi}{s}. \quad (3.5)$$

**Доказательство** Уравнение  $\mathcal{P}_{1,-} = 0$  эквивалентно формуле

$$a = s - \frac{4\chi}{1 - 4\chi^2}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в первое дифференциальное уравнение в (1.6), получаем

$$\chi'_s = \frac{a - 2\chi(-1 + 2\chi a)}{2s} = \frac{a(1 - 4\chi^2) + 2\chi}{2s} = \frac{s(1 - 4\chi^2) - 2\chi}{2s} = \frac{1}{2}(1 - 4\chi^2) - \frac{\chi}{s}.$$

Это доказывает утверждение предложения.  $\square$

Уравнение Риккати (3.5) является проективизацией линейной системы

$$\Psi'_s = \left( \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \Psi : \quad (3.7)$$

функция  $\chi(s)$  является решением уравнения (3.5), если и только если она может быть представлена как отношение  $\frac{\Psi_2}{\Psi_1}(s)$ , где  $\Psi(s) = (\Psi_1(s), \Psi_2(s))$  – векторное решение системы (3.7).

Система (3.7) имеет Фуксову особенность в нуле с матрицей вычета  $\text{diag}(0, -1)$  и иррегулярную особенность на бесконечности ранга Пуанкаре 1.

**Предложение 3.5** *Формальная нормальная форма на бесконечности системы (3.7) есть*

$$\tilde{\Psi}'_s = \left( \frac{1}{s} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \tilde{\Psi}. \quad (3.8)$$

2) Обе матрицы Стокса системы (3.7) на бесконечности не тривиальны.

3) Её монодромия вдоль обхода вокруг нуля является унитарной Жордановой клеткой.

**Доказательство** Матрица свободного члена в (3.7) имеет собственные значения 1, -1; соответствующие собственные вектора суть (2, 1), (2, -1). Значит, она диагонализуется следующим сопряжением:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

То же самое сопряжение переводит матрицу вычета в (3.7) в матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица вычета формальной нормальной формы на бесконечности есть  $\text{diag}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Утверждение 1) доказано.

Собственные значения монодромии системы (3.7) вдоль положительного обхода вокруг нуля равны экспонентам от  $2\pi i$ , умноженного на собственные значения 0, -1 матрицы вычета, так как особая точка в нуле Фуксова с матрицей вычета  $\text{diag}(0, -1)$ . Тем самым, оба собственные значения монодромии равны 1, монодромия унитарна, и её след равен 2. С другой стороны, в подходящем секториальном каноническом базисе на бесконечности матрица монодромии является произведением трёх матриц: матрицы монодромии формальной нормальной формы  $\exp(-2\pi i \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = -Id$  и матриц, обратных к матрицам Стокса; последние обратные матрицы унитарны и, соответственно, ниже- и выше-треугольны и имеют вид

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c_{0,1} \text{ называются множителями Стокса,}$$

см. (2.8). Произведение всех трёх рассматриваемых матриц равно

$$M = \begin{pmatrix} -1 & c_0 \\ c_1 & -(1 + c_0 c_1) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Его след равен  $-(2 + c_0 c_1)$ . Но с другой стороны, он равен 2, см. предыдущие рассуждения. Значит,  $c_0 c_1 = -4$ . Это доказывает Утверждение 2) предложения. Утверждение 3), эквивалентное нетривиальности монодромии (унипотентность), следует из нетривиальности множителей Стокса и (3.9), как в [28]. Предложение доказано.  $\square$

### 3.3 Случай $\ell = 2$

**Предложение 3.6** При  $\ell = 2$

$$\frac{d\mathcal{P}_{2,\pm}}{dv} = h_{2,\pm}\mathcal{P}_{2,\pm}, \quad h_{2,\pm}(\chi, a, s) = \pm\frac{1}{8}(2 - a(2\chi \mp 1)). \quad (3.10)$$

**Доказательство** Положим  $\tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm} := \pm 8\mathcal{P}_{2,\pm}$ . Имеем

$$\tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm} = (2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1)(a^2 - s^2) - 2a(2\chi \pm 1)(6\chi \mp 1) + 16\chi,$$

см. (1.17),

$$\begin{aligned} v_s \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial s} &= -2s^2(2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1) \\ &= 2(a^2 - s^2)(2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1) - 2a^2(2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1), \\ v_a \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial a} &= (2\chi(a^2 - s^2) - 2a)(2\chi \pm 1)(2a(4\chi^2 - 1) - 12\chi \pm 2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$v_\chi \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial \chi} = \frac{1}{2}(a(1 - 4\chi^2) + 4\chi)((a^2 - s^2)(2\chi \pm 1)(12\chi \mp 2) - 8a(6\chi \pm 1) + 16).$$

Следовательно,

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{dv} = v_s \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial s} + v_a \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial a} + v_\chi \frac{\partial \tilde{\mathcal{P}}_{2,\pm}}{\partial \chi} = A(a^2 - s^2) + B, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} A &= (2\chi \pm 1)(2(4\chi^2 - 1) + 4\chi a(4\chi^2 - 1) - 24\chi^2 \pm 4\chi + (a(1 - 4\chi^2) + 4\chi))(6\chi \mp 1) \\ &= (2\chi \pm 1)(4\chi^2 - 1)(2 - a(2\chi \mp 1)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} B &= -2a^2(2\chi \pm 1)^2(2\chi \mp 1) - 4a(2\chi \pm 1)(a(4\chi^2 - 1) - 6\chi \pm 1) + 4(a(1 - 4\chi^2) + 4\chi)(-a(6\chi \pm 1) + 2) \\ &= 2a^2(4\chi^2 - 1)(6\chi \mp 1) + 4a(-20\chi^2 + 1) + 32\chi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для доказательства формулы (3.10), принимая во внимание формулу (3.13), достаточно показать, что

$$B = (2 - a(2\chi \mp 1))(-2a(2\chi \pm 1)(6\chi \mp 1) + 16\chi). \quad (3.15)$$

Раскрывая скобки в (3.15), получаем (3.14). Это доказывает (3.15), а значит, и (3.10).  $\square$



## 4 Благодарности

Я благодарен Ю.П.Бибилу, В.М.Бухштаберу, И.В.Нетаю, В.Ю.Новокшённову, К.А.Шрамову, В.В.Соколову и И.В.Вьюгину за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Anderson, P. W.; Rowell, J. M. *Probable observation of the Josephson tunnel effect.* – Phys. Rev. Lett. **10** (6) (1963): 230–232.
- [2] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Москва, Наука, 1978.
- [3] Арнольд В.И.; Ильяшенко Ю.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – В книге: Динамические системы – 1, Москва, ВИНТИ, 1985, 7–140. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 1).
- [4] Balsler W.; Jurkat W.B.; Lutz D.A. *A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants.* – Funkcialaj Ekvacioj, **22**:2 (1979), 197–221.
- [5] Balsler W.; Jurkat W.B.; Lutz D.A. *Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations.* – J. Math. Anal. Appl. **71** (1979), No. 1, 48–94.
- [6] Barone A.; Paterno G. *Physics u Applications of the Josephson Effect.* – John Wiley and Sons, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore, 1982.
- [7] Beauville A. *Complex Algebraic Surfaces.* Second edition. – Cambridge University Press, 1996.
- [8] Bibilo, Yu.; Glutsyuk, A. *On families of constrictions in model of overdamped Josephson junction and Painlevé 3 equation.* – Nonlinearity, **35** (2022), 5427–5480.
- [9] Болибрух А.А. *Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой.* – Матем. Заметки, **46** (1989), No. 3, 118–120.
- [10] Bolibruch A. *Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients.* – Isomonodromic Deformations and Applications in Physics (Montréal, 2000), CRM Proceeding и Lecture Notes, **31** (2002), 3–25.
- [11] Болибрух А.А. *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений.* – Москва, МЦНМО, 2018.
- [12] Buchstaber V.M.; Glutsyuk A.A. *On determinants of modified Bessel functions u entire решения of double confluent Heun equations.* – Nonlinearity, **29** (2016), 3857–3870.

- [13] Бухштабер В.М.; Глуцок А.А. *Собственные функции монодромии уравнений Гойна и границы зон фазового захвата в модели сильно шунтированного эффекта Джозефсона.* – Труды МИАН им. В.А.Стеклова, **297** (2017), 62–104.
- [14] Бухштабер В.М., Карпов О.В., Тертычный С.И. *О свойствах дифференциального уравнения, описывающего динамику сильношунтированного перехода Джозефсона.* – УМН. **59:2** (2004), 187–188.
- [15] Бухштабер В.М., Карпов О.В., Тертычный С.И. *Особенности динамики джозефсоновского перехода, смещенного синусоидальным СВЧ-током.* – Радиоэлектроника и электротехника, **51:6** (2006), 757–762.
- [16] Бухштабер В.М.; Карпов О.В.; Тертычный, С.И. *Эффект квантования числа вращений.* – ТМФ, **162:2** (2010), 254–265.
- [17] Бухштабер В.М.; Карпов О.В.; Тертычный С.И. *Система на торе, моделирующая динамику перехода Джозефсона.* – УМН. **67** (2012), No. 1, 181–182.
- [18] Бухштабер В.М.; Тертычный С.И. *Семейство явных решений уравнения резистивной модели перехода Джозефсона.* – ТМФ. **176** (2013), No. 2, 163–188.
- [19] Бухштабер В.М.; Тертычный С.И. *Голоморфные решения дважды конфлюэнтного уравнения Гойна, ассоциированного с RSJ-моделью перехода Джозефсона.* – ТМФ. **182:3** (2015), 373–404.
- [20] Бухштабер В.М.; Тертычный С.И. *Замечательная последовательность бесселевых матриц.* – Матем. Заметки, **98** (2015), No. 5, 651–663.
- [21] Бухштабер В.М.; Тертычный С.И. *Автоморфизмы пространства решений специальных дважды конфлюэнтных уравнений Гойна.* – Функц. анализ и его прил. **50** (2016), No. 3, 12–33.
- [22] Бухштабер В.М.; Тертычный С.И. *Представления группы Клейна, задаваемые четверками полиномов, ассоциированных с дважды конфлюэнтным уравнением Гойна.* – Матем. Заметки, **103:3** (2018), 346–363.
- [23] Чирка Е.М. *Комплексные аналитические множества.* – Москва, Наука, 1985.
- [24] Foote R.L., *Geometry of the Prytz Planimeter.* – Reports on Math. Phys. **42:1/2** (1998), 249–271.
- [25] Foote R.L.; Levi M.; Tabachnikov S. *Tractrices, bicycle tire tracks, hatchet planimeters, and a 100-year-old conjecture.* – Amer. Math. Monthly, **120** (2013), 199–216.
- [26] Glutsyuk A. *On constrictions of phase-lock areas in model of overdamped Josephson effect and transition matrix of the double-confluent Heun equation.* – J. Dyn. Control Syst. **25** (2019), Issue 3, 323–349.

- [27] Glutsyuk A. *On germs of constriction curves in model of overdamped Josephson junction, dynamical isomonodromic foliation u Painlevé 3 equation.* – Moscow Math. J. **23** (2023), No. 4, 479–513.
- [28] Глуцюк А.А.; Клепцын В.А.; Филимонов Д.А.; Щуров И.В. *О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона.* – Функци. анализ и его прил. **48** (2014), No. 4, 47–64.
- [29] Glutsyuk, A.; Netay, I. *On spectral curves u complexified boundaries of phase-lock areas in a model of Josephson junction.* – J. Dyn. Control Systems, **26** (2020), 785–820.
- [30] Hironaka H. *On the resolution of singularities (characteristic zero).* – Proc. Int. Cong. Math. (1962), 507–521.
- [31] Ильин В.П.; Кузнецов Ю.И. *Трёхдиагональные матрицы и их приложения.* – Москва, Наука, 1985.
- [32] Pyashenko, Yu.; Guckenheimer, J. *The duck u the devil: canards on the staircase.* – Moscow Math. J., **1** (2001), No. 1, 27–47.
- [33] Ильяшенко Ю.С.; Хованский, А.Г. *Группы Галуа, операторы Стокса и теорема Рамиса.* – Функци. анализ и его прил., **24:4** (1990), 31–42.
- [34] Ильяшенко Ю. С.; Рыжов Д. А.; Филимонов Д. А. *Захват фазы для уравнений, описывающих резистивную модель Джозефсоновского перехода, и их возмущений.* – Функци. анализ и его прил., **45** (2011), No. 3, 41–54.
- [35] Jimbo, M. *Monodromy Problem u the Boundary Condition for Some Painlevé Equations.* – Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18** (1982), Issue 3, 1137–1161.
- [36] Josephson, B.D., *Possible new effects in superconductive tunnelling.* – Phys. Lett., **1** (1962), No. 7, 251–253.
- [37] Jurkat, W.B.; Lutz, D.A.; Peyrerimhoff, A. *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations.* – J. Math. Anal. Appl. **53** (1976), No. 2, 438–470.
- [38] Клепцын В.А.; Ромаскевич О.Л.; Щуров И.В. *Эффект Джозефсона и быстро-медленные системы.* – Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, **8** (2013), 31–46.
- [39] Klimenko, A.V; Romaskevich, O.L. *Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect.* Mosc. Math. J., **14:2** (2014), 367–384.
- [40] Levinson, Y. *Quantum noise in a current-biased Josephson junction.* – Phys. Rev. B, **67** (2003), 184504.

- [41] Likharev, K.K. *Dynamics of Josephson junctions and circuits*. – Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- [42] Лихарев К.К. *Введение в динамику джозефсоновских переходов*. – Москва, Наука, 1985.
- [43] Лихарев К.К.; Ульрих Б.Т. *Системы с Джозефсоновскими контактами. Основы теории*. – Издательство МГУ, Москва, 1978.
- [44] Lin Y., Dai D., Tibboel P., *Existence and uniqueness of tronquée solutions of the third and fourth Painlevé equations*. – *Nonlinearity* **27** (2014), 171–186.
- [45] Malgrange, B. *Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières*. – *Cours de l'Institut Fourier*, **17** (1982), 1–26.
- [46] Malmquist J. *Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*. – *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **17** (1922-23), 1–89.
- [47] McCumber D.E. *Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions*. – *J. Appl. Phys.*, **39** (1968), No. 7, 3113–3118.
- [48] Okamoto K. *Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I*. – *Proc. Japan Acad.*, **56**, Ser. A (1980), 264–268.
- [49] Röhrl H. *On holomorphic families of fiber bundles over the Riemannian sphere*. – *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A*, **XXXIII** (1961), No. 3, 435–477.
- [50] Шмидт В.В. *Введение в физику сверхпроводников*. – Москва, МЦНМО, 2000.
- [51] Shapiro S.; Janus A.; Holly S. *Effect of microwaves on Josephson currents in superconducting tunneling*. – *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 223–225.
- [52] Shiffman B. *On the removal of singularities of analytic sets*. – *Michigan Math. J.*, **15** (1968), 111–120.
- [53] Sibuya Y. *Stokes phenomena*. – *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1075–1077.
- [54] Slavyanov S.Yu.; Lay W. *Special functions: a unified theory based on singularities*. – Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.
- [55] Stewart W.C., *Current-voltage characteristics of Josephson junctions*. – *Appl. Phys. Lett.*, **12** (1968), No. 8, 277–280.
- [56] Tertychnyi S.I. *Long-term behavior of solutions of the equation  $\dot{\phi} + \sin \phi = f$  with periodic  $f$  and the modeling of dynamics of overdamped Josephson junctions*. – Preprint <https://arxiv.org/abs/math-ph/0512058>.
- [57] Tertychnyi S.I. *The modeling of a Josephson junction and Heun polynomials*. – Preprint <https://arxiv.org/abs/math-ph/0601064>.

- [58] Vinnikov V. *Complete description of determinantal representations of smooth irreducible curves.* – Lin. Alg. Appl. **125** (1989), 103–140.
- [59] Vinnikov V. *Self-adjoint determinantal representations of real plane curves.* – Math. Annalen, **296:1** (1993), 453–479.