

А. Ю. Моисеева, НИУ ВШЭ
К ВОПРОСУ О «РЕЛЕВАНТНОМ» ПРИНЦИПЕ ДЕДУКЦИИ

Аннотация: Рассматривается проблема формулировки аналога теоремы дедукции для релевантной логики. Раскрываются значение этой теоремы для логики в целом и причины затруднения с ней, возникающего в рамках релевантной логики. Приводятся различные способы разрешения затруднения, связанные с переопределением понятия вывода из посылок, и анализируются последствия. Делается вывод о том, что принцип дедукции для релевантной логики, будучи формально чисто синтаксическим, по сути является средством переноса синтаксических свойств исчисления на уровень семантики.
Ключевые слова: релевантная импликация, логическое следование, теорема дедукции.

Введение

Любая логика, содержащая оператор импликации, сталкивается с задачей определения соотношения между суждениями, утверждающими выводимость некоторых следствий из некоторых посылок, и импликативными предложениями. В классической логике соотношение между ними устанавливается *теоремой дедукции*:

$$\Gamma, \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi. \quad (1)$$

Данная теорема изучается в обязательном порядке в любом курсе формальной логики и является, на наш взгляд, наиболее ясным выражением того, для чего логика вообще нужна. По поводу ее важности Е. А. Сидоренко, например, замечает: «[П]ри отсутствии теоремы дедукции в некоторой теории трудно (я думаю, просто невозможно) обосновать содержательную оправданность предлагаемого этой теорией описания (формализации) условной связки. Хотя бы уже потому, что в естественных рассуждениях обоснование истинности условных высказываний осуществляется с помощью приема, равносильного применению теоремы дедукции» [2, с. 194]. Однако не каждый способ задания аксиом для импликации приводит к тому, что в рамках получившейся логической теории теорема дедукции в ее привычной форме (1) оказывается доказуемой или даже приемлемой в качестве априорного принципа¹. Зачастую, чтобы получить приемлемую в конкретной теории форму принципа дедукции, требуется дополнительная работа, как сугубо техническая, так и философская.

Ввиду того факта, что релевантное понимание импликации как раз и создает эту, описанную выше, проблему, задача настоящей статьи – прояснить вопрос о том, *что именно утверждает* «релевантный» принцип дедукции. Следует отметить, что в литературе по релевантной логике достаточно подробно разбираются формулировки теоремы дедукции для различных систем. Мы здесь не претендуем что-то добавить к этим формальным построениям. Наша задача более скромная – осмыслить источник самой проблемы и то, что содержательно собой представляет ее решение, каким бы оно ни было. Для этого сначала мы обратимся к мотивации для построения релевантной логики как таковой и принципам, общим для всех релевантных логик, затем посмотрим, как в различных логиках решается вопрос с принципом дедукции, и в конце сформулируем некоторое заключение.

Логическое следование и импликация в релевантной логике

Известно, что, по крайней мере частично, создание первых логик с релевантной импликацией мотивировалось стремлением более адекватно, чем это делается в рамках

¹ Идея того, что дедукцию можно устанавливать априорно, а не доказывать в качестве теоремы, была взята из цитированной выше работы Е. А. Сидоренко, равно как и само словосочетание «принцип дедукции».

классической логики, выразить формальными средствами понятие логического следования в том виде, в котором оно функционирует в рассуждениях на естественном языке (см. [1, с. 263–264]; также этот мотив комментируется в [2, с. 42]). Поскольку с точки зрения классической логики логическое следование представляет собой условие сохранения истинности, в само его определение включается требование истинности посылок. В релевантной логике требование истинности посылок снимается и заменяется требованием их совместимости. Это делает логику, по сути, интенциональной, за счет чего она оказывается способной формализовать не только ассерторические, но и гипотетические и контрфактические рассуждения. В том же духе переопределяется и само понятие логического следования: вместо требования о наличии между посылками и заключением связи по истинности выдвигается требование о наличии между ними определенного рода «связи по смыслу». По поводу характера этой связи у И. Е. Орлова мы находим такое пояснение: «Указанная "связь по смыслу" охватывает все те случаи, когда предшествующий член предполагает последующий или невозможен без него» [1, с. 264]. Невозможность здесь понимается опять-таки интенционально, как невозможность совместно мыслить или полагать в качестве истинных посылки, не мысля или не полагая истинным заключения.

Коль скоро релевантная импликация предназначена для выражения такого, интенционального, понятия следования, она тоже получает интенциональную трактовку. Минимальное формальное требование заключается в том, чтобы импликация была выводималишь при условии, что ее антецедент и консеквент имеют хотя бы одну общую пропозициональную переменную. В различных системах релевантной логики принимаются различные дополнительные ограничения. Так, в логике **E** импликация должна быть не только релевантной, но и строгой (strict); в исчислении совместности предложений И. Е. Орлова не принимаются такие свойства импликации как упрощение антецедента $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ и ослабление консеквента $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$; в логике **S** не принимается даже т. н. само-импликация $\varphi \rightarrow \varphi$.

В целом, мотивы для введения каждого из вариантов релевантной импликации не являются очевидными и бесспорными. Некоторые сторонники релевантной логики (см., например, [2, с. 42 и далее]) вообще считают разговор о логическом следовании совершенно излишним в этом контексте. Тем не менее мы будем придерживаться именно такой общей трактовки мотивов в силу исторических причин, а также потому что, как мы увидим ниже, в некоторых аспектах она действительно помогает прояснить то, что происходит с принципом дедукции в релевантной логике.

Семантическая функция «релевантного» принципа дедукции

Как было доказано еще в 1970-х гг. [3, с. 57], принцип дедукции в форме (1) без всяких ограничений имеет силу не только в классической логике, но в любой логике, где есть *modus ponens* и где доказуемы все подстановочные примеры формул

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad (2)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \quad (3)$$

В релевантных логиках формулы (2) и (3) имеют различный статус. Формула (3) во многих из них принимается как аксиома, либо принимается эквивалентная ей [4, pp. 79–80] аксиома

$$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \quad (3')$$

И это вполне оправданно, поскольку принятие формулы (3) или какого-то ее эквивалента соответствует интуиции, лежащей в основе интенционального понимания импликации. Что бы мы ни понимали под выражениями «предполагать» и «быть

невозможным без...» (логическое следование или что-то другое), кажется естественным считать отношение, обозначаемое этими выражениями, транзитивным.

Что же касается формулы (2), она известна в контексте релевантной логики под названием «позитивный парадокс» и отвергается как пример фиктивной (нерелевантной) формы вывода. При этом очевидно, что при принятии (1) легко можно получить не только (2), но и другие «парадоксальные» формулы, например,

$$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \quad (4)$$

Причем выводимость формул типа (2) даже не зависит от аксиоматики, они получаются непосредственно из принципа дедукции; а формулы типа (4) можно получить лишь при одном дополнительном условии – наличии в логике т. н. принципа взрыва. Например, обе эти формулы выводимы в интуиционистской логике.

Чтобы избежать получения формул типа (2), создатели большинства релевантных логик принимают узкое определение вывода, *релевантного относительно посылки A*, и так или иначе переформулируют принцип дедукции, ограничивая его действие только выводами указанного типа (подробнее см. [5, pp. 135–139]). Релевантность вывода относительно посылки проверяется посредством прослеживания зависимости, аналогичного тому, как в классической логике мы прослеживаем, от каких посылок зависит заключение, чтобы корректно применять правило генерализации. При таком определении вывода формула (2) оказывается невыводимой, поскольку использование посылки *B* в ней является фиктивным (нерелевантным). Что же касается формул типа (4), они могут исключаться с помощью принятия различных аксиоматик, не реализующих принцип взрыва.

Другой подход [2, с. 182] связан с переопределением понятия вывода из посылок *вообще*. Идея этого подхода заключается в том, что нужно разрешить использование принципа непротиворечия, но так, чтобы требование релевантности при этом не нарушалось. Для этого принцип непротиворечия выводится за рамки аксиоматики и превращается в метаправило, на применение которого в выводе накладываются определенные ограничения. Мы не будем здесь подробно рассматривать этот интересный подход, заметим лишь, что в его русле также оказывается доступной формулировка принципа дедукции, соответствующего некоторой минимальной аксиоматике для импликации [Там же, с. 191 и далее].

Если теперь вернуться к тезису о том, что в релевантной логике импликация предназначена для выражения интенционального следования, то вырисовывается следующая картина. Получается, что различные варианты «релевантного» принципа дедукции, который с формальной точки зрения является чисто синтаксическим (мета)принципом, на деле выполняют семантическую функцию – определяют нечто, относящееся к смыслу предложений φ и ψ . И определяют они это совершенно различным образом в силу различного определения того вывода, который фигурирует в утверждении. Иначе говоря, происходит перенос синтаксического понятия на уровень семантики, предполагающий некую «подгонку» модели под логику так, чтобы в этой модели нашлась какая-то более или менее интуитивная интерпретация для импликации с заданными свойствами.

В связи с этим симптоматично появление в некоторых вариантах семантик для релевантной логики «гибридных» принципов, аналогичных принципу дедукции. Так, в ситуационной семантике для релевантной логики DJWI+ (сам автор предпочитает

называть ее Инфологией), представленной в [7], можно доказать «гибридный» ситуационный аналог² теоремы дедукции в правом и левом вариантах:

RD: Если $\varphi \vdash \psi$ и $s \Vdash \psi \rightarrow \chi$, то $s \Vdash \varphi \rightarrow \chi$;

LD: Если $\varphi \vdash \psi$ и $s \Vdash \sigma \rightarrow \varphi$, то $s \Vdash \sigma \rightarrow \psi$.

Здесь s – это ситуация, которая моделируется как точка из множества точек модели, построенной автором по образцу моделей Раутли-Мейера. Выполнение утверждений RD и LD обеспечивается тем, что в модели присутствует выделенный класс точек L , такой что в каждой из них «экземплифицируются» все логические выводы:

$\forall s \in L$ если $\varphi \vdash \psi$, то $s \Vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Таким образом осуществляется явный перенос в семантику синтаксических отношений между предложениями.

Заключение

Из предыдущего рассуждения можно заключить, что «релевантный» принцип дедукции не является в чистом виде синтаксическим принципом. Более точно, будучи синтаксическим по форме, он несет в себе существенную семантическую информацию, а именно информацию о модели. Эта информация определяет то, как связаны между собой смыслы предложений, которые образуют антецедент и консеквент релевантной импликации. Понятно, что характер этой связи невозможно прояснить, пока не будет определено, как именно должен моделироваться собственно смысл. И поскольку существует множество подходов к построению семантики для релевантной логики, никакого общего ответа здесь дать нельзя. Однако представляется оправданным исследовать этот вопрос на примере, по крайней мере, нескольких основных подходов, чтобы в дальнейшем сопоставить друг с другом полученные там результаты.

Литература

1. Орлов И. Е. Исчисление совместности предложений. *Математический сборник*. Т. 35. Вып. 3–4. 1928. С. 263–286.
2. Сидоренко Е. А. *Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика)*. М.: ИФ РАН, 2000.
3. Смирнов В. А. *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука, 1972.
4. Anderson A. R., Belnap N. D. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. 1. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975.
5. Dunn J. M. Relevance Logic and Entailment. / *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III. Eds.: Guenther F., Gabbay D. Dordrecht: Reidel, 1986. Pp. 117–124.
6. Mares E. *Relevance Logic*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2024 Edition). URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2024/entries/logic-relevance/> (дата посещения: 26.03.2024).
7. Mares E. Relevant logic and the theory of information. *Synthese*. Vol. 109, No. 3 (Dec., 1996). Pp. 345–360.

² Аналогия здесь становится явной, если рассмотреть дополнительно семантический аналог (3).