

УДК 517.938.5

Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, Е. В. Цаплина

Критерий существования связного характеристического пространства орбит у градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности

Классический подход к изучению динамических систем состоит в представлении динамики системы в виде “источник–сток”, т. е. в выделении дуальной пары аттрактор–репеллер, которые являются притягивающими и отталкивающими множествами для всех остальных траекторий системы. Если удастся выбрать дуальную пару аттрактор–репеллер так, что пространство орбит в их дополнении (характеристическое пространство орбит) является связным, то это создает предпосылки для нахождения полных топологических инвариантов динамической системы. На этом пути, в частности, получен целый ряд классификационных результатов для систем Морса–Смейла. Так, полная топологическая классификация 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла существенно базируется на наличии связного характеристического пространства орбит, ассоциированного с выбором одномерной дуальной пары аттрактор–репеллер. Для диффеоморфизмов Морса–Смейла с гетероклиническими точками на поверхностях известны примеры, для которых все характеристические пространства орбит не связны. В настоящей работе доказан критерий существования связного характеристического пространства орбит для градиентно-подобных (без гетероклинических точек) диффеоморфизмов на поверхностях, из которого, в частности, следует, что связным характеристическим пространством обладает любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Тогда как на ориентируемой поверхности любого рода построен меняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм, не обладающий связным характеристическим пространством. Градиентно-подобный диффеоморфизм без связного характеристического пространства построен также на неориентируемой поверхности любого рода.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: градиентно-подобный диффеоморфизм, аттрактор, репеллер, характеристическое пространство орбит.

DOI: <https://doi.org/10.4213/im9373>

§ 1. Введение и формулировка результата

Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, заданный на замкнутом связном n -многообразии. Обозначим через Ω_f^0 , Ω_f^1 , Ω_f^2 множество

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, за исключением конструктивного доказательства теоремы 2, выполненного при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, грант № 23-7-2-13-1 “Топологические аспекты регулярной динамики”.

стоков, седел и источников диффеоморфизма f . Для любого (возможно пустого) f -инвариантного множества $\Sigma \subset \Omega_f^1$ обозначим через W_Σ^u объединение неустойчивых многообразий всех точек из Σ . Для множества Σ такого, что $\text{cl}(W_\Sigma^u) \setminus W_\Sigma^u \subset \Omega_f^0$, положим

$$A_\Sigma = \Omega_f^0 \cup W_\Sigma^u, \quad R_\Sigma = \Omega_f^2 \cup W_{\Omega_f^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Из работы [1] следует, что множества A_Σ и R_Σ являются *дуальными аттрактором* и *репеллером* соответственно. В монографии [2] множество

$$V_\Sigma = M^n \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma)$$

названо *характеристическим пространством*, а пространство орбит $\widehat{V}_\Sigma = V_\Sigma/f$ действия f на V_Σ называется *характеристическим пространством орбит*.

Отметим, что в зависимости от выбора аттрактора A_Σ и репеллера R_Σ характеристическое пространство орбит \widehat{V}_Σ может быть как связным, так и несвязным. Так, на рис. 1 изображен сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм Морса–Смейла на двумерной сфере S^2 . Пусть в первом случае $\Sigma = \{\emptyset\}$, тогда \widehat{V}_Σ гомеоморфно дизъюнктому объединению двух торов. Во втором случае $\Sigma = \{\sigma\}$, а характеристическое пространство орбит гомеоморфно одному тору.

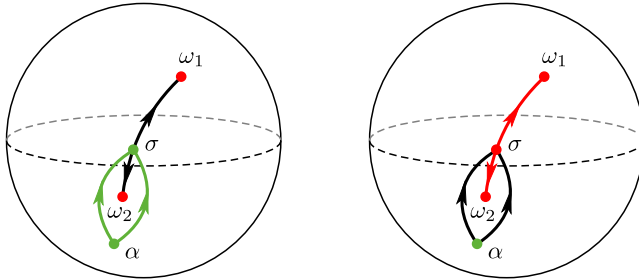


Рис. 1. Градиентно-подобный диффеоморфизм на 2-сфере

Существует целый ряд примеров, когда разумный выбор дуальной пары приводит к полной топологической классификации некоторого подмножества динамических систем Морса–Смейла (см., например, [3]–[7], а также обзор [8]). В большинстве случаев нахождение полных топологических инвариантов основано на существовании связного характеристического пространства орбит для рассматриваемого класса систем. Например, согласно [3] для любого 3-диффеоморфизма Морса–Смейла характеристическое пространство орбит, построенное для множества Σ седловых точек с одномерным неустойчивым многообразием, является связным. Этот факт сыграл ключевую роль в получении полной топологической классификации таких диффеоморфизмов, представленной в работе [3].

Согласно [1] любой диффеоморфизм Морса–Смейла, заданный на многообразии размерности $n > 3$, также обладает связным характеристическим

пространством орбит. Для диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхности это неверно в общем случае. Так, на рис. 2 изображен фазовый портрет диффеоморфизма Морса–Смейла на 2-сфере $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, не являющегося градиентно-подобным и не обладающего связным характеристическим пространством орбит.

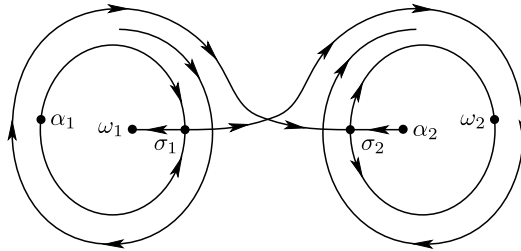


Рис. 2. Фазовый портрет диффеоморфизма Морса–Смейла на 2-сфере, не обладающего связным характеристическим пространством орбит

Действительно, неблуждающее множество Ω_f состоит из шести неподвижных точек (двух стоков ω_1, ω_2 , двух источников α_1, α_2 и двух седел σ_1, σ_2), что приводит к трем возможным различным вариантам множества Σ : 1) $\Sigma = \emptyset$, $A_\Sigma = \omega_1 \sqcup \omega_2$; 2) $\Sigma = \{\sigma_2\}$, $A_\Sigma = \omega_1 \sqcup (W_{\sigma_2}^u \cup \omega_2)$; 3) $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $R_\Sigma = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$. Во всех случаях либо A_Σ , либо R_Σ состоит из двух компонент связности, каждая из которых f -инварианта. Поскольку $V_\Sigma = W_{A_\Sigma}^s \setminus A_\Sigma = W_{R_\Sigma}^u \setminus R_\Sigma$, то V_Σ состоит из двух компонент связности, каждая из которых f -инварианта. Откуда следует, что множество \widehat{V}_f не связно.

Настоящая работа посвящена исследованию существования связного характеристического пространства орбит для градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях.

Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – такой диффеоморфизм. Согласно [1] множество $A_{\Omega_f^1}$ является связным аттрактором, что влечет связность графа Γ_f , ребра которого соответствуют неустойчивым седловым сепаратрисам, а вершины – точкам множества $\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1$. Критерий существования связного характеристического пространства у диффеоморфизма f определяется наличием специального связного подграфа в графе Γ_f , для его описания введем следующие определения.

Типом ориентации седловой точки σ периода m_σ назовем пару $\zeta_\sigma = (\nu_\sigma, \lambda_\sigma)$, где $\nu_\sigma = +1$ (-1), если $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^s}$ сохраняет (меняет) ориентацию; $\lambda_\sigma = +1$ (-1), если $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Обозначим через $\overline{\Omega}_f^1$ множество седловых точек с типом ориентации $(-1, +1)$ таких, что не существует стоковой точки ω такой, что $\text{cl}(W_\sigma^u) \setminus W_\sigma^u \subset \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\overline{\Omega}_f^0$ множество стоков ω таких, что $f^{m_\omega}|_{W_\omega^s}$ меняет ориентацию, и не существует седловой точки $\sigma \in \overline{\Omega}_f^1$ такой, что $\text{cl}(W_\sigma^u) \setminus W_\sigma^u \subset \mathcal{O}_\omega$.

Подграф $\overline{\Gamma}_f \subset \Gamma_f$ назовем *специальным подграфом*, если все его вершины лежат в множестве $\overline{\Omega}_f^0 \cup \overline{\Omega}_f^1$ и содержат в точности по одной точке с каждой орбиты множества $\overline{\Omega}_f^0$. Если $\overline{\Omega}_f^0 = \emptyset$, то положим $\overline{\Gamma}_f = \emptyset$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Градиентно-подобный диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ обладает связным характеристическим пространством орбит тогда и только тогда, когда его граф Γ_f обладает связным специальным подграфом $\bar{\Gamma}_f$. При этом пространство орбит гомеоморфно тору, если $\bar{\Gamma}_f = \emptyset$, и гомеоморфно бутылке Клейна в противном случае.*

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любой градиентно-подобный $f: M^2 \rightarrow M^2$, множество $\bar{\Omega}_f^0$ которого состоит не более, чем из одной орбиты, обладает связным характеристическим пространством орбит. В частности, связным характеристическим пространством орбит обладает любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм¹, поскольку он не имеет стоков отрицательного типа ориентации.*

Как показывает следующий результат, любая поверхность допускает градиентно-подобные диффеоморфизмы без связного характеристического пространства орбит.

ТЕОРЕМА 2. 1) *На ориентируемой поверхности любого рода существует меняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм, не обладающий связным характеристическим пространством.*

2) *Градиентно-подобный диффеоморфизм без связного характеристического пространства существует на неориентируемой поверхности любого рода.*

§ 2. Диффеоморфизмы Морса–Смейла

Пусть M^n – гладкое замкнутое ориентируемое многообразие, и f – диффеоморфизм на M^n . Для диффеоморфизма f точка $x \in X$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Непосредственно из определения следует, что каждая точка окрестности U_x является блуждающей, и, следовательно, множество блуждающих точек открыто, а множество неблуждающих точек – замкнуто.

Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

Простейшими примерами гиперболических множеств являются прежде всего гиперболические неподвижные точки диффеоморфизма, которые можно классифицировать следующим образом. Пусть $f: X \rightarrow X$ – диффеоморфизм и $f(p) = p$. Точка p является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $(\partial f / \partial x)|_p$ нет чисел, по модулю равных единице. Если при этом все собственные числа матрицы Якоби по модулю

¹Результат о существовании связного характеристического пространства орбит, гомеоморфного тору, у любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности получен ранее в работе [9, теорема 1.1].

меньше единицы, то p называется *притягивающей, стоковой точкой* или *стокком*; если все собственные числа по модулю больше единицы, то p называется *отталкивающей, источниковой точкой* или *источником*. Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой*. Гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой* или *седлом*.

Если точка p – периодическая точка f с периодом $\text{per}(p)$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{\text{per}(p)}$, получаем классификацию гиперболических периодических точек, аналогичную классификации неподвижных гиперболических точек.

Гиперболическая структура периодической точки p приводит к существованию у нее *устойчивого* $W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{k \text{per}(p)}(x), p) \rightarrow 0\}$ и *неустойчивого* $W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-k \text{per}(p)}(x), p) \rightarrow 0\}$ многообразий, являющихся гладкими вложениями \mathbb{R}^{n-q_p} и \mathbb{R}^{q_p} соответственно. Здесь q_p – число собственных значений матрицы Якоби $(\partial f^{\text{per}(p)}/\partial x)|_p$ по модулю больших единицы.

Для гиперболической неподвижной или периодической точки p устойчивое или неустойчивое многообразие называется *инвариантным многообразием* этой точки, компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой*.

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей* или *изолирующей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} . Аттрактор и репеллер называются *дуальными*, если дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность репеллера.

Диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Диффеоморфизм Морса–Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$. В размерности $n = 2$ множество градиентно-подобных диффеоморфизмов совпадает с множеством диффеоморфизмов Морса–Смейла, чьи седловые сепаратрисы не пересекаются.

Если M^n – ориентируемое многообразие, то диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется *сохраняющим ориентацию*, если f имеет положительный якобиан хотя бы в одной точке, в противном случае диффеоморфизм называется *меняющим ориентацию*.

§ 3. Пространства орбит инвариантных подмножеств градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей

Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – градиентно-подобный диффеоморфизм, заданный на замкнутой поверхности M^2 . Пусть ω – стоквая точка периода m_ω диффеоморфизма f . Согласно [10, теорема 5.5] диффеоморфизм f^{m_ω} в некоторой окрестности точки ω топологически сопряжен линейному диффеоморфизму плоскости, заданному матрицей $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \varsigma_\omega \cdot 1/2 \end{pmatrix}$, где $\varsigma_\omega = +1$ (-1), если $f^{m_\omega}|_{W_\omega^s}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Будем говорить, что сток ω имеет *положительный тип ориентации*, если $\varsigma_\omega = +1$ и имеет *отрицательный тип ориентации* в противном случае.

Обозначим через \mathcal{O}_ω орбиту точки ω . Положим $V_\omega = W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega$. Обозначим через $\widehat{V}_\omega = V_\omega/f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ на V_ω и через $p_\omega: V_\omega \rightarrow \widehat{V}_\omega$ естественную проекцию. Группа F действует свободно и разрывно² на V_ω , в силу чего проекция p_ω является накрытием³, индуцирующим структуру гладкого 2-многообразия на \widehat{V}_ω и отображение η_ω , составленное из гомоморфизмов⁴ в группу \mathbb{Z} из фундаментальной группы каждой компоненты связности пространства \widehat{V}_ω (см., например, [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [12, утверждение 1]). *Многообразие \widehat{V}_ω диффеоморфно двумерному тору, если $\varsigma_\omega = +1$ и диффеоморфно бутылке Клейна, если $\varsigma_\omega = -1$. При этом $\eta_\omega(\pi_1(\widehat{V}_\omega)) = m_\omega\mathbb{Z}$ (здесь $m_\omega\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, кратных m_ω).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [12, утверждение 2]). *Пусть l – сепаратриса периода m_l седловой точки диффеоморфизма f , принадлежащая V_ω . Тогда мно-*

²Пусть G – группа с нейтральным элементом e_G . Говорят, что группа G действует на топологическом пространстве X , если задано отображение $\zeta: G \times X \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\zeta(e_G, x) = x$ для всех $x \in X$;
- 2) $\zeta(g, \zeta(g', x)) = \zeta(gg', x)$ для всех $x \in X$ и $g, g' \in G$.

Группа G с нейтральным элементом e_G действует *свободно* на топологическом пространстве X , если $g(x) \neq x$ для любого $x \in X$ и любого $g \in G$, отличного от e_G . Группа G действует *разрывно* на X , если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $g \in G$ таких, что $g(K) \cap K \neq \emptyset$ конечно.

При свободном и разрывном действии группы G на многообразии X пространство G -орбит X/G является многообразием той же размерности, что и X , а естественная проекция $p_{X/G}: X \rightarrow X/G$ является накрытием.

³Непрерывное отображение $p: \overline{X} \rightarrow X$ топологических пространств называется *накрытием* (накрывающим отображением), если

- 1) p сюръективно;

2) для любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \overline{U}_j$ для некоторого семейства $\{\overline{U}_j, j \in J\}$ открытых подмножеств \overline{X} , удовлетворяющих условиям $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k = \emptyset$ для $j \neq k$, и $p|_{\overline{U}_j}: \overline{U}_j \rightarrow U$ – гомеоморфизм для всех $j \in J$.

⁴Пусть группа G действует свободно и разрывно на многообразии X так, что пространство G -орбит X/G связно. Тогда естественная проекция $p_{X/G}: X \rightarrow X/G$ индуцирует эпиморфизм $\eta_{X/G, \overline{x}}: \pi_1(X/G, x) \rightarrow G$ следующим образом. Пусть c – некоторая петля в X/G такая, что $c(0) = c(1) = x$. Согласно теореме о монодромии существует единственный путь \overline{c} в X с началом в точке \overline{x} ($\overline{c}(0) = \overline{x}$), являющийся поднятием пути c . Поэтому существует элемент $g \in G$ такой, что $\overline{c}(1) = g(\overline{x})$ и корректно определено (т. е. не зависит от выбора петли в классе $[c]$) отображение $\eta_{X/G, \overline{x}}: \pi_1(X/G, x) \rightarrow G$, действующее по формуле $\eta_{X/G, \overline{x}}([c]) = g$.

жество $\widehat{l} = p_\omega(l)$ является окружностью, гладко вложенной в \widehat{V}_ω так, что $\eta_\omega(\widehat{l}) = m_l$.

Аналогичным образом вводится понятие типа ориентации ζ_α для периодического источника α диффеоморфизма f , пространство орбит \widehat{V}_α и проекция в него устойчивой сепаратрисы седловой точки.

Пусть σ — седловая точка периода m_σ диффеоморфизма f . Согласно [10, теорема 5.5] диффеоморфизм f^{m_σ} в некоторой окрестности точки σ топологически сопряжен линейному диффеоморфизму плоскости, заданному матрицей $\begin{pmatrix} \nu_\sigma \cdot 1/2 & 0 \\ 0 & \lambda_\sigma \cdot 2 \end{pmatrix}$, где $\nu_\sigma = +1$ (-1), если $f|_{W_p^s}$ сохраняет (меняет) ориентацию; $\lambda_\sigma = +1$ (-1), если $f|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Пару $\zeta_\sigma = (\nu_\sigma, \lambda_\sigma)$ будем называть *типом ориентации* седловой точки σ и обозначать через $a_{\zeta_\sigma}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ соответствующий ему линейный диффеоморфизм. Если $\nu_\sigma > 0$, $\lambda_\sigma > 0$, то тип ориентации будем называть *положительным*, и *отрицательным* в противном случае.

Диффеоморфизм $a_{\zeta_\sigma}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с устойчивым многообразием $W_O^s = Ox_1$ и неустойчивым многообразием $W_O^u = Ox_2$. Положим $\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: |x_1 x_2| \leq 1\}$ и заметим, что множество \mathcal{N} является инвариантным относительно канонического диффеоморфизма a_{ζ_σ} .

Окрестность \mathcal{N}_σ точки σ назовем *линеаризирующей*, если существует гомеоморфизм $\mu_\sigma: \mathcal{N}_\sigma \rightarrow \mathcal{N}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{\mathcal{N}_\sigma}$ с диффеоморфизмом $a_{\zeta_\sigma}|_{\mathcal{N}}$. Окрестность $\mathcal{N}_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\mathcal{N}_\sigma)$ орбиты $\mathcal{O}_\sigma = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\sigma)$, оснащенную отображением $\mu_{\mathcal{O}_\sigma}$, составленным из гомеоморфизмов $\mu_\sigma f^{-j}: f^j(\mathcal{N}_\sigma) \rightarrow \mathcal{N}$, $j = 0, \dots, m_\sigma - 1$, будем называть *линеаризирующей окрестностью орбиты \mathcal{O}_σ* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [2, теорема 2.2]). *Любая седловая точка (орбита) градиентно-подобного диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$ обладает линеаризирующей окрестностью.*

Положим $N_\sigma^u = \mathcal{N}_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^s$. Тогда группа F действует свободно и разрывно на N_σ^u , порождая пространство орбит $\widehat{N}_\sigma^u = N_\sigma^u/f$, естественную проекцию $p_\sigma^u: N_\sigma^u \rightarrow \widehat{N}_\sigma^u$ и отображение η_σ^u , составленное из гомоморфизмов в группу \mathbb{Z} из фундаментальной группы каждой компоненты связности пространства \widehat{N}_σ^u .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см. [12, утверждение 5]). *Многообразие \widehat{N}_σ^u имеет следующий топологический тип (рис. 3) в зависимости от ζ_σ :*

1) если $\zeta_\sigma = (+1, +1)$, то пространство \widehat{N}_σ^u состоит из двух компонент связности \widehat{N}_σ^{u1} , \widehat{N}_σ^{u2} , каждая из которых диффеоморфна кольцу и $\eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u1})) = \eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u2})) = m_\sigma \mathbb{Z}$;

2) если $\zeta_\sigma = (-1, +1)$, то пространство \widehat{N}_σ^u состоит из двух компонент связности \widehat{N}_σ^{u1} , \widehat{N}_σ^{u2} , каждая из которых диффеоморфна ленте Мёбиуса и $\eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u1})) = \eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u2})) = m_\sigma \mathbb{Z}$;

3) если $\zeta_\sigma = (+1, -1)$, то пространство \widehat{N}_σ^u состоит из одной компоненты связности \widehat{N}_σ^u , которая диффеоморфна кольцу и $\eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^u)) = 2m_\sigma \mathbb{Z}$;

4) если $\zeta_\sigma = (-1, -1)$, то пространство \widehat{N}_σ^u состоит из одной компоненты связности \widehat{N}_σ^u , которая диффеоморфна кольцу и $\eta_\sigma^u(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^u)) = 2m_\sigma \mathbb{Z}$.

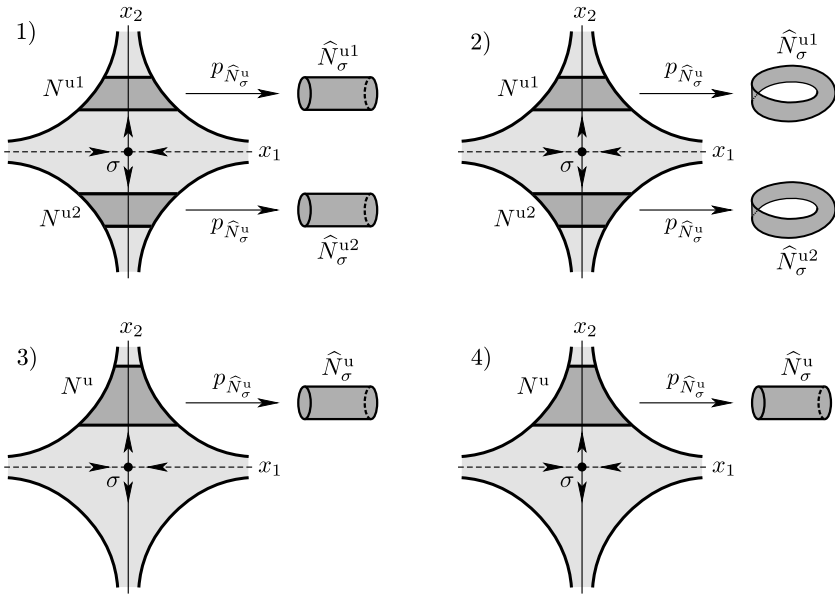


Рис. 3. Пространства орбит \widehat{N}_σ^u

На рис. 3 темным выделены фундаментальные области⁵ действия группы F на N_σ^u для различных типов ζ_σ . В случаях $\zeta_\sigma = (+1, +1)$ и $\zeta_\sigma = (-1, +1)$ фундаментальная область состоит из двух непересекающихся криволинейных трапеций, а в случаях $\zeta_\sigma = (+1, -1)$ и $\zeta_\sigma = (-1, -1)$ фундаментальную область можно выбрать в виде одной криволинейной трапеции. Пространство орбит \widehat{N}_σ^u получается из соответствующих криволинейных трапеций отождествлением точек на горизонтальных отрезках границы.

Аналогичным образом вводится пространство орбит $\widehat{N}_\sigma^s = N_\sigma^s/f$ действия группы F на $N_\sigma^s = N_{O_\sigma} \setminus W_{O_\sigma}^u$, накрытие $p_\sigma^s: N_\sigma^s \rightarrow \widehat{N}_\sigma^s$ и отображение η_σ^s , составленное из гомоморфизмов в группу \mathbb{Z} из фундаментальной группы каждой компоненты связности пространства \widehat{N}_σ^s .

Кроме того, корректно определено отображение

$$\widehat{\psi}_\sigma = p_\sigma^s(p_\sigma^u)^{-1}: \partial\widehat{N}_\sigma^u \rightarrow \partial\widehat{N}_\sigma^s,$$

называемое *отображением перестройки* (рис. 4).

Обозначим через $\Omega_f^0, \Omega_f^1, \Omega_f^2$ множество сток, седел и источников диффеоморфизма f . Для любого (возможно пустого) f -инвариантного множества

⁵ Фундаментальной областью действия группы G на топологическом пространстве X называется замкнутое множество $D_G \subset X$ такое, что существует множество \widetilde{D}_G со следующими свойствами:

- 1) $\text{cl}(\widetilde{D}_G) = D_G$;
- 2) $g(\widetilde{D}_G) \cap \widetilde{D}_G = \emptyset$ для всех $g \in G$, отличных от нейтрального элемента группы G ;
- 3) $\bigcup_{g \in G} g(\widetilde{D}_G) = X$.

Если группа G действует свободно и разрывно на топологическом пространстве X , то для фундаментальной области D_G действия G на X имеет место равенство $D_G/G = X/G$, где X/G – множество G -орбит.

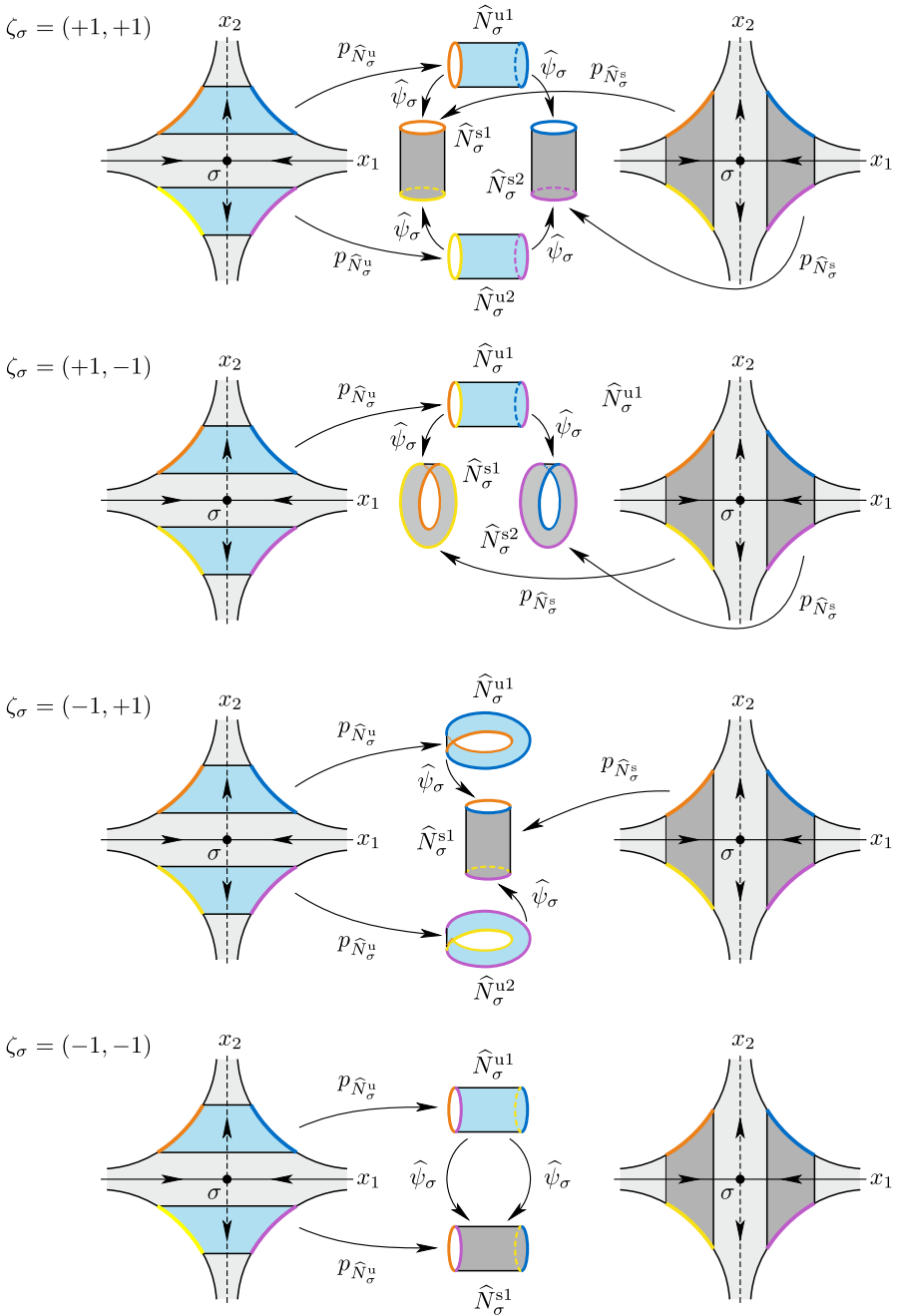


Рис. 4. Отображение перестройки

$\Sigma \subset \Omega_f^1$ такого, что $\text{cl}(W_\Sigma^u) \setminus W_\Sigma^u \subset \Omega_f^0$, положим

$$A_\Sigma = \Omega_f^0 \cup W_\Sigma^u, \quad R_\Sigma = \Omega_f^2 \cup W_{\Omega_f^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Множество

$$V_\Sigma = M^2 \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma)$$

называется *характеристическим пространством*. Группа F действует свободно и разрывно на V_Σ . Факторпространство

$$\widehat{V}_\Sigma = V_\Sigma / f$$

называется *характеристическим пространством орбит*. Естественная проекция $p_\Sigma: V_\Sigma \rightarrow \widehat{V}_\Sigma$ индуцирует отображение η_Σ , составленное из гомоморфизмов в группу \mathbb{Z} из фундаментальной группы каждой компоненты связности пространства \widehat{V}_Σ . В общем случае характеристическое пространство орбит не является связным, обозначим через $\widehat{V}_\Sigma^1, \dots, \widehat{V}_\Sigma^k$ компоненты связности пространства \widehat{V}_Σ . Положим $V_\Sigma^1 = p_\Sigma^{-1}(\widehat{V}_\Sigma^1), \dots, V_\Sigma^k = p_\Sigma^{-1}(\widehat{V}_\Sigma^k)$ и обозначим через m_1, \dots, m_k число компонент связности в множествах $V_\Sigma^1, \dots, V_\Sigma^k$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см⁶. [13, предложение 1]).

1) Каждая компонента связности множества V_Σ^i , $i \in \{1, \dots, k\}$, диффеоморфна $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

2) Каждая компонента связности множества \widehat{V}_Σ^i диффеоморфна двумерному тору, если диффеоморфизм $f^{m_i}|_{V_\Sigma^i}$ сохраняет ориентацию, и диффеоморфна бутылке Клейна в противном случае.

3) $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{V}_\Sigma^i)) = m_i \mathbb{Z}$.

4) Если l – сепаратриса периода m_l седловой точки диффеоморфизма f , принадлежащая V_Σ , то множество $\widehat{l} = p_\Sigma(l)$ является окружностью, гладко вложенной в \widehat{V}_Σ так, что $\eta_\Sigma(\widehat{l}) = m_l$.

Группа гомологий $H_1(\widehat{V}_\Sigma^i)$ изоморфна \mathbb{Z}^2 , если \widehat{V}_Σ^i – тор, и изоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, если \widehat{V}_Σ^i – бутылка Клейна. В обоих случаях класс гомологий петли $c \subset \widehat{V}_\Sigma^i$ записывается парой чисел (α, β) , при этом $\eta_\Sigma([c]) = \alpha m_i$. Если кривая c является узлом, то числа (α, β) взаимно просты. В частности, для узла \widehat{l} , являющегося проекцией сепаратрисы, $\alpha = m_l / m_i \neq 0$, т. е. \widehat{l} – существенный узел. Трубочатая окрестность такого узла на торе \widehat{V}_Σ^i является кольцом, также как и дополнение до нее. Узлы (с точностью до смены ориентации) на бутылке Клейна реализуются в следующих классах гомологий: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. При этом узел \widehat{l} может лежать только в трех последних. Если узел \widehat{l} принадлежит классу гомологий $(2, 0)$, то его трубочатая окрестность на бутылке Клейна \widehat{V}_Σ^i является кольцом, а дополнение до нее состоит из двух пленок Мебиуса. В противном случае трубочатая окрестность узла \widehat{l} является пленкой Мебиуса, также как и дополнение до нее.

⁶В работе [13] Пикстон строит энергетическую функцию Морса для произвольного диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^2 \rightarrow M^2$. При этом он показывает, что граница захватывающей окрестности аттрактора A_Σ и ее итерация в силу f являются компонентами связности линий уровня этой функции. Из теории Морса в этом случае следует, что фундаментальная область отображения $f|_{V_\Sigma^i}$ гомеоморфна двумерному кольцу, непосредственно отсюда вытекает утверждение предложения.

§ 4. Перестройка характеристических пространств орбит

В этом параграфе мы исследуем изменение характеристического пространства орбит после добавления одной седловой орбиты к множеству Σ .

ЛЕММА 1. Пусть $\Sigma' = \Sigma \cup \mathcal{O}_\sigma$ для некоторой седловой орбиты \mathcal{O}_σ , и \widehat{v} , \widehat{v}' – дизъюнктное объединение компонент связности пространств \widehat{V}_Σ , $\widehat{V}_{\Sigma'}$, имеющих не пустое пересечение с \widehat{N}_σ^u , \widehat{N}_σ^s соответственно. Тогда

$$\widehat{V}_{\Sigma'} \cong (\widehat{V}_\Sigma \setminus \text{int } \widehat{N}_\sigma^u) \cup_{\widehat{\psi}_\sigma} \widehat{N}_\sigma^s.$$

При этом

$$\widehat{V}_{\Sigma'} \cong (\widehat{V}_\Sigma \setminus \widehat{v}) \sqcup \widehat{v}',$$

где для различных типов ориентации ς_σ реализуются следующие возможности.

1. Если $\varsigma_\sigma = (+1, +1)$, то
 - (a) \widehat{v} – дизъюнктное объединение двух торов и \widehat{v}' – тор;
 - (b) \widehat{v} – дизъюнктное объединение тора и бутылки Клейна и \widehat{v}' – бутылка Клейна;
 - (c) \widehat{v} – дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна и \widehat{v}' – дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна;
 - (d) \widehat{v} – тор и \widehat{v}' – дизъюнктное объединение двух торов;
 - (e) \widehat{v} – бутылка Клейна и \widehat{v}' – дизъюнктное объединение тора и бутылки Клейна;
 - (f) \widehat{v} – тор и \widehat{v}' – тор (только в случае, когда M^2 – неориентируемая поверхность).
2. Если $\varsigma_\sigma = (-1, +1)$, то
 - (a) \widehat{v} – дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна и \widehat{v}' – бутылка Клейна;
 - (b) \widehat{v} – бутылка Клейна и \widehat{v}' – тор.
3. Если $\varsigma_\sigma = (+1, -1)$, то
 - (a) \widehat{v} – тор и \widehat{v}' – бутылка Клейна;
 - (b) \widehat{v} – бутылка Клейна и \widehat{v}' – дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна.
4. Если $\varsigma_\sigma = (-1, -1)$, то
 - (a) \widehat{v} – бутылка Клейна и \widehat{v}' – бутылка Клейна;
 - (b) \widehat{v} – тор и \widehat{v}' – тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Sigma' = \Sigma \cup \mathcal{O}_\sigma$, значит, $A_{\Sigma'} = A_\Sigma \cup W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$, $R_{\Sigma'} = R_\Sigma \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^s$, $V_\Sigma = M^2 \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma)$ и $V_{\Sigma'} = M^2 \setminus (A_{\Sigma'} \cup R_{\Sigma'})$. Кроме того, $N_\sigma^u = N_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^s$, $N_\sigma^u \subset V_\Sigma$, $\widehat{N}_\sigma^u \cong p_\Sigma(N_\sigma^u) \subset \widehat{V}_\Sigma$ и $N_\sigma^s = N_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$, $N_\sigma^s \subset V_{\Sigma'}$, $\widehat{N}_\sigma^s \cong p_{\Sigma'}(N_\sigma^s) \subset \widehat{V}_{\Sigma'}$. Следовательно, границы множеств $\widehat{V}_{\Sigma'} \setminus \text{int } \widehat{N}_\sigma^u$, $\widehat{V}_{\Sigma'} \setminus \text{int } \widehat{N}_\sigma^s$ гомеоморфны посредством гомеоморфизма перестройки $\widehat{\psi}_\sigma$, т. е.

$$\widehat{V}_{\Sigma'} \cong (\widehat{V}_\Sigma \setminus \text{int } \widehat{N}_\sigma^u) \cup_{\widehat{\psi}_\sigma} \widehat{N}_\sigma^s.$$

Таким образом, чтобы получить пространство $\widehat{V}_{\Sigma'}$, мы должны удалить из пространства \widehat{V}_Σ множество \widehat{N}_σ^u и к границе полученного множества приклеить

множество \widehat{N}_σ^s в силу $\widehat{\psi}_\sigma$. Покажем, что в формуле

$$\widehat{V}_{\Sigma'} \cong (\widehat{V}_\Sigma \setminus \widehat{v}) \sqcup \widehat{v}'$$

реализуются только перечисленные в лемме случаи.

1. Пусть $\varsigma_\sigma = (+1, +1)$, тогда в силу предложения 4 множества \widehat{N}_σ^u и \widehat{N}_σ^s гомеоморфны парам колец. Откуда следует, что компоненты связности, которых одна или две, множества \widehat{v} могут быть как торами, так и бутылками Клейна. Рассмотрим все возможности.

а) Пусть \widehat{v} – дизъюнктивное объединение двух торов \widehat{v}_1 и \widehat{v}_2 . Тогда кольцо $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}_1$ и кольцо $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}_2$, а в силу предложения 4 каждое из них вложено в тор \widehat{v}_i так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) \neq \{0\}$, и, следовательно, множество $\widehat{v}_i \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно кольцу. Тогда при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к паре колец $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится тор \widehat{v}' (рис. 5).

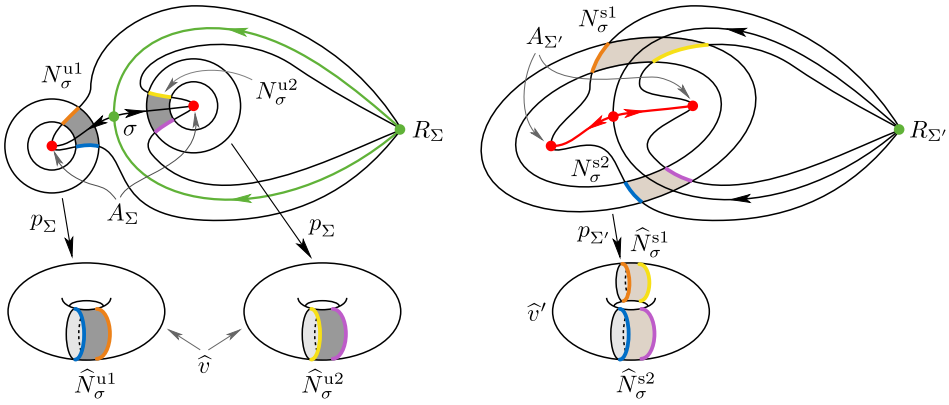


Рис. 5. Иллюстрация к случаю 1а)

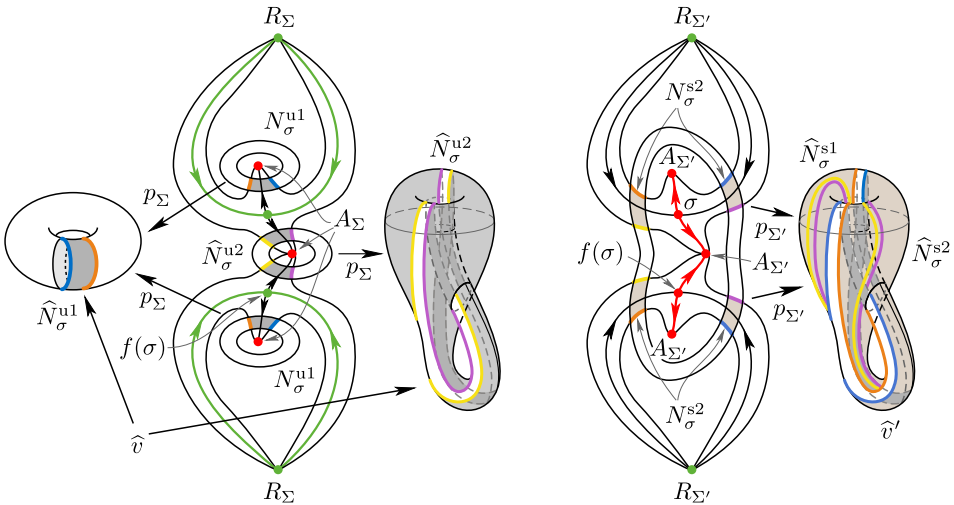


Рис. 6. Иллюстрация к случаю 1б)

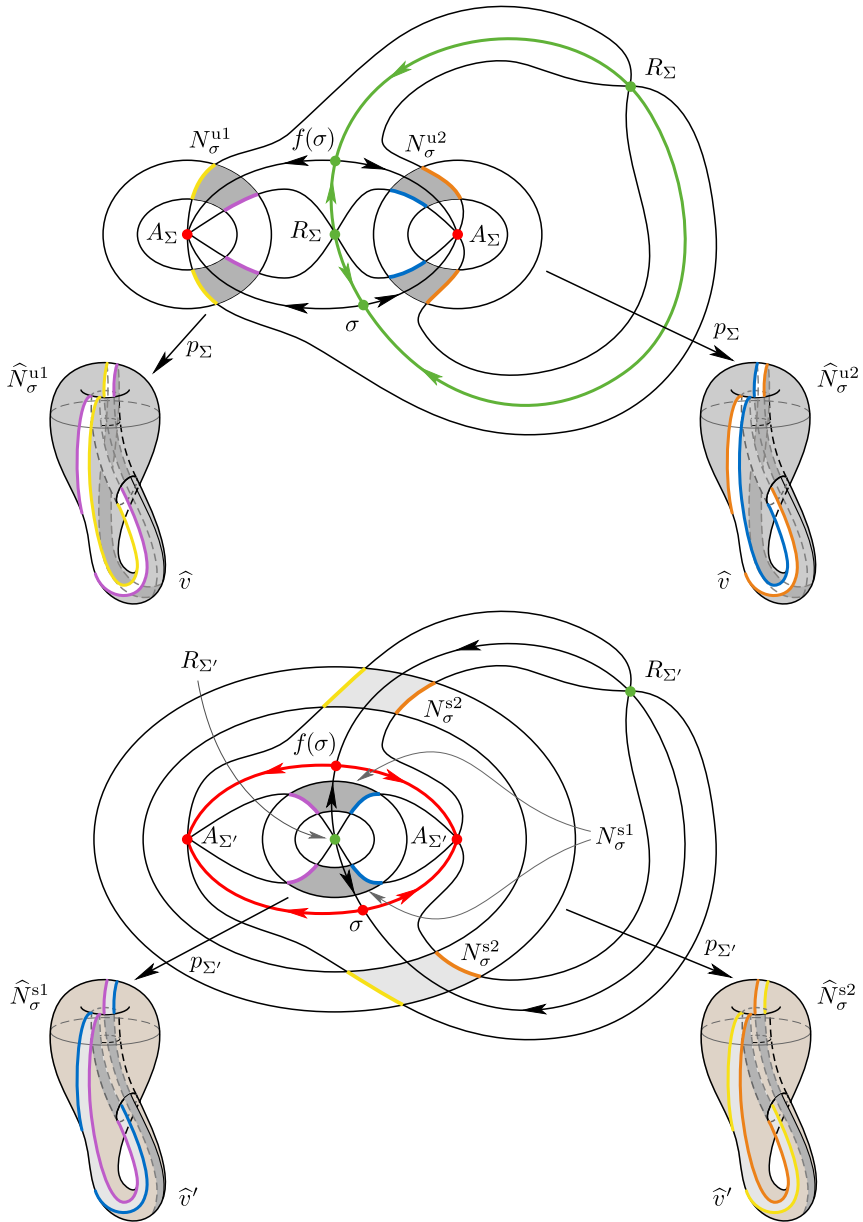


Рис. 7. Иллюстрация к случаю 1с)

б) Пусть \widehat{v} – дизъюнктивное объединение тора \widehat{v}_1 и бутылки Клейна \widehat{v}_2 . Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}_1$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}_2$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^{u1} вложено в тор \widehat{v}_1 так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u1})) \neq \{0\}$, и, следовательно, множество $\widehat{v}_1 \setminus \widehat{N}_\sigma^{u1}$ гомеоморфно кольцу. Аналогично кольцо \widehat{N}_σ^{u2} вложено в бутылку Клейна \widehat{v}_2 так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u2})) = 2\mathbb{Z}$ и входит в класс гомологии $(2, 0)$, значит, множество $\widehat{v}_2 \setminus \widehat{N}_\sigma^{u2}$

гомеоморфно двум лентам Мёбиуса. Тогда при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к кольцу $\widehat{v}_1 \setminus \widehat{N}_\sigma^{u1}$ и паре лент Мёбиуса $\widehat{v}_2 \setminus \widehat{N}_\sigma^{u2}$ в силу отображения перестройки получится бутылка Клейна \widehat{v}' (рис. 6).

с) Пусть \widehat{v} – дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна \widehat{v}_1 и \widehat{v}_2 . Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}_1$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}_2$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложено в бутылку Клейна \widehat{v}_i так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) = 2\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(2, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v}_i \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно паре лент Мёбиуса. Тогда при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к двум парам лент Мёбиуса $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится дизъюнктное объединение двух бутылок Клейна \widehat{v}' (рис. 7).

д) Пусть \widehat{v} – тор. Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложено в тор \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) \neq \{0\}$, и, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно паре колец. Тогда при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к паре колец $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится дизъюнктное объединение двух торов \widehat{v}' (рис. 8).

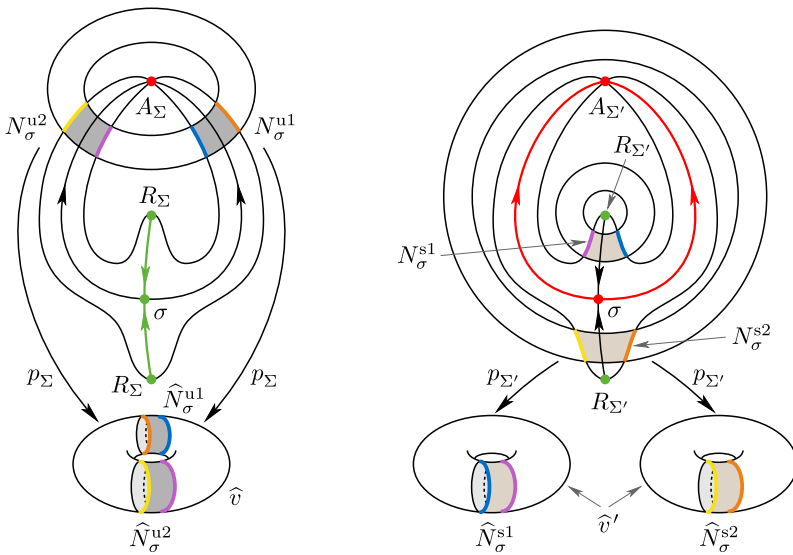


Рис. 8. Иллюстрация к случаю 1д)

е) Пусть \widehat{v} – бутылка Клейна. Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложено в бутылку Клейна \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) = 2\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(2, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно паре лент Мёбиуса и кольцу. Тогда при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к двум парам лент Мёбиуса и кольцу $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится дизъюнктное объединение тора и бутылки Клейна \widehat{v}' (рис. 9).

ф) Пусть \widehat{v} – тор. Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложено в тор \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) \neq \{0\}$, и, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно паре колец. В случае, когда M^2 – неориентируемая поверхность, при приклеивании пары колец \widehat{N}_σ^s к паре колец $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится тор \widehat{v}' (рис. 10).

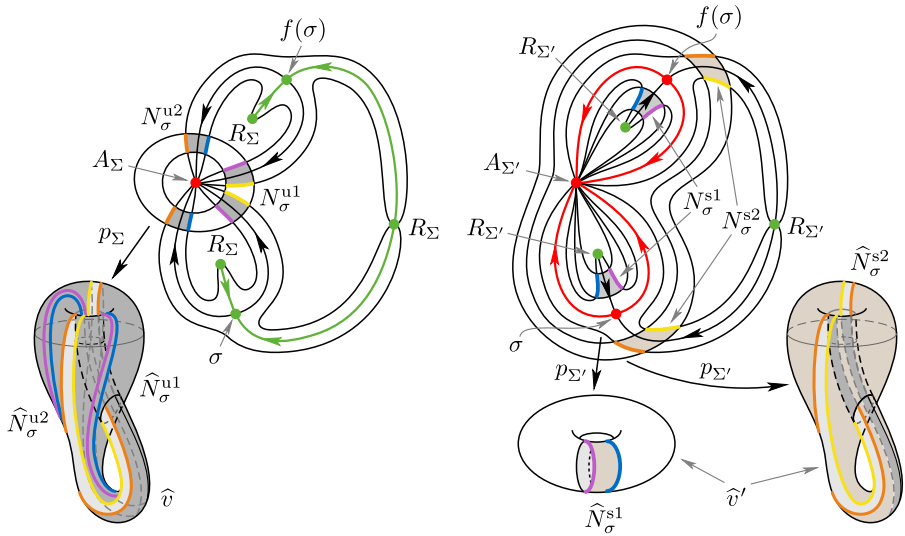


Рис. 9. Иллюстрация к случаю 1e)

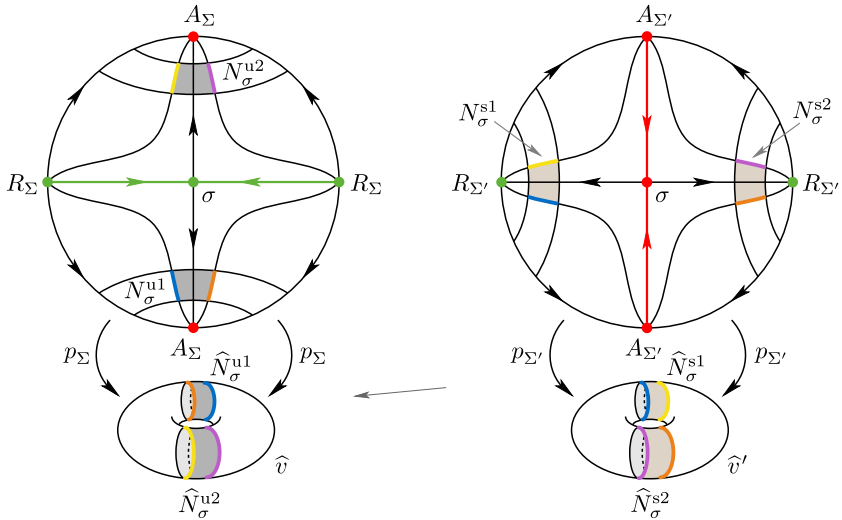


Рис. 10. Иллюстрация к случаю 1f)

2. Пусть $\varsigma_\sigma = (-1, +1)$, тогда в силу предложения 4 множества \widehat{N}_σ^u и \widehat{N}_σ^s гомеоморфны паре лент Мёбиуса и кольцу соответственно. Откуда следует, что компоненты связности, которые содержат \widehat{N}_σ^u , могут быть только одной или двумя бутылками Клейна, а содержащие \widehat{N}_σ^s – тором или бутылкой Клейна. Рассмотрим все возможности.

а) Пусть \widehat{v} – дизъюнктивное объединение двух бутылки Клейна \widehat{v}_1 и \widehat{v}_2 . Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}_1$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}_2$. В силу предложения 4 лента Мёбиуса \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложена в бутылку Клейна \widehat{v}_i так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) = 1\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(1, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v}_i \setminus \widehat{N}_\sigma^{ui}$ гомеоморфно ленте Мёбиуса. Тогда

при приклеивании кольца \widehat{N}_σ^s к паре лент Мёбиуса $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится бутылка Клейна \widehat{v}' (рис. 11).

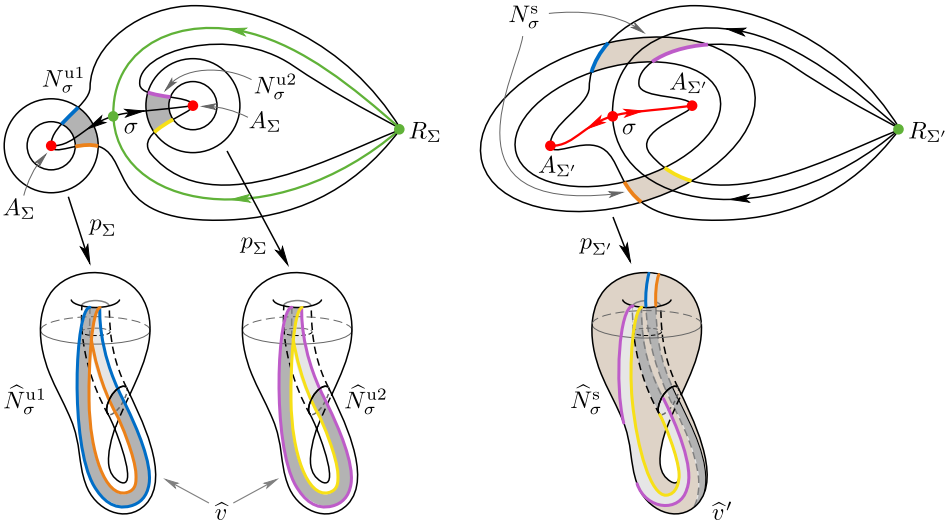


Рис. 11. Иллюстрация к случаю 2а)

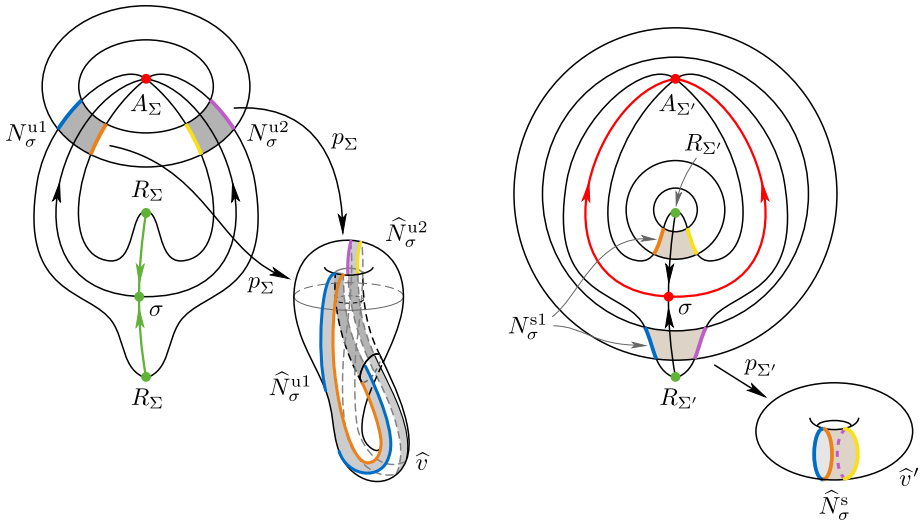


Рис. 12. Иллюстрация к случаю 2б)

б) Пусть \widehat{v} – бутылка Клейна. Тогда $\widehat{N}_\sigma^{u1} \subset \widehat{v}$ и $\widehat{N}_\sigma^{u2} \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 лента Мёбиуса \widehat{N}_σ^{ui} , $i = 1, 2$, вложена в бутылку Клейна \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{ui})) = 1\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(1, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ гомеоморфно кольцу. Тогда при приклеивании кольца \widehat{N}_σ^s к кольцу $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится тор \widehat{v}' (рис. 12).

3. Пусть $\varsigma_\sigma = (+1, -1)$, тогда в силу предложения 4 множества \widehat{N}_σ^u гомеоморфно кольцу и \widehat{N}_σ^s гомеоморфно паре лент Мёбиуса. Откуда следует, что компоненты связности, которые содержат \widehat{N}_σ^u , могут быть тором или бутылкой Клейна, а содержащие \widehat{N}_σ^s могут быть только бутылками Клейна.

а) Пусть \widehat{v} – тор, тогда $\widehat{N}_\sigma^u \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^u вложено в тор \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^{u1})) \neq \{0\}$, и, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ гомеоморфно кольцу. Тогда при приклеивании пары лент Мёбиуса \widehat{N}_σ^s к кольцу $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится бутылка Клейна \widehat{v}' (рис. 13).

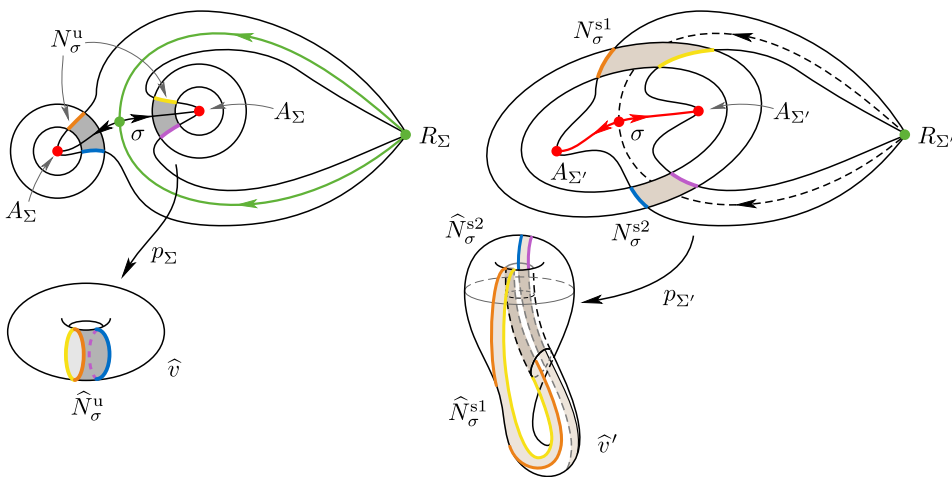


Рис. 13. Иллюстрация к случаю 3а)

б) Пусть \widehat{v} – бутылка Клейна, тогда $\widehat{N}_\sigma^u \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^u вложено в бутылку Клейна \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^u)) = 2\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(2, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ гомеоморфно паре лент Мёбиуса. Тогда при приклеивании пары лент Мёбиуса \widehat{N}_σ^s к паре лент Мёбиуса $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится дизъюнктивное объединение двух бутылок Клейна \widehat{v}' (рис. 14).

4. Пусть $\varsigma_\sigma = (-1, -1)$, тогда в силу предложения 4 множества \widehat{N}_σ^u и \widehat{N}_σ^s гомеоморфны парам колец. Откуда следует, что компонента связности множества \widehat{v} может быть как тором, так и бутылкой Клейна. Рассмотрим все возможности.

а) Пусть \widehat{v} – бутылка Клейна, тогда $\widehat{N}_\sigma^u \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^u вложено в бутылку Клейна \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^u)) = 2\mathbb{Z}$, и входит в класс гомологии $(2, 0)$, следовательно, множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ гомеоморфно паре лент Мёбиуса. Тогда при приклеивании кольца \widehat{N}_σ^s к паре лент Мёбиуса $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится бутылка Клейна \widehat{v}' (рис. 15).

б) Пусть \widehat{v} – тор, тогда $\widehat{N}_\sigma^u \subset \widehat{v}$. В силу предложения 4 кольцо \widehat{N}_σ^u вложено в тор \widehat{v} так, что $\eta_\Sigma(\pi_1(\widehat{N}_\sigma^u)) \neq \{0\}$, и, следовательно (см., например, [14]),

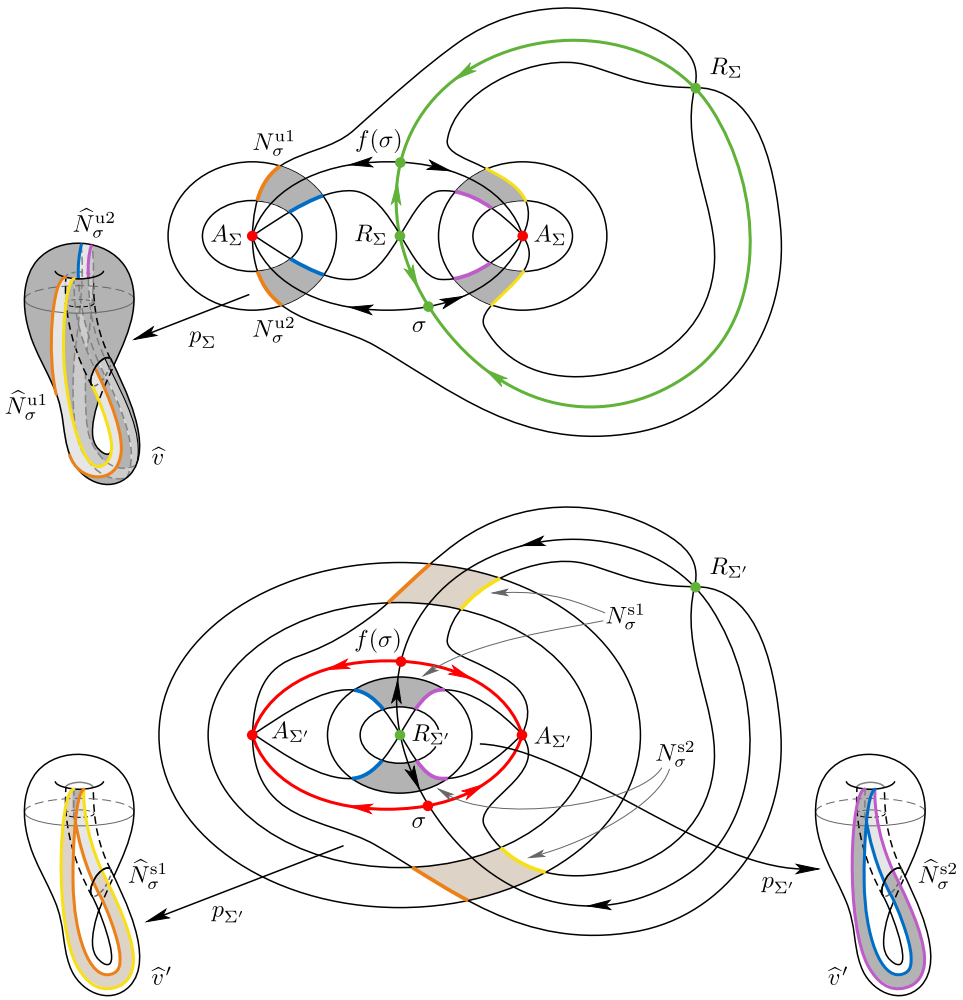


Рис. 14. Иллюстрация к случаю 3б)

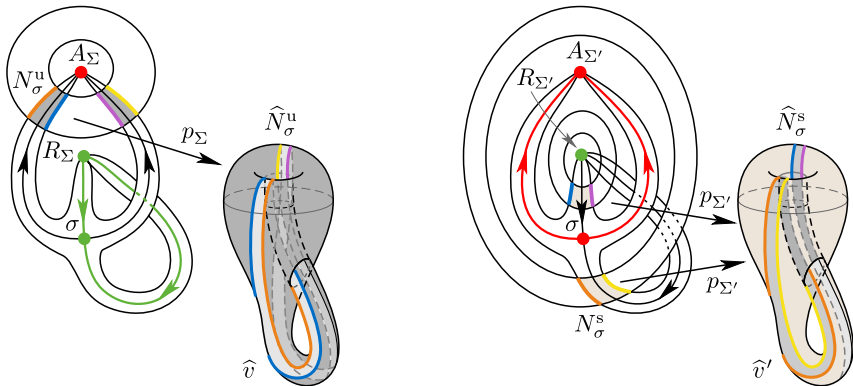


Рис. 15. Иллюстрация к случаю 4а)

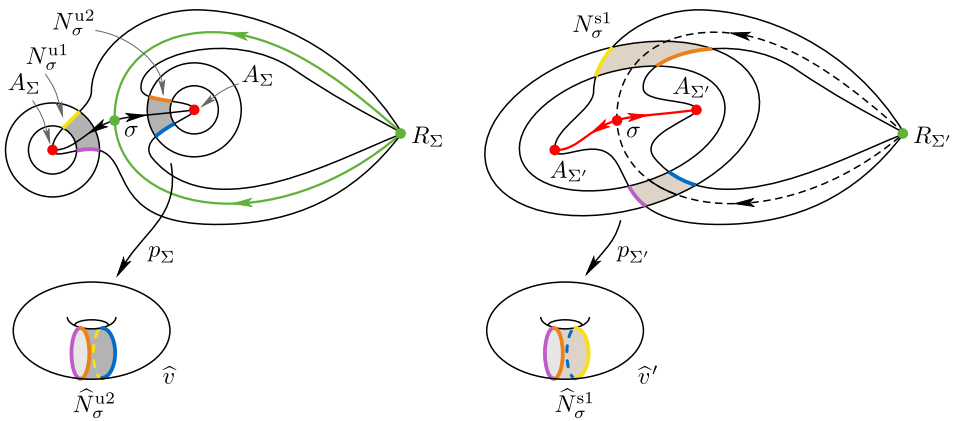


Рис. 16. Иллюстрация к случаю 4b)

множество $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ гомеоморфно кольцу. Тогда при приклеивании кольца \widehat{N}_σ^s к кольцу $\widehat{v} \setminus \widehat{N}_\sigma^u$ в силу отображения перестройки получится тор \widehat{v}' (рис. 16).

Лемма доказана.

§ 5. Критерий существования связного характеристического пространства орбит у градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности

В данном параграфе мы приведем доказательство теоремы 1. Докажем, что градиентно-подобный диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ обладает связным характеристическим пространством орбит тогда и только тогда, когда его граф Γ_f обладает связным специальным подграфом $\bar{\Gamma}_f$. При этом пространство орбит гомеоморфно тору, если $\bar{\Gamma}_f = \emptyset$, и гомеоморфно бутылке Клейна в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – градиентно-подобный диффеоморфизм, обладающий связным характеристическим пространством орбит \widehat{V}_Σ . Обозначим через $\Gamma_\Sigma \subset \Gamma_f$ подграф, геометрически совпадающий с аттрактором A_Σ . Покажем, что граф Γ_Σ обладает связным специальным подграфом.

Предположим противное: пусть граф Γ_Σ не обладает связным специальным подграфом. Тогда существуют различные стоковые орбиты $\mathcal{O}_{\omega_1}, \mathcal{O}_{\omega_2} \subset \bar{\Omega}_f^0$ такие, что любой путь, соединяющий точку орбиты \mathcal{O}_{ω_1} с точкой орбиты \mathcal{O}_{ω_2} в графе Γ_Σ , проходит через вершины, не принадлежащие множеству $\bar{\Omega}_f^0 \cup \bar{\Omega}_f^1$. Обозначим через $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$ объединение всех седловых орбит, имеющих не пустое пересечение с такими путями, и через $A_{\widetilde{\Sigma}} \subset A_\Sigma$ – соответствующий аттрактор. По определению пространство орбит $\widehat{V}_{\widetilde{\Sigma}}$ бассейнов стоков состоит из торов и бутылок Клейна, а характеристическое пространство $\widehat{V}_{\widetilde{\Sigma}}$ получается из него перестройкой вдоль проекций неустойчивых сепаратрис седловых то-

чек множества $\tilde{\Sigma}$. Тогда из определения множества $\tilde{\Sigma}$ и леммы 1 следует, что пространство $\widehat{V}_{\tilde{\Sigma}}$ не связно. Характеристическое пространство \widehat{V}_{Σ} получается из пространства $\widehat{V}_{\tilde{\Sigma}}$ перестройкой вдоль проекций неустойчивых сепаратрис седловых точек множества $\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$. Поскольку замыкания этих сепаратрис не связывают точки орбиты \mathcal{O}_{ω_1} с точками орбиты \mathcal{O}_{ω_2} , то пространство орбит \widehat{V}_{Σ} не связно, что противоречит предположению о его связности.

Достаточность. Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – градиентно-подобный диффеоморфизм такой, что его граф Γ_f обладает связным специальным подграфом $\bar{\Gamma}_f$. Построим связное характеристическое пространство орбит \widehat{V}_{Σ} для диффеоморфизма f .

Положим $\Sigma_0 = \emptyset$, что означает отсутствие седловых точек и их орбит в аттракторе. Обозначим через $\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_l$ компоненты связности пространства \widehat{V}_{Σ_0} . Если $l = 1$, то $\Sigma = \Sigma_0$. В противном случае согласно предложению 1 каждая компонента связности \widehat{V}_i является тором или бутылкой Клейна. Пусть $\widehat{V}_1, \dots, \widehat{V}_{l_1}$ – бутылки Клейна, не соответствующие стокам множества $\bar{\Omega}_f^0$, $\widehat{V}_{l_1+1}, \dots, \widehat{V}_{l_1+l_2}$ – бутылки Клейна, соответствующие стокам множества $\bar{\Omega}_f^0$, и $\widehat{V}_{l_1+l_2+1}, \dots, \widehat{V}_{l_1+l_2+l_3}$ – торы.

Добавим к множеству Σ_0 седловые точки σ типа ориентации $\zeta_{\sigma} = (-1, +1)$, чьи неустойчивые многообразия образуют петли у стоковых точек, которым соответствуют бутылки Клейна. Мы получим множество Σ_1 , при этом согласно лемме 1 пространство \widehat{V}_{Σ_1} также состоит из l компонент связности $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{l_1}, \widehat{V}_{l_1+1}, \dots, \widehat{V}_{l_1+l_2}, \widehat{V}_{l_1+l_2+1}, \dots, \widehat{V}_{l_1+l_2+l_3}$, первые l_1 из которых торы.

Добавим к множеству Σ_1 седловые точки специального подграфа, получим множество Σ_2 и пространство \widehat{V}_{Σ_2} , состоящее согласно лемме 1 из $l_1 + 1 + l_3$ компонент связности $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{l_1}, \tilde{V}_*, \widehat{V}_{l_1+l_2+1}, \dots, \widehat{V}_{l_1+l_2+l_3}$, где \tilde{V}_* – бутылка Клейна.

Рассмотрим в связном графе Γ_f путь, соединяющий две компоненты связности пространства орбит \widehat{V}_{Σ_2} . Согласно лемме 1 данный путь может состоять из седловых точек типа ориентации только $(+1, +1)$, которые связывают $l_1 + 1 + l_3$ компонент связности множеств $p_{\Sigma_2}^{-1}(\tilde{V}_1), \dots, p_{\Sigma_2}^{-1}(\tilde{V}_{l_1}), p_{\Sigma_2}^{-1}(\tilde{V}_*), p_{\Sigma_2}^{-1}(\widehat{V}_{l_1+l_2+1}), \dots, p_{\Sigma_2}^{-1}(\widehat{V}_{l_1+l_2+l_3})$, взятых по одной из каждого множества. Добавив эти седла к множеству Σ_2 , мы получим множество Σ и связное пространство \widehat{V}_{Σ} , являющееся согласно лемме 1 тором, если $l_2 = 0$ и бутылкой Клейна в противном случае. Теорема доказана.

§ 6. Конструктивное доказательство теоремы 2

В настоящем параграфе на произвольной поверхности мы построим градиентно-подобный диффеоморфизм, имеющий различные стоки с отрицательными типами ориентации, связанные неустойчивыми многообразиями седловых точек только с положительным типом ориентации. В силу теоремы 1 отсюда будет следовать отсутствие связного характеристического пространства орбит у такого диффеоморфизма. Искомый диффеоморфизм будет строиться как

связная сумма элементарных диффеоморфизмов на поверхностях рода, не превышающего единицы. Ниже мы описываем операцию взятия связной суммы диффеоморфизмов и конструкцию элементарных отображений.

6.1. Связная сумма диффеоморфизмов. Пусть $f_i: M_i^2 \rightarrow M_i^2, i = 1, 2,$ – градиентно-подобный диффеоморфизм, заданный на замкнутой поверхности M_i^2 рода g_i . Обозначим через $\dot{M}_1^2 = M_1^2 \setminus \omega$ и $\dot{M}_2^2 = M_2^2 \setminus \alpha$. Пусть ω – неподвижный сток диффеоморфизма f_1 , и α – неподвижный источник диффеоморфизма f_2 такие, что $(W_\omega^s \setminus \omega)/f_1 \cong (W_\alpha^u \setminus \alpha)/f_2$. Тогда существует диффеоморфизм $\nu: W_\omega^s \setminus \omega \rightarrow W_\alpha^u \setminus \alpha$, сопрягающий диффеоморфизмы f_1 и f_2 . Положим $M^2 = \dot{M}_1^2 \cup_\nu \dot{M}_2^2$, и обозначим через $\zeta: \dot{M}_1^2 \sqcup \dot{M}_2^2 \rightarrow M^2$ естественную проекцию. По построению $M^2 \cong M_1^2 \# M_2^2$. Будем называть диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$, заданный формулой

$$f = \begin{cases} \zeta f_1 \zeta^{-1}|_{\zeta(\dot{M}_1^2)} & \text{на } \zeta(\dot{M}_1^2), \\ \zeta f_2 \zeta^{-1}|_{\zeta(\dot{M}_2^2)} & \text{на } \zeta(\dot{M}_2^2), \end{cases}$$

связной суммой вдоль стока ω и источника α диффеоморфизмов f_1 и f_2 . Будем обозначать такой диффеоморфизм через $f = f_1 \# f_2$ и называть ν связывающим отображением.

6.2. Построение элементарных диффеоморфизмов.

6.2.1. Диффеоморфизм ϕ на сфере S^2 . Введем на плоскости \mathbb{R}^2 полярные координаты (r, φ) . Обозначим через $\varrho(r)$ функцию, заданную графиком, изображенным на рис. 17.

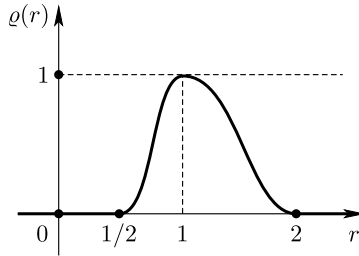
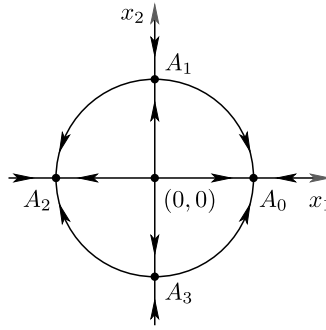


Рис. 17. График функции ϱ

Определим на плоскости \mathbb{R}^2 векторное поле с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \begin{cases} -r(r-1), & 0 \leq r \leq 1, \\ 1-r, & r > 1, \end{cases} \\ \dot{\varphi} &= -\varrho(r) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Обозначим через χ^t поток, индуцированный этим векторным полем, и обозначим через χ диффеоморфизм, который является сдвигом потока χ^t за единицу

Рис. 18. Фазовый портрет диффеоморфизма χ

времени. Полученный диффеоморфизм имеет гиперболический источник в начале координат O , гиперболические седла в точках A_1, A_3 и гиперболические стоки в точках A_0, A_2 (рис. 18).

Определим диффеоморфизм $\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ следующим образом: $\theta(r, \varphi) = (r, -\varphi)$. Зададим диффеоморфизм $\bar{\phi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\bar{\phi} = \theta \circ \chi.$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма $\bar{\phi}$ совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма χ . Рассмотрим стандартную двумерную сферу

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Обозначим через $S(0, 0, -1)$ южный полюс и определим стереографическую проекцию $\vartheta: \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\vartheta(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right).$$

Определим диффеоморфизм $\phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ формулой

$$\phi(s) = \begin{cases} \vartheta^{-1} \circ \bar{\phi} \circ \vartheta(s), & s \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \\ S, & s = S. \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм ϕ является градиентно-подобным диффеоморфизмом 2-сферы со следующим неблуждающим множеством (рис. 19):

- неподвижные источниковые точки в полюсах – в северном $\alpha_1 = \vartheta^{-1}(O)$ и южном $\alpha_2 = S$,
- два неподвижных стока и седловая орбита периода 2 на экваторе – орбита седла $\mathcal{O}_\sigma = \{\vartheta^{-1}(A_1), \vartheta^{-1}(A_3)\}$, два неподвижных стока $\omega_0 = \vartheta^{-1}(A_0)$ и $\omega_1 = \vartheta^{-1}(A_2)$.

Для диффеоморфизма ϕ существуют две возможности выбора множества Σ (рис. 19). Так как по построению седловая орбита имеет положительный тип ориентации, то в обоих случаях характеристическое пространство орбит \widehat{V}_Σ согласно лемме 1 (случай 1, с)) состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна бутылке Клейна.

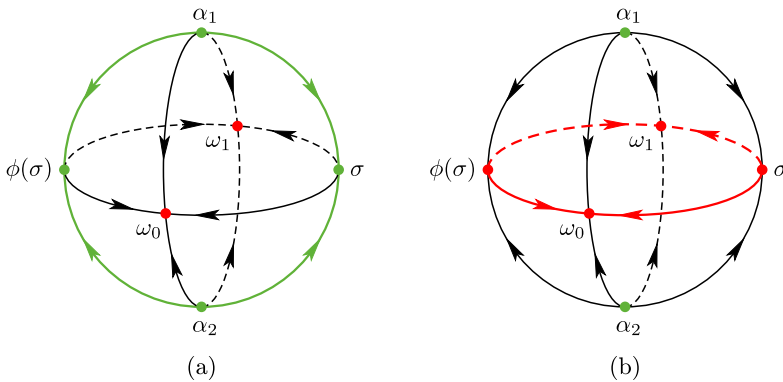


Рис. 19. Две возможности выбора множества Σ : (a) $\Sigma = \emptyset$; (b) $\Sigma = \mathcal{O}_\sigma$

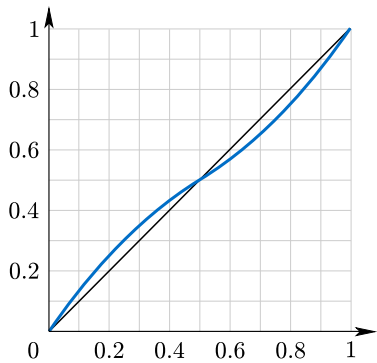


Рис. 20. График отображения \bar{F}

6.2.2. Диффеоморфизм ψ_1 на торе \mathbb{T}^2 . Построим диффеоморфизм ψ_1 на двумерном торе \mathbb{T}^2 как прямое произведение двух сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов источник–сток на окружности \mathbb{S}^1 . Для этого рассмотрим функцию $\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (рис. 20), заданную формулой

$$\bar{F}(x) = x + \frac{1}{6\pi} \sin 2\pi x.$$

Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, заданную формулой $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. В силу того, что функция \bar{F} является строго монотонно возрастающей и удовлетворяет условию $\bar{F}(x + 1) = \bar{F}(x) + 1$, она допускает проекцию на окружность в виде диффеоморфизма $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, заданного формулой

$$F(z) = \pi \bar{F} \pi^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{S}^1.$$

По построению диффеоморфизм F имеет неподвижные гиперболические сток и источник и является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом источник–сток. Определим диффеоморфизм $F_1: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ формулой

$$F_1(z, w) = (F(z), F(w)), \quad z, w \in \mathbb{S}^1.$$

Тогда диффеоморфизм F_1 сохраняет ориентацию, причем его неблуждающее множество состоит из четырех неподвижных точек: источника α положительного типа ориентации ($\varsigma_\alpha = +1$), стока ω положительного типа ориентации ($\varsigma_\omega = +1$) и двух седел σ_1, σ_2 положительного типа ориентации (рис. 21).

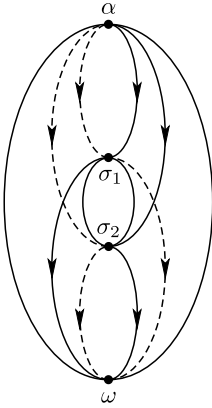


Рис. 21. Диффеоморфизм F_1

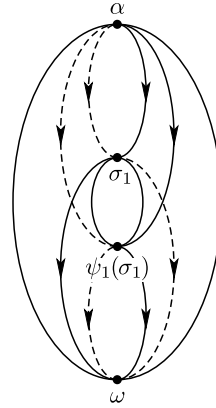


Рис. 22. Диффеоморфизм ψ_1

Представим двумерный тор \mathbb{T}^2 как факторгруппу группы \mathbb{R}^2 по целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 : $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ и заданный ей алгебраический автоморфизм тора $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$:

$$\hat{A}(x, y) = (y, x) \pmod{1}.$$

Положим

$$\psi_1 = \hat{A} \circ F_1: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

По построению диффеоморфизм ψ_1 является меняющим ориентацию градиентно-подобным диффеоморфизмом, чье неблуждающее множество состоит из источника α и стока ω отрицательных типов ориентации ($\varsigma_\alpha = \varsigma_\omega = -1$), а также периодической седловой орбиты $\mathcal{O}_{\sigma_1} = \{\sigma_1, \psi_1(\sigma_1)\}$ периода 2 и типа ориентации $\varsigma_{\sigma_1} = (+1, +1)$ (рис. 22):

$$\Omega_{\psi_1} = \{\alpha, \omega, \sigma_1, \psi_1(\sigma_1)\}.$$

6.2.3. Диффеоморфизм $\tilde{\psi}_1$ на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Рассмотрим диффеоморфизм $\phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, заданный в подпункте 6.2.1 и группу $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$, действующую на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ следующим образом:

$$\pm 1 \cdot x = \pm x, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2.$$

Тогда пространство орбит действия группы \mathbb{Z}_2 на \mathbb{S}^2 – это проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Пусть $p: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ – естественная проекция. Поскольку $\phi(-x) = -\phi(x)$, то формула

$$\tilde{\psi}_1(x) = p \circ \phi \circ p^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}P^2,$$

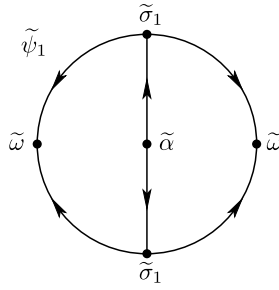


Рис. 23. Диффеоморфизм $\tilde{\psi}_1$

корректно определяет диффеоморфизм $\tilde{\psi}_1: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ с неблуждающим множеством $\Omega_{\tilde{\psi}_1} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}, \tilde{\sigma}_1\}$ (рис. 23).

6.3. Построение диффеоморфизмов на поверхности любого рода.

6.3.1. *Диффеоморфизмы на ориентируемых поверхностях.* Построим на любой ориентируемой поверхности M^2 рода g меняющий ориентацию диффеоморфизм f_g , не обладающий связным характеристическим пространством орбит.

Рассмотрим построенные в предыдущем пункте диффеоморфизмы ϕ, ψ_1 . Пусть $f_1 = \phi \# \psi_1: \mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2$ – связная сумма вдоль стока ω_0 диффеоморфизма ϕ и источника α диффеоморфизма ψ_1 . Поскольку седловые сепаратрисы L_{ω_0} в бассейне стока ω_0 имеют период два, как и седловые сепаратрисы L_α в бассейне источника α , то связывающий диффеоморфизм $\nu: W_{\omega_0}^s \setminus \omega_0 \rightarrow W_\alpha^u \setminus \alpha$ можно выбрать так, что $\nu(L_{\omega_0}) \cap L_\alpha = \emptyset$. Таким образом, $f_1: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – меняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм в точности с двумя стоками ω_1, ω . При этом каждое из пространств орбит $\widehat{V}_{\omega_1}, \widehat{V}_\omega$ гомеоморфно бутылке Клейна, седло σ имеет тип ориентации $\zeta_\sigma = (+1, +1)$, а неустойчивые сепаратрисы седел $\sigma, f_1(\sigma)$ – единственные неустойчивые сепаратрисы, лежащие в бассейне стока ω_1 (рис. 24).

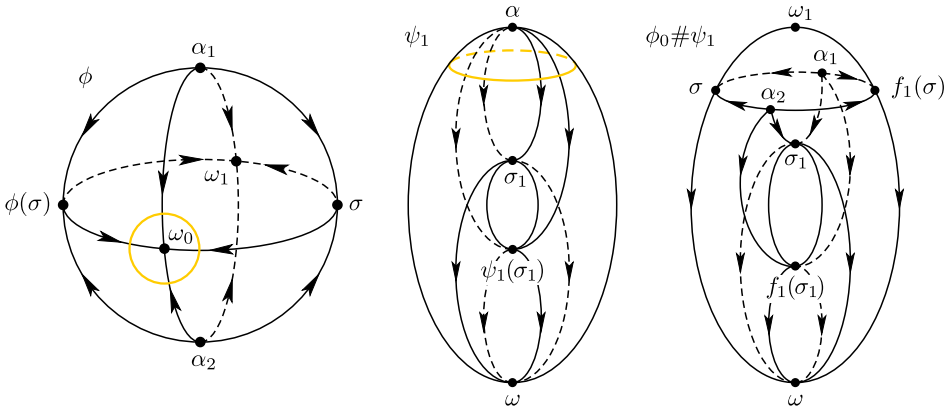


Рис. 24. Диффеоморфизм f_1

По индукции строится диффеоморфизм f_g на ориентируемой поверхности рода $g \geq 2$ как связная сумма диффеоморфизмов ψ_g и ϕ ($f_g = \psi_g \# \phi$) вдоль стока ω_0 диффеоморфизма ϕ и источника α диффеоморфизма ψ_g (рис. 25). Аналогично, так как седловые сепаратрисы L_{ω_0} в бассейне стока ω_0 имеют период два, как и седловые сепаратрисы L_α в бассейне источника α , то связывающий диффеоморфизм $\nu: W_{\omega_0}^s \setminus \omega_0 \rightarrow W_\alpha^u \setminus \alpha$ можно выбрать так, что $\nu(L_{\omega_0}) \cap L_\alpha = \emptyset$. Таким образом, f_g – меняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм в точности с двумя стоками ω_1, ω отрицательного типа ориентации.

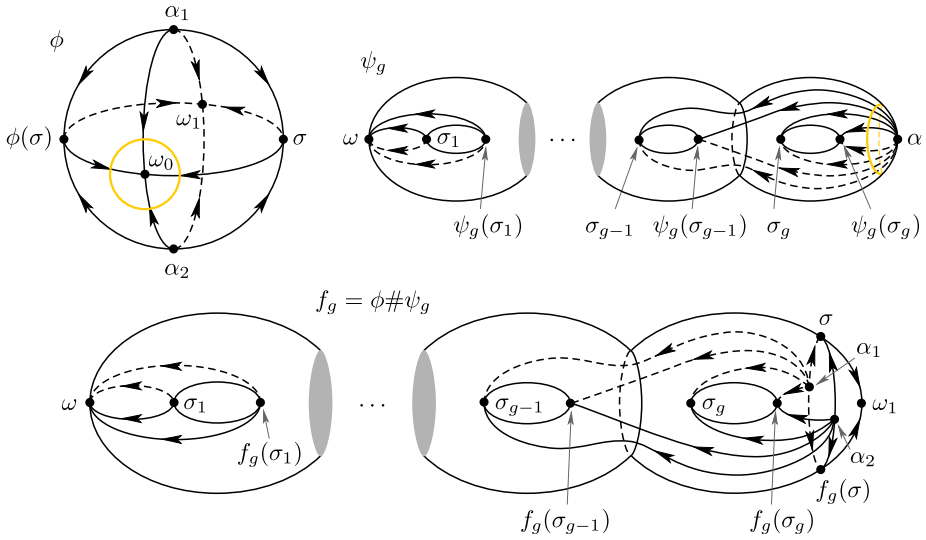


Рис. 25. Диффеоморфизм f_g

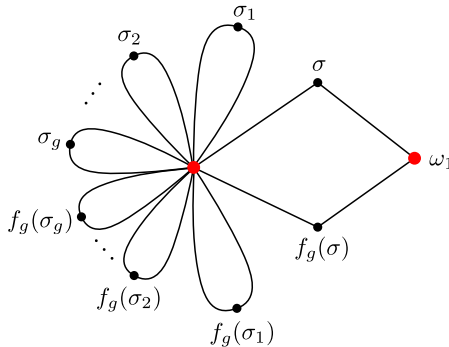


Рис. 26. Граф Γ_{f_g}

Покажем, что диффеоморфизм f_g не имеет связного характеристического пространства орбит. Для этого рассмотрим Γ_{f_g} (рис. 26). Поскольку множество седловых точек $\bar{\Omega}_f^1 = \emptyset$, а $\bar{\Omega}_f^0 = \omega \cup \omega_1$, то специальный подграф $\bar{\Gamma}_{f_g}$ состоит в точности из двух вершин (обозначающих стоковые точки ω, ω_1).

Таким образом, граф $\bar{\Gamma}_{f_g}$ не является связным, значит, согласно теореме 1 характеристическое пространство орбит также не связно.

6.3.2. *Диффеоморфизмы на неориентируемых поверхностях.* Построим на любой неориентируемой поверхности M^2 рода q градиентно-подобный диффеоморфизм \tilde{f}_q , не обладающий связным характеристическим пространством орбит.

Определим диффеоморфизм $\tilde{f}_1: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ как связную сумму диффеоморфизмов ϕ и $\tilde{\psi}_1$ ($\tilde{f}_1 = \phi \# \tilde{\psi}_1$) вдоль стока ω_0 диффеоморфизма ϕ и источника $\tilde{\alpha}$ диффеоморфизма $\tilde{\psi}_1$ (рис. 27). Поскольку седловые сепаратрисы L_{ω_0} в бассейне стока ω_0 имеют период два, а седловые сепаратрисы $L_{\tilde{\alpha}}$ в бассейне источника $\tilde{\alpha}$ имеют период один, то связывающий диффеоморфизм $\nu: W_{\omega_0}^s \setminus \omega_0 \rightarrow W_{\tilde{\alpha}}^u \setminus \tilde{\alpha}$ можно выбрать так, что $\nu(L_{\omega_0}) \cap L_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$.

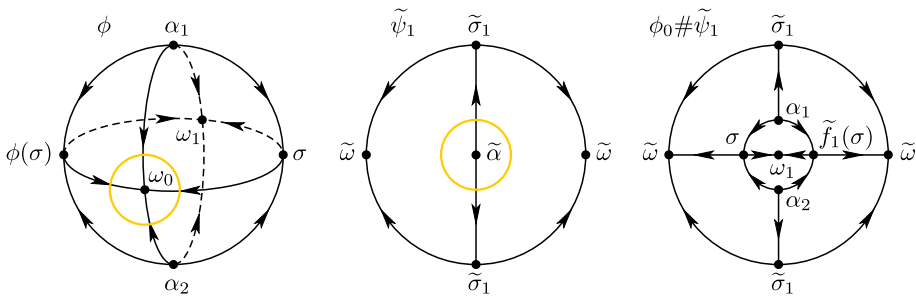


Рис. 27. Связная сумма диффеоморфизмов ϕ и $\tilde{\psi}_1$

По индукции строится диффеоморфизм \tilde{f}_q на неориентируемой поверхности рода q как гладкая связная сумма диффеоморфизмов ϕ и $\tilde{\psi}_q$ ($\tilde{f}_q = \tilde{\psi}_q \# \phi$) вдоль стока ω_0 диффеоморфизма ϕ и источника $\tilde{\alpha}$ диффеоморфизма $\tilde{\psi}_q$. Рассуждениями, аналогичными приведенным в подпункте 6.3.1, показывается, что диффеоморфизм \tilde{f}_q не имеет связного характеристического пространства орбит.

Список литературы

1. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **271**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 111–133; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 103–124.
2. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
3. C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.
4. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

5. V. Z. Grines, E. A. Gurevich, O. V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **208**:1 (2015), 81–90.
6. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, D. Malyshev, “On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n ($n > 3$)”, *Nonlinearity*, **33**:12 (2020), 7088–7113.
7. D. Malyshev, A. Morozov, O. Pochinka, “Combinatorial invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic”, *Chaos*, **31**:2 (2021), 023119, 17 pp.
8. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *УМН*, **74**:1(445) (2019), 41–116; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **74**:1 (2019), 37–110.
9. Е. В. Ноздринова, “Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Журнал СВМО*, **19**:2 (2017), 91–97.
10. Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Transl. from the Portuguese, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.
11. Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, М., 1983, 304 с.; пер. с англ.: С. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980, viii+269 pp.
12. В. З. Гринес, С. Х. Капкаева, О. В. Починка, “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 19–46; англ. пер.: V. Z. Grines, S. Kh. Kapkaeva, O. V. Pochinka, “A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1387–1412.
13. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
14. D. Rolfsen, *Knots and links*, Reprint with corr. of the 1976 original, AMS Chelsea Publ. Ser., **346**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, ix+439 pp.

ЕЛЕНА ВЯЧЕСЛАВОВНА НОЗДРИНОВА
(ELENA V. NOZDRINOVA)

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: maati@mail.ru

Поступило в редакцию
04.05.2022

03.08.2023

ОЛЬГА ВИТАЛЬЕВНА ПОЧИНКА
(OLGA V. POCHINKA)

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

ЕКАТЕРИНА ВАДИМОВНА ЦАПЛИНА
(EKATERINA V. TSAPLINA)

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: ktsaplina11@mail.ru