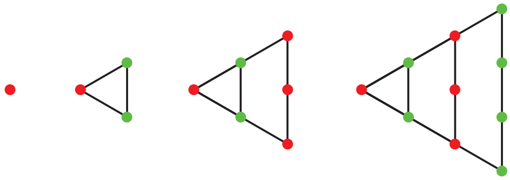
Когда фигурные числа совпадают

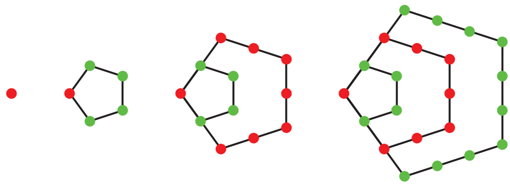
Фигурными числами в математике называются числа, связанные с геометрическими образами.

Возьмем n точек. Если их удастся расположить в виде равностороннего треугольника, то такое n называется треугольным.

Вот первые треугольные числа: 1, 3, 6, 10,… и их геометрическая интерпретация:



Похожим образом получается последовательность пятиугольных чисел 1, 5, 12, 22,…, имеющая следующую геометрическую интерпретацию:



Каждый раз мы добавляем точки очередного слоя так, чтобы получался пятиугольник со стороной на 1 больше.

Аналогично определяются k-угольные числа для произвольного k. Подробнее о k-угольных числах можно прочитать в статье А.Бендукидзе «Фигурные числа» («Квант» №8 за 1974 г.). Там же можно найти явную формулу для n-го k-угольного числа F_n^k:

$$F_n^k = \frac{n\big((k-2)n-(k-4)\big)}{2}.$$

Зададимся вопросом, могут ли совпадать k-угольные числа для разных k. Например, могут ли треугольные числа являться квадратными?

На языке алгебры эта задача формулируется так: найти решения в целых числах уравнения

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2.$$

Выделяя полный квадрат, приходим к уравнению $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$, которое после замены сводится к уравнению Пелля:

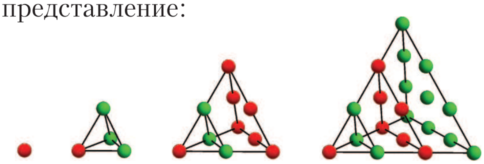
$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Вот первые несколько квадратых чисел, которые являются треугольными: 1, 36, 1225, 41616,… Эта задача была решена еще Эйлером.

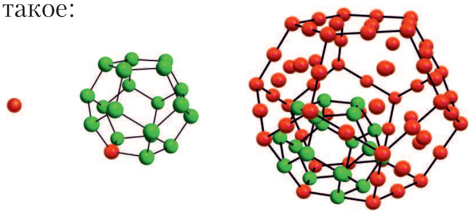
В общем случае задача отыскания чисел, которые являются одновременно и k-угольными, и l-угольными, сводится к решению в целых числах уравнений вида $ax^2 - by^2 = c$. Такие уравнения хорошо изучены, есть алгоритмы их решения.

В случае пространственных фигурных чисел получаются уравнения выше второй степени; таким образом, задача сильно усложняется.

Пространственные фигурные числа определяются аналогично плоским. Например, тетраэдральные числа 1, 4, 10, 20,… имеют следующее геометрическое представление:



А додекаэдральные числа 1, 20, 84,… такое:



Снова каждый следующий слой точек получается из предыдущего увеличением ребра многогранника на 1. На гранях n-го слоя точки образуют n-е двумерное k-угольное число с k, равным числу углов грани.

Интересную историю имеет задача об отыскании чисел, которые могут быть представлены одновременно и в виде пирамиды с квадратным основанием, и в виде квадрата. Эта сложная задача известна как задача о пушечных ядрах. Оказывается, ее единственным решением, кроме очевидного решения $n = 1$, является $n = 70^2$.

Рассмотрим, когда кубическое число является треугольным. Снова получаем уравнение в целых числах:

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^3,$$

преобразовать которое можно так:

$$(2n+1)^2 - (2m)^3 = 1.$$

Таким образом, мы приходим к задаче о том, когда степени двух чисел отличаются на 1, т.е. к знаменитой гипотезе Каталана (а после 2002 года – теореме П.Михайлеску), которая говорит, что единственными решениями будут $n = m = 1$.

Красивую геометрическую интерпретацию имеет задача о поиске тетраэдральных чисел T_n, которые одновременно являются додекаэдральными D_n. Справедливы следующие явные формулы для этих чисел:

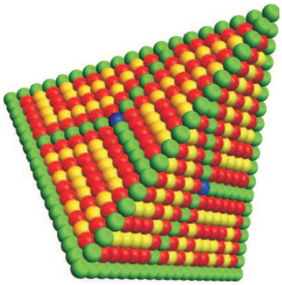
$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

$$D_n = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2},$$

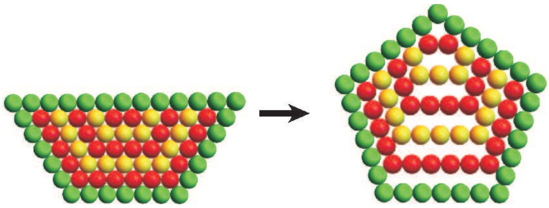
их доказательство оставим в качестве задачи.

Можно заметить, что $(3n+1)$-е тетраэдральное число является $(n+1)$-м додекаэдральным. Таким образом, в этом случае задача оказалась совсем простой. Суть того, почему $T_{3n+1} = D_{n+1}$, можно показать геометрически. Сделаем это для $n = 6$.

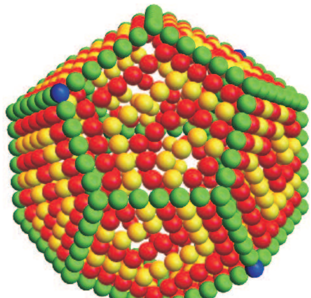
Разобьем каждую грань тетраэдра на три трапеции:



Затем будем деформировать тетраэдр так, чтобы каждая трапеция перешла в правильный пятиугольник:



Тогда каждая грань тетраэдра даст три грани будущего додекаэдра. В итоге получим додекаэдр:



Проделав эту операцию с каждым слоем, мы перейдем от тетраэдрального представленая числа к додекаэдральному.

Материал подготовили Н.Панюнин, А.Устинов