Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики - Нижний Новгород

Бляхман Л.Г., Громов Е.М.

Банк задач контрольных работ по математическому анализу с примерами решений

Учебно-методическое пособие

для студентов международного бакалавриата по экономике и менеджменту

ISBN 978-5-907868-27-4

Н. Новгород, 2024г.

Оглавление

КР1 Вариант 0

1. Исследовать на монотонность последовательность $\left\{\dfrac{n^2+10n+2}{n^2+10n+1}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}, \varepsilon=\dfrac{1}{100}, N_\varepsilon=?$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^3-n^3}{n^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

5. Исследовать на непрерывность $y=e^{1/x}$ в точке $x=0$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-9x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{11}\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\cdot 3^{2x}-9\cdot 4^x}{7\cdot 5^{2x}-25\cdot 7^x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[14]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt{1+81x}}{\sqrt{1+16x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}$

14. Исследовать на непрерывность $y=\sin\left(4x^3\right)$

15. Теоретический вопрос

КР1 Теоретические вопросы

1. Определение функции одной переменной.

2. Определение возрастающей (убывающей) функции.

3. Определение параметрически заданной функции.

4. Определение бесконечного предела последовательности.

5. Определение нулевого предела последовательности.

6. Определение конечного предела последовательности.

7. Теорема об арифметических действиях со сходящимися последовательностями.

8. Достаточные условия отсутствия предела последовательности.

9. Определение расходящейся последовательности.

10. Определение конечного предела функции в точке.

11. Определение нулевого предела функции в точке.

12. Теорема об арифметических действиях с конечными пределами функций.

13. Определение эквивалентных б.м. функций в точке.

14. Таблица эквивалентных б.м. функций.

15. Первое определение непрерывности функции в точке.

16. Второе определение непрерывности функции в точке.

17. Односторонние пределы функции в точке.

18. Точки разрыва функции I рода.

19. Точки разрыва функции II рода.

КР1 Подготовка

Пример 1. Исследовать на монотонность $\left\{\dfrac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}\right\}$

$$a_n=\frac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}=\frac{\left(n^2+7n+1\right)+1}{n^2+7n+1}=1+\frac{1}{n^2+7n+1}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} = 1 + \frac{1}{n^2 + 9n + 9}$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{n^2 + 9n + 9} - 1 - \frac{1}{n^2 + 7n + 1} = \frac{1}{n^2 + 9n + 9} - \frac{1}{n^2 + 7n + 1} =$$

$$= \frac{n^2 + 7n + 1 - n^2 - 9n - 9}{(n^2 + 9n + 9)(n^2 + 7n + 1)} = \frac{-2n - 8}{(n^2 + 9n + 9)(n^2 + 7n + 1)} < 0$$

убывающая

ДЗ. Исследовать на монотонность $\left\{\frac{n^2 + 10n - 1}{n^2 + 10n + 1}\right\}$**;**

$\left\{\frac{n^2 + 4n + 2}{n^2 + 4n + 1}\right\}$

Пример 2. Показать, что последовательность $\left\{\frac{36n^2 - 1}{6n^2 + 100}\right\}$ является сходящейся

1. $a_n = \frac{36n^2 - 1}{6n^2 + 100} \to \frac{36n^2}{6n^2} = 6 = a$.

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Для данного ε найдем пограничный номер N_ε, используя определение

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Для этого решим неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

$$\left|\frac{36n^2 - 1}{6n^2 + 100} - 6\right| < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{36n^2 - 1 - 36n^2 - 600}{6n^2 + 100}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-601}{6n^2 + 100}\right| < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{601}{6n^2 + 100} < \frac{1}{100}$$

$$601\cdot 100 < 6n^2+100 \;\Rightarrow\; (601-1)\cdot 100 < 6n^2$$

$$600\cdot 100 < 6n^2 \;\Rightarrow\; n^2 > 100\cdot 100 \;\Rightarrow\; n > 100 \;\Rightarrow$$

$$N_\varepsilon = 100$$

$\left\{\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}$ - сходящаяся

ДЗ. $\left\{\dfrac{64n^2-1}{8n^2+100}\right\}, \varepsilon = \dfrac{1}{100}, N_\varepsilon = ?$ **;**

$\left\{\dfrac{625n^2-1}{25n^2+100}\right\}, \varepsilon = \dfrac{1}{100}, N_\varepsilon = ?$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^3 - n^3}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^3 - n^3}{n^2} = \left\{\frac{\infty - \infty}{\infty}\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 12n^2 + 12n + 64 - n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2 + 12n + 64}{n^2} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{\textit{метод главного слагаемого}}: \\ \text{\textit{оставляем самое быстро растущее}} \\ \text{\textit{слагаемое в числителе}} \end{array}\right\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 12 = 12$$

ДЗ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+3)^3 - (n^2-1)^3}{n^4}$ **;** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)^3 - (n^2-4)^3}{n^4}$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(n^2+3n+1\right)-n-2}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2+n}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=$$

Структура числа e:
Второе слагаемое в круглой скобке с переворотом образует степень

$$e=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}$$

Метод: повышение симметрии задачи

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2+n}{n^2+3n+1}\right)^{-\frac{n^2+3n+1}{2}}\right]^{-\frac{(2+n)}{n^2+3n+1}(1-n)}=$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{квадратная скобка}\\ \textit{стремится к числу } e:\\ [\cdots]\to e\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\textit{операцию предела}\\ \textit{и экспоненты}\\ \textit{меняем местами}\end{matrix}\right\}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2-n)(1-n)}{n^2+3n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n-2}{n^2+3n+1}}=e^1=e$$

ДЗ. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию

$y=e^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$

1. Правый предел. $x\to 0+0$:

x - *маленькая положительная величина*

Тогда $\dfrac{1}{x}$ - *большая положительная величина*

Число $e \approx 2.7 > 1$ *больше единицы возводим в большую положительную степень*

$$e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \text{ } \textit{при} \text{ } x \to 0+0.$$

В итоге правый предел $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

2. Левый предел. $x \to 0-0$:

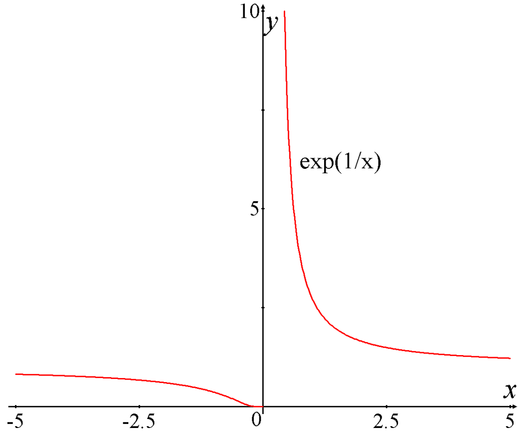
x - *маленькая отрицательная величина*

Тогда $\dfrac{1}{x}$ - *большая отрицательная величина*

Число $e \approx 2.7 > 1$ *больше единицы возводим в большую отрицательную степень*

$$e^{\frac{1}{x}} \to 0 \text{ } \textit{при} \text{ } x \to 0-0.$$

В итоге левый предел $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$



$x = 0$ - точка разрыва II рода

ДЗ. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$: 1) $y=\dfrac{1}{1+2^{-1/x}}$; 2) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 3) $y=\dfrac{\sin|x|}{x}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Применима при $x\to 0$ или $|x|<<1$

1.	$\sin x\approx x$	**5.**	$e^x\approx 1+x$
2.	$\arcsin x\approx x$	**6.**	$\ln(1+x)\approx x$
3.	$\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}$	**7.**	$\operatorname{tg} x\approx x$
		8.	$\operatorname{arctg} x\approx x$
4.	$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$	**9.**	$a^x\approx 1+x\ln a$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-9x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(4-3e^{-9x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}=$$

$$\left\{\begin{matrix}1^{\infty}\ \textit{сложно показательная неопределенность}\\ \textit{второй замечательный предел}\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\end{matrix}\right\}=$$

$$\left\{\begin{matrix}e^{-9x}\approx 1-9x\\ \sin 3x\approx 3x\\ \tan 4x\approx 4x\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(4-3(1-9x)-3x\right)^{1/4x}=$$

$$\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{4x}}=\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{24x}\cdot\frac{24}{4}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+24x)^{\frac{1}{24x}}\right]^6=\left\{\begin{matrix}\textit{операцию предела и возведения в}\\ 6-\textit{ю степень меняем местами}\end{matrix}\right\}=$$

$$\left[\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{24x}}\right]^6 = e^6$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{2x}-\operatorname{tg}3x\right)^{1/\sin 4x}$ **;**

$\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{12}}\frac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{matrix} \textit{замена} \quad x-\dfrac{\pi}{12}=t \to 0 \\ x=\dfrac{\pi}{12}+t \end{matrix}\right\} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos 12\left(\dfrac{\pi}{12}+t\right)}}{144\left(\dfrac{\pi}{12}+t\right)^2-\pi^2} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+12t)}}{144\left(\dfrac{\pi^2}{144}+\dfrac{\pi}{6}t+t^2\right)-\pi^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(12t)}}{24\pi t+144t^2} =$$

$$\left\{\cos 12t \approx 1-\frac{144t^2}{2} = 1-72t^2\right\} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-1+72t^2}}{24\pi t+144t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{6\sqrt{2}\cdot t}{24\pi t+144t^2} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{6\sqrt{2}}{24\pi+144t} = \frac{6\sqrt{2}}{24\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 6x}}{36x^2-\pi^2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{4x^2-\pi^2}$

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{11}\right)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{11}\right)}=\left\{\begin{array}{l}\textit{метод главных слагаемых:}\\ \textit{при } x>>1 \textit{ удерживаем по}\\ \textit{одному самому большому слагаемому}\\ \textit{в числителе и знаменателе аргумента}\\ \textit{логарифма}\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^3\right)}{\ln\left(x^{11}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\ln(x)}{11\cdot\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{11}=\frac{3}{11}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^6\right)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^8\right)}$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\cdot 3^{2x}-9\cdot 4^x}{7\cdot 5^{2x}-25\cdot 7^x}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4\cdot 3^{2x}-9\cdot 4^x}{7\cdot 5^{2x}-25\cdot 7^x}=\left\{\frac{4\cdot 9-9\cdot 4}{7\cdot 25-25\cdot 7}=\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\textit{замена}\\ x-1=t\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 3^{2(t+1)}-9\cdot 4^{t+1}}{7\cdot 5^{2(t+1)}-25\cdot 7^{t+1}}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9\cdot 3^{2t}-9\cdot 4\cdot 4^t}{7\cdot 25\cdot 5^{2t}-25\cdot 7\cdot 7^t}=\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9\left(3^{2t}-4^t\right)}{7\cdot 25\left(5^{2t}-7^t\right)}=$$

$$\left\{\begin{array}{ll}3^{2t}\approx 1+2t\ln 3, & 4^t\approx 1+t\ln 4\\ 5^{2t}\approx 1+2t\ln 5, & 7^t\approx 1+t\ln 7\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9(1+2t\ln 3)-9\cdot 4(1+t\ln 4)}{7\cdot 25(1+2t\ln 5)-25\cdot 7(1+t\ln 7)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9(1+2t\ln 3-1-t\ln 4)}{7\cdot 25(1+2t\ln 5-1-t\ln 7)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9\cdot t(2\ln 3-\ln 4)}{7\cdot 25\cdot t(2\ln 5-\ln 7)}=\lim_{t\to 0}\frac{4\cdot 9(2\ln 3-\ln 4)}{7\cdot 25(2\ln 5-\ln 7)}=$$

$$\frac{4\cdot 9(2\ln 3-\ln 4)}{7\cdot 25(2\ln 5-\ln 7)}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{25\cdot 3^x-3\cdot 5^{2x}}{36\cdot 5^x-5\cdot 6^{2x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{5\cdot 2^{2x}-4\cdot 5^x}$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}=\left\{(1+4x)^{\frac{1}{4}}\approx 1+\frac{1}{4}4x\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-3\left(1+\frac{x}{81}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}4x-1}=$$

$$\left\{\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{9},\quad \left(1+\frac{x}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 1+\frac{1}{4}\frac{x}{81}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{9}\right)-3\left(1+\frac{1}{4}\frac{x}{81}\right)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{x}{6}-3-\frac{x}{4\cdot 27}}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{108}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{18}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{17}{18}=\frac{17}{108}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt[4]{16+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[14]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[14]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\textit{замена}\quad x-1=t\to 0\\ x=1+t\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[14]{14(1+t)^2-14(1+t)+1}-1}{\sin(5\pi(1+t))}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[14]{14t^2+28t+14-14-14t+1}-1}{\sin(5\pi+5\pi t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[14]{14t^2+14t+1}-1}{-\sin(5\pi t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{14}\left(14t^2+14t\right)-1}{-5\pi t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+t+t^2-1}{-5\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+t^2}{-5\pi t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(1+t)}{-5\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)}{-5\pi}=-\frac{1}{5\pi}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{12x^2-12x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt{1+81x}}{\sqrt{1+16x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt{1+81x}}{\sqrt{1+16x}}=\left\{\frac{\infty-\infty}{\infty}\right\}=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{метод главных слагаемых:}\\ \textit{при } x>>1 \textit{ удерживаем по}\\ \textit{одному самому большому слагаемому}\\ \textit{под каждым радиккалом}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{1/5}-9x^{1/2}}{4x^{1/2}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{метод главного слагаемого:}\\ \textit{при } x>>1 \textit{ в числителе удерживаем}\\ \textit{одно самое большое слагаемое}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^{1/2}}{4x^{1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{4}=-\frac{9}{4}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$ **;** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+49x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+25x}}$

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\textit{замена}\quad x-8=t\to 0\\ x=8+t\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(8+t)-\ln 8}{e^{8+t}-e^8}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{8+t}{8}\right)}{e^8\left(e^t-1\right)}=$$

$$\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{8}\right)}{(1+t-1)}=\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t}{8}}{t}=\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{8}}{1}=\frac{1}{8e^8}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\ln x-\ln 12}{e^x-e^{12}}$ **;** $\lim\limits_{x\to 24}\dfrac{\ln x-\ln 24}{e^x-e^{24}}$

Пример 14. Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin\left(4x^3\right)$ при $x\in R$.

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=\sin 4(x+\Delta x)^3-\sin\left(4x^3\right)=$$

$$\left\{\sin a-\sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right\}=$$

$$2\cos\left(\frac{4(x+\Delta x)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4(x+\Delta x)^3-4x^3}{2}\right)=$$

$$2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3-4x^3}{2}\right)=$$

Эквивалентные б.м. функции: $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3\approx 1+3\frac{\Delta x}{x}$

$$2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)-4x^3}{2}\right)=$$

$$2\cos\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x-4x^3}{2}\right)=$$

$$2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\sin\left(6x^2\Delta x\right)=\left\{\sin\left(6x^2\Delta x\right)\approx 6x^2\Delta x\right\}=$$

$$2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)6x^2\Delta x=12x^2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\Delta x\to 0$$

$\Delta y\to 0$. В итоге: $y=\sin\left(4x^3\right)$ непрерывна при $x\in R$.

ДЗ. Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{5x^2}$; $y=\ln\left(3x^2\right)$; $y=\cos\left(5x^2\right)$

КР1 Банк задач

1. Исследовать на монотонность

1.1. $\left\{\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right\}$

1.2. $\left\{\dfrac{n^2+4n-1}{n^2+4n+1}\right\}$

1.3. $\left\{\dfrac{n^2+4n+2}{n^2+4n+1}\right\}$

1.4. $\left\{\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+5n+1}\right\}$

1.5. $\left\{\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+5n+1}\right\}$

1.6. $\left\{\dfrac{n^2+6n+2}{n^2+6n+1}\right\}$

1.7. $\left\{\dfrac{n^2+6n-1}{n^2+6n+1}\right\}$

1.8. $\left\{\dfrac{n^2+7n-1}{n^2+7n+1}\right\}$

1.9. $\left\{\dfrac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}\right\}$

1.10. $\left\{\dfrac{n^2+8n-1}{n^2+8n+1}\right\}$

1.11. $\left\{\dfrac{n^2+8n+2}{n^2+8n+1}\right\}$

1.12. $\left\{\dfrac{n^2+9n-1}{n^2+9n+1}\right\}$

1.13. $\left\{\dfrac{n^2+10n-1}{n^2+10n+1}\right\}$

1.14. $\left\{\dfrac{n^2+10n+2}{n^2+10n+1}\right\}$

1.15. $\left\{\dfrac{n^2+11n-1}{n^2+11n+1}\right\}$

1.16. $\left\{\dfrac{n^2+11n+2}{n^2+11n+1}\right\}$

2. Найти предел

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)^3-(n^2-2)^3}{n^4}$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)^3-(n^2-3)^3}{n^4}$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)^3-(n^2-4)^3}{n^4}$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^3-\left(n^2-5\right)^3}{n^4}$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^3-\left(n^2-6\right)^3}{n^4}$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-1\right)^3}{n^4}$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-2\right)^3}{n^4}$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-3\right)^3}{n^4}$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-4\right)^3}{n^4}$

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-5\right)^3}{n^4}$

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-6\right)^3}{n^4}$

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3\right)^3-\left(n^2-1\right)^3}{n^4}$

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3\right)^3-\left(n^2-2\right)^3}{n^4}$

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^3-\left(n^2-1\right)^3}{n^4}$

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-7\right)^3}{n^4}$

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)^3-\left(n^2-8\right)^3}{n^4}$

3. Найти предел

3.1. . $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$	**3.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+7n+1}\right)^{1-n}$

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+8n+1}\right)^{1-n}$

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+9n+1}\right)^{1-n}$

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+4n+1}\right)^{1-n}$

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+5n+1}\right)^{1-n}$

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+6n+1}\right)^{1-n}$

4. Для заданной последовательности и параметра $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$ найти пограничный номер N_ε

4.1. $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+100}\right\}$

4.2. $\left\{\dfrac{16n^2-1}{4n^2+100}\right\}$

4.3. $\left\{\dfrac{625n^2-1}{25n^2+100}\right\}$

4.4. $\left\{\dfrac{100n^2-1}{10n^2+100}\right\}$

4.5. $\left\{\dfrac{400n^2-1}{20n^2+100}\right\}$

4.6. $\left\{\dfrac{49n^2-1}{7n^2+100}\right\}$

4.7. $\left\{\dfrac{4n^2-1}{2n^2+100}\right\}$

4.8. $\left\{\dfrac{64n^2-1}{8n^2+100}\right\}$

4.9. $\left\{\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}$

4.10. $\left\{\dfrac{9n^2-1}{3n^2+100}\right\}$

4.11. $\left\{\dfrac{121n^2-1}{11n^2+100}\right\}$

4.12. $\left\{\dfrac{144n^2-1}{12n^2+100}\right\}$

4.13. $\left\{\dfrac{169n^2-1}{13n^2+100}\right\}$

4.14. $\left\{\dfrac{9n^2-1}{25n^2+100}\right\}$

4.15. $\left\{\dfrac{100n^2-1}{10n^2+100}\right\}$

4.16. $\left\{\dfrac{196n^2-1}{14n^2+100}\right\}$

5. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$

5.1. $y=\dfrac{1}{1+2^{-1/x}}$

5.2. $y=\operatorname{arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5.3. $y=\dfrac{|x|}{x}$

5.4. $y=2^{\frac{|x|}{x}}$

5.5. $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

5.6. $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

5.7. $y=\dfrac{e^{|x|}-1}{x}$

5.8. $y=x+\dfrac{|x|}{x}$

5.9. $y=\dfrac{\tan|x|}{x}$

5.10. $y=e^{1/x}$

5.11. $y=\dfrac{\ln(1+|x|)}{x}$

5.12. $y=\dfrac{1}{1+e^{-1/x}}$

5.13. $y=e^{-1/x}$

5.14. $y=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-1/x}}$

5.15. $y=\dfrac{\sin|x|}{x}$

5.16. $y=\operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

6. Найти предел

6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x}-\sqrt[3]{64+x}}{\sqrt{1+4x}-1}$

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x}-\sqrt[4]{625+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

6.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-\sqrt[4]{16+x}}{\sqrt[4]{1+16x}-1}$

6.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt[5]{32+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

6.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{36+x}-\sqrt[3]{216+x}}{\sqrt[5]{1+5x}-1}$

6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[7]{128+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2]{9+x}-\sqrt[5]{243+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[8]{256+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2]{4+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[5]{32+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{64+x}-\sqrt[7]{128+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{128+x}-\sqrt[8]{256+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

7. Найти предел

7.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}10x)}{1-e^{-\arcsin 5x}}$

7.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}5x)}{1-e^{\arcsin 5x}}$

7.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}11x)}{1-e^{-\arcsin 6x}}$

7.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}9x)}{1-e^{-\operatorname{arctg}3x}}$

7.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}2x)}{1-e^{\operatorname{arctg}8x}}$

7.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}7x)}{1-e^{\arcsin 4x}}$

7.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}3x)}{1-e^{\operatorname{arctg}3x}}$

7.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}8x)}{1-e^{\operatorname{arctg}8x}}$

7.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}4x)}{1-e^{\operatorname{arctg}4x}}$

7.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}5x)}{1-e^{\operatorname{arctg}5x}}$

7.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}6x)}{1-e^{\operatorname{arctg}6x}}$

7.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}7x)}{1-e^{\operatorname{arctg}7x}}$

7.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}9x)}{1-e^{\operatorname{arctg}9x}}$

7.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}10x)}{1-e^{\operatorname{arctg}10x}}$

7.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}11x)}{1-e^{\operatorname{arctg}11x}}$

7.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}12x)}{1-e^{\operatorname{arctg}12x}}$

8. Найти предел

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(7x)}{\ln(e^7-x)-7}$

8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(11x)}{\ln(e^{11}-x)-11}$

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(8x)}{\ln\left(e^{8}-x\right)-8}$

8.4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{e^{x}-e^{10}}$

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)}{\ln\left(e^{3}-x\right)-3}$

8.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(6x)}{\ln\left(e^{6}-x\right)-6}$

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(4x)}{\ln\left(e^{4}-x\right)-4}$

8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(9x)}{\ln\left(e^{9}-x\right)-9}$

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(10x)}{\ln\left(e^{10}-x\right)-10}$

8.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(19x)}{\ln\left(e^{19}-x\right)-19}$

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(11x)}{\ln\left(e^{11}-x\right)-11}$

8.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(12x)}{\ln\left(e^{12}-x\right)-12}$

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(13x)}{\ln\left(e^{13}-x\right)-13}$

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(14x)}{\ln\left(e^{14}-x\right)-14}$

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(15x)}{\ln\left(e^{15}-x\right)-15}$

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(16x)}{\ln\left(e^{16}-x\right)-16}$

9. Найти предел

9.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^6\right)}$

9.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^7\right)}$

9.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^4\right)}$

9.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-4x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^9\right)}$

9.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-4x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{12}\right)}$

9.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-2x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^5\right)}$

9.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-5x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{10}\right)}$

9.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-6x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x11^{11}\right)}$

9.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^8\right)}$

9.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-5x+x^2\right)}{\ln\left(1+x+x^{10}\right)}$

9.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-7x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^9\right)}$

9.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-8x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^9\right)}$

9.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^5\right)}$

9.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^7\right)}$

9.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-9x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^5\right)}$

9.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-10x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{10}\right)}$

10. Найти предел

10.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}}{7\cdot 5^x-5\cdot 7^x}$

10.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{25\cdot 3^x-3\cdot 5^{2x}}{36\cdot 5^x-5\cdot 6^{2x}}$

10.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{25\cdot 2^{2x}-4\cdot 5^{2x}}{49\cdot 6^x-6\cdot 7^{2x}}$

10.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9\cdot 2^{2x}-4\cdot 3^{2x}}{25\cdot 6^x-6\cdot 5^{2x}}$

10.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{49\cdot 3^x-3\cdot 7^{2x}}{16\cdot 5^x-5\cdot 4^{2x}}$

10.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{5\cdot 2^{2x}-4\cdot 5^x}$

10.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cdot 2^{2x}-4\cdot 3^x}{5\cdot 2^{4x}-16\cdot 5^x}$

10.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16\cdot 3^x-3\cdot 4^{2x}}{49\cdot 5^x-5\cdot 7^{2x}}$

10.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{36\cdot 2^{2x}-4\cdot 6^{2x}}{81\cdot 2^{4x}-16\cdot 9^{2x}}$

10.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{49\cdot 2^{2x}-4\cdot 7^{2x}}{81\cdot 2^{4x}-16\cdot 9^{2x}}$

10.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{64\cdot 2^{2x}-4\cdot 8^{2x}}{25\cdot 2^{4x}-16\cdot 5^{2x}}$

10.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{81\cdot 2^{2x}-4\cdot 9^{2x}}{25\cdot 2^{4x}-16\cdot 5^{2x}}$

10.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{49\cdot 2^{2x}-4\cdot 7^{2x}}{36\cdot 2^{4x}-16\cdot 6^{2x}}$

10.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{25\cdot 2^{2x}-4\cdot 5^{2x}}{100\cdot 2^{4x}-16\cdot 10^{2x}}$

10.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9\cdot 2^{2x}-4\cdot 3^{2x}}{121\cdot 2^{4x}-16\cdot 11^{2x}}$

10.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{49\cdot 2^{2x}-4\cdot 7^{2x}}{144\cdot 2^{4x}-16\cdot 12^{2x}}$

11. Найти предел

11.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[15]{15x^2-15x+1}-1}{\sin(15\pi x)}$

11.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[10]{20x^2-20x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

11.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{7x^2-7x+1}-1}{\sin(7\pi x)}$

11.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{10x^2-10x+1}-1}{\sin(\pi x)}$

11.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{5x^2-5x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

11.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{6x^2-6x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

11.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[11]{22x^2-22x+1}-1}{\sin(11\pi x)}$

11.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{12x^2-12x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

11.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{21x^2-21x+1}-1}{\sin(21\pi x)}$

11.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$

11.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

11.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[13]{13x^2-13x+1}-1}{\sin(13\pi x)}$

11.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[11]{11x^2-11x+1}-1}{\sin(11\pi x)}$

11.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$

11.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[8]{8x^2-8x+1}-1}{\sin(\pi x)}$

11.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[16]{16x^2-16x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

12. Найти предел

12.1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 3x}}{9x^2-\pi^2}$

12.2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 6x}}{36x^2-\pi^2}$

12.3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 4x}}{16x^2-\pi^2}$

12.4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{13}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 13x}}{169x^2-\pi^2}$

12.5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{4x^2-\pi^2}$

12.6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{16}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 16x}}{256x^2-\pi^2}$

12.7. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x^2-\pi^2}$

12.8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{15}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 15x}}{225x^2-\pi^2}$

12.9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{14}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 14x}}{196x^2-\pi^2}$

12.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 5x}}{25x^2-\pi^2}$

12.11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{7}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 7x}}{49x^2-\pi^2}$

12.12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 8x}}{64x^2-\pi^2}$

12.13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{10}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 10x}}{100x^2-\pi^2}$

12.14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}$

12.15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 9x}}{81x^2-\pi^2}$

12.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{11}}\dfrac{\sqrt{1+\cos 11x}}{121x^2-\pi^2}$

13. Найти предел

13.1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\ln x-\ln 6}{e^x-e^6}$

13.2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln x-\ln 5}{e^x-e^5}$

13.3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln x-\ln 4}{e^x-e^4}$

13.4. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}$

13.5. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\ln x-\ln 16}{e^x-e^{16}}$

13.6. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\ln x-\ln 12}{e^x-e^{12}}$

13.7. . $\lim\limits_{x\to 24}\dfrac{\ln x-\ln 24}{e^x-e^{24}}$

13.8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\ln x-\ln 7}{e^x-e^7}$

13.9. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\ln x-\ln 9}{e^x-e^9}$

13.10. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{e^x-e^{10}}$

13.11. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{\ln x-\ln 11}{e^x-e^{11}}$

13.12. $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{\ln x-\ln 13}{e^x-e^{13}}$

13.13. $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\ln x-\ln 14}{e^x-e^{14}}$

13.14. $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{\ln x-\ln 15}{e^x-e^{15}}$

13.15. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\ln x-\ln 16}{e^x-e^{16}}$

13.16. $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{\ln x-\ln 17}{e^x-e^{17}}$

14. Найти предел

14.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-3x}-\operatorname{tg}4x\right)^{1/\sin 2x}$

14.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-x}+\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

14.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

14.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{2x}-\operatorname{tg}3x\right)^{1/\sin 4x}$

14.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-4x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

14.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-5x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

14.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-9x}-\operatorname{tg}2x\right)^{1/\sin 2x}$

14.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-6x}-\operatorname{tg}2x\right)^{1/\sin 3x}$

14.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-7x}-\sin 5x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

14.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-8x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}2x}$

14.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

14.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-3x}-\operatorname{tg}4x\right)^{1/\sin 2x}$

14.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

14.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

14.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

14.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-4e^{-11x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

15. Найти предел

15.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+16x}-\sqrt[5]{1+32x}}{\sqrt[4]{1+16x}-1}$

15.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+81x}-\sqrt[5]{1+32x}}{\sqrt[4]{1+81x}-1}$

15.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+125x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+x}}$

15.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+16x}-\sqrt[3]{1+64x}}{\sqrt{1+16x}-1}$

15.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

15.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+16x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+9x}}$

15.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+49x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+25x}}$

15.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

15.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt{1+4x}-1}$

15.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

15.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+8x}-1}$

15.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+64x}-\sqrt[4]{1+625x}}{\sqrt[3]{1+8x}}$

15.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+27x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

15.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

15.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+125x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

15.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

16. Исследовать на непрерывность

16.1. $y=\cos\left(3x^5\right)$

16.2. $y=\sin\left(4x^4\right)$

16.3. $y=\cos\left(4x^2\right)$

16.4. $y=\sin\left(5x^2\right)$

16.5. $y=\cos\left(5x^2\right)$

16.6. $y=e^{4x^6}$

16.7. $y=e^{5x^4}$

16.8. $y=e^{3x^8}$

16.9. $y=e^{2x^5}$

16.10. $y=\ln\left(3x^2\right)$

16.11. $y=\ln\left(4x^2\right)$

16.12. $y=e^{6x^4}$

16.13. $y=e^{8x^5}$

16.14. $y=e^{9x^6}$

16.15. $y=\cos\left(4x^5\right)$

16.16. $y=\sin\left(5x^6\right)$

КР2 Вариант 0

В заданиях 1-5 найти первую производную

1. $y=x^3\cdot\operatorname{arctg}^4 5x$

2. $y=\dfrac{\sin^3 2x}{x^2}$

3. $y=\cos^2\left(e^{-2x^3}\right)$

4. $y=x^{\cos x}$

5. $e^{x^2\cdot y^3(x)}+\tan\left(2x+3y(x)\right)=0$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-\operatorname{tg}3x}{x^3}$

7. Исходя из определения, найти производную функции $y=\sin\left(4x^3\right)$.

8. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$

9. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=\dfrac{1}{42}x^7-\dfrac{2}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^3-5x$

10. Найти все асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49}$

11. Провести исследование функции $y=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}$ с помощью первой производной и построить график.

12. Провести исследование функции $y=(x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}$ с помощью первой производной и построить график.

13. Показать равенство смешанных частных производных функции $z=\cos(2x-3y)e^{-7xy}$

14. Исследовать на экстремум $z=(y-1)^3+3(y-1)x^2-12x-15y+18$

15. Найти вторую производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданной функции $\begin{cases} y=\sqrt{1-t^2} \\ x=\arcsin t \end{cases}$

16. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции $y=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$.

17. Теоретический вопрос.

КР2 Теоретические вопросы

1. Определение производной функции.
2. Таблица производных элементарных функций.
3. Теоремы о производных
4. Первый дифференциал функции одной переменной. Таблица дифференциалов
5. Определение точки локального максимума (минимума) функции одной переменной.
6. Определение стационарной точки функции.
7. Определение критической точки функции.
8. Определение выпуклой (вогнутой) функции в точке.
9. Определение точки перегиба непрерывной функции.
10. Определение просто наклонной асимптоты графика функции.
11. Достаточные условия возрастания (убывания) дифференцируемой в точке функции.
12. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции.
13. Необходимые условия экстремума непрерывной функции.
14. Односторонние производные. Теорема о существовании производной функции.
15. Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции одной переменной.
16. Достаточные условия экстремума непрерывной функции одной переменной.
17. Достаточные условия выпуклости (вогнутости) дважды дифференцируемой функции.
18. Необходимые условия точки перегиба непрерывной функции.

19. Достаточные условия точки перегиба непрерывной функции.
20. Теорема о просто наклонной асимптоте графика функции.
21. Полный дифференциал функции двух независимых переменных. Необходимые и достаточные условия полного дифференциала
22. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции двух независимых переменных.
23. Достаточные условия экстремума функции двух независимых переменных.
24. Среднее переменной, среднее квадратов, дисперсия, ковариация двух переменных, среднее значение произведения двух переменных.

КР2 Подготовка
Таблица производных

1. $\frac{dC}{dx}=0$	**6.** $\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$
2. $\frac{d(x^{\alpha})}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}$	**7.** $\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$
3. $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$	**8.** $\frac{d(\cot x)}{dx}=\frac{-1}{\sin^2 x}$
4. $\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$	**9.** $\frac{d(\arctan x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$
5. $\frac{d(e^x)}{dx}=e^x$	**10.** $\frac{d(\operatorname{arccot} x)}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}$
	11. $\frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Теоремы о производных

1. $$\boxed{\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}}$$

2. $$\frac{d(C \cdot f(x))}{dx} = C \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

3. $$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

4. $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

5. $$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx(y)}{dy}\right)}$$

6. $$\frac{dy(u(x))}{dx} = \frac{dy(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

7. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

8. $\frac{d\left(u^v\right)}{dx} \equiv \frac{d\left(e^{\ln\left(u^v\right)}\right)}{dx} = \frac{d\left(e^{v\ln u}\right)}{dx} = e^{v\ln u} \cdot \frac{d\left(v\ln u\right)}{dx} =$

$$e^{v\ln u} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

Дифференциал функции

$$d\left(f\left(x\right)\right) = \frac{df\left(x\right)}{dx} \cdot dx$$

Таблица дифференциалов

1. $d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx$

2. $d\left(\sin x\right) = \cos x dx$

3. $d\left(\cos x\right) = -\sin x dx$

4. $d\left(\tan x\right) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

5. $d\left(\cot x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$

6. , $d\left(e^x\right) = e^x dx$

7. $d\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}dx$

8. $d\left(\arctan x\right) = \frac{1}{1+x^2}dx$

9. $d\left(\mathrm{arccot}\, x\right) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

10. $d\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

11. $d\left(\arccos x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Пример 1. Найти производную функции

$$y = x^3 \cdot \mathrm{arctg}^4 5x$$

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{arctg}^4 5x + x^3\left(\mathrm{arctg}^4 5x\right)' =$$

$$3x^2 \cdot \mathrm{arctg}^4\left(5x\right) + x^3 \cdot 4 \cdot \mathrm{arctg}^3\left(5x\right) \cdot \frac{1}{1+\left(5x\right)^2} \cdot 5$$

ДЗ $y = x^3 \cdot \arccos^2 4x$

Пример 2. Найти производную функции $y=\dfrac{\sin^3 2x}{x^2}$

$$y'=\frac{\left(\sin^3 2x\right)'\cdot x^2-\sin^3 2x\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$$

$$\frac{3\sin^2(2x)\cos(2x)\cdot 2\cdot x^2-\sin^3(2x)\cdot 2x}{x^4}$$

дз $y=\dfrac{\sin^5 4x}{x^3}$

Пример 3. Найти производную функции $y=\cos^2\left(e^{-2x^3}\right)$

$$y'=2\cos\left(e^{-2x^3}\right)\left(-\sin\left(e^{-2x^3}\right)\right)e^{-2x^3}\left(-2\cdot 3x^2\right)$$

дз $y=\sin^4\left(e^{-2x^3}\right)$

Пример 4. Найти производную функции $y=x^{\cos x}$

$$\left(x^{\cos x}\right)'\equiv\left(e^{\ln\left(x^{\cos x}\right)}\right)'=\left(e^{\cos x\cdot\ln x}\right)'=$$

$$e^{\cos x\cdot\ln x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x\right)'=$$

$$e^{\cos x\ln x}\cdot\left(\left(\cos x\right)'\cdot\ln x+\cos x\cdot\left(\ln x\right)'\right)=$$

$$e^{\cos x\ln x}\cdot\left(\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

дз $y=(\operatorname{ctg} x)^{\arccos(4x)}$

Пример 5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ неявно заданной функции $e^{x^2 \cdot y^3(x)} + \tan(2x + 3y(x)) = 0$

Дифференцируем исходное соотношение по x:

$$e^{x^2 \cdot y^3(x)}\left(2x \cdot y^3(x) + x^2 \cdot 3y^2(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx}\right) +$$

$$\frac{1}{\cos^2(2x+3y(x))}\left(2 + 3\frac{dy(x)}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy(x)}{dx}\left(x^2 \cdot 3y^2(x) \cdot e^{x^2 \cdot y^3(x)} - \frac{3}{\cos^2(2x+3y(x))}\right) =$$

$$= -2x \cdot y^3(x) e^{x^2 \cdot y^3(x)} + \frac{2}{\cos^2(2x+3y(x))}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{-2x \cdot y^3(x) e^{x^2 \cdot y^3(x)} + \dfrac{2}{\cos^2(2x+3y(x))}}{x^2 \cdot 3y^2(x) \cdot e^{x^2 \cdot y^3(x)} - \dfrac{3}{\cos^2(2x+3y(x))}}$$

дз $y^4 x^3 + \operatorname{tg}^5(3x - 2y) + 4 = 0$

Пример 6. Найти вторую производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции

$$\begin{cases} y = \cos t \\ x = \sin t \end{cases}$$

Первая: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}=\dfrac{\dfrac{d(\cos t)}{dt}}{\dfrac{d(\sin t)}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$

Вторая

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{d(-\tan t)}{dt}}{\dfrac{d(\sin t)}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{\cos t}=-\frac{1}{\cos^3 t}$$

ДЗ $\begin{cases} y=\sin^3 t \\ x=\cos^3 t \end{cases}$; $\begin{cases} y=\left(t^4-1\right)^2 \\ x=\left(t^2-1\right)^2 \end{cases}$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-\operatorname{tg}3x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x-\operatorname{tg}3x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}\left[\begin{matrix}\textit{применяем}\\ \textit{правило Лопиталя}\end{matrix}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{1+9x^2}-\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x-1-9x^2}{x^2\left(1+9x^2\right)\cos^2 3x}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\cos 3x\approx 1-\dfrac{(3x)^2}{2}=1-\dfrac{9}{2}x^2\\ \cos^2 3x\approx\left(1-\dfrac{9}{2}x^2\right)^2\approx 1-2\dfrac{9}{2}x^2=1-9x^2\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-9x^2-1-9x^2}{x^2\left(1+9x^2\right)\left(1-9x^2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-18x^2}{x^2(1+9x^2)(1-9x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-18}{(1+9x^2)(1-9x^2)}=-18$$

ДЗ. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin 3x}{x^3}$

Пример 8. Исходя из определения, найти производную функции $y=\sin(4x^3)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{\sin 4(x+\Delta x)^3-\sin(4x^3)}{\Delta x}=$$

$$\left\{\sin a-\sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right\}=$$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{4(x+\Delta x)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\dfrac{4(x+\Delta x)^3-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{4x^3\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\dfrac{4x^3\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^3-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

Эквивалентные б.м. функции: $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^3\approx 1+3\dfrac{\Delta x}{x}$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{4x^3\left(1+3\dfrac{\Delta x}{x}\right)+4x^3}{2}\right)\sin\left(\dfrac{4x^3\left(1+3\dfrac{\Delta x}{x}\right)-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{4x^3+12x^2\Delta x+4x^3}{2}\right)\sin\left(\dfrac{4x^3+12x^2\Delta x-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$\frac{2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\sin\left(6x^2\Delta x\right)}{\Delta x}=\left\{\sin\left(6x^2\Delta x\right)\approx 6x^2\Delta x\right\}=$$

$$\frac{2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)6x^2\Delta x}{\Delta x}=$$

$$12x^2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\to 12x^2\cos\left(4x^3\right)$$

$$\left(\sin\left(4x^3\right)\right)'=12x^2\cos\left(4x^3\right)$$

ДЗ. Исходя из определения, найти производную функции

$y=\cos\left(10x^6\right)$; $y=e^{-6x^5}$

Пример 9. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$

1. Поиск стационарных точек:

$$\frac{dy}{dx}=9(x+8)^8(9-x)^8-(x+8)^9 8\cdot(-1)(9-x)^7=$$

$$(x+8)^8(9-x)^7\left[9(9-x)-8(x+8)\right]=$$

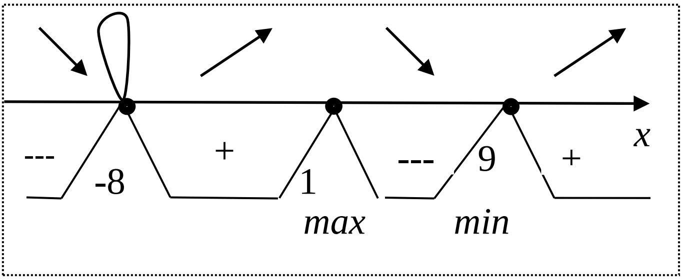
$$(x+8)^8(9-x)^7(81-9x-8x-64)=$$

$$(x+8)^8(9-x)^7(17-17x)=$$

$$\frac{dy}{dx}=17(x+8)^8(9-x)^7(1-x)=0 \quad\to$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-8 \quad \textit{нуль четного порядка} \\ x_2=1 \\ x_3=9 \end{array}\right.$$

2. Метод интервалов для первой производной



ДЗ $y=(x+7)^8\cdot(8-x)^7$; $y=(x+6)^7\cdot(7-x)^6$

Пример 10. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=\dfrac{1}{42}x^7-\dfrac{2}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^3-5x$

1. Находим вторую производную

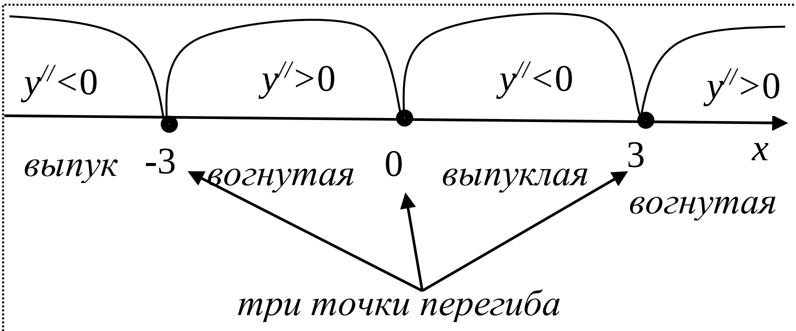
Сначала первую: $y'=\dfrac{7}{42}x^6-2x^4-\dfrac{9}{2}x^2-5$

$$y''=x^5-8x^3-9x=x\left(x^4-8x^2-9\right)=$$
$$\left\{\begin{matrix}\textit{соотношение в круглой}\\ \textit{скобке биквадратное}\end{matrix}\right\}=x\left(x^2-9\right)\left(x^2+1\right)$$
$$y''=x\left(x^2+1\right)(x-3)(x+3)$$

вторая производная существует на всей действительной оси

$y''=0$. Точки возможного перегиба $\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=0\\ x=-3\end{array}\right.$

2. Метод интервалов для второй производной
$$y''=x\left(x^2+1\right)(x-3)(x+3)$$



ДЗ $y = -\frac{1}{21}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + 3x^3$;

$y = \frac{1}{28}x^8 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{2}{3}x^4$

Пример 11.1. Найти все асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49}$.

1. Вертикальные асимптоты. $x = \pm 7$.

Найдем один из односторонних пределов в обоих точках

1.1. $x = 7$. Правый предел:

$$\lim_{x \to 7+0} \frac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49} = +\infty, \quad x = 7 \text{ - вертикальная.}$$

1.2. $x = -7$ Правый предел:

$$\lim_{x \to -7+0} \frac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49} = +\infty \quad x = -7 \text{ - вертикальная.}$$

2. Наклонные асимптоты.

Асимптотический метод:
в исходной функции выйдем на большие значения аргумента и в числителе удержим два главных слагаемых, а в знаменателе одно главное слагаемое:

$$y = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49} = \{|x| >> 1\} \to \frac{x^3 + 5x^2}{x^2} = x + 5$$

Наклонная асимптота $y = x + 5$

ДЗ. $y=\dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x^2-4}$; $\quad y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-16}$

Пример 11.2. Найти все асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

1. Вертикальные асимптоты. $x=\pm 2$.

1.1. $x=2$. Правый предел: $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty$,

$x=2$ - вертикальная асимптота

1.2. $x=-2$. Левый предел: $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty$,

$x=-2$ - вертикальная асимптота

2. Наклонные асимптоты.

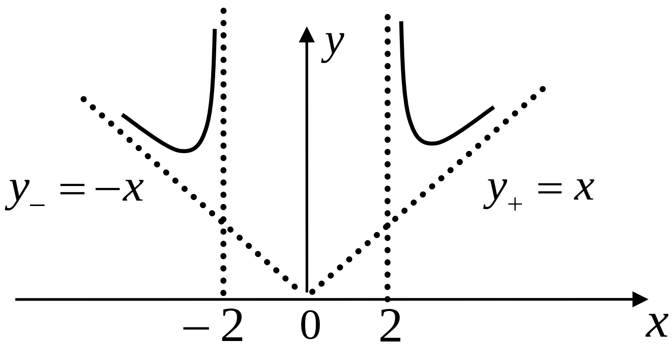
Асимптотический метод:
в исходной функции выйдем на большие значения аргумента и в знаменателе удержим одно главное слагаемое:

$$y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}=\{|x|>>1\}\to$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\equiv\frac{x^2}{|x|}=\begin{cases}+x\ \textit{при}\ x\to+\infty\\ -x\ \textit{при}\ x\to-\infty\end{cases}$$

Правая наклонная асимптота $\quad y_+=x$

Левая наклонная асимптота $\quad y_-=-x$



ДЗ $y = \dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$; $\quad y = \dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$

Общая схема исследования функций

1. ООФ. Общие свойства.

2. Нули функции $y = 0$. Интервалы знакоопределенности функции $y > 0$, $y < 0$.

3. Точки разрыва функции.

4. Асимптоты.

5. Исследование на экстремум. Интервалы возрастания и убывания функции.

6. Исследование на перегиб. Интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Пример 12. Провести исследование функции

$y = \dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}$ с помощью первой производной и

построить ее график.

1. ООФ $x^2 > 9$ или $|x| > 3$: $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -3 \end{array}\right.$. Четная.

2. Нули, интервалы знакоопределенности: $y > 0$

3. Точки разрыва функции. $x = \pm 3$.

Найдем один из односторонних пределов в обоих точках

3.1. $x=3$. Правый предел: $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}=+\infty$,

$x=3$ - точка разрыва II рода.

3.2. $x=-3$. Левый предел: $\lim\limits_{x\to -3-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=+\infty$,

$x=-3$ - точка разрыва II рода.

4. Асимптоты

4.1. Вертикальные асимптоты: $x=\pm 3$

4.2. Наклонные асимптоты.

Асимптотический метод:

В исходной функции выйдем на большие значения аргумента

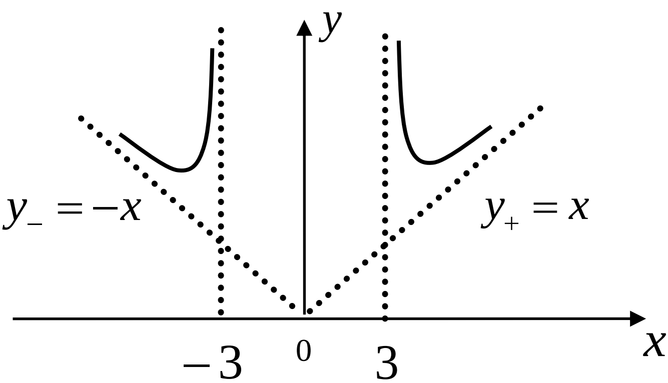
и в знаменателе и числителе удержим главное слагаемое:

$$y=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}=\{|x|>>1\}\to$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\equiv\frac{x^2}{|x|}=\begin{cases}+x\ при\ x\to+\infty\\ -x\ при\ x\to-\infty\end{cases}$$

Правая наклонная асимптота $y_+=x$

Левая наклонная асимптота $y_-=-x$



5. Исследование на экстремум.

$$y'=\left(\frac{x^2+7}{\left(x^2-9\right)^{1/2}}\right)'=\frac{2x\left(x^2-9\right)^{1/2}-\left(x^2+7\right)\frac{1}{2}2x\left(x^2-9\right)^{-1/2}}{\left(x^2-9\right)}=$$

$$\frac{2x\left(x^2-9\right)^{1/2}-\frac{\left(x^2+7\right)}{\left(x^2-9\right)^{1/2}}x}{\left(x^2-9\right)}=$$

$$\frac{2x\left(x^2-9\right)-x\left(x^2+7\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left[2\left(x^2-9\right)-\left(x^2+7\right)\right]}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=$$

$$\frac{x\left(2x^2-18-x^2-7\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

$$y'=\frac{x(x-5)(x+5)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

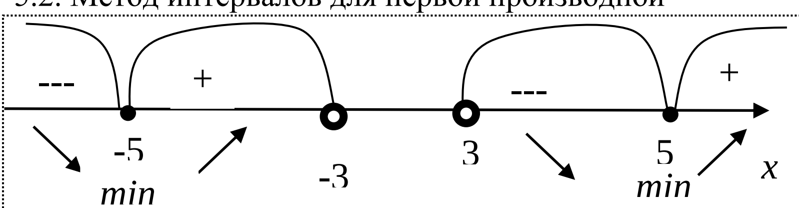
5.1. Критические точки:

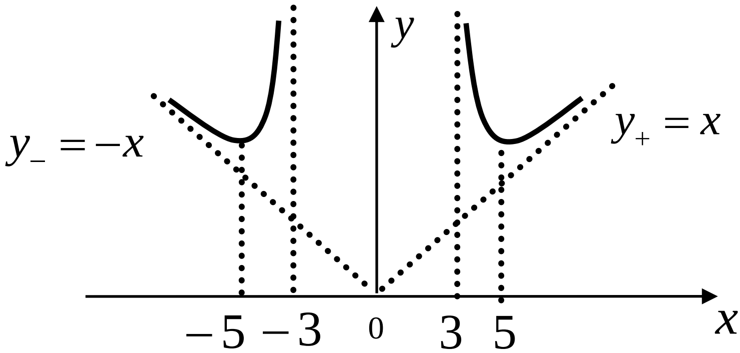
а) $y'=0:\ \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$; б) y' не существует при $x=\pm 3$,

но это не критические точки,

т.к. $x=\pm 3$ точки разрыва II рода.

5.2. Метод интервалов для первой производной





ДЗ $y = \dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$; $y = \dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

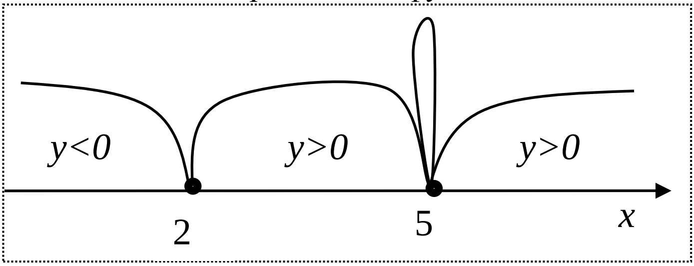
Пример 13. Провести исследование функции $y = (x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}$ с помощью первой производной и построить ее график

1. ООФ $x \in R$. Общего вида.

2. Нули функции: $x = 2$, $x = 5$.

Интервалы знакоопределенности:

Метод интервалов для функции



3. Точки разрыва функции. нет

4. Асимптоты

4.1. Вертикальные: нет

4.2. Наклонные

Асимптотический метод:
в исходной функции выйдем на большие значения аргумента

$$y = (x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3} = x^{1/3}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3} x^{2/3}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2/3} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{в исходной функции выйдем}\\ \text{на большие значения аргумента}\\ |x|>>1\end{array}\right\}\approx$$

Эквивалентные бесконечно малые:

$$(1+\zeta)^n \approx 1+n\zeta \,:\, \left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3} \approx 1-\frac{1}{3}\frac{2}{x},$$

$$\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2/3} \approx 1-\frac{2}{3}\frac{5}{x}$$

$$x\left(1-\frac{1}{3}\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{3}\frac{5}{x}\right)=x\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\frac{10}{3}\frac{1}{x}+\frac{20}{9}\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$x-4+\frac{20}{9}\frac{1}{x}\to x-4$$

Наклонная асимптота $\boxed{y=x-4}$

5. Исследование на экстремум.

$$y'=\left((x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}\right)'=\frac{1}{3}\frac{(x-5)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}}+\frac{2}{3}\frac{(x-2)^{1/3}}{(x-5)^{1/3}}=$$

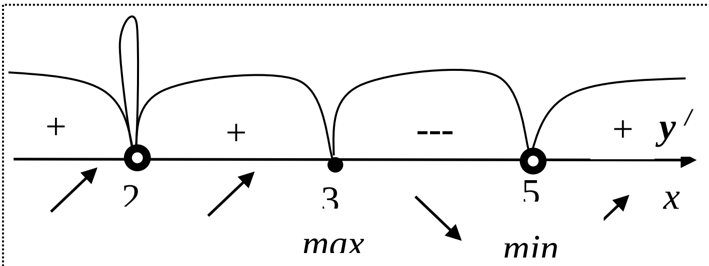
$$\frac{(x-5)^{2/3}(x-5)^{1/3}+2(x-2)^{1/3}(x-2)^{2/3}}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=$$

$$\frac{(x-5)+2(x-2)}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=\frac{3(x-3)}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=$$

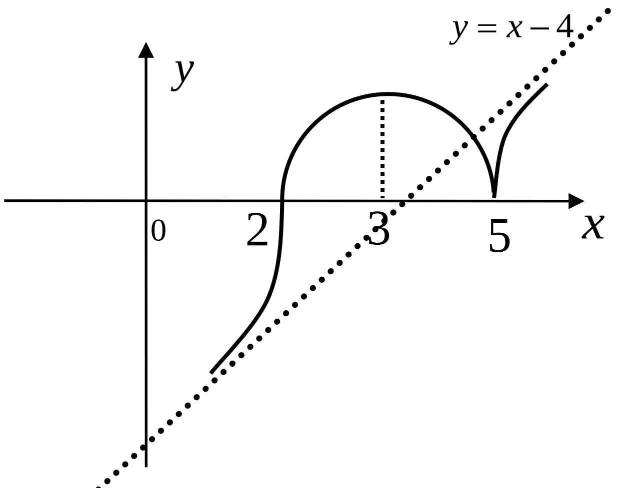
$$\frac{x-3}{(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}$$

5.1. Критические точки:

а) $y' = 0$: $x = 3$; б) y' не существует при $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$



5.2. Метод интервалов для первой производной



ДЗ $y = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}$; $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$

Пример 14. Показать равенство смешанных частных производных функции $z = \cos(2x-3y)e^{-7xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2\sin(2x-3y)e^{-7xy} + \cos(2x-3y)e^{-7xy}(-7y) =$$

$$= -e^{-7xy}\left[2\sin(2x-3y) + 7y\cos(2x-3y)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 7xe^{-7xy}\left[2\sin(2x-3y) + 7y\cos(2x-3y)\right]$$

$$-e^{-7xy}\left[-6\cos(2x-3y) + 7\cos(2x-3y) + 21y\sin(2x-3y)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^{-7xy}\begin{bmatrix}14x\sin(2x-3y)+49xy\cos(2x-3y)-\\ \cos(2x-3y)-21y\sin(2x-3y)\end{bmatrix}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3\sin(2x-3y)e^{-7xy}+\cos(2x-3y)e^{-7xy}(-7x)=$$

$$=e^{-7xy}\left[3\sin(2x-3y)-7x\cos(2x-3y)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-7ye^{-7xy}\left[3\sin(2x-3y)-7x\cos(2x-3y)\right]+$$

$$e^{-7xy}\left[6\cos(2x-3y)-7\cos(2x-3y)+14x\sin(2x-3y)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=e^{-7xy}\begin{bmatrix}-21y\sin(2x-3y)+49xy\cos(2x-3y)-\\ \cos(2x-3y)+14x\sin(2x-3y)\end{bmatrix}}$$

дз $z=\cos(xy)e^{3x+2y}$; $z=\sin(xy)e^{2x+3y}$

Пример 15.1. Исследовать на экстремум

$z=x^4+y^4-(x+y)^2$.

1. Поиск стационарных точек

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2(x+y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2(x+y)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^3-2(x+y)=0\\ 4y^3-2(x+y)=0\end{cases}-\ \Rightarrow$$

$$4x^3=4y^3\Rightarrow x=y$$

Из верхнего уравнения: $4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$

$$x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right., \; M_1(0;\,0), \; \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{array}\right. \; M_2(1;\,1), \; \left[\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ y_3 = -1 \end{array}\right.,$$

$$M_3(-1;\,-1)$$

Три стационарных точки: $M_1(0;\,0)$, $M_2(1;\,1)$,

$$M_3(-1;\,-1)$$

2. Достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2(x + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2(x + y)$$

Находим все вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2 \equiv A; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \equiv B; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2 \equiv C$$

Каждую стационарную точку исследуем отдельно:

2.1. Первая стационарная точка $M_1(0;\,0)$.

$$A = 12x^2 - 2 = -2 < 0,$$

$$B = -2, \; C = 12x^2 - 2 = -2 < 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \Rightarrow M_1(0;\,0) \; ?$$

2.2. Вторая стационарная точка $M_2(1;\,1)$.

$$A = 12x^2 - 2 = 10 > 0,$$

$$B = -2, \; C = 12x^2 - 2 = 10$$

$$\Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \Rightarrow M_2(1;\,1) \; \min$$

2.3. Третья стационарная точка $M_3(-1;-1)$.

$$A=12x^2-2=10>0,$$

$$B=-2,\ C=12x^2-2=10$$

$$\Delta=AC-B^2=100-4>0\Rightarrow M_2(-1;-1)\ \text{min}$$

дз $z=x^4+(y-6)^4-(x+y-6)^2$,

$z=(x+4)^4+y^4-(x+y+4)^2$

Пример 15.2. Исследовать на экстремум

$z=(y-1)^3+3(y-1)x^2-12x-15y+18$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x(y-1)-12,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3(y-1)^2+3x^2-15$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x(y-1)-12=0\\ 3(y-1)^2+3x^2-15=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x(y-1)-2=0\\ (y-1)^2+x^2-5=0\end{cases}$$

Из верхнего уравнения: $(y-1)=\dfrac{2}{x}$ подставляем в нижнее:

$$\frac{4}{x^2}+x^2-5=0\Rightarrow x^4-5x^2+4=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right.$$

$$x^2 = 1: \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = \frac{2}{x} + 1 = 3 \end{array} \right., \; M_1(1;3),$$

$$\left[\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = \frac{2}{x} + 1 = -1 \end{array} \right. \; M_2(-1;-1)$$

$$x^2 = 4: \left[\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ y_3 = \frac{2}{x} + 1 = 2 \end{array} \right., \; M_3(2;2),$$

$$\left[\begin{array}{l} x_4 = -2 \\ y_4 = \frac{2}{x} + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad M_4(-2;0)$$

Четыре стационарных точки: $M_1(1;3)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(2;2)$, $M_4(-2;0)$

2. Достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x(y-1) - 12, \; \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y-1)^2 + 3x^2 - 15$$

Находим все вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(y-1) \equiv A; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x \equiv B; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6(y-1) \equiv C$$

Каждую стационарную точку исследуем отдельно:

2.1. Первая стационарная точка $M_1(1;3)$.

$$A = 12; \; B = 6; \; C = 12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow M_1(1;3)$$

min

2.2. Вторая стационарная точка $M_2(-1;-1)$.

$$A = -12 < 0;\ B = -6;\ C = -12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 144 - 36 > 0 \Rightarrow$$

$M_2(-1;-1)$ max

2.3. Третья стационарная точка $M_3(2;2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(y-1) \equiv A;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x \equiv B;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6(y-1) \equiv C$$

$$A = 6;\ B = 12;\ C = 6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow$$

$M_3(2;2)$ не экстремальная.

2.4. Четвертая стационарная точка $M_4(-2;0)$.

$$A = -6;\ B = -12;\ C = -6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0 \Rightarrow$$

$M_4(-2;0)$ не экстремальная.

ДЗ $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

$z = 12x^3 + xy^2 - 40x + 4y$

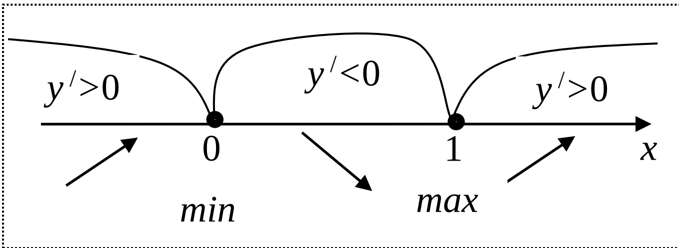
Пример 16. Исследовать на экстремум $y = \frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{3}{2}x^{2/3}$

1. Поиск критических точек $\quad y' = x^{2/3} - \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{x-1}{x^{1/3}}$

а) $y' = 0 \rightarrow x = 1$ - критическая точка;

б) $y'\ не\ \exists \rightarrow x = 0$ - критическая точка

2. Метод интервалов для первой производной



ДЗ. $y = \dfrac{3}{17}x^{17/3} - \dfrac{3}{2}x^{2/3}$; $y = \dfrac{3}{38}x^{38/3} - \dfrac{3}{2}x^{2/3}$

КР2 Банк задач

1. Найти первую производную

1.1. $y = x^3 \cdot \arccos^4 5x$

1.2. $y = x^3 \cdot \operatorname{arcctg}^4 5x$

1.3. $y = x^3 \cdot \arcsin^5 6x$

1.4. $y = x^3 \cdot \arccos^2 4x$

1.5. $y = x^2 \cdot \arcsin^5 2x$

1.6. $y = x^3 \cdot \operatorname{arcctg}^4 5x$

1.7. $y = x^2 \cdot \arcsin^3 2x$

1.8. $y = x^5 \cdot \arcsin^4 3x$

1.9. $y = x^3 \cdot \arccos^4 5x$

1.10. $y = x^2 \cdot \arcsin^3 2x$

1.11. $y = x^8 \cdot \arcsin^9 7x$

1.12. $y = x^6 \cdot \arccos^4 7x$

1.13. $y = x^2 \cdot \operatorname{arcctg}^3 2x$

1.14. $y = x^4 \cdot \operatorname{arctg}^3 6x$

1.15. $y = x^4 \cdot \operatorname{arcctg}^5 6x$

1.16. $y = x^3 \cdot \arcsin^5 6x$

2. Найти первую производную

2.1. $y = \dfrac{\sin^3 2x}{x^2}$

2.2. . $y = \dfrac{\sin^3 2x}{x^2}$

2.3. $y = \dfrac{\cos^6 4x}{x^2}$

2.4. $y = \dfrac{\cos^3 4x}{x^5}$

2.5. $y=\dfrac{\sin^5 3x}{x^2}$

2.6. $y=\dfrac{\sin^5 4x}{x^3}$

2.7. $y=\dfrac{\tan^5 2x}{x^3}$

2.8. $y=\dfrac{\cos^3 4x}{x^5}$

2.9. $y=\dfrac{\cos^4 3x}{x^2}$

2.10. $y=\dfrac{\sin^2 5x}{x^3}$

2.11. $y=\dfrac{\sin^2 5x}{x^3}$

2.12. $y=\dfrac{\cos^4 3x}{x^2}$

2.13. $y=\dfrac{\cos^4 2x}{x^2}$

2.14. $y=\dfrac{\cos^6 2x}{x^4}$

2.15. $y=\dfrac{\sin^3 2x}{x^2}$

2.16. $y=\dfrac{\cos^3 4x}{x^5}$

3. Найти первую производную

3.1. $y=\cos^5\left(e^{-2x^3}\right).$

3.2. $y=\sin^4\left(e^{-2x^3}\right)$

3.3. $y=\cos^2\left(e^{-2x^3}\right)$

3.4. $y=\sin^3\left(e^{-3x^2}\right)$

3.5. $y=\sin^2\left(e^{-4x^3}\right)$

3.6. $y=\sin^6\left(e^{-4x^3}\right)$

3.7. $y=\cos^3\left(e^{-3x^2}\right)$

3.8. $y=\sin^3\left(e^{-3x^4}\right)$

3.9. $y=\sin^{10}\left(e^{-9x^5}\right)$

3.10. $y=\tan^6\left(e^{-3x^4}\right)$

3.11. $y=\cos^8\left(e^{-7x^3}\right)$

3.12. $y=\cos^5\left(e^{-3x^2}\right)$

3.13. $y=\cos^2\left(e^{-2x^3}\right)$

3.14. $y=\cos^9\left(e^{-8x^3}\right)$

3.15. $y=\sin^7\left(e^{-6x^5}\right)$

3.16. $y=\sin^3\left(e^{-3x^2}\right)$

4. Найти первую производную

4.1. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(5x)}$

4.2. $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}(6x)}$

4.3. $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}(7x)}$

4.4. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\arctan(8x)}$

4.5. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(3x)}$

4.6. $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}(7x)}$

4.7. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(3x)}$

4.8. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\arccos(4x)}$

4.9. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\arctan(8x)}$

4.10. $y=(\cot x)^{\arctan(6x)}$

4.11. $y=(\cos x)^{\operatorname{arctg}(7x)}$

4.12. $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{arctg}(6x)}$

4.13. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(5x)}$

4.14. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\arcsin(5x)}$

4.15. $y=(\cot x)^{\arccos(5x)}$

4.16. $y=(\tan x)^{\arcsin(6x)}$

5. Найти первую производную

5.1. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)=0$

5.2. $y^7x^5+\tan^4(8x-9y)=0$

5.3. $y^3x^2+\mathrm{tg}^4(2x-5y)=0$

5.4. $y^2x^3+\mathrm{ctg}^4(6x-2y)=0$

5.5. $y^5x^2+\sin^3(7x-5y)=0$

5.6. $y^4x^3+\mathrm{tg}^5(3x-2y)=0$

5.7. $y^5x^2+\sin^3(7x-5y)=0$

5.8. $y^4x^3+\mathrm{tg}^5(3x-2y)=0$

5.9. $y^5x^2+\mathrm{tg}^4(4x-7y)=0$

5.10. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)=0$

5.11. $y^3x^2+\mathrm{tg}^5(2x-5y)=0$

5.12. $y^5x^2+\mathrm{tg}^3(4x-7y)=0$

5.13. $y^3x^5+\cos^2(5x-6y)=0$

5.14. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)=0$

5.15. $y^3x^2+\mathrm{tg}^4(2x-5y)=0$

5.16. $y^5x^2+\mathrm{tg}^4(4x-7y)=0$

6. Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданной функции

6.1. $\begin{cases} y=\cos^3 t \\ x=\sin^2 t \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} y=\sqrt{1-t^2} \\ x=\arcsin t \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} y = \operatorname{arctan} t \\ x = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} y = \arccos t \\ x = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} y = \sin t \\ x = \operatorname{tg} t \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} y = \operatorname{ctg} t \\ x = \operatorname{tg} t \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} y = \cos t \\ x = \operatorname{ctg} t \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} y = 3t^5 + t^3 \\ x = 5t^3 + 3t \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = \cot^3 t \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} y = \sin^3 t \\ x = \cos^3 t \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} y = \ln\left(1+t^2\right) \\ x = \operatorname{arcctg} t \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} y = \left(1-t^2\right)^{5/2} \\ x = \arccos t \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} y = t^6 + t^4 \\ x = \ln\left(t^3 + 2t\right) \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} y = \left(t^4 - 1\right)^2 \\ x = \left(t^2 - 1\right)^2 \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} y = \cos t \\ x = \cot t \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} y = \sin^3 t \\ x = \cos^3 t \end{cases}$

7. Исходя из определения, найти производную функции

7.1. $y = \cos\left(10x^6\right)$

7.2. $y = \sin\left(4x^7\right)$

7.3. $y = \sin\left(7x^4\right)$

7.4. $y = e^{-6x^5}$

7.5. $y = e^{-8x^4}$

7.6. . $y = \sin(8x^4)$

7.7. $y = \cos(10x^5)$

7.8. $y = \cos(10x^5)$

7.9. $y = \sin(3x^5)$

7.10. $y = \cos(7x^5)$

7.11. $y = e^{-3x^7}$

7.12. $y = \cos(6x^7)$

7.13. $y = \cos(4x^8)$

7.14. . $y = e^{-3x^9}$

7.15. $y = \sin(4x^9)$

7.16. $y = e^{-4x^{10}}$

8. Найти предел

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(6x)-\mathrm{arctg}(6x)}{x^3}$

8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,3x-\mathrm{tg}\,3x}{x^3}$

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{x^3}$

8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\mathrm{tg}\,3x}{x^3}$

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin 3x}{x^3}$

8.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\arcsin 5x}{x^3}$

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,8x-\mathrm{tg}\,8x}{x^3}$

8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(12x)-\mathrm{arctg}(12x)}{x^3}$

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x-\arcsin 4x}{x^3}$

8.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}9x-\arcsin 9x}{x^3}$

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}$

8.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}11x-\arcsin 11x}{x^3}$

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(15x)-\operatorname{arctg}(1\text{`}5x)}{x^3}$

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-\operatorname{tg}x}{x^3}$

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)-\arcsin(6x)}{x^3}$

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\arcsin 4x}{x^3}$

9. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции

9.1. $y=(x+2)^3\cdot(3-x)^2$

9.2. $y=(x+3)^4\cdot(4-x)^3$

9.3. $y=(x+4)^5\cdot(5-x)^4$

9.4. $y=(x+5)^6\cdot(6-x)^5$

9.5. $y=(x+6)^7\cdot(7-x)^6$

9.6. $y=(x+7)^8\cdot(8-x)^7$

9.7. $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$

9.8. $y=(x+9)^{10}\cdot(10-x)^9$

9.9. $y=(x+10)^{11}\cdot(11-x)^{10}$

9.10. $y=(x+11)^{12}\cdot(12-x)^{11}$

9.11. $y=(x+12)^{13}\cdot(13-x)^{12}$

9.12. $y=(x+13)^{14}\cdot(14-x)^{13}$

9.13. $y=(2x-4)^{6}\cdot(3-2x)^{5}$

9.14. $y=(2x-1)^{4}(3-4x)^{3}$

9.15. $y=(2x-3)^{2}\cdot(3-4x)^{3}$

9.16. $y=(2x-1)^{3}(3-2x)^{2}$

10. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции

10.1. $y=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.2. $y=\frac{3}{20}x^{20/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.3. $y=\frac{3}{23}x^{23/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.4. $y=\frac{3}{29}x^{29/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.5. $y=\frac{3}{32}x^{32/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.6. $y=\frac{3}{8}x^{8/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.7. $y=\frac{3}{11}x^{11/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.8. $y=\frac{3}{14}x^{14/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.9. $y=\frac{3}{17}x^{17/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.10. $y=\frac{3}{26}x^{26/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.11. $y=\frac{3}{35}x^{35/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.12. $y=\frac{3}{38}x^{38/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.13. $y=\frac{3}{17}x^{17/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.14. $y=\frac{3}{29}x^{29/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.15. $y=\frac{3}{20}x^{20/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

10.16. $y=\frac{3}{32}x^{32/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

11. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции

11.1. $y=\frac{1}{21}x^{7}+\frac{4}{5}x^{5}-3x^{3}$

11.2. $y=\frac{1}{30}x^{6}-\frac{1}{4}x^{4}-2x^{2}$

11.3. $y=\frac{1}{28}x^{8}-\frac{1}{5}x^{6}-\frac{2}{3}x^{4}$

11.4. $y=-\frac{1}{42}x^{7}+\frac{2}{5}x^{5}+\frac{3}{2}x^{3}$

11.5. $y=\frac{1}{56}x^8-\frac{1}{10}x^6-\frac{1}{3}x^4$

11.6. $y=-\frac{1}{21}x^7-\frac{4}{5}x^5+3x^3$

11.7. $y=-\frac{1}{56}x^8+\frac{1}{10}x^6+\frac{1}{3}x^4$

11.8. $y=\frac{1}{30}x^6-\frac{2}{3}x^4-\frac{9}{2}x^2$

11.9. $y=-\frac{1}{28}x^8+\frac{1}{5}x^6+\frac{2}{3}x^4$

11.10. $y=\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{2}x^4-4x^2$

11.11. $y=-\frac{1}{7}x^7-\frac{12}{5}x^5+9x^3$

11.12. $y=\frac{1}{14}x^8-\frac{2}{5}x^6-\frac{4}{3}x^4$

11.13. $y=\frac{1}{30}x^6-\frac{2}{3}x^4-\frac{9}{2}x^2$

11.14. $y=-\frac{1}{30}x^6+\frac{1}{4}x^4+2x^2$

11.15. $y=-\frac{1}{30}x^6+\frac{2}{3}x^4+\frac{9}{2}x^2$

11.16. $y=\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{2}x^4-4x^2$

12. Провести исследование функции с помощью первой производной и построить график

12.1. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}$

12.2. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x-5)^2}$

12.3. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$

12.4. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}$

12.5. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}$

12.6. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-6)^2}$

12.7. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x-5)^2}$

12.8. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-4)^2}$

12.9. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-5)^2}$

12.10. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+5)^2}$

12.11. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-7)^2}$

12.12. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-5)^2}$

12.13. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x-5)^2}$

12.14. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}$

12.15. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-7)^2}$

12.16. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x-5)^2}$

13. Найти все асимптоты графика функции

13.1. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-16}$

13.2. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-1}$

13.3. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 - 9}$

13.4. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{x^2 - 4}$

13.5. $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + x + 2}{x^2 - 36}$

13.6. $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + x + 2}{x^2 - 100}$

13.7. $y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$

13.8. $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 - 121}$

13.9. $y = \dfrac{x^3 + 8x^2 + x + 2}{x^2 - 81}$

13.10. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{x^2 - 4}$

13.11. $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49}$

13.12. $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + x + 2}{x^2 - 81}$

13.13. $y = \dfrac{x^3 + 7x^2 + x + 2}{x^2 - 64}$

13.14. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 - 9}$

13.15. $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 16}$

13.16. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-25}$

14. Провести исследование функции с помощью первой производной и построить график

14.1. $y=\dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-49}}$

14.2. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2-64}}$

14.3. $y=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-81}}$

14.4. $y=\dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

14.5. $y=\dfrac{2x^2+18}{\sqrt{x^2-36}}$

14.6. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$

14.7. $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2-16}}$

14.8. $y=\dfrac{3x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

14.9. $y=\dfrac{3x^2+21}{\sqrt{x^2-9}}$

14.10. $y=\dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$

14.11. $y=\dfrac{x^2+25}{\sqrt{x^2-100}}$

14.12. $y=\dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

14.13. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$

14.14. $y=\dfrac{3x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

14.15. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-121}}$

14.16. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2-64}}$

15. Показать равенство смешанных частных производных

15.1. $z=\sin(x-y)e^{4xy}$

15.2. $z=\operatorname{ctg}(x+y)e^{3xy}$

15.3. $z = \cos(xy)e^{2x+2y}$

15.4. $z = \operatorname{tg}(x+y)e^{4xy}$

15.5. $z = \cos(xy)e^{3x+3y}$

15.6. $z = \cos(xy)e^{2x+2y}$

15.7. $z = \sin(xy)e^{3x+3y}$

15.8. $z = \sin(xy)e^{4x+4y}$

15.9. . $z = \operatorname{ctg}(x+y)e^{6xy}$

15.10. $z = \cos(x-y)e^{3xy}$

15.11. $z = \cos(x-y)e^{5xy}$

15.12. $z = \operatorname{tg}(x-y)e^{3xy}$

15.13. $z = \operatorname{ctg}(x+y)e^{3xy}$

15.14. $z = \sin(3x-2y)e^{4xy}$

15.15. $z = \sin(xy)e^{5x+5y}$

15.16. $z = \cos(xy)e^{6x+6y}$

16. Исследовать на экстремум

16.1. $z = (x+4)^4 + y^4 - (x+y+4)^2$

16.2. . $z = (x+2)^4 + (y-2)^4 - (x+y)^2$

16.3. $z = (x+6)^4 - 4xy - 24y + 2y^2$

16.4. $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

16.5. $z = x^4 + (y-4)^4 - (x+y-4)^2$

16.6. $z=(x+1)^4+(y-3)^4-(x+y-2)^2$

16.7. $z=(x+5)^4+(y+1)^4-(x+y+6)^2$

16.8. $z=(x-1)^3+3(x-1)y^2-15x-12y$

16.9. $z=2x^3-2xy^2+2x^2+4y^2$

16.10. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

16.11. $z=(x+1)^3+3(x+1)y^2-15x-12y$

16.12. $z=(y-1)^3+3(y-1)x^2-12x-15y+18$

16.13. $z=x^3+3x(y-1)^2-15x-12y$

16.14. $z=12x^3+xy^2-40x+4y$

16.15. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

16.16. $z=x^3+3x(y+1)^2-15x-12y$

КР3 Вариант 0

1. $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}$

2. $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x dx}{\sin^{13} x}$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$

4. $\displaystyle\int\ln x dx$

5. $\displaystyle\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$

6. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{(4-5\tan x)dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$y = x^2$, $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3x$.

8. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси oy фигуры, ограниченной графиками функций

$y = \sqrt{16-x}$ и $y = 0$ при $0 \le x \le 16$.

9. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$

10. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}$

11. Исследовать на абсолютную и условную сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)$$

12. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$$

13. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

14. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$,

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le x\end{cases}.$$

15. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^3\cos(xy)dxdy$,

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le x^2\end{cases}.$$

16. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xye^{-2x-3y}dxdy$,

$$D:\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}.$$

17. Теоретический вопрос

КР3 Теоретические вопросы

1. Определение неопределенного интеграла. Его свойства
2. Таблица неопределенных интегралов.
3. Определение дифференциала функции одной переменной. Таблица дифференциалов.
4. Подведение функции под знак дифференциала. Таблица подведения под знак дифференциала.
5. Теорема интегрирования по частям.
6. Определение простейших рациональных дробей.
7. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла.
8. Определение несобственного интеграла.
9. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.
10. Предельный признак сравнения несобственных интегралов.
11. Определение сходящихся и расходящихся числовых рядов.

12. Предельный признак сравнения знакоположительных числовых рядов.
13. Интегральный признак сходимости знакоположительных числовых рядов.
14. Признак Даламбера сходимости знакоположительных числовых рядов.
15. Признак Коши сходимости знакоположительных числовых рядов.
16. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся числовых рядов.
17. Определение условно сходящегося знакочередующегося числового ряда.
18. Определение абсолютно сходящегося знакочередующегося числового ряда.
19. Определение степенного ряда.
20. Признак Даламбера сходимости степенного ряда.

КР3 Подготовка

Подведение функции под знак дифференциала

$$f(x)dx = d(F(x)),\ \text{где}\ \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Таблица подведения под знак дифференциала

1. $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$

2. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$

3. $e^x dx = d\left(e^x\right)$

4. $\sin x dx = d(-\cos x)$

5. $\cos x dx = d(\sin x)$

6. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$

7. $\frac{dx}{\sin^2 x} = d(-\cot x)$

8. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x)$

9. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2. $\int d(F(x)) = F(x) + C$

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arctan} x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C\end{array}\right.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l}\arcsin x + C \\ -\arccos x + C\end{array}\right.$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Пример 1.1. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2 - 7x + 6}$

Метод: разложение подинтегральной дроби на простейшие

$$\frac{1}{x^2-7x+6}=\frac{1}{(x-6)(x-1)}=$$

$$\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x-6)}{(x-6)(x-1)}=$$

$$\frac{x(A+B)+x^0(-A-6B)}{(x-6)(x-1)}=$$

$$\left.\begin{aligned} x^1 &: 0=A+B \\ x^0 &: 1=-A-6B \end{aligned}\right\} +$$

$1=-5B \qquad\qquad B=-1/5$

Из (1): $A=-B=1/5$

$$\frac{1}{x^2-7x+6}=\frac{1/5}{x-6}-\frac{1/5}{x-1}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-7x+6}=\int\left(\frac{1/5}{x-6}-\frac{1/5}{x-1}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-6}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$\frac{1}{5}\ln(x-6)-\frac{1}{5}\ln(x-1)+C$$

ДЗ $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+9x+8}$

Пример 1.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}$

Метод: разложение подинтегральной функции на простейшие дроби

$$\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)(x-1)}=$$

$$\frac{x^2(A+C)+x(-A+B-2C)+x^0(-B+2C)}{(x^2-2x+2)(x-1)}=$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2:1=A+C \\ x^1:0=-A+B-2C \\ x^0:1=-B+2C \end{array}\right\}+$$

$$2=C$$

Из (1): $A=1-C=-1$

Из (3): $\boxed{B=2C-1=3}$

$$\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\frac{C}{x-1}=$$

$$\frac{-x+3}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x-1}$$

$$\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}=$$

$$-\int\frac{xdx}{(x^2-2x+2)}+3\int\frac{dx}{(x^2-2x+2)}+2\int\frac{dx}{(x-1)}=$$

$$-\int\frac{xdx}{(x-1)^2+1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}+2\int\frac{dx}{(x-1)}=$$

$$-\int\frac{(x-1+1)d(x-1)}{(x-1)^2+1}+3\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}+2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)}=$$

$$-\int\frac{(x-1)d(x-1)}{(x-1)^2+1}-\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}+$$

$$3\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}+2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)}=$$

$$-\int\frac{(x-1)d(x-1)}{(x-1)^2+1}+2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1}+2\ln(x-1)=$$

$$-\int\frac{d\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)}{(x-1)^2+1}+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)=$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2+1}+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)=$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left((x-1)^2+1\right)}{(x-1)^2+1}+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)=$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+1\right)+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)+C$$

ДЗ $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+2x+5)(x-7)}$; $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-5)}$;

$\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+8x+17)(x-13)}$.

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^8 x dx}{\cos^{10} x}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\sin^8 x dx}{\cos^{10} x} = \int \frac{\sin^8 x dx}{\cos^8 x \cos^2 x} = \left\{ \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x) \right\} =$$

$$\int \tan^8 x d(\tan x) = \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

дз $\int \frac{\cos^{10} x\, dx}{\sin^{12} x}$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{13} x}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{13} x} = \int \frac{\cos^4 x \cos x dx}{\sin^{13} x} =$$

$$\{\cos x dx = d(\sin x)\} = \int \frac{\left(\cos^2 x\right)^2 d(\sin x)}{\sin^{13} x} ==$$

$$\{\sin x = t\} = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^2 dt}{t^{13}} = \int \frac{\left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt}{t^{13}} =$$

$$\int \frac{dt}{t^{13}} - 2\int \frac{dt}{t^{11}} + \int \frac{dt}{t^9} =$$

$$\int t^{-13} dt - 2\int t^{-11} dt + \int t^{-9} dt =$$

$$\frac{t^{-13+1}}{-13+1} - 2\frac{t^{-11+1}}{-11+1} + \frac{t^{-9+1}}{-9+1} =$$

$$-\frac{1}{12}\frac{1}{\sin^{12} x} + \frac{1}{5}\frac{1}{\sin^{10} x} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sin^8 x} + C$$

ДЗ $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^9 x}$, $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^8 x}$

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}} = \int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x)} = \int \frac{d\left(2x^{1/2}\right)}{(1+x)} =$$

$$2\int \frac{d\left(x^{1/2}\right)}{(1+x)} = 2\int \frac{d\left(x^{1/2}\right)}{\left(1+\left(x^{1/2}\right)^2\right)} = 2\arctan\left(x^{1/2}\right)+C$$

ДЗ $\int \frac{dx}{x^{2/3}+x^{4/3}}$ **;** $\int \frac{dx}{x^{3/4}+x^{5/4}}$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^{1/10}+x}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{dx}{x^{1/10}+x} = \int \frac{dx}{x^{1/10}\left(1+x^{9/10}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{10}{9}x^{9/10}\right)}{\left(1+x^{9/10}\right)} =$$

$$\frac{10}{9}\int \frac{d\left(x^{9/10}+1\right)}{\left(1+x^{9/10}\right)} = \frac{10}{9}\ln\left(x^{9/10}+1\right)+C$$

ДЗ $\int \frac{dx}{x^{1/11}+x}$

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\int xe^{3x}dx$

Метод интегрирования: по частям

$$\int \overset{U}{\overbrace{x}} \cdot \overset{dV}{\overbrace{e^{3x}dx}} = UV - \int VdU = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

$U=x$	$dU=dx$
$dV = e^{3x}dx$	$\int dV = V = \int e^{3x}dx = \frac{3}{3}\int e^{3x}dx =$ $\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

Пример 4.2. Вычислить $\int \arctan x dx$

Метод интегрирования: по частям

$$\int \overset{U}{\overbrace{\arctan x}} \cdot \overset{dV}{\overbrace{dx}} = UV - \int VdU = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$x\arctan x - \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+x^2} =$$

$U = \arctan x$	$dU = \frac{dx}{1+x^2}$
$dV = dx$	$\int dV = V = x$

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} =$$

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

ДЗ $\int x^2 \ln x dx$, $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

Метод интегрирования: замена переменной

Замена: $x = 4\sin t \;\rightarrow\; dx = 4\cos t\,dt$,

$$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = 4\cos t$$

Нижний предел интегрирования:

$$x = 0 \;\rightarrow\; t = \arcsin\left(\frac{0}{4}\right) = 0$$

Верхний предел интегрирования:

$$x = 4 \;\rightarrow\; t = \arcsin\left(\frac{4}{4}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2}\left(16\sin^2 t\right)\left(4\cos t\right)4\cos t\,dt =$$

$$64\cdot 4\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t\right)dt =$$

$$\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t, \quad \sin^2 t\cos^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t$$

$$\sin^2(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{2}$$

$$16*4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = 16\cdot 4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$32\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos 4t\right)dt =$$

$$32\int_0^{\pi/2} dt - 32\int_0^{\pi/2}\cos 4t\,dt = 32t\Big|_0^{\pi/2} - 8\int_0^{\pi/2}\cos 4t\,d(4t) =$$

$$32\frac{\pi}{2} - 8\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = 16\pi - 8(\sin 2\pi - \sin 0) = 16\pi$$

ДЗ $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$; $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4}\frac{(4-5\tan x)dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(4-5\tan x)dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4}\frac{(4-5\tan x)dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+4\right)} =$$

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(4-5\tan x)d(\tan x)}{(\tan^2 x + 4)} = \{\tan x = t\} =$$

Нижний предел интегрирования

$$x = 0 \;\rightarrow\; t = \tan 0 = 0$$

Верхний предел интегрирования

$$x = \frac{\pi}{4} \;\rightarrow\; t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\int_0^1 \frac{(4-5t)dt}{(t^2+4)} = 4\int_0^1\frac{dt}{(t^2+4)} - 5\int_0^1\frac{tdt}{(t^2+4)} = \left\{tdt = d\left(\frac{t^2}{2}\right)\right\} =$$

$$\frac{4}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} - 5\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\left(t^2+4\right)} = 2\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} - \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{d\left(t^2+4\right)}{\left(t^2+4\right)} =$$

$$2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{5}{2}\ln\left(t^2+4\right)\Big|_0^1 = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\ln\frac{5}{4}$$

ДЗ $\displaystyle\int_0^{\mathrm{arctg}3} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin 2x}$

Метод интегрирования: подведение под знак дифференциала

$$\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin x\cos x} =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{d(\tan x)}{(3\tan x+5)\tan x} = \{\tan x = t\} =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{d(\tan x)}{(3\tan x+5)\tan x} =$$

Нижний предел интегрирования

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Верхний предел интегрирования

$$x = \arctan 3 \rightarrow t = \tan(\arctan 3) = 3$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{(3t+5)t} = \left\{\begin{array}{l} \textit{подинтегральная функция } \frac{1}{(3t+5)t} \\ \textit{правильная рациональная дробь.} \\ \textit{Разваливаем на простейшие} \end{array}\right\} =$$

$$\frac{1}{(3t+5)t} = \frac{A}{3t+5} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(3t+5)}{(3t+5)t} = \frac{t^1(A+3B) + t^0 5B}{(3t+5)t}$$

$$\left.\begin{array}{l} t^1 : 0 = A + 3B \\ t^0 : 1 = 5B \end{array}\right\}$$

Из второго: $B = \frac{1}{5}$. Из первого: $A = -3B = -\frac{3}{5}$

$$\frac{1}{(3t+5)t} = \frac{-3/5}{3t+5} + \frac{1/5}{t}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{(3t+5)t} = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\frac{-3/5}{3t+5} + \frac{1/5}{t}\right)dt =$$

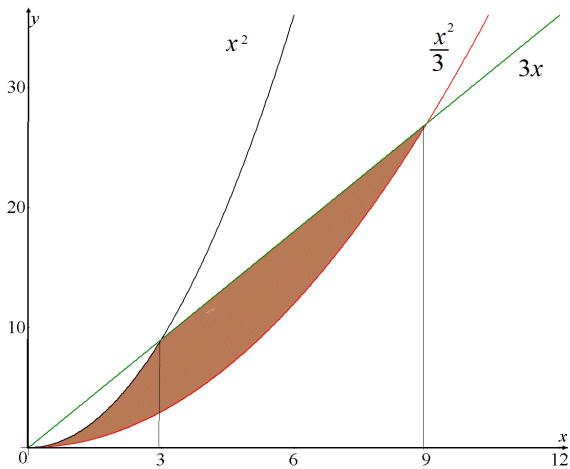
$$-\frac{3}{10}\int_1^3 \frac{dt}{3t+5} + \frac{1}{10}\int_1^3 \frac{dt}{t} =$$

$$-\frac{1}{10}\int_1^3 \frac{d(3t+5)}{3t+5} + \frac{1}{10}\int_1^3 \frac{dt}{t} = -\frac{1}{10}\ln(3t+5)\Big|_1^3 + \frac{1}{10}\ln t\Big|_1^3 =$$

$$-\frac{1}{10}(\ln 14 - \ln 5) + \frac{1}{10}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{14}\right)$$

ДЗ $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}6} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+7)\sin 2x}$; $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}9} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+10)\sin 2x}$

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3x$.



$$x^2 = 3x \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right., \qquad \frac{x^2}{3} = 3x \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 9 \end{array}\right.$$

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx + \int_3^9 \left(3x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^3 + 3\frac{x^2}{2} \Bigg|_3^9 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} \Bigg|_3^9 =$$

$$\frac{2}{9} 27 + \frac{3}{2}\left(9^2 - 3^2\right) - \frac{1}{9}\left(9^3 - 3^3\right) = 6 + 108 - 78 = 36$$

ДЗ Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: 1) $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 64x$;

2) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = 2x$;

3) $y = x^3$, $y = \frac{x^3}{9}$ и $y = 9x$.

Пример 8. Найти объемы тел, образованного при вращении вокруг осей ox и oy фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{16-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 16$.

1. Вращение вокруг оси ox.

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

$$V_x=\pi\int_0^{16}(16-x)dx=\pi\int_0^{16}(16-x)dx=\pi\left(16x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{16}=$$

$$=\pi\left(16^2-\frac{16^2}{2}\right)=\pi\frac{16^2}{2}=8\cdot 16\pi=108\pi$$

2. Вращение вокруг оси oy.

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

$$V_y=2\pi\int_0^{16}x\sqrt{16-x}dx=$$

$$2\pi\int_4^0\left(16-t^2\right)t(-2t)dt=-4\pi\int_4^0\left(16-t^2\right)t^2dt=$$

Замена: $\sqrt{16-x}=t\ \rightarrow\ 16-x=t^2\ \rightarrow\ x=16-t^2$

$$dx=-2tdt$$

Нижний предел интегрирования

$$x=0\ \rightarrow\ t=\sqrt{16-x}=4$$

Верхний предел интегрирования

$$x=16\ \rightarrow\ t=\sqrt{16-x}=0$$

$$-4\pi\int_4^0\left(16t^2-t^4\right)dt=-4\pi\left(16\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_4^0=-4\pi\left[0-\left(16\frac{4^3}{3}-\frac{4^5}{5}\right)\right]=$$

$$4\pi\left(16\frac{4^3}{3}-\frac{4^5}{5}\right)=4\pi\left(\frac{4^5}{3}-\frac{4^5}{5}\right)=4^6\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{2\cdot 4^6}{15}>0$$

ДЗ Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси oy фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{25-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 25$.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$

Признак Даламбера: $a_n=n^3e^{-n}$,

$$a_{n+1}=(n+1)^3e^{-(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3e^{-(n+1)}}{n^3e^{-n}}=$$

$$\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{e}<1\quad \textit{сходится}$$

ДЗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot e^{-3n}$

Пример 10. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}$

Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n=\left\{1^\infty\right\}=$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{структура числа } e:\\ \lim\limits_{\varsigma\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varsigma}\right)^{\varsigma}=e\end{matrix}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)-5}{n+2}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-5}}\right]^{\frac{-5n}{n+2}}=$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{операцию предела и экспоненты}\\ \textit{меняем местами и переходим к пределу}\\ \textit{в показателе экспоненты}\end{matrix}\right\}=$$

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{-5n}{n+2}\right)=e^{-5}<1\;\textit{сходится}$$

ДЗ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-6}{n-5}\right)^{n^2}$

Пример 11. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right).$$

Используем предельный признак сравнения: найдем упрощенный числовой ряд, эквивалентный исходному ряду в смысле сходимости

$$n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)\xrightarrow[n>>1]{}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

1. Исследование упрощенного знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Используем интегральный признак сходимости:
данному знакоположительному числовому ряду поставим в соответствии
несобственный интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Leftrightarrow \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}.$$

Это частный случай эталонного несобственного интеграла

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha \le 1 \; расходится \\ \alpha > 1 \; сходится \end{cases}$$

В нашем случае $\alpha = 1$ и несобственный интеграл расходится.
и знакоположительный числовой ряд расходится.
Следовательно, абсолютной сходимости у исходного числового ряда нет.
Но отсутствие абсолютной сходимости оставляет возможность
условной сходимости

2. Исследование на условную сходимость (признак Лейбница)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n = \frac{1}{n} > 0$$

2.1. Исследование на монотонность:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$\{a_n\}$ убывающая

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Оба пункта Лейбница выполнены.

Следовательно исходный ряд сходится условно

ДЗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}\right)$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

Пример 12. Исследовать степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}}$ на сходимость на всей действительной оси

1. Составляем ряд из модулей членов исходного степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-1|^n}{n^{3/4}},$$

Признак Даламбера для знакоположительного степенного ряда:

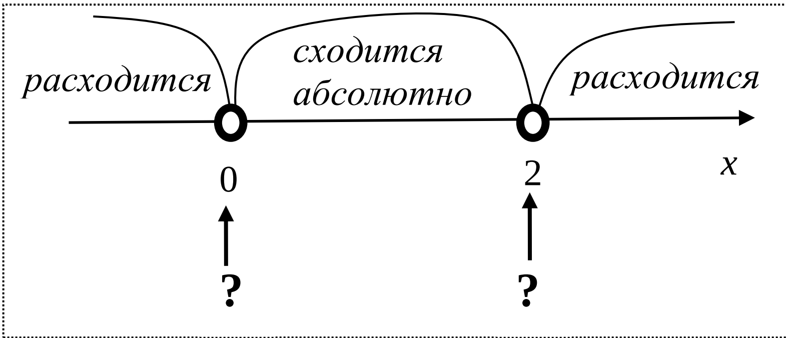
$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}|x-1|^{n+1}}{C_n|x-1|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^{3/4}}}{\frac{|x-1|^n}{n^{3/4}}}=$$

$$|x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/4}}{(n+1)^{3/4}}=$$

$$|x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/4}=|x-1|$$

1.1. $|x-1|<1 \to -1<x-1<1$ сходится абсолютно при $0<x<2$

1.2. $|x-1|>1$ $\left[\begin{array}{l}x-1>1\\x-1<-1\end{array}\right.$ расходится при $\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$



2. Исследование на сходимость в точках $x = 2$ и $x = 0$

2.1. $x = 2: \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-1)^n}{n^{3/4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$

знакоположительный числовой ряд

Интегральный признак: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}} \Leftrightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/4}}$.

Это частный случай эталонного несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha \le 1 \, \textit{расходится} \\ \alpha > 1 \, \textit{сходится} \end{cases}$$

В нашем случае $\alpha = \frac{3}{4} < 1$ и несобственный

интеграл расходится.

Следовательно и знакоположительный числовой ряд расходится.

Значит исходный степенной ряд при $x = 2$ расходится.

2.2. $x = 0: \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$

знакочередующийся числовой ряд

а) Исследование упрощенного знакочередующегося

ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей членов

знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$

Используем интегральный признак сходимости: данному знакоположительному числовому ряду поставим в соответствие несобственный интеграл

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}} \Leftrightarrow \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/4}}.$$

Это частный случай эталонного несобственного интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\alpha\le 1 \; расходится\\ \alpha>1 \; сходится\end{cases}$$

В нашем случае $\alpha=3/4<1$ и несобственный интеграл расходится.

Следовательно и знакоположительный числовой ряд расходится.

Следовательно, абсолютной сходимости у исходного числового ряда нет.

Но отсутствие абсолютной сходимости оставляет возможность условной сходимости

б) Исследование на условную сходимость (признак Лейбница)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n=\frac{1}{n^{3/4}}>0$$

2.1. Исследование на монотонность:

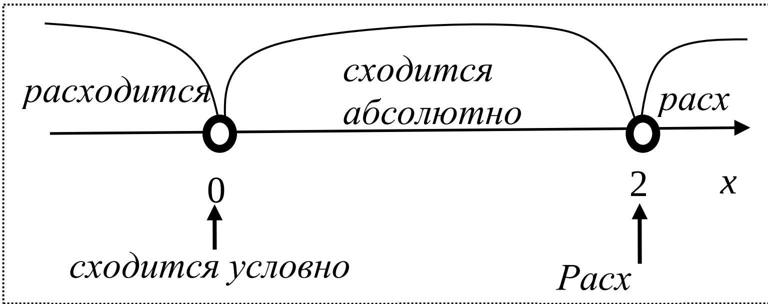
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^{3/4}}-\frac{1}{n^{3/4}}=\frac{n^{3/4}-(n+1)^{3/4}}{n^{3/4}(n+1)^{3/4}}<0$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ убывающая.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/4}}=0$.

Оба пункта Лейбница выполнены.

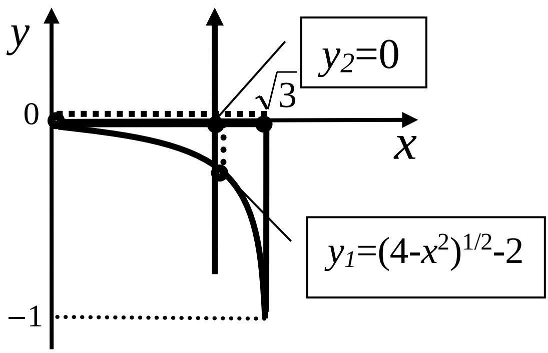
Следовательно исходный ряд сходится условно при $x=0$

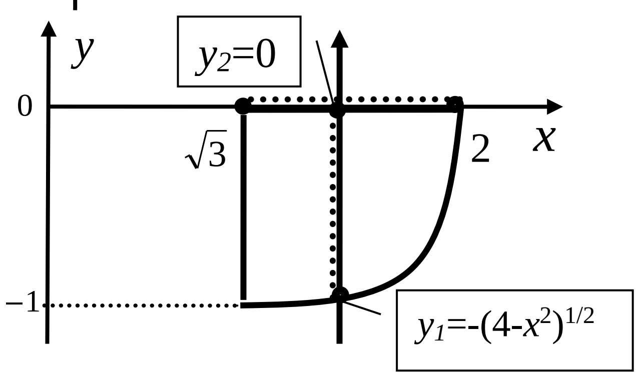


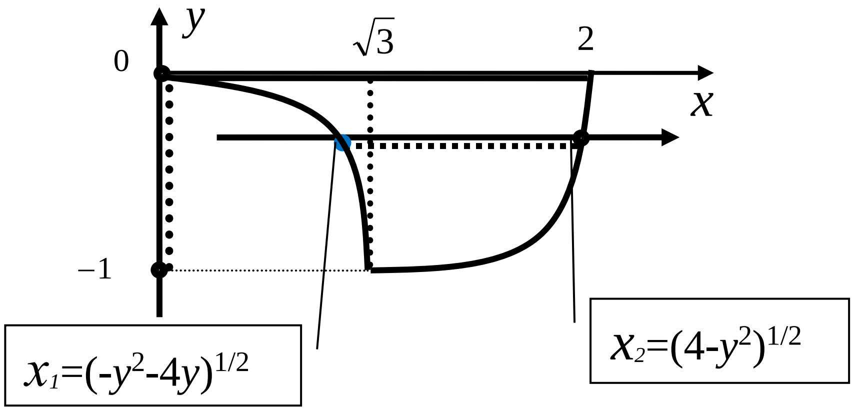
ДЗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$

Пример 13. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy.$$







$$\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy =$$

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt{-y^2-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

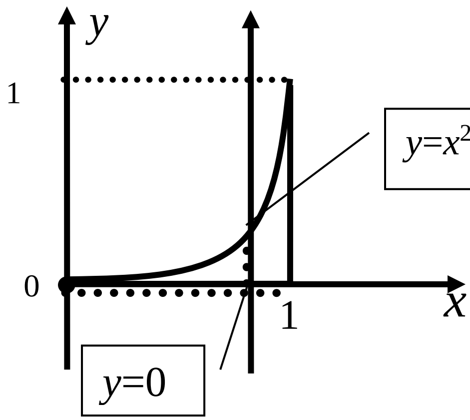
ДЗ. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

1) $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$;

2) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy$.

Пример 14. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$

по области $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$.



$$\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy = \int\limits_0^1 x^2 dx \int\limits_0^{x^2} y^3 dy = \int\limits_0^1 x^2 dx \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{x^2} \right) =$$

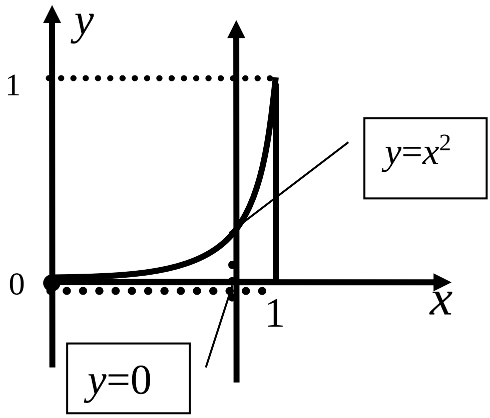
$$\int\limits_0^1 x^2 dx \left(\frac{x^8}{4} \right) = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{4} \frac{x^{11}}{11} \bigg|_0^1 = \frac{1}{44}$$

ДЗ Вычислить $\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$,

Вычислить $\iint\limits_D x^3 \cdot \sqrt{y} dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^4 \end{cases}$.

Пример 15. Вычислить двойной интеграл

$\iint\limits_D x^3 \cos(xy) dxdy$ по $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$.



$$\iint\limits_D x^3\cos(xy)dxdy=\int_0^1 x^3dx\int_0^{x^2}\cos(xy)dy=$$

$$\int_0^1 x^2dx\int_0^{x^2}\cos(xy)d(xy)=\int_0^1 x^2dx\left(\sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=x^2}\right)=$$

$$=\int_0^1 x^2\left(\sin x^3-\sin 0\right)dx=\int_0^1 x^2\sin x^3dx=$$

$$\int_0^1 \sin x^3 d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\int_0^1\sin\left(x^3\right)d\left(x^3\right)=$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1\sin\left(x^3\right)d\left(x^3\right)=\int_0^1 x^{10}dx=-\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right)\Big|_0^1=$$

$$-\frac{1}{3}(\cos1-\cos0)=-\frac{1}{3}(\cos1-1)$$

ДЗ Вычислить двойной интеграл по $D:\begin{cases}0\le x\le1,\\0\le y\le x^4\end{cases}$:

$\iint\limits_D x^5\cos(xy)dxdy$; $\iint\limits_D x^5\sin(xy)dxdy$.

Пример 16. Вычислить $\iint\limits_D xye^{-2x-3y}dxdy$ по области

$$D:\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

$$\iint\limits_D xye^{-2x-3y}dxdy=\left(\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^\infty y\cdot e^{-3y}dy\right)=I_x\cdot I_y$$

$$I_x=\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx=\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty (2x)\cdot e^{-2x}d(2x)=\{2x=t\}=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty t\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\int\limits_0^A t\cdot e^{-t}dt\right]=\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[(UV)\Big|_0^A-\int\limits_0^A VdU\right]=$$

$U=t$	$dU=dt$
$dV=e^{-t}dt$	$\int dV=V=\int e^{-t}dx=\frac{-1}{-1}\int e^{-t}dt=$ $-\int e^{-t}d(-t)=-e^{-t}$

$$\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\left(-te^{-t}\right)\Big|_0^A-\int\limits_0^A\left(-e^{-t}\right)dt\right]=$$

$$-\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^A}+\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\int\limits_0^A e^{-t}dt\right]=$$

Вычисление предела

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^A}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{Лопиталевская}\\ \text{неопределеность}\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{(A)'}{\left(e^A\right)'}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{e^A}=0$$

$$\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A e^{-t}dt\right]=\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{-1}{-1}\int_0^A e^{-t}dt\right]=\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[-\int_0^A e^{(-t)}d(-t)\right]=$$

$$-\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-t}\Big|_0^A\right)=-\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A}-1\right)=-\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{e^A}-1\right)=\frac{1}{4}$$

$$I_y=\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx=\frac{3\cdot3}{3\cdot3}\int_0^\infty x\cdot e^{-2x}dx=$$

$$\frac{1}{9}\int_0^\infty(3x)\cdot e^{-3x}d(3x)=\{3x=t\}=$$

$$\frac{1}{9}\int_0^\infty t\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A t\cdot e^{-t}dt\right]=$$

$$\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[(UV)\Big|_0^A-\int_0^A VdU\right]=$$

$U=t$	$dU=dt$
$dV=e^{-t}dt$	$\int dV=V=\int e^{-t}dx=\frac{-1}{-1}\int e^{-t}dt=-\int e^{-t}d(-t)=-e^{-t}$

$$\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[\left(-te^{-t}\right)\Big|_0^A-\int_0^A\left(-e^{-t}\right)dt\right]=$$

$$-\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^A}+\frac{1}{4}\lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A e^{-t}dt\right]=$$

Вычисление предела

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^A}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}Лопиталевская\\ неопределенность\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{(A)'}{\left(e^A\right)'}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{e^A}=0$$

$$\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[\int_0^A e^{-t}dt\right]=\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[\frac{-1}{-1}\int_0^A e^{-t}dt\right]=\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left[-\int_0^A e^{(-t)}d(-t)\right]=$$

$$-\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-t}\Big|_0^A\right)=-\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A}-1\right)=-\frac{1}{9}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{e^A}-1\right)=\frac{1}{9}$$

$$\iint_D xye^{-2x-3y}dxdy=I_x\cdot I_y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$$

ДЗ Вычислить интеграл по области $D:\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$:

1) $\iint_D xye^{-5x-3y}dxdy$; 2) $\iint_D xye^{-4x-2y}dxdy$

КР3 Банк задач

1. Вычислить интеграл

1.1. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$

1.2. $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$

1.3. $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$

1.4. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

1.5. $\int \frac{dx}{x^2-7x+6}$

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-8x+7}$

1.7. $\int \frac{dx}{x^2-9x+8}$

1.8. $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$

1.9. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

1.10. $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$

1.11. $\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$

1.12. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$

1.13. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

1.14. $\int \frac{dx}{x^2+9x+8}$

1.15. $\int \frac{dx}{x^2+10x+9}$

1.16. $\int \frac{dx}{x^2+11x+10}$

2. Вычислить интеграл

2.1. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-1)}$

2.2. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+2x+2)(x-1)}$

2.3. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+5)(x-1)}$

2.4. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-3)}$

2.5. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x-3)}$

2.6. $\int \frac{(x^2+5)dx}{(x^2-8x+17)(x-1)}$

2.7. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+6x+10)(x-2)}$

2.8. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x+2)}$

2.9. $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{(x^2-2x+2)(x+1)}$

2.10. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-2)}$

2.11. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x-2)}$

2.12. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+5)(x-1)}$

2.13. $\int \frac{(x^2+5)dx}{(x^2-8x+17)(x-2)}$

2.14. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-6x+10)(x-1)}$

2.15. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-10x+26)(x-1)}$

2.16. $\int \frac{(x^2+5)dx}{(x^2+8x+17)(x-2)}$

3. Вычислить интеграл

3.1. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^7 x}$

3.2. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^9 x}$

3.3. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^8 x}$

3.4. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^9 x}$

3.5. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{10} x}$

3.6. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{11} x}$

3.7. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{12} x}$

3.8. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{12} x}$

3.9. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{13} x}$

3.10. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{10} x}$

3.11. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{13} x}$

3.12. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{10} x}$

3.13. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{14} x}$

3.14. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{16} x}$

3.15. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{18} x}$

3.16. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{20} x}$

4. Вычислить интеграл

4.1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$

4.2. $\int \frac{\cos \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

4.3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5-3x^2}}$

4.4. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$

4.5. $\int \frac{\cos x dx}{e^{\sin x}}$

4.6. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

4.7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$

4.8. $\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}\, dx}{x}$

4.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

4.10. $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$

4.11. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$

4.13. $\int \frac{\ln^2(\ln x) dx}{x \ln x}$

4.14. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

4.15. $\int \frac{\sin^2 dx}{\cos^4 x}$

4.16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

5. Вычислить интеграл

5.1. $\int x \sin x dx$

5.2. $\int x e^x dx$

5.3. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

5.4. $\int \arctan x dx$

5.5. $\int x \ln x dx$

5.6. $\int x \tan^2 x dx$

5.7. $\int \ln x dx$

5.8. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

5.9. $\int \arcsin x dx$

5.10. $\int x^2 \ln x dx$

5.11. $\int x \cot^2 x dx$

5.12. $\int x \cos x dx$

5.13. $\int x \arctan x dx$

5.14. $\int \arccos x dx$

5.15. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

5.16. $\int x^4 \ln x dx$

6. Вычислить интеграл

6.1. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

6.2. $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

6.3. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$

6.4. $\int_0^6 x^2\sqrt{36-x^2}\,dx$

6.5. $\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx$

6.6. $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}\,dx$

6.7. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

6.8. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

6.9. $\int_0^8 \sqrt{64-x^2}\,dx$

6.10. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

6.11. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$

6.12. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

6.13. $\int_0^9 \sqrt{81-x^2}\,dx$

6.14. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

6.15. $\int_0^8 x^2\sqrt{64-x^2}\,dx$

6.16. $\int_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}\,dx$

7. Вычислить интеграл

7.1. $\int \frac{dx}{x^{2/3}+x^{4/3}}$

7.2. $\int \frac{dx}{x^{3/4}+x^{5/4}}$

7.3. $\int \frac{dx}{x^{4/5}+x^{6/5}}$

7.4. $\int \frac{dx}{x^{5/6}+x^{7/6}}$

7.5. $\int \frac{dx}{x^{6/7}+x^{8/7}}$

7.6. $\int \frac{dx}{x^{7/8}+x^{9/8}}$

7.7. $\int \frac{dx}{x^{8/9}+x^{10/9}}$

7.8. $\int \frac{dx}{x^{9/10}+x^{11/10}}$

7.9. $\int \frac{dx}{x^{10/11}+x^{12/11}}$

7.10. $\int \frac{dx}{x^{11/12}+x^{13/12}}$

7.11. $\int \frac{dx}{x^{12/13}+x^{14/13}}$

7.12. $\int \frac{dx}{x^{13/14}+x^{15/14}}$

7.13. $\int \frac{dx}{x^{14/15}+x^{16/15}}$

7.14. $\int \frac{dx}{x^{15/16}+x^{17/16}}$

7.15. $\int \frac{dx}{x^{16/17}+x^{18/17}}$

7.16. $\int \frac{dx}{x^{17/18}+x^{19/18}}$

8. Вычислить интеграл

8.1. $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x}$

8.2. $\int \frac{dx}{x^{1/3}+x}$

8.3. $\int \frac{dx}{x^{1/4}+x}$

8.4. $\int \frac{dx}{x^{1/5}+x}$

8.5. $\int \frac{dx}{x^{1/6}+x}$

8.6. $\int \frac{dx}{x^{1/7}+x}$

8.7. $\int \frac{dx}{x^{1/8}+x}$

8.8. $\int \frac{dx}{x^{1/9}+x}$

8.9. $\int \frac{dx}{x^{1/10}+x}$

8.10. $\int \frac{dx}{x^{1/11}+x}$

8.11. $\int \frac{dx}{x^{1/12}+x}$

8.12. $\int \frac{dx}{x^{1/13}+x}$

8.13. $\int \frac{dx}{x^{1/14}+x}$

8.14. $\int \frac{dx}{x^{1/15}+x}$

8.15. $\int \frac{dx}{x^{1/16}+x}$

8.16. $\int \frac{dx}{x^{1/4}+x}$

9. Вычислить интеграл

9.1. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}5} \frac{(2+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+25\cos^2 x}$

9.2. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}8} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+64\cos^2 x}$

9.3. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{(8+\mathrm{tg}x)dx}{9\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.4. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.5. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}(1/4)} \frac{(12+\mathrm{tg}x)dx}{16\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.6. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}3} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$

9.7. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}6} \frac{(12+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+36\cos^2 x}$

9.8. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}7} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+49\cos^2 x}$

9.9. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}9} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+81\cos^2 x}$

9.10. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}10} \frac{(5+\operatorname{tg}x)dx}{\sin^2 x + 100\cos^2 x}$$

9.11. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}11} \frac{(5+\operatorname{tg}x)dx}{\sin^2 x + 121\cos^2 x}$$

9.12. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}12} \frac{(5+\operatorname{tg}x)dx}{\sin^2 x + 144\cos^2 x}$$

9.13. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/5)} \frac{(6+\operatorname{tg}x)dx}{25\sin^2 x + \cos^2 x}$$

9.14. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/6)} \frac{(7+\operatorname{tg}x)dx}{36\sin^2 x + \cos^2 x}$$

9.15. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/7)} \frac{(8+\operatorname{tg}x)dx}{49\sin^2 x + \cos^2 x}$$

9.16. $$\int\limits_0^{\operatorname{arctg}4} \frac{(5+\operatorname{tg}x)dx}{\sin^2 x + 16\cos^2 x}$$

10. Вычислить интеграл

10.1. $$\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+3)\sin 2x}$$

10.2. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+4)\sin 2x}$$

10.3. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}4} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+5)\sin 2x}$$

10.4. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}5} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+6)\sin 2x}$$

10.5. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}6} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+7)\sin 2x}$$

10.6. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}7} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+8)\sin 2x}$$

10.7. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}8} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+9)\sin 2x}$$

10.8. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}10} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+11)\sin 2x}$$

10.9. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}11} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+12)\sin 2x}$$

10.10. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}12} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+13)\sin 2x}$$

10.11. $$\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}13} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+14)\sin 2x}$$

10.12. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}14} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+15)\sin 2x}$

10.13. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}15} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+16)\sin 2x}$

10.14. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}16} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+17)\sin 2x}$

10.15. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}17} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+18)\sin 2x}$

10.16. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}18} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+19)\sin 2x}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

11.1. $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 3x$.

11.2. $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$ и $y = 4x$

11.3. $y = x^3$, $y = \frac{x^3}{9}$ и $y = 4x$

11.4. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 64x$.

11.5. $y = x^2 - 8x + 9$ и $y = x + 1$.

11.6. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{8}$ и $y = 8x$.

11.7. $y = x^3$, $y = \frac{x^3}{25}$ и $y = 9x$.

11.8. $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{16}$ и $y = 16x$

11.9. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 27x$.

11.10. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 64x$

11.11. $y = x^3$, $y = \frac{x^3}{16}$ и $y = 9x$

11.12. $y = x^3$, $y = \frac{x^3}{16}$ и $y = 16x$

11.13. . $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{8}$ и $y = 8x$.

11.14. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{8}$ и $y = 27x$.

11.15. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 8x$

11.16. $y = x^4$, $y = \frac{x^4}{27}$ и $y = 27x$

12. Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной графиками функций

12.1. $y = \sqrt{36 - x}$ и $y = 0$ при $0 \le x \le 36$.

12.2. $y = \sqrt{49 - x}$ и $y = 0$ при $0 \le x \le 49$

12.3. $y=\sqrt{64-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 64$

12.4. $y=\sqrt{81-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 81$.

12.5. $y=\sqrt{121-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 121$

12.6. $y=\sqrt{100-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 100$

12.7. $y=\sqrt{196-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 196$.

12.8. $y=\sqrt{144-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 144$.

12.9. $y=\sqrt{4-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 4$.

12.10. $y=\sqrt{16-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 16$.

12.11. $y=\sqrt{256-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 256$.

12.12. $y=\sqrt{9-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 9$.

12.13. $y=\sqrt{25-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 25$.

12.14. $y=\sqrt{225-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 15$.

12.15. $y=\sqrt{36-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 36$.

12.16. $y=\sqrt{121-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 121$

13. Исследовать на сходимость

13.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\cdot e^{-3n}$

13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\cdot e^{-3n}$

13.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^7\cdot e^{-3n}$

13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5\cdot e^{-3n}$

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^6\cdot e^{-3n}$

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{11}\cdot e^{-3n}$

13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{12}\cdot e^{-3n}$

13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^8\cdot e^{-3n}$

13.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{14}\cdot e^{-3n}$

13.10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{7} \cdot e^{-3n}$

13.11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{9} \cdot e^{-3n}$

13.12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{8} \cdot e^{-3n}$

13.13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} \cdot e^{-3n}$

13.14. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{15} \cdot e^{-3n}$

13.15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{16} \cdot e^{-3n}$

13.16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{15} \cdot e^{-3n}$

14. Исследовать на сходимость

14.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2}$

14.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n-1} \right)^{n^2}$

14.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}$

14.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-6}{n-5} \right)^{n^2}$

14.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+7}{n+6} \right)^{n^2}$

14.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n-3} \right)^{n^2}$

14.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+8}{n+7} \right)^{n^2}$

14.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+6}{n+5} \right)^{n^2}$

14.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^{n^2}$

14.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-9}{n-8} \right)^{n^2}$

14.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-8}{n-7} \right)^{n^2}$

14.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{n^2}$

14.13.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}$	**14.15.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+9}{n+8}\right)^{n^2}$
14.14.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{n-4}\right)^{n^2}$	**14.16.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-10}{n-9}\right)^{n^2}$

15. Исследовать на абсолютную и условную сходимости

15.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

15.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}+4}\right)$

15.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[7]{n}+2}\right)$

15.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+2}}$

15.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}+4}\right)$

15.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[8]{n}}\right)$

15.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}\right)$

15.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)$

15.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[10]{n}}\right)$

15.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[11]{n}}\right)$

15.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)$

15.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

15.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[8]{n}}\right)$

15.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[9]{n}+4}\right)$

15.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[8]{n}+2}\right)$

15.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[10]{n}+6}\right)$

16. Найти интервал сходимости степенного ряда

16.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$

16.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot(x-3)^n$

16.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$

16.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$

16.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[6]{n}\cdot(x+4)^n$

16.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[7]{n^6}}$

16.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt[5]{n^3}}$

16.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^3} \cdot (x+1)^n$

16.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$

16.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{\sqrt[8]{n^7}}$

16.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^5} \cdot (x-6)^n$

16.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$

16.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^3} \cdot (x+1)^n$

16.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$

16.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{\sqrt[9]{n^8}}$

16.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[7]{n^6}}$

17. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

17.1. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

17.2. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

17.3. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$

17.4. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx$

17.5. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

17.6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$

17.7. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

17.8. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$

17.9. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$

17.10. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

17.11. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$

17.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)dx$

17.13. $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{-2} dy \int\limits_{-\sqrt{5-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{2y}^{0} f(x,y)dx$

17.14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

17.15. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$

17.16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{3y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

18. Вычислить двойной интеграл

18.1. $\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x \end{cases}$.

18.2. $\iint\limits_D x^3 y^2 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

18.3. $\iint\limits_D x^2 y^7 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^3 \end{cases}$

18.4. $\iint\limits_D x^3 y^4 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^4 \end{cases}$.

18.5. $\iint\limits_D x^3 y dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^3 \end{cases}$

18.6. $\iint\limits_D x^2 y^3 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

18.7. $\iint\limits_D x^4 y^5 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^3 \end{cases}$.

18.8. $\iint\limits_D x^4 y^5 dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt[3]{x} \end{cases}$

18.9. $\iint\limits_D \left(x^3 + y^2\right) dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x \le y \le \sqrt[3]{x} \end{cases}$

18.10. $\iint\limits_D \left(x^3 + \sqrt{y}\right) dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$

18.11. $\iint\limits_D x^3 \cdot \sqrt{y}\,dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$

18.12. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^3\right)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ x\le y\le \sqrt[3]{x} \end{cases}$.

18.13. $\iint\limits_D x^4 y^3 dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le \sqrt[5]{x} \end{cases}$

18.14. $\iint\limits_D \left(x^5 + \sqrt[4]{y}\right)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$.

18.15. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^4\right)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^3 \end{cases}$.

18.16. $\iint\limits_D x^6 y^7 dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le \sqrt[4]{x} \end{cases}$

19. Вычислить двойной интеграл

19.1. $\iint\limits_D x^3 \cos(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$

19.2. $\iint\limits_D x^3 \sin(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$

19.3. $\iint\limits_D x^4 \cos(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^3 \end{cases}$

19.4. $\iint\limits_D x^6 \cos(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^5 \end{cases}$.

19.5. $\iint\limits_D x^7 \sin(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^6 \end{cases}$

19.6. $\iint\limits_D x^8 \sin(xy)dxdy$, $D:\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^7 \end{cases}$

19.7. $\iint\limits_D x^9 \sin(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^8 \end{cases}$

19.8. $\iint\limits_D x^{10} \sin(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^9 \end{cases}$

19.9. $\iint\limits_D x^{11} \sin(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^{10} \end{cases}$

19.10. $\iint\limits_D x^5 \sin(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^4 \end{cases}$

19.11. $\iint\limits_D x^6 \sin(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^5 \end{cases}$

19.12. $\iint\limits_D x^7 \cos(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^6 \end{cases}$

19.13. $\iint\limits_D x^8 \cos(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^7 \end{cases}$

19.14. $\iint\limits_D x^9 \cos(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^8 \end{cases}$

19.15. $\iint\limits_D x^{10} \cos(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^9 \end{cases}$

19.16. $\iint\limits_D x^{11} \cos(xy)dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^{10} \end{cases}$

20. Вычислить двойной интеграл по области $D: \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$

20.1. $\iint\limits_D xye^{-2x-6y}dxdy$

20.2. $\iint\limits_D xye^{-3x-7y}dxdy$

20.3. $\iint\limits_D xye^{-4x-8y}dxdy$

20.4. $\iint\limits_D xye^{-4x-5y}dxdy$

20.5. $\iint\limits_D xye^{-3x-4y}dxdy$

20.6. $\iint\limits_D xye^{-5x-3y}dxdy$

20.7. $\iint\limits_D xye^{-4x-2y}dxdy$

20.8. $\iint\limits_D xye^{-3x-5y}dxdy$

20.9. $\iint\limits_D xye^{-5x-6y}dxdy$

20.10. $\iint\limits_D xye^{-6x-3y}dxdy$

20.11. $\iint\limits_D xye^{-6x-7y}dxdy$

20.12. $\iint\limits_D xye^{-2x-5y}dxdy$

20.13. $\iint\limits_D xye^{-3x-4y}dxdy$

20.14. $\iint\limits_D xye^{-8x-9y}dxdy$

20.15. $\iint\limits_D xye^{-5x-4y}dxdy$

20.16. $\iint\limits_D xye^{-7x-8y}dxdy$

КР4 Вариант 0

1. Найти общее решение уравнения

$$xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+(\arccos y)dy=0$$

2. Найти общее решение уравнения $y'+\frac{9y}{x}=11x$.

3. Найти общее решение уравнения

$$xy'-y=x\cot\frac{y}{x}.$$

4. Найти общее решение уравнения

$$\left(x^4\ln x+y\right)dx+\left(\frac{1}{1+y^2}+x\right)dy=0$$

5. Найти общее решение уравнения $\sqrt[13]{x} \cdot y''' = 1$.

6. Найти частное решение уравнения $y'' = 6y^{11}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7. Найти структуру частного решения неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + e^{2x} \cos x$.

8. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 5y = 2e^x (x + 1)$.

9. Найти частное решение $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 1$.

10. Найти частное решение уравнения $y''' - 12y'' + 36y' = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$

11. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

12. Найти общее решение уравнения $x \cdot y'' + y' + x = 0$

13. Найти общее решение уравнения $xy''y + x(y')^2 + 5y'y = 1$

КР4 Подготовка
Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

6. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{array}\right.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Таблица подведения под знак дифференциала

1. $xdx = d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

2. $\cos x dx = d(\sin x)$

3. $\sin x dx = d(-\cos x)$

4. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$

5. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = d(-\cot x)$

6. $e^{x}dx = d(e^{x})$

7. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$

8. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} d(\arcsin x) \\ -d(\arccos x) \end{array}\right.$

9. $\dfrac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} d(\arctan x) \\ -d(\operatorname{arc}\cot x) \end{array}\right.$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx + (\arccos y)dy = 0$.

Делим переменные: $$xe^{x^2}dx = -\frac{(\arccos y)dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Классификация: с разделяющимися переменными
Берем неопределенный интеграл

$$\int xe^{x^2}dx = -\int \frac{(\arccos y)dy}{\sqrt{1-y^2}} + C$$

Подводим под знак дифференциала:

$$xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -d(\arccos y)$$

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right) = \int(\arccos y)d(\arccos y) + C$$

общее решение $$\frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}\arccos^2 y + C$$

ДЗ $\arctan y dy = \left(1+y^2\right)dx$;

$y \cdot \mathrm{tg}\,(x)dx + (\ln y)dy = 0$;

$\left(1+\sin^2 x\right)\ln y dy + y\cos x dx = 0$

Пример 2. Найти общее решение $y' + \dfrac{9y}{x} = 11x$.

1-й метод: Классический

Классификация: НЛУ

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

1. y_{oo}. Общее решение ОЛУ. $y' + \frac{9y}{x} = 0$

Делим переменные: $\frac{dy}{y} = -9\frac{dx}{x}$.

Классификация: с разделяющимися переменными.
Берем неопределенный интеграл от левой и правой части

$$\int \frac{dy}{y} = -9\int \frac{dx}{x} + C$$

Решение в неявном виде: $\ln y = -9\ln x + C$

Взяв экспоненту от левой и правой частей, получим

$$e^{\ln y} = e^{-9\ln x + C}$$

Левая часть: $e^{\ln y} \equiv y$,

Правая часть:

$$e^{-9\ln x + C} = e^{\ln x^{-9}} e^{C} = x^{-9} \cdot C = \frac{C}{x^9}$$

Решение ОЛУ в явном виде $y_{oo} = \frac{C}{x^9}$

2. $y_{чн}$. Частное решение НЛУ. $y' + \frac{9y}{x} = 11x$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$y_{чн} = \frac{C(x)}{x^9} \Rightarrow \text{НЛУ} \quad y' + \frac{9y}{x} = 11x$$

$$\frac{dy_{чн}}{dx} = \frac{dC}{dx}x^{-9} - 9x^{-10}C \Rightarrow \text{НЛУ}$$

$$y' + \frac{9y}{x} = 11x$$

$$\frac{dy_{чн}}{dx} = \frac{dC}{dx}\frac{1}{x^9} - \frac{9}{x^{10}}C$$

Подставляя в НЛУ, получим для $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\frac{1}{x^9} - \frac{9}{x^{10}}C + \frac{9}{x}\frac{C}{x^9} = 11x$$

Второе и третье слагаемые в левой части сокращаются

$$\frac{dC}{dx}\frac{1}{x^9} = 11x$$

Делим переменные: $dC = 11x^{10}dx$

уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int dC = 11\int x^{10}dx + 0 \;\rightarrow\; C(x) = x^{11}$$

Для частного решения НЛУ имеем

$$y_{чн} = \frac{C(x)}{x^9} = \frac{x^{11}}{x^9} = x^2$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = \frac{C}{x^9} + x^2$$

2-й метод: Выделение дифференциальных структур

Умножим уравнение $y' + \frac{9y}{x} = 11x$ на x^9

$$x^9y' + 9x^8y = 11x^{10}$$

$$9x^8 = \left(x^9\right)'$$

$$x^9y' + \left(x^9\right)'y = 11x^{10}$$

Левую часть уравнения сворачиваем в производную произведения:

$$\left(x^9 y\right)' = 11x^{10} \text{ или } \frac{d\left(x^9 y\right)}{dx} = 11x^{10}$$

$$d\left(x^9 y\right) = 11x^{10}dx \Rightarrow \int d\left(x^9 y\right) = 11\int x^{10}dx + C$$

$$x^9 y = 11\frac{x^{11}}{11} + C$$

Общее решение $y = x^2 + \dfrac{C}{x^9}$

ДЗ Найти общее решение $y' + \dfrac{8y}{x} = 10x$; $y' + \dfrac{5y}{x} = 7x$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$xy' - y = x\cot\frac{y}{x}$$

Делим на x : $y' = \dfrac{y}{x} + \cot\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Классификация: уравнение с однородной функцией правая часть уравнения – однородная функция.

Метод решения: замена функции $U(x) = \dfrac{y}{x}$

$$y' = U + x\frac{dU}{dx}.$$

Переходя в исходном уравнении к новой функции,

получим $U + x\dfrac{dU}{dx} = U + \cot(U)$

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dU}{dx}=\cot(U)\equiv\frac{\cos U}{\sin U}$$

Разделяем переменные и берем неопределенный интеграл

$$\int\frac{\sin U dU}{\cos U}=\int\frac{dx}{x}+C$$

Подводим $\sin U$ под знак дифференциала:

$$\sin x dx=d(-\cos x)=-d(\cos x)$$

$$-\int\frac{d(\cos U)}{\cos U}=\ln x+C.$$

Интегрируя левую часть, получим общее решение

$$-\ln(\cos U)=\ln x+C$$

Возврат в исходную функцию.

Общее решение $-\ln\left(\cos\dfrac{y}{x}\right)=\ln x+C$

ДЗ 1) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

2) $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\arcsin\dfrac{y}{x}$;

3) $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$

Пример 4. Найти общее решение уравнения:

$$(2x+\ln y)dx+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$$

Уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = 0$
называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных $U(x,y) = C$:

$$dU = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = 0 \qquad (1)$$

$$dU = P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

Коэффициенты перед dx и dy в (1) и (2) равны:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Из условия равенства смешанных производных получим:
Необходимые и достаточные условия уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Классификация: $\begin{cases} \dfrac{\partial(2x + \ln y)}{\partial y} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{y} + \sin y\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \end{cases}$

уравнение в полных дифференциалах
Левая часть исходного уравнения – полный дифференциал функции двух переменных

$U(x,y)$: $dU(x,y) = \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = 0$

Сопоставляя данную форму с исходным уравнением

$$dU(x,y)=(2x+\ln y)\,dx+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$$

Получим для частных производных функции $U(x,y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x+\ln y \quad (1)\\[2mm] \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\dfrac{x}{y}+\sin y \quad (2)\end{cases}$$

Уравнение (1) интегрируем по x:

$$U(x,y)=\int(2x+\ln y)dx+\varphi(y)$$

При интегрировании по x функция $\varphi(y)$ играет роль константы

$$U(x,y)=x^2+x\ln y+\varphi(y)\ \Rightarrow \text{(2):}$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{y}+\sin y$$

$$\frac{\partial\left(x^2+x\ln y+\varphi(y)\right)}{\partial y}=\frac{x}{y}+\sin y\ \to$$

$$\frac{x}{y}+\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{x}{y}+\sin y$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=\sin y\ \Rightarrow\ \varphi(y)=-\cos y+C$$

Общее решение: $U(x,y)=x^2+x\ln y-\cos y=C$

Д3. Найти общее решение

$$\left(x\cos x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0,$$

$$(\arcsin x - 3y)\,dx + \left(\frac{1}{1+y^2} - 3x\right)dy = 0$$

Пример 5. Найти общее решение $\sqrt[13]{x} \cdot y''' = 1$.

Классификация: уравнение допускает понижение порядка: не содержит y.

1. Замена $y'' = p$.

Для p получим уравнение первого порядка

$$\sqrt[13]{x} \cdot \frac{dp}{dx} = 1$$

уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные и интегрируем:

$$\int dp = \int x^{-1/13} dx + C_1 \ \rightarrow \ p = \frac{x^{12/13}}{12/13} + C_1$$

2. Возвращаемся в исходную функцию и имеем уравнение второго порядка

$$y'' = \frac{13}{12} x^{12/13} + C_1$$

Замена: $y' = R$

Для функции R имеем уравнение первого порядка:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{13}{12} x^{12/13} + C_1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$dR=\frac{13}{12}x^{12/13}dx+C_1dx$$

$$\int dR=\frac{13}{12}\int x^{12/13}dx+C_1\int dx+C_2$$

$$R=\frac{13}{12}\frac{x^{25/13}}{25/13}+C_1x+C_2$$

3. Возвращаясь в исходную функцию, получим уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=\frac{13}{12}\frac{13}{25}x^{25/13}+C_1x+C_2$$

Уравнение с разделяющимися переменными.
Делим переменные и берем неопределенный интеграл

$$\int dy=\frac{13}{12}\frac{13}{25}\int x^{25/13}dx+C_1\int xdx+C_2\int dx+C_3$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y=\frac{13}{12}\frac{13}{25}\frac{13}{38}x^{38/13}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

ДЗ $\sqrt[10]{x}\cdot y^{(4)}=1$; $\sqrt[6]{x}\cdot y'''=1$

Пример 6. Найти частное решение $y''=6y^{11}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

Классификация: уравнение, допускающее понижение порядка (не содержит в явном виде x).
Замена:

$$y'_x=z(y).$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dz(y)}{dy} z(y)$$

После замены уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dy} z = 6y^{11}$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные, получим: $zdz = 6y^{11}dy$.

Взяв интеграл от левой и правой частей полученного уравнения, имеем

$$\int zdz = 6\int y^{11}dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 6\frac{y^{12}}{12} + C_1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y^{`12} + C_1}$$

Возврат в исходную функцию

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y^{`12} + C_1} \text{ .}$$

Используя начальные условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$

получим $1 = \pm\sqrt{1 + C_1}$. Отсюда Знак + и $C_1 = 0$.

В итоге имеем уравнение $\dfrac{dy}{dx} = y^6$ уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и берем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dy}{y^6} = \int dx + C_2$$

Интегрируя, получим $-\dfrac{1}{5y^5} = x + C_2$.

В явном виде $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{-5x + C_2}}$.

Определим числовое значение второй произвольной константы.

Используя начальное условие $y(0) = 1$,

Получим $1 = \dfrac{1}{\sqrt[5]{0 + C_2}} \Rightarrow C_2 = 1$.

Окончательно частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях имеет

вид $$y = \frac{1}{\sqrt[5]{-5x + 1}}$$

ДЗ. Найти частное решение уравнения при

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$: 1) $y'' = 2y^3$; 2) $y'' = 3y^5$

Пример 7. Найти структуру частного решения неоднородного уравнения

$y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + e^{2x} \cos x$.

Классификация: НЛУ второго порядка с постоянными коэффициентами и двумя различными спец. правыми частями.

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

1. $y_{оо}$ - общее решение ОЛУ.

2. $y_{чн}$ - частное решение НЛУ.

1. $y_{оо}$. Общее решение ОЛУ.

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Метод характеристического уравнения:

$$y = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

2. $y_{чн}$. Частное решение НЛУ.

Структура $y_{чн}$ повторяет структуру правой части уравнения

В правой части НЛУ два слагаемых с различными специальными частями

$$f_1(x) = x^2 e^{x} \;\to\; y_{чн(1)}$$

$$f_2(x) = e^{2x}\cos x \;\to\; y_{чн(2)}$$

2.1. $y_{чн(1)}$. НЛУ с $f_1(x) = x^2 e^{x}$: $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x}$

$$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

Комплексное число правой части $a + ib = 1 + i0 \equiv 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения

$$a + ib = 1 = \lambda_1 \neq \lambda_2$$

простой резонанс

$$y_{чн(1)} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{x}$$

2.2. $y_{чн(2)}$. НЛУ с $f_2(x) = e^{2x}\cos x$:

$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}\cos x$

$$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

Комплексное число правой части $a + ib = 2 + i$

не совпадает с корнями характеристического уравнения

$$a+ib=2+i\neq\lambda_{1,2}$$

нет резонанса

$$y_{чн(2)}=e^{2x}\left(D\cos x+E\sin x\right)$$

$y_{чн}=y_{чн(1)}+y_{чн(2)}=$

$x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x+e^{2x}e^{2x}\left(D\cos x+E\sin x\right)$

дз $y''-10y'+24y=xe^x\sin x+x^2e^{4x}$,

$y''-8y'+15y=x^2e^{3x}+e^{2x}\cos x$;

$y''+8y'+12y=e^x\cos x+x^2e^{-2x}$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+5y=2e^x\left(x+1\right)$

Классификация:

НЛУ второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$$

1. $y_{оо}$ - общее решение ОЛУ.

2. $y_{чн}$ - частное решение НЛУ.

1. $y_{оо}$. $\quad y''-6y'+5y=0$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-6\lambda+5=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=5,\lambda_2=1$$

Комплексное число правой части $a+ib\equiv1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения: $a+ib=1=\lambda_2\neq\lambda_1$

Простой резонанс

$$y_{чн} = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2+Bx) \to \text{НЛУ}$$

$$y'_{чн} = e^x(Ax^2+Bx) + e^x(2Ax+B) =$$

$$e^x(Ax^2 + x(2A+B) + B) \to \text{НЛУ}$$

$$y''_{чн} = e^x(Ax^2 + x(2A+B) + B) + e^x(2Ax + 2A + B) = \to$$

$$e^x(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B)$$

НЛУ

$$e^x(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B) -$$

$$6e^x(Ax^2 + x(2A+B) + B) +$$

$$5e^x(Ax^2 + Bx) = 2e^x(x+1)$$

$$(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B) -$$

$$6(Ax^2 + x(2A+B) + B) +$$

$$5(Ax^2 + Bx) = 2(x+1)$$

$$x(-8A) + x^0(2A - 4B) = 2x + 2$$

$$\begin{cases} -8A = 2 \\ 2A - 4B = 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения: $A = -\frac{1}{4}$,

Из второго уравнения: $B = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}$,

$$y_{чн} = xe^x(Ax+B) = xe^x\left(-\frac{1}{4}x - \frac{5}{8}\right)$$

ДЗ. Найти общее решение неоднородного уравнения

1) $y'' - 8y' + 7y = 2e^x(x+1)$;

2) $y'' - 14y' + 13y = 2e^x(x+1)$

Пример 9. Найти частное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}, \quad x(0)=1,\ y(0)=1$$

1. Поиск общего решения $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$$

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t$$

$y(t)$ находим из первого уравнения системы:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$

$$y = -2x + \frac{dx}{dt} = -2\left(C_1 e^{4t} + C_2 e^t\right) + \frac{d}{dt}\left(C_1 e^{4t} + C_2 e^t\right) =$$

$$-2C_1 e^{4t} - 2C_2 e^t + 4C_1 e^{4t} + C_2 e^t$$

$$y(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t$$

2. Поиск частного решения при $x(0)=1,\ y(0)=1$.

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^t,$$

$$y(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^t$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = 2C_1 - C_2 \end{cases}$$

Первое складываем со вторым: $2 = 3C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{2}{3}$

Из первого: $C_2 = 1 - C_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Частное решение при заданных начальных условиях

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{t}, \; y(t) = \frac{4}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^{t}$$

ДЗ. Найти частное решение системы уравнений при $x(0)=1,\ y(0)=1$**:**

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 13y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$.

Пример 10. Найти частное решение уравнения

$y''' - 12y'' + 36y' = 0$ при

$y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$.

Классификация: ОЛУ третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

Метод характеристического уравнения:

$$y = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda=0 \Rightarrow \lambda\left(\lambda^2-12\lambda+36\right)=0 \Rightarrow$$
$$\lambda(\lambda-6)^2=0$$

Корни и линейно независимые решения

$$\lambda_1=0\to y_1=e^0=1$$
$$\lambda_2=6\to y_2=e^{6x}$$
$$\lambda_3=6\to y_3=xe^{6x}$$
$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=C_1+C_2e^{6x}+C_3xe^{6x}$$
$$y'_{oo}=6C_2e^{6x}+6C_3xe^{6x}+C_3e^{6x}$$
$$y''_{oo}=36C_2e^{6x}+36C_3xe^{6x}+12C_3e^{6x}$$
$$\begin{cases} y(0)=1: \quad C_1+C_2=1 \\ y'(0)=1: \ 6C_2+C_3=1 \\ y''(0)=1: 36C_2+12C_3=1 \end{cases}$$

Второе уравнение умножаем на 6 и вычитаем третье уравнение:

$$-6C_3=5 \quad \Rightarrow C_3=-\frac{5}{6}$$
$$C_2=\frac{1-C_3}{6}=\frac{1+\frac{5}{6}}{6}=\frac{11}{36}$$
$$C_1=1-C_2=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$$
$$y_{чо}=\frac{25}{36}+\frac{11}{36}e^{6x}-\frac{5}{6}xe^{6x}$$

ДЗ. Найти частное решение уравнения при $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$:

1) $y'''+12y''+36y'=0$; 2) $y'''-6y''+9y'=0$.

Пример 11. Найти решение уравнения $y''+y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$

Классификация: НЛУ с постоянными коэффициентами.

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$$

1. $y_{оо}$ - общее решение ОЛУ $y''+y=0$

$$y_{оо}=C_1y_1+C_2y_2$$

Метод характеристического уравнения:

$$y=e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm i$$

$$\alpha=0,\beta=1,$$

Линейно независимые решения в тригонометрической форме:

Первое линейно независимое

$$y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x\equiv\sin x,$$

Второе линейно независимое

$$y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x\equiv\cos x$$

Общее решение ОЛУ $y_{оо}=C_1\sin x+C_2\cos x$

2. $y_{чн}$. Частное решение НЛУ.

Метод вариации произвольных постоянных величин:

$$y_{чн}=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0 \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$+\begin{matrix} \sin x \times \\ \\ \cos x \times \end{matrix} \begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0 \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Верхнее уравнение умножаем на $\sin x$
Нижнее уравнение умножаем на $\cos x$
Полученное из верхнего уравнения складываем с полученным из нижнего уравнения:

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow dC_1 = \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

С разделяющимися переменными: $\int dC_1 = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos x}$

Подводим $\sin x$ под знак дифференциала

$$\sin x dx = -d(\cos x)$$

и берем неопределенный интеграл от левой и правой части

$$C_1(x) = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln(\cos x)$$

Из верхнего уравнения системы

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0 \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$C_2' = -C_1' \frac{\sin x}{\cos x}, \quad C_1' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

С разделяющимися переменными:

$$dC_2 = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow$$

$$\int dC_2 = -\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\int dC_2 = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right) dx}{\cos^2 x}$$

$$C_2(x) = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx$$

$$C_2(x) = -\tan x + x$$

$$C_1(x) = -\ln(\cos x)$$

$$y_{чн} = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

$$y_{чн} = -\ln(\cos x) \sin x + (-\tan x + x) \cos x$$

$$y_{он} = C_1 \sin x + C_2 \cos x -$$

$$\ln(\cos x) \sin x + (-\tan x + x) \cos x$$

$$y'_{он} = C_1 \cos x - C_2 \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \sin x - \ln(\cos x)\cos x +$$

$$\left(-\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)\cos x - (-\tan x + x)\sin x$$

Окончательно:

$$y'_{он} = C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \ln(\cos x)\cos x +$$

$$-\frac{1}{\cos x} + \cos x - x\sin x$$

Найдем частное решение при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

$$\begin{cases} 1 = C_2 \\ 1 = C_1 - 1 + 1 \end{cases}$$

$$y_{Задача\ Коши} = \sin x + \cos x - \ln(\cos x)\sin x +$$

$$(-\tan x + x)\cos x$$

ДЗ. Найти общее решение уравнения:

1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

2) $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

3) $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^5 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$x \cdot y'' + y' + x = 0$$

1-й метод: Классический

Классификация: уравнение допускает понижение порядка: не содержит y .

1. Замена $y' = p(x)$

Для p получим неоднородное линейное уравнение (НЛУ) первого порядка

$$x \cdot \frac{dp}{dx} + p + x = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -1$$

Классификация: НЛУ

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

1. $y_{оо}$ Общее решение ОЛУ.

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = 0$$

ОЛУ всегда с разделяющимися переменными.

Делим переменные: $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dx}{x}$

Берем неопределенный интеграл от левой и правой части

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x} + C_1 \rightarrow \ln p = -\ln x + C_1$$

Взяв экспоненту от левой и правой частей, получим

$$e^{\ln p} = e^{-\ln x + C_1}$$

Левая часть: $e^{\ln p} \equiv p$,

Правая часть: $e^{-\ln x + C_1} = e^{\ln\frac{1}{x}} e^{C_1} = \dfrac{C_1}{x}$

$$p_{oo} = \frac{C_1}{x}$$

2. $y_{чн}$ Частное решение НЛУ $\quad \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -1$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$p_{чн} = \frac{C_1(x)}{x} \Rightarrow \text{НЛУ} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -1$$

$$\frac{dp_{чн}}{dx} = \frac{dC_1}{dx}\frac{1}{x} - \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \text{НЛУ} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -1$$

Подставляя в НЛУ, получим для $C_1(x)$:

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{1}{x} - \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x^2} = -1$$

Второе и третье слагаемые в левой части сокращаются

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{1}{x} = -1$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Делим переменные $\int dC_1 = -\int x dx + 0 \rightarrow C_1(x) = -\frac{x^2}{2}$

Для частного решения НЛУ имеем

$$p_{чн} = \frac{C_1(x)}{x} = -\frac{x}{2}$$

$$p_{он} = p_{oo} + p_{чн} = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}$$

2. Возвращаемся в исходную функцию и имеем уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$dy = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 dx}{x} - \frac{x}{2} dx$$

$$\int dy = C_1 \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int x dx + C_2$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

2-й метод: Выделение дифференциальных структур

$$x \cdot y'' + y' + x = 0$$

Первые два слагаемых левой части свернем в производную произведения:

$$(xy')' + x = 0$$

$$(xy')' = -x \quad \text{или} \quad \frac{d(xy')}{dx} = -x$$

$$d(xy') = -x dx \quad \rightarrow \quad \int d(xy') = -\int x dx + C_1$$

$$xy' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x} \quad \rightarrow \quad dy = -\frac{1}{2} x dx + \frac{C_1 dx}{x}$$

$$\int dy = -\frac{1}{2} \int x dx + C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \ln x + C_2$$

Общее решение $$y=-\frac{1}{4x^2}+C_1\ln x+C_2$$

ДЗ Найти общее решение уравнения: 1) $x^4y''+x^3y'=1$; 2) $x^7\cdot y''+x^6y'=1$.

Пример 13. Найти общее решение уравнения

$$xy''y+x(y')^2+3y'y=1$$

2-й метод: Выделение дифференциальных структур

В первых двух слагаемых левой части вынесем общий множитель:

$$x\left(y''y+(y')^2\right)+3y'y=1$$

Большую круглую скобку в левой части свернем в производную произведения

$$x(y'y)'+3y'y=1$$

Умножаем уравнение на x^2:

$$x^3(yy')'+3x^2y'y=x^2$$

$$3x^2=\left(x^3\right)'$$

$$x^3(yy')'+\left(x^3\right)'y'y=x^2$$

Левую часть уравнения свернем в производную произведения

$$\left(x^3yy'\right)'=x^2\ \rightarrow\ x^3yy'=\frac{x^3}{3}+C_1\ \rightarrow\ yy'=\frac{1}{3}+\frac{C_1}{x^3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(y^2\right)}{dx}=\frac{1}{3}+\frac{C_1}{x^3}$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Делим переменные

$$d\left(y^2\right)=\frac{2}{3}dx+2\frac{C_1dx}{x^3}$$

$$\int d\left(y^2\right)=\frac{2}{3}\int dx+2C_1\int\frac{dx}{x^3}+C_2$$

$$y^2=\frac{2}{3}x+2C_1\int x^{-3}dx+C_2$$

$$y^2=\frac{2}{3}x-\frac{C_1}{x^2}+C_2$$

общее решение: $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x-\frac{C_1}{x^2}+C_2}$

ДЗ Найти общее решение уравнения

$xy''y+x\left(y'\right)^2+4y'y=1$;

$xy''y+x\left(y'\right)^2+7y'y=1$

КР4 Банк задач

1. Найти общее решение уравнения

1.1. $e^{-x}\left(1+y^2\right)dx+\left(\operatorname{arctg}y\right)dy=0$

1.2. $y\cdot\operatorname{tg}xdx+\ln ydy=0$

1.3. $\left(1+\sin^2x\right)\ln ydy+y\cos xdx=0$

1.4. $e^{-x}\left(1+y^2\right)dx+\left(\operatorname{arcctg}y\right)dy=0$

1.5. $e^{-x}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\left(\arcsin y\right)dy=0$

1.6. $x\left(1+\ln^2x\right)\sin ydy+\cos ydx=0$

1.7. $x\left(1+\ln^2x\right)\cos ydy+\left(1+\sin^2y\right)dx=0$

1.8. $xe^{-x^2}\left(1+y^2\right)dx+\left(\operatorname{arctg} y\right)dy=0$

1.9. $e^{-x}\sin y dx+\cos y dy=0$

1.10. $x\left(1+\ln^2 x\right)\sin y dy+\cos y dx=0$

1.11. $x\left(1+\ln^2 x\right)\sin y dy+\left(1+\cos^2 y\right)dx=0$

1.12. . $e^{-2x}\left(1+y^2\right)dx+\operatorname{arcctg}^2 y\,dy=0$

1.13. $xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\arccos^4 y\,dy=0$

1.14. $x\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0$

1.15. $e^{-3x}\left(1+y^2\right)dx+\operatorname{arctg}^3 y\,dy=0$

1.16. $e^{-2x}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\arcsin^2 y\,dy=0$

2. Найти общее решение уравнения

2.1. $y'+\frac{4y}{x}=6x$

2.2. $\cdot\, y'+\frac{3y}{x}=5x$

2.3. $y'+\frac{5y}{x}=7x$

2.4. $y'+\frac{2y}{x}=4x$

2.5. . $y'+\frac{15y}{x}=17x$

2.6. $y'+\frac{6y}{x}=8x$

2.7. $y'+\frac{8y}{x}=10x$

2.8. $y'+\frac{14y}{x}=16x$

2.9. $\cdot\, y'+\frac{10y}{x}=12x$

2.10. $y'+\frac{8y}{x}=10x$

2.11. $y'+\frac{9y}{x}=11x$

2.12. . $y'+\frac{16y}{x}=18x$

2.13. $y'+\frac{11y}{x}=13x$

2.14. $y'+\frac{7y}{x}=9x$

2.15. . $y' + \frac{17y}{x} = 19x$

2.16. $y' + \frac{18y}{x} = 20x$

3. Найти общее решение уравнения

3.1. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

3.2. $xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$

3.3. $xy' = y - xe^{y/x}$

3.4. $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$

3.5. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

3.6. $y' = \frac{y}{x} + \sin^2\frac{y}{x}$

3.7. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\arctan^2\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.8. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\frac{y}{x}}{\ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.9. $xy' - y = x\frac{\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.10. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{\arccos^3\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

3.11. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{\arcsin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

3.12. $xy' - y = x\cot\dfrac{y}{x}$

3.13. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{\arcsin\dfrac{y}{x}}$

3.14. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

3.15. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\arctan\dfrac{y}{x}}$

3.16. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\dfrac{y}{x}}{\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

4. Найти общее решение уравнения

4.1. $\left(x\sin x - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \dfrac{dy}{x} = 0$.

4.2. $\left(xe^{x}-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.3. $\left(x^{2}\ln x-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.4. $\left(\dfrac{\ln x}{x^{2}}-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.5. $\left(x^{3}\cdot\ln x+y\right)dx+\left(\dfrac{1}{1+y^{2}}+x\right)dy=0$

4.6. $\left(\arccos x+\ln y\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\cot y\right)dy=0$

4.7. $\left(x\cdot\arctan x+\ln y\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\cos y\right)dy=0$

4.8. $\left(x\cdot\tan^{2}x-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.9. $\left(x\ln x-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.10. $\left(x\cos x+y\right)dx+\left(\dfrac{1}{1+y^{2}}+x\right)dy=0$

4.11. $\left(\mathrm{arcctg}x-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$

4.12. $\left(\ln x+\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx-\dfrac{dy}{x}=0$

4.13. $\left(\arcsin x+\ln y\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\cos y\right)dy=0$

4.14. $\left(\dfrac{\ln x}{x^{5}}-\dfrac{y}{x^{2}}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$.

4.15. $\left(\frac{x}{\sin^2 x}+y\right)dx+\left(x+\frac{1}{\cos^2 y}\right)dy=0$

4.16. $\left(\frac{x}{\cos^2 x}+y\right)dx+\left(x+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy=0$

5. Найти общее решение уравнения

5.1. $\sqrt{x}\cdot y'''=1$

5.2. $.\sqrt[3]{x}\cdot y'''=1$

5.3. $\sqrt[4]{x}\cdot y'''=1$

5.4. $\sqrt[8]{x}\cdot y'''=1$

5.5. $\sqrt[9]{x}\cdot y'''=1$

5.6. $\sqrt[10]{x}\cdot y'''=1$

5.7. $\sqrt[15]{x}\cdot y'''=1$

5.8. $\sqrt[7]{x}\cdot y'''=1$

5.9. $\sqrt[10]{x}\cdot y'''=1$

5.10. $\sqrt[11]{x}\cdot y'''=1$

5.11. $\sqrt[14]{x}\cdot y'''=1$

5.12. $\sqrt[12]{x}\cdot y'''=1$

5.13. $\sqrt[13]{x}\cdot y'''=1$

5.14. $\sqrt[5]{x}\cdot y'''=1$

5.15. $\sqrt[6]{x}\cdot y'''=1$

5.16. $\sqrt[16]{x}\cdot y'''=1$

6. Найти частное решение уравнения при $y(0)=1,\ y'(0)=1$

6.1. $y''=7y^{13}$

6.2. $2y''=3y^2$

6.3. $2y''=13y^{12}$

6.4. $2y''=5y^4$

6.5. $y''=3y^5$

6.6. $2y''=7y^6$

6.7. $y''=4y^7$

6.8. $2y''=9y^8$

6.9. $y'' = 5y^9$

6.10. $2y'' = 11y^{10}$

6.11. $y'' = 6y^{11}$

6.12. $2y'' = 15y^{14}$

6.13. $2y'' = 17y^{16}$

6.14. $y'' = 7y^{13}$

6.15. $y'' = 8y^{15}$

6.16. $y'' = 9y^{17}$

7. Найти структуру частного решения неоднородного уравнения

7.1. $y'' - 8y' + 12y = e^{6x}\sin x + x^2e^{2x}$

7.2. $y'' - 10y' + 24y = xe^{6x}\sin x + x^2e^{4x}$

7.3. $y'' - 8y' + 15y = x^2e^{3x} + e^{5x}\cos x$

7.4. $y'' - 9y' + 8y = x^2e^{x} + e^{8x}\cos x$

7.5. $y'' - 8y' + 12y = e^{6x}\sin x + x^2e^{2x}$

7.6. $y'' + 8y' + 12y = e^{-6x}\cos x + x^2e^{-2x}$

7.7. $y'' - 7y' + 6y = x^2e^{x} + e^{6x}\sin x$

7.8. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{x} + e^{3x}\sin x$

7.9. $y'' - 8y' + 7y = x^2e^{x} + e^{7x}\cos x$

7.10. $y'' - 6y' + 5y = x^2e^{x} + e^{5x}\cos x$

7.11. $y'' - 5y' + 6y = x^2e^{2x} + e^{3x}\sin x$

7.12. $y'' + 4y' + 3y = x^2e^{-x} + e^{-3x}\cos x$

7.13. $y'' - 7y' + 12y = x^2e^{3x} + e^{4x}\sin x$

7.14. $y'' - 9y' + 14y = e^{2x}\cos x + x^2e^{7x}$

7.15. $y'' + 9y' + 14y = x^2e^{-2x} + e^{-7x}\cos x$

7.16. $y'' - 7y' + 10y = x^2 e^{2x} + e^{5x} \cos x$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения

8.1. $y'' - 8y' + 7y = e^x(x+1)$

8.2. $y'' - 10y' + 9y = e^x(x+1)$

8.3. $y'' - 11y' + 10y = e^x(x+1)$

8.4. $y'' - 12y' + 11y = e^x(x+1)$

8.5. $y'' - 16y' + 15y = e^x(x+1)$

8.6. $y'' - 14y' + 13y = e^x(x+1)$

8.7. $y'' - 4y' + 3y = e^x(x+1)$

8.8. $y'' - 6y' + 5y = e^x(x+1)$

8.9. $y'' - 15y' + 14y = e^x(x+1)$

8.10. $y'' - 5y' + 4y = e^x(x+1)$

8.11. $y'' - 9y' + 8y = e^x(x+1)$

8.12. $y'' - 13y' + 12y = e^x(x+1)$

8.13. $y'' - 17y' + 16y = e^x(x+1)$

8.14. $y'' - 6y' + 5y = e^x(x+1)$

8.15. $y'' - 7y' + 6y = e^x(x+1)$

8.16. $y'' - 3y' + 2y = e^x(x+1)$

9. Найти частное решение системы при $x(0) = 1,\ y(0) = 1$

9.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -11x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x \end{cases}$

9.3. $.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -12x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 11x \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -14x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 13x \end{cases}$

9.5. $.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -13x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x \end{cases}$

9.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -10x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -8x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x \end{cases}$

9.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -9x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x \end{cases}$

9.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x \end{cases}$

9.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x \end{cases}$

9.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$

9.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -15x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 14x \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$

9.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -16x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 15x \end{cases}$

10. Найти частное решение уравнения при $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$

10.1. $y''' + 2y'' + y' = 0$

10.2. $y''' - 2y'' + y' = 0$

10.3. $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

10.4. $y''' + 6y'' + 9y' = 0$

10.5. $y''' - 14y'' + 49y' = 0$

10.6. $y''' + 4y'' + 4y' = 0$

10.7. $y''' + 14y'' + 49y' = 0$

10.8. $y''' - 16y'' + 64y' = 0$

10.9. $y''' - 4y'' + 4y' = 0$

10.10. $y''' - 10y'' + 25y' = 0$

10.11. $y''' + 10y'' + 25y' = 0$

10.12. $y''' + 12y'' + 36y' = 0$

10.13. $y''' - 12y'' + 36y' = 0$

10.14. $y''' + 8y'' + 16y' = 0$

10.15. $y''' - 8y'' + 16y' = 0$

10.16. $y''' + 16y'' + 64y' = 0$

11. Найти частное решение равнения

11.1. $y'' + y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.2. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.3. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.4. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.5. $y'' + y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.6. $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.7. $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^5 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

11.8. $y'' + y = \cos^2 x$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.9. $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

11.10. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.11. $y'' + y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.12. $y'' + y = \sin^2 x$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11.13. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^5 x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.14. $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.15. $y'' + y = \cos^2 x$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.16. $y'' + y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^5 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

12. Найти общее решение уравнения

12.1. $x^5 \cdot y'' + x^4 y' = 1$

12.2. $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = 1$

12.3. $x \cdot y'' + y' = x$

12.4. $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 1$

12.5. $x^7 \cdot y'' + x^6 y' = 1$

12.6. $x^6 \cdot y'' + x^5 \cdot y' = 1$

12.7. $x^{15} y'' + x^{14} y' = 1$

12.8. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$

12.9. $x^9 \cdot y'' + x^8 y' = 1$

12.10. $x^{14} y'' + x^{13} y' = 1$

12.11. $x^8 \cdot y'' + x^7 \cdot y' = 1$

12.12. $x^{12} y'' + x^{11} y' = 1$

12.13. $x^{13} y'' + x^{12} y' = 1$

12.14. $x^{16} y'' + x^{15} \cdot y' = 1$

12.15. $x^{10} y'' + x^9 \cdot y' = 1$

12.16. $x^{11} y'' + x^{10} \cdot y' = 1$

13. **Найти общее решение уравнения**

13.1. $xy''y + x(y')^2 + 2y'y = 1$

13.2. $xy''y + x(y')^2 + 3y'y = 1$

13.3. $xy''y + x(y')^2 + 4y'y = 1$

13.4. $xy''y + x(y')^2 + 5y'y = 1$

13.5. $xy''y + x(y')^2 + 6y'y = 1$

13.6. $xy''y + x(y')^2 + 7y'y = 1$

13.7. $xy''y + x(y')^2 + 8y'y = 1$

13.8. $xy''y + x(y')^2 + 9y'y = 1$

13.9. $xy''y + x(y')^2 + 10y'y = 1$

13.10. $xy''y + x(y')^2 + 11y'y = 1$

13.11. $xy''y + x(y')^2 + 12y'y = 1$

13.12. $xy''y + x(y')^2 + 13y'y = 1$

13.13. $xy''y + x(y')^2 + 14y'y = 1$

13.14. $xy''y + x(y')^2 + 15y'y = 1$

13.15. $xy''y + x(y')^2 + 16y'y = 1$

13.16. $xy''y + x(y')^2 + 17y'y = 1$