**Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики - Нижний Новгород**

Бляхман Л.Г., Громов Е.М.

Банк задач контрольных работ по математическому анализу с примерами решений

Учебно-методическое пособие

**для студентов международного бакалавриата
по экономике и менеджменту**

ISBN 978-5-907868-27-4

Н. Новгород, 2024г.

Оглавление

КР1 Вариант 0

1. Исследовать на монотонность $\left\{\dfrac{n^2+10n+2}{n^2+10n+1}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}, \varepsilon=\dfrac{1}{100}, N_\varepsilon=?$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$
4. Исследовать на непрерывность $y=e^{1/x}$ в точке $x=0$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-9x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-x+x^3\right)}{\ln\left(1+x+x^{11}\right)}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\cdot 3^{2x}-9\cdot 4^x}{7\cdot 5^{2x}-25\cdot 7^x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[14]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt{1+81x}}{\sqrt{1+16x}}$
12. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}$
13. Исследовать на непрерывность $y=\sin\left(4x^3\right)$
14. Теоретический вопрос

КР1 Теоретические вопросы

1. Функция одной переменной. Четная, нечетная, периодическая функция.
2. Обратная функция. Свойства прямой и обратной функций.
3. Возрастающая (убывающая) функция.
4. Параметрически заданная функция.
5. Нулевой, конечный и бесконечный пределы последовательности.
6. Теорема об арифметических действиях со сходящимися последовательностями.
7. Достаточные условия отсутствия предела последовательности.
8. Расходящиеся последовательности.
9. Нулевой, конечный и бесконечный пределы функции в точке.
10. Эквивалентные б.м. функции. Таблица эквивалентных б.м. функций.
11. Первое и второе определения непрерывности функции.
12. Односторонние пределы функции.
13. Точки разрыва I и II рода

КР1 Подготовка

Пример 1. Исследовать на монотонность $\left\{\dfrac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}\right\}$

$$a_n=\frac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}=\frac{\left(n^2+7n+1\right)+1}{n^2+7n+1}=1+\frac{1}{n^2+7n+1}, \qquad a_{n+1}=1+\frac{1}{(n+1)^2+7(n+1)+1}=1+\frac{1}{n^2+9n+9}$$

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{1}{n^2+9n+9}-1-\frac{1}{n^2+7n+1}=\frac{1}{n^2+9n+9}-\frac{1}{n^2+7n+1}=$$

$$=\frac{n^2+7n+1-n^2-9n-9}{\left(n^2+9n+9\right)\left(n^2+7n+1\right)}=\frac{-2n-8}{\left(n^2+9n+9\right)\left(n^2+7n+1\right)}<0 \quad \text{убывающая}$$

ДЗ. $\left\{\dfrac{n^2+10n-1}{n^2+10n+1}\right\}$; $\left\{\dfrac{n^2+4n+2}{n^2+4n+1}\right\}$

Пример 2. Показать, что последовательность $\left\{\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}$ является сходящейся

1. Оценим предельное значение последовательности: $a_n=\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}\to\dfrac{36n^2}{6n^2}=6=a$.

2. Пусть $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$. Для данного ε найдем пограничный номер N_ε, используя определение

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon, \forall n>N_\varepsilon \Rightarrow \left|a_n-a\right|<\varepsilon .$$

Решим неравенство $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$: $\left|\dfrac{36n^2-1}{6n^2+100}-6\right|<\dfrac{1}{100} \Rightarrow \left|\dfrac{36n^2-1-36n^2-600}{6n^2+100}\right|<\dfrac{1}{100} \Rightarrow$

$$\left|\frac{-601}{6n^2+100}\right|<\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{601}{6n^2+100}<\frac{1}{100} \Rightarrow 601\cdot100<6n^2+100 \Rightarrow (601-1)\cdot100<6n^2 \Rightarrow$$

$$600\cdot100<6n^2 \Rightarrow n^2>100\cdot100 \Rightarrow n>100 \Rightarrow N_\varepsilon=100 \quad \left\{\frac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}$$ - сходящаяся

ДЗ. $\left\{\dfrac{64n^2-1}{8n^2+100}\right\}, \varepsilon=\dfrac{1}{100}, N_\varepsilon=?$; $\left\{\dfrac{625n^2-1}{25n^2+100}\right\}, \varepsilon=\dfrac{1}{100}, N_\varepsilon=?$

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n^2+3n+1)-n-2}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2+n}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}=$

Структура числа e: Второе слагаемое в круглой скобке с переворотом образует степень $e=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2+n}{n^2+3n+1}\right)^{-\frac{n^2+3n+1}{2}}\right]^{-\frac{(2+n)}{n^2+3n+1}(1-n)}=\left\{\begin{matrix}\textit{квадратная скобка}\\ \textit{стремится к числу } e:\\ [\cdots]\to e\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\textit{операцию предела}\\ \textit{и экспоненты}\\ \textit{меняем местами}\end{matrix}\right\}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2-n)(1-n)}{n^2+3n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n-2}{n^2+3n+1}}=e^1=e$$

ДЗ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

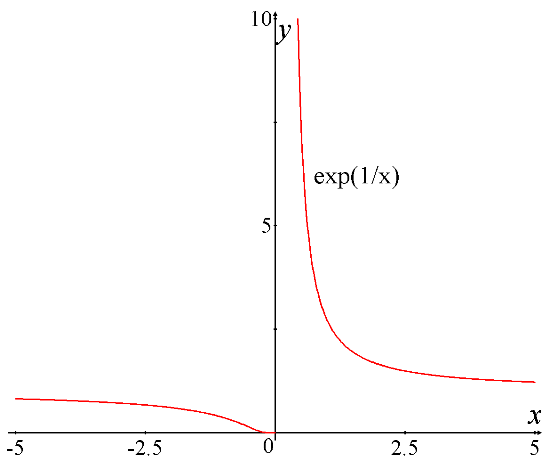
Пример 4. Исследовать на непрерывность $y=e^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$

1. Правый предел. $x\to0+0$: x - *маленькая положительная* $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x}$ - *большая положительная.*

Число $e\approx2.7>1$ *больше единицы возводим в большую положительную степень:* $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$. $\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

2. Левый предел. $x\to0-0$: x - *маленькая отрицательная* $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x}$ - *большая отрицательная.*

Число $e\approx2.7>1$ *больше единицы возводим в большую отрицательную степень:* $e^{\frac{1}{x}}\to0$. $\lim\limits_{x\to0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$



$x=0$ - точка разрыва II рода

ДЗ. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$: 1) $y=\dfrac{1}{1+2^{-1/x}}$; 2) $y=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 3) $y=\dfrac{\sin|x|}{x}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Применяется при $x\to 0$ или $|x|<<1$

1. $\sin x\approx x$
2. $\arcsin x\approx x$
3. $\boxed{1-\cos x\approx \dfrac{x^2}{2}}$
4. $\boxed{\sqrt[n]{1+x}-1\approx \dfrac{x}{n}}$
5. $\boxed{e^x-1\approx x}$
6. $\ln(1+x)\approx x$
7. $\operatorname{tg} x\approx x$
8. $\operatorname{arctg} x\approx x$
9. $a^x-1\approx x\ln a$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-9x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}=\left\{\begin{matrix}1^\infty \text{ сложно показательная неопределенность}\\ \text{второй замечательный предел}\\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\end{matrix}\right\}=$

$$\left\{\begin{matrix}e^{-9x}\approx 1-9x\\ \sin 3x\approx 3x\\ \tan 4x\approx 4x\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(4-3(1-9x)-3x\right)^{1/4x}=\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{4x}}=\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{24x}\cdot\frac{24}{4}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+24x)^{\frac{1}{24x}}\right]^6=\left\{\begin{matrix}\text{операцию предела и возведения в}\\ 6-\text{ю степень меняем местами}\end{matrix}\right\}=\left[\lim_{x\to 0}(1+24x)^{\frac{1}{24x}}\right]^6=e^6$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{2x}-\operatorname{tg}3x\right)^{1/\sin 4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{замена } x-\dfrac{\pi}{12}=t\to 0+0\\ x=\dfrac{\pi}{12}+t\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 12\left(\dfrac{\pi}{12}+t\right)}}{144\left(\dfrac{\pi}{12}+t\right)^2-\pi^2}=$

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+12t)}}{144\left(\dfrac{\pi^2}{144}+\dfrac{\pi}{6}t+t^2\right)-\pi^2}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\sqrt{1-\cos(12t)}}{24\pi t+144t^2}=\left\{1-\cos 12t\approx\frac{144t^2}{2}=72t^2\right\}=$$

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{\sqrt{72t^2}}{24\pi t+144t^2}=\lim_{t\to 0+0}\frac{6\sqrt{2}\cdot|t|}{24\pi t+144t^2}=\left\{\begin{matrix}|t|=t\\ \text{так как } t>0\end{matrix}\right\}==\lim_{t\to 0+0}\frac{6\sqrt{2}t}{24\pi t+144t^2}=\lim_{t\to 0+0}\frac{6\sqrt{2}}{24\pi+144t}=\frac{6\sqrt{2}}{24\pi}=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

ДЗ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 6x}}{36x^2-\pi^2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{4x^2-\pi^2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{13}-0}\dfrac{\sqrt{1+\cos 13x}}{169x^2-\pi^2}$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1-x+x^3)}{\ln(1+x+x^{11})}=\left\{\begin{matrix}\text{метод главных слагаемых:}\\ \text{при } x>>1 \text{ удерживаем по}\\ \text{одному самому большому слагаемому}\\ \text{в числителе и знаменателе аргумента}\\ \text{логарифма}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^3)}{\ln(x^{11})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\cdot\ln(x)}{11\cdot\ln(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{11}=\dfrac{3}{11}$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1-x+x^2)}{\ln(1+x+x^6)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2)}{\ln(1+x+x^8)}$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{4\cdot3^{2x}-9\cdot4^x}{7\cdot5^{2x}-25\cdot7^x}=\left\{\frac{4\cdot9-9\cdot4}{7\cdot25-25\cdot7}=\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}замена\\ x-1=t\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to0}\frac{4\cdot3^{2(t+1)}-9\cdot4^{t+1}}{7\cdot5^{2(t+1)}-25\cdot7^{t+1}}=$

$$\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9\cdot3^{2t}-9\cdot4\cdot4^t}{7\cdot25\cdot5^{2t}-25\cdot7\cdot7^t}=\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9\left(3^{2t}-4^t\right)}{7\cdot25\left(5^{2t}-7^t\right)}=\left\{\begin{matrix}3^{2t}\approx1+2t\ln3, & 4^t\approx1+t\ln4\\ 5^{2t}\approx1+2t\ln5, & 7^t\approx1+t\ln7\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9(1+2t\ln3)-9\cdot4(1+t\ln4)}{7\cdot25(1+2t\ln5)-25\cdot7(1+t\ln7)}=\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9(1+2t\ln3-1-t\ln4)}{7\cdot25(1+2t\ln5-1-t\ln7)}=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9\cdot t(2\ln3-\ln4)}{7\cdot25\cdot t(2\ln5-\ln7)}=\lim_{t\to0}\frac{4\cdot9(2\ln3-\ln4)}{7\cdot25(2\ln5-\ln7)}=\frac{4\cdot9(2\ln3-\ln4)}{7\cdot25(2\ln5-\ln7)}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{25\cdot3^x-3\cdot5^{2x}}{36\cdot5^x-5\cdot6^{2x}}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{5\cdot2^{2x}-4\cdot5^x}$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}=\left\{(1+4x)^{\frac14}\approx1+\frac12 4x\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac12}-3\left(1+\frac{x}{81}\right)^{\frac14}}{1+\frac14 4x-1}=$

$$\left\{\begin{matrix}\left(1+\frac{x}{9}\right)^{\frac12}\approx1+\frac12\frac{x}{9}\\ \left(1+\frac{x}{81}\right)^{\frac14}\approx1+\frac14\frac{x}{81}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{3\left(1+\frac12\frac{x}{9}\right)-3\left(1+\frac14\frac{x}{81}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3+\frac{x}{6}-3-\frac{x}{4\cdot27}}{x}=$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt[4]{16+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[14]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}=\left\{\frac00\right\}=\left\{\begin{matrix}замена\ \ x-1=t\to0\\ x=1+t\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt[14]{14(1+t)^2-14(1+t)+1}-1}{\sin(5\pi(1+t))}=$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[14]{14t^2+28t+14-14-14t+1}-1}{\sin(5\pi+5\pi t)}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[14]{14t^2+14t+1}-1}{-\sin(5\pi t)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1+\frac{1}{14}\left(14t^2+14t\right)-1}{-5\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{1+t+t^2-1}{-5\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{t+t^2}{-5\pi t}==\lim_{t\to0}\frac{t(1+t)}{-5\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)}{-5\pi}=-\frac{1}{5\pi}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{12x^2-12x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

Пример 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt{1+81x}}{\sqrt{1+16x}}=\left\{\frac{\infty-\infty}{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{метод главных слагаемых:}\\ \text{при } x>>1 \text{ удерживаем по}\\ \text{одному самому большому слагаемому}\\ \text{под каждым радиккалом}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{1/5}-9x^{1/2}}{4x^{1/2}}=$

$$\left\{\begin{matrix}\text{метод главного слагаемого:}\\ \text{при } x>>1 \text{ в числителе удерживаем}\\ \text{одно самое большое слагаемое}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^{1/2}}{4x^{1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{4}=-\frac94$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+49x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+25x}}$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\textit{замена}\;\; x-8=t\to 0\\ x=8+t\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(8+t)-\ln 8}{e^{8+t}-e^8}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{8+t}{8}\right)}{e^8\left(e^t-1\right)}=\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{8}\right)}{(1+t-1)}=\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{8}}{t}=\frac{1}{e^8}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{8}}{1}=\frac{1}{8e^8}$$

ДЗ. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\ln x-\ln 12}{e^x-e^{12}}$; $\lim\limits_{x\to 24}\dfrac{\ln x-\ln 24}{e^x-e^{24}}$

Пример 13. Исследовать на непрерывность $y=\sin\left(4x^3\right)$ при $x\in R$.

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\sin 4(x+\Delta x)^3-\sin\left(4x^3\right)=\left\{\begin{matrix}\sin a-\sin b=\\ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{matrix}\right\}=$$

$$2\cos\left(\frac{4(x+\Delta x)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4(x+\Delta x)^3-4x^3}{2}\right)=2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3-4x^3}{2}\right)=$$

Эквивалентные б.м.: $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^3\approx 1+3\dfrac{\Delta x}{x}$

$$2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)-4x^3}{2}\right)=2\cos\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x-4x^3}{2}\right)=$$

$$2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\sin\left(6x^2\Delta x\right)=\left\{\sin\left(6x^2\Delta x\right)\approx 6x^2\Delta x\right\}=2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)6x^2\Delta x=$$

$$12x^2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\Delta x\to 0$$

$y=\sin\left(4x^3\right)$ непрерывна при $x\in R$.

ДЗ. $y=e^{5x^2}$; $y=\ln\left(3x^2\right)$; $y=\cos\left(5x^2\right)$

КР1 Банк задач

1. Исследовать на монотонность

1.1. $\left\{\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}\right\}$

1.2. $\left\{\dfrac{n^2+4n-1}{n^2+4n+1}\right\}$

1.3. $\left\{\dfrac{n^2+4n+2}{n^2+4n+1}\right\}$

1.4. $\left\{\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+5n+1}\right\}$

1.5. $\left\{\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+5n+1}\right\}$

1.6. $\left\{\dfrac{n^2+6n+2}{n^2+6n+1}\right\}$

1.7. $\left\{\dfrac{n^2+6n-1}{n^2+6n+1}\right\}$

1.8. $\left\{\dfrac{n^2+7n-1}{n^2+7n+1}\right\}$

1.9. $\left\{\dfrac{n^2+7n+2}{n^2+7n+1}\right\}$

1.10. $\left\{\dfrac{n^2+8n-1}{n^2+8n+1}\right\}$

1.11. $\left\{\dfrac{n^2+8n+2}{n^2+8n+1}\right\}$

1.12. $\left\{\dfrac{n^2+9n-1}{n^2+9n+1}\right\}$

1.13. $\left\{\dfrac{n^2+10n-1}{n^2+10n+1}\right\}$

1.14. $\left\{\dfrac{n^2+10n+2}{n^2+10n+1}\right\}$

1.15. $\left\{\dfrac{n^2+11n-1}{n^2+11n+1}\right\}$

1.16. $\left\{\dfrac{n^2+11n+2}{n^2+11n+1}\right\}$

2. Найти предел

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+7n+1}\right)^{1-n}$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+8n+1}\right)^{1-n}$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+9n+1}\right)^{1-n}$

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n-1}{n^2+n+1}\right)^{1-n}$

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+2n+1}\right)^{1-n}$

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+4n+1}\right)^{1-n}$

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+3n+1}\right)^{1-n}$

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+5n+1}\right)^{1-n}$

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2+6n+1}\right)^{1-n}$

3. Для заданной последовательности и параметра $\varepsilon=\frac{1}{100}$ найти пограничный номер N_ε

3.1. $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+100}\right\}$

3.2. $\left\{\frac{16n^2-1}{4n^2+100}\right\}$

3.3. $\left\{\frac{625n^2-1}{25n^2+100}\right\}$

3.4. $\left\{\frac{100n^2-1}{10n^2+100}\right\}$

3.5. $\left\{\frac{400n^2-1}{20n^2+100}\right\}$

3.6. $\left\{\frac{49n^2-1}{7n^2+100}\right\}$

3.7. $\left\{\frac{4n^2-1}{2n^2+100}\right\}$

3.8. $\left\{\frac{64n^2-1}{8n^2+100}\right\}$

3.9. $\left\{\frac{36n^2-1}{6n^2+100}\right\}$

3.10. $\left\{\frac{9n^2-1}{3n^2+100}\right\}$

3.11. $\left\{\frac{121n^2-1}{11n^2+100}\right\}$

3.12. $\left\{\frac{144n^2-1}{12n^2+100}\right\}$

3.13. $\left\{\frac{169n^2-1}{13n^2+100}\right\}$

3.14. $\left\{\frac{9n^2-1}{25n^2+100}\right\}$

3.15. $\left\{\frac{196n^2-1}{14n^2+100}\right\}$

3.16. $\left\{\frac{100n^2-1}{10n^2+100}\right\}$

4. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$

4.1. $y=\frac{1}{1+2^{-1/x}}$

4.2. $y=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

4.3. $y=\frac{|x|}{x}$

4.4. $y=2^{\frac{|x|}{x}}$

4.5. $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

4.6. $y=\frac{1}{1+2^{1/x}}$

4.7. $y=\frac{e^{|x|}-1}{x}$

4.8. $y=x+\frac{|x|}{x}$

4.9. $y=\frac{\tan|x|}{x}$

4.10. $y=e^{1/x}$

4.11. $y=\frac{\ln(1+|x|)}{x}$

4.12. $y=\frac{1}{1+e^{-1/x}}$

4.13. $y=e^{-1/x}$

4.14. $y=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^{-1/x}}$

4.15. $y=\frac{\sin|x|}{x}$

4.16. $y=\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Найти предел

5.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{16+x}-\sqrt[3]{64+x}}{\sqrt{1+4x}-1}$

5.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

5.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{25+x}-\sqrt[4]{625+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

5.4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{81+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

5.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-\sqrt[4]{16+x}}{\sqrt[4]{1+16x}-1}$

5.7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt[5]{32+x}}{\sqrt[3]{1+3x}-1}$

5.8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{36+x}-\sqrt[3]{216+x}}{\sqrt[5]{1+5x}-1}$

5.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[7]{128+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[2]{9+x}-\sqrt[5]{243+x}}{\sqrt{1+2x}-1}$

5.11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[8]{256+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[2]{4+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[5]{32+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-\sqrt[6]{64+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[6]{64+x}-\sqrt[7]{128+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

5.16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{128+x}-\sqrt[8]{256+x}}{\sqrt[4]{1+4x}-1}$

6. Найти предел

6.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-x+x^2)}{\ln(1+x+x^6)}$

6.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-x+x^3)}{\ln(1+x+x^7)}$

6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-x+x^2)}{\ln(1+x+x^4)}$

6.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-4x+x^3)}{\ln(1+x+x^9)}$

6.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-4x+x^3)}{\ln(1+x+x^{12})}$

6.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-2x+x^3)}{\ln(1+x+x^5)}$

6.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-5x+x^3)}{\ln(1+x+x^{10})}$

6.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1-6x+x^3)}{\ln(1+x+x11^{11})}$

6.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x+x^2)}{\ln(1+x+x^8)}$

6.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-5x+x^2)}{\ln(1+x+x^{10})}$

6.11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x+x^3)}{\ln(1+x+x^9)}$

6.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-8x+x^3)}{\ln(1+x+x^9)}$

6.13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-2x+x^3)}{\ln(1+x+x^5)}$

6.14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x+x^3)}{\ln(1+x+x^7)}$

6.15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-9x+x^3)}{\ln(1+x+x^5)}$

6.16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-10x+x^3)}{\ln(1+x+x^{10})}$

7. Найти предел

7.1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{4\cdot3^x-3\cdot2^{2x}}{7\cdot5^x-5\cdot7^x}$

7.2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{25\cdot3^x-3\cdot5^{2x}}{36\cdot5^x-5\cdot6^{2x}}$

7.3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{25\cdot2^{2x}-4\cdot5^{2x}}{49\cdot6^x-6\cdot7^{2x}}$

7.4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{9\cdot2^{2x}-4\cdot3^{2x}}{25\cdot6^x-6\cdot5^{2x}}$

7.5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{49\cdot3^x-3\cdot7^{2x}}{16\cdot5^x-5\cdot4^{2x}}$

7.6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{5\cdot2^{2x}-4\cdot5^x}$

7.7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3\cdot2^{2x}-4\cdot3^x}{5\cdot2^{4x}-16\cdot5^x}$

7.8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{16\cdot3^x-3\cdot4^{2x}}{49\cdot5^x-5\cdot7^{2x}}$

7.9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{36\cdot2^{2x}-4\cdot6^{2x}}{81\cdot2^{4x}-16\cdot9^{2x}}$

7.10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{49\cdot2^{2x}-4\cdot7^{2x}}{81\cdot2^{4x}-16\cdot9^{2x}}$

7.11. $\lim\limits_{x\to1}\frac{64\cdot2^{2x}-4\cdot8^{2x}}{25\cdot2^{4x}-16\cdot5^{2x}}$

7.12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{81\cdot2^{2x}-4\cdot9^{2x}}{25\cdot2^{4x}-16\cdot5^{2x}}$

7.13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{49\cdot2^{2x}-4\cdot7^{2x}}{36\cdot2^{4x}-16\cdot6^{2x}}$

7.14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{25\cdot2^{2x}-4\cdot5^{2x}}{100\cdot2^{4x}-16\cdot10^{2x}}$

7.15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{9\cdot2^{2x}-4\cdot3^{2x}}{121\cdot2^{4x}-16\cdot11^{2x}}$

7.16. $\lim\limits_{x\to1}\frac{49\cdot2^{2x}-4\cdot7^{2x}}{144\cdot2^{4x}-16\cdot12^{2x}}$

8. Найти предел

8.1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[15]{15x^2-15x+1}-1}{\sin(15\pi x)}$

8.2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[10]{20x^2-20x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

8.3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{7x^2-7x+1}-1}{\sin(7\pi x)}$

8.4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{10x^2-10x+1}-1}{\sin(\pi x)}$

8.5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[5]{5x^2-5x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

8.6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{6x^2-6x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

8.7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[11]{22x^2-22x+1}-1}{\sin(11\pi x)}$

8.8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{12x^2-12x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

8.9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{21x^2-21x+1}-1}{\sin(21\pi x)}$

8.10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$

8.11. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[7]{14x^2-14x+1}-1}{\sin(5\pi x)}$

8.12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[13]{13x^2-13x+1}-1}{\sin(13\pi x)}$

8.13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[11]{11x^2-11x+1}-1}{\sin(11\pi x)}$

8.14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[9]{9x^2-9x+1}-1}{\sin(9\pi x)}$

8.15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[8]{8x^2-8x+1}-1}{\sin(\pi x)}$

8.16. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[16]{16x^2-16x+1}-1}{\sin(3\pi x)}$

9. Найти предел

9.1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}+0}\frac{\sqrt{1+\cos3x}}{9x^2-\pi^2}$

9.2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}-0}\frac{\sqrt{1+\cos6x}}{36x^2-\pi^2}$

9.3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sqrt{1+\cos4x}}{16x^2-\pi^2}$

9.4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{13}-0}\frac{\sqrt{1+\cos13x}}{169x^2-\pi^2}$

9.5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sqrt{1+\cos2x}}{4x^2-\pi^2}$

9.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{16}-0}\frac{\sqrt{1+\cos16x}}{256x^2-\pi^2}$

9.7. $\lim\limits_{x\to\pi-0}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x^2-\pi^2}$

9.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{15}-0}\frac{\sqrt{1+\cos15x}}{225x^2-\pi^2}$

9.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{14}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 14x}}{196x^2-\pi^2}$

9.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{5}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 5x}}{25x^2-\pi^2}$

9.11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{7}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 7x}}{49x^2-\pi^2}$

9.12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 8x}}{64x^2-\pi^2}$

9.13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{10}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 10x}}{100x^2-\pi^2}$

9.14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}+0}\frac{\sqrt{1+\cos 12x}}{144x^2-\pi^2}$

9.15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}+0}\frac{\sqrt{1+\cos 9x}}{81x^2-\pi^2}$

9.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{11}-0}\frac{\sqrt{1+\cos 11x}}{121x^2-\pi^2}$

10. Найти предел

10.1. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\ln x-\ln 6}{e^x-e^6}$

10.2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\ln x-\ln 5}{e^x-e^5}$

10.3. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\ln x-\ln 4}{e^x-e^4}$

10.4. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\ln x-\ln 8}{e^x-e^8}$

10.5. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\ln x-\ln 16}{e^x-e^{16}}$

10.6. $\lim\limits_{x\to 12}\frac{\ln x-\ln 12}{e^x-e^{12}}$

10.7. . $\lim\limits_{x\to 24}\frac{\ln x-\ln 24}{e^x-e^{24}}$

10.8. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\ln x-\ln 7}{e^x-e^7}$

10.9. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\ln x-\ln 9}{e^x-e^9}$

10.10. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\ln x-\ln 10}{e^x-e^{10}}$

10.11. $\lim\limits_{x\to 11}\frac{\ln x-\ln 11}{e^x-e^{11}}$

10.12. $\lim\limits_{x\to 13}\frac{\ln x-\ln 13}{e^x-e^{13}}$

10.13. $\lim\limits_{x\to 14}\frac{\ln x-\ln 14}{e^x-e^{14}}$

10.14. $\lim\limits_{x\to 15}\frac{\ln x-\ln 15}{e^x-e^{15}}$

10.15. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\ln x-\ln 16}{e^x-e^{16}}$

10.16. $\lim\limits_{x\to 17}\frac{\ln x-\ln 17}{e^x-e^{17}}$

11. Найти предел

11.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-3x}-\operatorname{tg}4x\right)^{1/\sin 2x}$

11.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-x}+\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

11.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

11.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{2x}-\operatorname{tg}3x\right)^{1/\sin 4x}$

11.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-4x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

11.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-5x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

11.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-9x}-\operatorname{tg}2x\right)^{1/\sin 2x}$

11.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-6x}-\operatorname{tg}2x\right)^{1/\sin 3x}$

11.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-7x}-\sin 5x\right)^{1/\operatorname{tg}4x}$

11.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-8x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}2x}$

11.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

11.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2e^{-3x}-\operatorname{tg}4x\right)^{1/\sin 2x}$

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

11.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{-2x}-\sin 4x\right)^{1/\operatorname{tg}3x}$

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^{-10x}-\sin 2x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

11.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-4e^{-11x}-\sin 3x\right)^{1/\operatorname{tg}7x}$

12. Найти предел

12.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1+16x}-\sqrt[5]{1+32x}}{\sqrt[4]{1+16x}-1}$

12.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1+81x}-\sqrt[5]{1+32x}}{\sqrt[4]{1+81x}-1}$

12.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+125x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+x}}$

12.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+16x}-\sqrt[3]{1+64x}}{\sqrt{1+16x}-1}$

12.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

12.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+16x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+9x}}$

12.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+49x}-\sqrt[3]{1+8x}}{\sqrt{1+25x}}$

12.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

12.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt{1+4x}-1}$

12.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

12.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+8x}-1}$

12.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+64x}-\sqrt[4]{1+625x}}{\sqrt[3]{1+8x}}$

12.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+27x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

12.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+8x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

12.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+125x}-\sqrt[4]{1+16x}}{\sqrt[3]{1+64x}}$

12.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1+32x}-\sqrt[4]{1+81x}}{\sqrt[4]{1+16x}}$

13. Исследовать на непрерывность

13.1. $y=\cos\left(3x^5\right)$

13.2. $y=\sin\left(4x^4\right)$

13.3. $y=\cos\left(4x^2\right)$

13.4. $y=\sin\left(5x^2\right)$

13.5. $y=\cos\left(5x^2\right)$

13.6. $y=e^{4x^6}$

13.7. $y=e^{5x^4}$

13.8. $y=e^{3x^8}$

13.9. $y=e^{2x^5}$

13.10. $y=\ln(3x^2)$

13.11. $y=\ln(4x^2)$

13.12. $y=e^{6x^4}$

13.13. $y=e^{8x^5}$

13.14. $y=e^{9x^6}$

13.15. $y=\cos(4x^5)$

13.16. $y=\sin(5x^6)$

КР2 Вариант 0

В заданиях 1-2 найти первую производную

1. $y=x^{\cos x}$
2. $e^{x^2\cdot y^3(x)}+\tan(2x+3y(x))=0$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-\operatorname{tg}3x}{x^3}$
4. Исходя из определения, найти производную $y=\sin(4x^3)$.
5. Исследовать на экстремум $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$
6. Исследовать на перегиб $y=\dfrac{1}{42}x^7-\dfrac{2}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^3-5x$
7. Найти все асимптоты графика $y=\dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49}$
8. Провести исследование $y=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}$ с помощью первой производной и построить график.
9. Провести исследование $y=(x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}$ с помощью первой производной и построить график.
10. Показать равенство смешанных частных производных функции $z=\cos(x+y)e^{xy}$
11. Исследовать на экстремум $z=(y-1)^3+3(y-1)x^2-12x-15y+18$
12. Найти вторую производную параметрически заданной функции $\begin{cases} y=\sqrt{1-t^2} \\ x=\arcsin t \end{cases}$
13. Исследовать на экстремум $y=\dfrac{3}{5}x^{5/3}-\dfrac{3}{2}x^{2/3}$.
14. Теоретический вопрос.

КР2 Теоретические вопросы

1. Производная функции. Таблица производных элементарных функций.
2. Теоремы о производных
3. Первый дифференциал функции одной переменной. Таблица дифференциалов
4. Первое правило Лопиталя. Второе правило Лопиталя.
5. Точки локального максимума (минимума) функции одной переменной.
6. Стационарные точки дифференцируемой функции. Критические точки непрерывной функции.
7. Выпуклая (вогнутая) функция в точке. Точка перегиба непрерывной функции.
8. Вертикальная асимптота. Правая, левая и просто наклонная асимптота графика функции.
9. Достаточные условия возрастания (убывания) дифференцируемой в точке функции.
10. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции.
11. Необходимые условия экстремума непрерывной функции.
12. Односторонние производные. Теорема о существовании производной функции.
13. Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции одной переменной.
14. Достаточные условия экстремума непрерывной функции одной переменной.
15. Достаточные условия выпуклости (вогнутости) дважды дифференцируемой функции.
16. Необходимые условия точки перегиба непрерывной функции.
17. Достаточные условия точки перегиба непрерывной функции.
18. Теорема о просто наклонной асимптоте графика функции.
19. Полный дифференциал функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия полного дифференциала функции двух переменных.
20. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции двух переменных.
21. Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции двух переменных.
22. Среднее, среднее квадратов, дисперсия, ковариация, среднее значение произведения.

КР2 Подготовка

Таблица производных элементарных функций

1. $\frac{dC}{dx} = 0$
2. $\frac{d\left(x^{\alpha}\right)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$
4. $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$
5. $\frac{d\left(e^{x}\right)}{dx} = e^{x}$
6. $\boxed{\frac{d\left(a^{x}\right)}{dx} = a^{x}\ln a}$
7. $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$
8. $\boxed{\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x\ln a}}$
9. $\frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $\frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x}$
11. $\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
12. $\frac{d(\operatorname{arccot} x)}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$
13. $\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Теоремы о производных

1. $\boxed{\frac{d(u\pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}}$
2. $\frac{d(C\cdot f(x))}{dx} = C\cdot\frac{df(x)}{dx}$
3. $\frac{d(u\cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}\cdot v - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$
5. $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx(y)}{dy}\right)}$
6. $\boxed{\frac{dy(u(x))}{dx} = \frac{dy(u)}{du}\cdot\frac{du(x)}{dx}}$
7. $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}}$

8. $$\frac{d\left(u^{v}\right)}{dx} \equiv \frac{d\left(e^{\ln\left(u^{v}\right)}\right)}{dx} = \frac{d\left(e^{v\ln u}\right)}{dx} = e^{v\ln u}\cdot\frac{d(v\ln u)}{dx} = e^{v\ln u}\cdot\left(\frac{dv}{dx}\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\right)$$

Дифференциал функции $d\left(f(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}\cdot dx$

Таблица дифференциалов

1. $d(C) = 0\cdot dx$
2. $d\left(x^{n}\right) = nx^{n-1}dx$
3. $d(\sin x) = \cos x dx$
4. $d(\cos x) = -\sin x dx$
5. $d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$
6. $d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$
7. $d\left(e^{x}\right) = e^{x}dx$
8. $d\left(a^{x}\right) = a^{x}\ln a\cdot dx$
9. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
10. $d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx$
11. $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx$
12. $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$
13. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Пример 1. Найти производную $y = x^{\cos x}$.

$$\left(x^{\cos x}\right)' \equiv \left(e^{\ln\left(x^{\cos x}\right)}\right)' = \left(e^{\cos x\cdot\ln x}\right)' = e^{\cos x\cdot\ln x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x\right)' =$$

$$e^{\cos x\cdot\ln x}\left(\frac{d(\cos x)}{dx}\cdot\ln x+(\cos x)\cdot\frac{d(\ln x)}{dx}\right) = e^{\cos x\cdot\ln x}\cdot\left(-(\sin x)\cdot\ln x+(\cos x)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

ДЗ $y=(\operatorname{ctg} x)^{\arccos(4x)}$

Пример 2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ функции $e^{x^2\cdot y^3(x)}+\tan(2x+3y(x))=0$

Дифференцируем по x: $e^{x^2\cdot y^3(x)}\left(2x\cdot y^3(x)+x^2\cdot 3y^2(x)\cdot\dfrac{dy(x)}{dx}\right)+\dfrac{1}{\cos^2(2x+3y(x))}\left(2+3\dfrac{dy(x)}{dx}\right)=0$

$$\frac{dy(x)}{dx}\left(x^2\cdot 3y^2(x)\cdot e^{x^2\cdot y^3(x)}+\frac{3}{\cos^2(2x+3y(x))}\right)=-2x\cdot y^3(x)e^{x^2\cdot y^3(x)}-\frac{2}{\cos^2(2x+3y(x))}$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{-2x\cdot y^3(x)e^{x^2\cdot y^3(x)}-\dfrac{2}{\cos^2(2x+3y(x))}}{x^2\cdot 3y^2(x)\cdot e^{x^2\cdot y^3(x)}+\dfrac{3}{\cos^2(2x+3y(x))}}$$

ДЗ $y^4x^3+\operatorname{tg}^5(3x-2y)+4=0$.

Пример 3. Найти вторую производную $\begin{cases} y=\cos t\\ x=\sin t\end{cases}$. Первая: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\dfrac{\frac{d(\cos t)}{dt}}{\frac{d(\sin t)}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$

Вторая $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{d(-\tan t)}{dt}}{\frac{d(\sin t)}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t}=-\dfrac{1}{\cos^3 t}$

ДЗ $\begin{cases} y=\sin^3 t\\ x=\cos^3 t\end{cases}$; $\begin{cases} y=(t^4-1)^2\\ x=(t^2-1)^2\end{cases}$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-\operatorname{tg}3x}{x^3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}\left[\begin{array}{l}\textit{применяем}\\ \textit{правило Лопиталя}\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{1+9x^2}-\frac{3}{\cos^2 3x}}{3x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x-1-9x^2}{x^2(1+9x^2)\cos^2 3x}=\left\{\begin{array}{l}\cos 3x\approx 1-\dfrac{(3x)^2}{2}=1-\dfrac{9}{2}x^2\\ \cos^2 3x\approx\left(1-\dfrac{9}{2}x^2\right)^2\approx 1-2\dfrac{9}{2}x^2=1-9x^2\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-9x^2-1-9x^2}{x^2(1+9x^2)(1-9x^2)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-18x^2}{x^2(1+9x^2)(1-9x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-18}{(1+9x^2)(1-9x^2)}=-18$$

ДЗ. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin 3x}{x^3}$

Пример 5. Исходя из определения, найти производную $y=\sin(4x^3)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{\sin 4(x+\Delta x)^3-\sin\left(4x^3\right)}{\Delta x}=\left\{\begin{array}{l}\sin a-\sin b=\\ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{array}\right\}=$$

$$\frac{2\cos\left(\frac{4(x+\Delta x)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4(x+\Delta x)^3-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

Эквивалентные б.м.: $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^3\approx 1+3\frac{\Delta x}{x}$

$$\frac{2\cos\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3\left(1+3\frac{\Delta x}{x}\right)-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x+4x^3}{2}\right)\sin\left(\frac{4x^3+12x^2\Delta x-4x^3}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$\frac{2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\sin\left(6x^2\Delta x\right)}{\Delta x}=\left\{\sin\left(6x^2\Delta x\right)\approx 6x^2\Delta x\right\}=\frac{2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)6x^2\Delta x}{\Delta x}=$$

$$12x^2\cos\left(4x^3+6x^2\Delta x\right)\to 12x^2\cos\left(4x^3\right)$$

$$\left(\sin\left(4x^3\right)\right)'=12x^2\cos\left(4x^3\right)$$

ДЗ. $y=\cos\left(10x^6\right)$; $y=e^{-6x^5}$

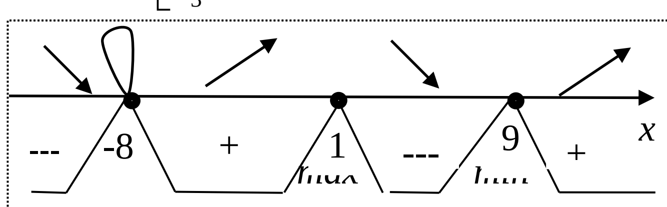
Пример 6. Исследовать на экстремум $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$

1. Поиск стационарных точек:

$$\frac{dy}{dx}=9(x+8)^8(9-x)^8-(x+8)^9 8\cdot(-1)(9-x)^7=(x+8)^8(9-x)^7\left[9(9-x)-8(x+8)\right]=$$

$$(x+8)^8(9-x)^7(81-9x-8x-64)=(x+8)^8(9-x)^7(17-17x)=$$

$$\frac{dy}{dx}=17(x+8)^8(9-x)^7(1-x)=0\quad\rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x_1=-8\quad \textit{нуль четного порядка}\\ x_2=1\\ x_3=9\end{array}\right.$$



2. Метод интервалов для первой производной

ДЗ $y=(x+7)^8\cdot(8-x)^7$; $y=(x+6)^7\cdot(7-x)^6$

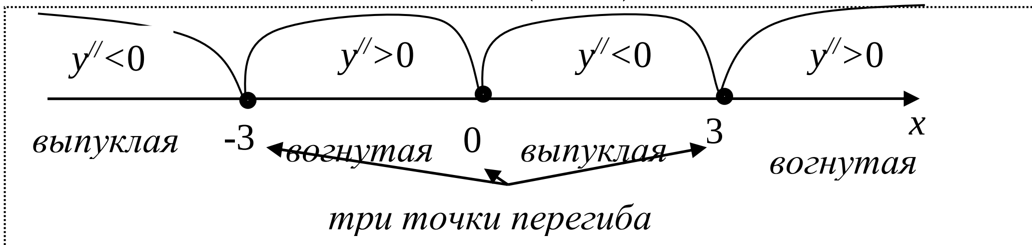
Пример 7. Исследовать на перегиб $y=\frac{1}{42}x^7-\frac{2}{5}x^5-\frac{3}{2}x^3-5x$

1. Находим сначала первую производную: $y'=\frac{7}{42}x^6-2x^4-\frac{9}{2}x^2-5$.

Затем вторую $y'' = x^5 - 8x^3 - 9x = x\left(x^4 - 8x^2 - 9\right) = \left\{\begin{matrix} \textit{соотношение в круглой} \\ \textit{скобке биквадратное} \end{matrix}\right\} = x\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 1\right)$

$y'' = x\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$. $y''=0$. Точки возможного перегиба $\left[\begin{matrix} x=3 \\ x=0 \\ x=-3 \end{matrix}\right.$

2. Метод интервалов для второй производной $y'' = x\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)\left(x+3\right)$



ДЗ $y = -\dfrac{1}{21}x^7 - \dfrac{4}{5}x^5 + 3x^3$; $\quad y = \dfrac{1}{28}x^8 - \dfrac{1}{5}x^6 - \dfrac{2}{3}x^4$

Пример 8.1. Найти все асимптоты графика $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^2 - 49}$.

1. Вертикальные асимптоты.

1.1. $x=7$. Правый предел: $\lim\limits_{x \to 7+0} \dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49} = +\infty$, $x=7$ - вертикальная.

1.2. $x=-7$ Правый предел: $\lim\limits_{x \to -7+0} \dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49} = +\infty$ $x=-7$ - вертикальная.

2. Наклонные асимптоты.

Асимптотический метод: в исходной функции выйдем на большие значения аргумента и в числителе удержим два главных слагаемых, а в знаменателе одно главное слагаемое:

$$y = \frac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49} = \{|x| >> 1\} \to \frac{x^3+5x^2}{x^2} = x+5.$$ Просто наклонная асимптота $y = x+5$

ДЗ. $y = \dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x^2-4}$; $\quad y = \dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-16}$

Пример 8.2. Найти все асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}$.

1. Вертикальные асимптоты.

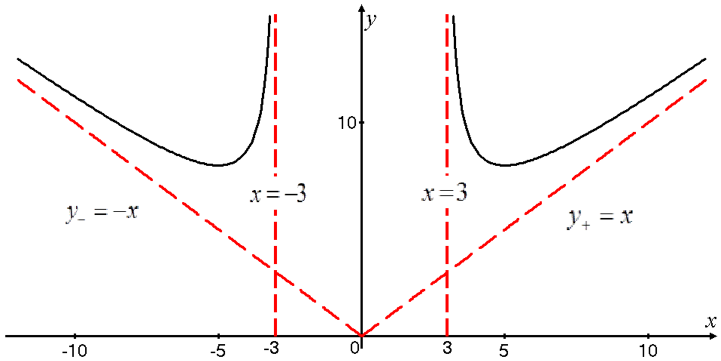
1.1. $x=3$. Правый предел: $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty$, $x=3$ - вертикальная асимптота

1.2. $x=-3$. Левый предел: $\lim\limits_{x \to -3-0} \dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty$, $x=-3$ - вертикальная асимптота

2. Наклонные асимптоты. Асимптотический метод: в исходной функции выйдем на большие значения аргумента и в знаменателе и числителе удержим по одному главному слагаемому:

$$y = \frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}} = \{|x| >> 1\} \to \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \equiv \frac{x^2}{|x|} = \left\{\begin{matrix} |x| = x \ \textit{при} \ x>0 \\ |x| = -x \ \textit{при} \ x<0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x^2}{x} \equiv +x \ \textit{при} \ x \to +\infty \\ \dfrac{x^2}{-x} \equiv -x \ \textit{при} \ x \to -\infty \end{matrix}\right.$$

Левая наклонная асимптота $y_- = -x$ Правая наклонная асимптота $y_+ = x$



ДЗ $y=\dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$; $y=\dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$

Общая схема исследования функций

1. ООФ. Общие свойства.
2. Нули функции $y=0$. Интервалы знакоопределенности $y>0$, $y<0$.
3. Точки разрыва функции.
4. Асимптоты.
5. Исследование на экстремум. Интервалы возрастания и убывания функции.
6. Исследование на перегиб. Интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Пример 9. Провести исследование $y=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}$ с помощью первой производной и построить график.

1. ООФ $x^2>9$ или $|x|>3$: $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-3 \end{array}\right.$. Четная.

2. Нули, интервалы знакоопределенности: $y>0$

3. Точки разрыва функции.

3.1. $x=3$. Правый предел: $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}=+\infty$, $x=3$ - точка разрыва II рода.

3.2. $x=-3$. Левый предел: $\lim\limits_{x\to -3-0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=+\infty$, $x=-3$ - точка разрыва II рода.

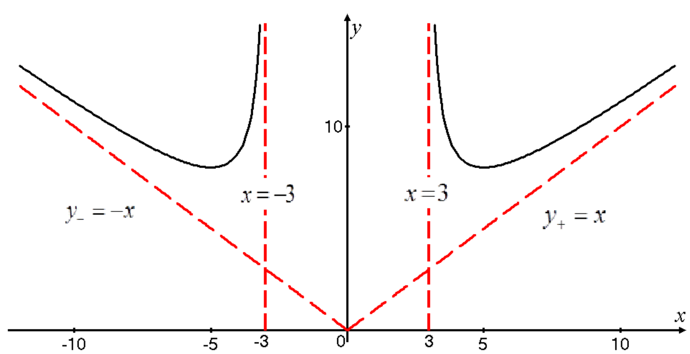
4. Асимптоты

4.1. Вертикальные асимптоты: $x=\pm 3$

4.2. Наклонные асимптоты. Асимптотический метод: в исходной функции выйдем на большие значения аргумента и в знаменателе и числителе удержим главное слагаемое:

$$y=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-9}}=\{|x|>>1\}\to\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\equiv\frac{x^2}{|x|}=\begin{cases}+x\ \text{при}\ x\to+\infty\\ -x\ \text{при}\ x\to-\infty\end{cases}$$

Левая наклонная асимптота $y_-=-x$ Правая наклонная асимптота $y_+=x$



5. Исследование на экстремум.

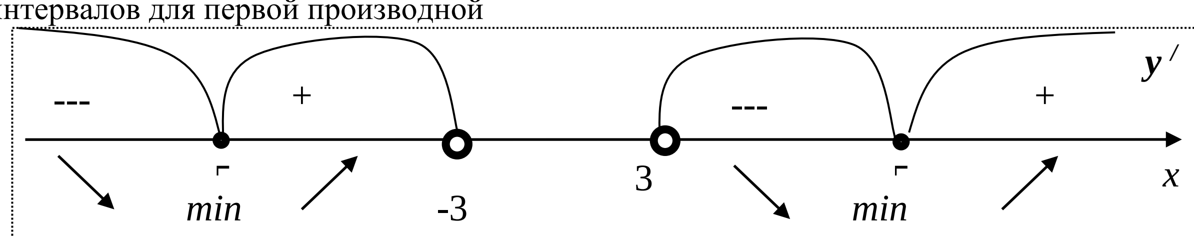
$$y'=\left(\frac{x^2+7}{\left(x^2-9\right)^{1/2}}\right)'=\frac{2x\left(x^2-9\right)^{1/2}-\left(x^2+7\right)\frac{1}{2}2x\left(x^2-9\right)^{-1/2}}{\left(x^2-9\right)}=\frac{2x\left(x^2-9\right)^{1/2}-\frac{\left(x^2+7\right)}{\left(x^2-9\right)^{1/2}}x}{\left(x^2-9\right)}=$$

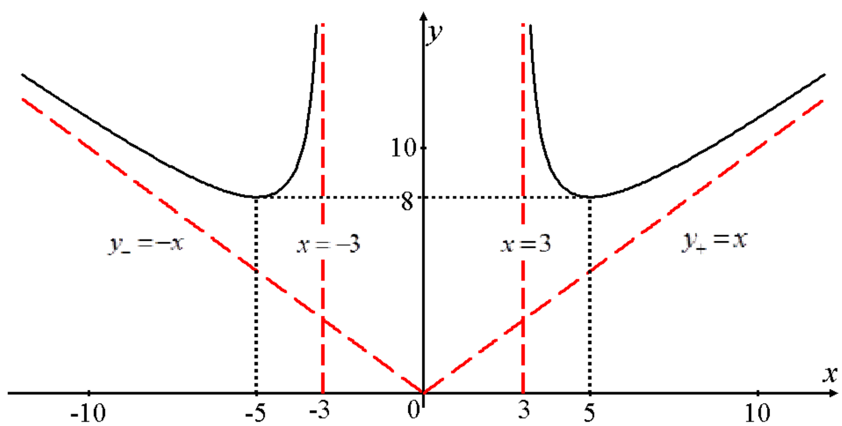
$$\frac{2x\left(x^2-9\right)-x\left(x^2+7\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left[2\left(x^2-9\right)-\left(x^2+7\right)\right]}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left(2x^2-18-x^2-7\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}=\frac{x\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

$$y'=\frac{x(x-5)(x+5)}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

5.1. Критические точки: а) $y'=0:\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=0\\x=5\end{array}\right.$; б) y' *не* $\exists$ при $x=\pm 3$, но это точки разрыва II рода.

5.2. Метод интервалов для первой производной



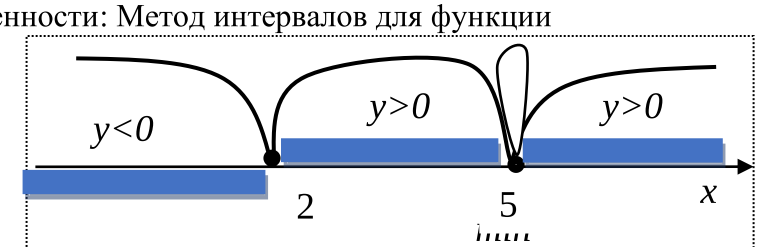


ДЗ $y=\frac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$; $\qquad y=\frac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

Пример 10. Провести исследование $y=(x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}$ с помощью первой производной и построить график

1. ООФ $x\in R$. Общего вида.
2. Нули функции: $x=2$, $x=5$.

Интервалы знакоопределенности: Метод интервалов для функции



3. Точки разрыва функции. нет
4. Асимптоты
4.1. Вертикальные: нет
4.2. Наклонные. Асимптотический метод: в исходной функции выйдем на большие значения аргумента

$$y=(x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}=x^{1/3}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}x^{2/3}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2/3}=\left\{\begin{array}{l}\text{в исходной функции выйдем}\\ \text{на большие значения аргумента}\\ |x|>>1\end{array}\right\}\approx$$

Эквивалентные б.м.: $(1+\zeta)^n\approx 1+n\zeta$: $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{1/3}\approx 1-\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{x}$, $\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2/3}\approx 1-\dfrac{2}{3}\dfrac{5}{x}$

$$x\left(1-\frac{1}{3}\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{3}\frac{5}{x}\right)=x\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\frac{10}{3}\frac{1}{x}+\frac{20}{9}\frac{1}{x^2}\right)=x-4+\frac{20}{9}\frac{1}{x}\to x-4$$

Просто наклонная асимптота $y_{\pm}=x-4$

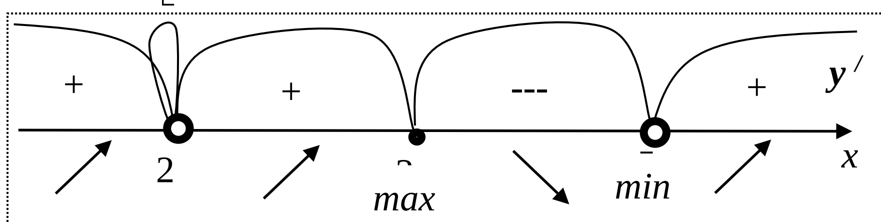
5. Исследование на экстремум.

$$y'=\left((x-2)^{1/3}(x-5)^{2/3}\right)'=\frac{1}{3}\frac{(x-5)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}}+\frac{2}{3}\frac{(x-2)^{1/3}}{(x-5)^{1/3}}=\frac{(x-5)^{2/3}(x-5)^{1/3}+2(x-2)^{1/3}(x-2)^{2/3}}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=$$

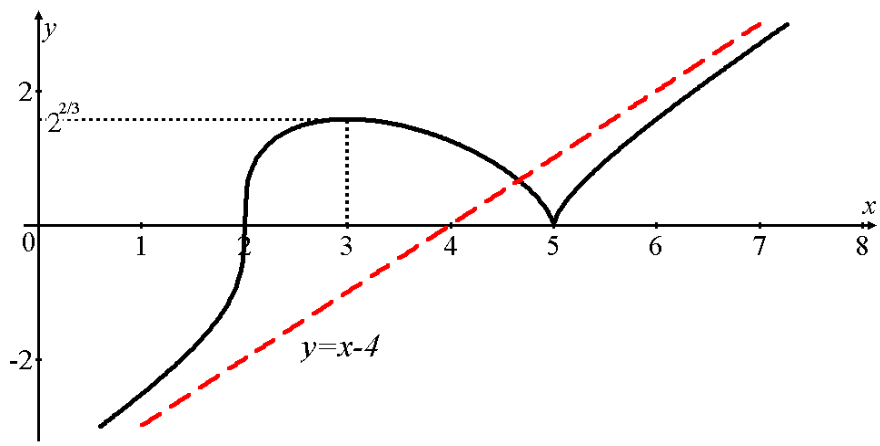
$$\frac{(x-5)+2(x-2)}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=\frac{3(x-3)}{3(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}=\frac{x-3}{(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}$$

$$y'=\frac{x-3}{(x-2)^{2/3}(x-5)^{1/3}}$$

5.1. Критические точки: а) $y'=0$: $x=3$; б) $y'\ не\ \exists$ при $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.$.



5.2. Метод интервалов для первой производной



ДЗ $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}$; $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$

Пример 11. Показать равенство смешанных частных производных функции $z=\cos(x+y)e^{xy}$

$$z'_x=-\sin(x+y)e^{xy}+\cos(x+y)e^{xy}y=e^{xy}\left[-\sin(x+y)+y\cos(x+y)\right]$$

$$\left(z'_x\right)'_y=xe^{xy}\left[-\sin(x+y)+y\cos(x+y)\right]+$$

$$e^{xy}\left[-\cos(x+y)+\cos(x+y)-y\sin(x+y)\right]$$

$$\left(z'_x\right)'_y = e^{xy}\left[-(x+y)\sin(x+y) + xy\cos(x+y)\right]$$

$$z'_y = -\sin(x+y)e^{xy} + \cos(x+y)e^{xy}x = e^{3xy}\left[-\sin(x+y) + x\cos(x+y)\right]$$

$$\left(z'_y\right)'_x = ye^{xy}\left[-\sin(x+y) + x\cos(x+y)\right] + e^{xy}\left[-\cos(x+y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y)\right]$$

$$\left(z'_y\right)'_x = e^{xy}\left[-y\sin(x+y) + xy\cos(x+y) - x\sin(x+y)\right]$$

$$\left(z'_y\right)'_x = e^{xy}\left[-(y+x)\sin(x+y) + xy\cos(x+y)\right]$$

ДЗ $z = \cos(x-y)e^{xy}$, $z = \cos(xy)e^{x+y}$.

Пример 12.1. Исследовать на экстремум $z = x^4 + y^4 - (x+y)^2$.

1. Поиск стационарных точек $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2(x+y)$. $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 4x^3 - 2(x+y) = 0 \\ 4y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} - \Rightarrow 4x^3 = 4y^3 \Rightarrow x = y \Rightarrow$ верхнее уравнение $\Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$

$x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array}\right.$, $M_1(0;0)$, $\left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{array}\right.$ $M_2(1;1)$, $\left[\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ y_3 = -1 \end{array}\right.$, $M_3(-1;-1)$

2. Достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2(x+y)$$

Находим все вторые производные: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2 \equiv A$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \equiv B$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2 \equiv C$

2.1. $M_1(0;0)$: $A = 12x^2 - 2 = -2 < 0$, $B = -2$, $C = 12x^2 - 2 = -2 < 0$ $\Delta = AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ $M_1(0;0)$?

2.2. $M_2(1;1)$: $A = 12x^2 - 2 = 10 > 0$, $B = -2$, $C = 12x^2 - 2 = 10$ $\Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \Rightarrow$ $M_2(1;1)$ min

2.3. $M_3(-1;-1)$: $A = 12x^2 - 2 = 10 > 0$, $B = -2$, $C = 12x^2 - 2 = 10$, $\Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0$ $\Rightarrow M_2(-1;-1)$ min

ДЗ $z = x^4 + (y-6)^4 - (x+y-6)^2$, $z = (x+4)^4 + y^4 - (x+y+4)^2$

Пример 12.2. Исследовать на экстремум $z = (y-1)^3 + 3(y-1)x^2 - 12x - 15y + 18$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x(y-1)-12,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3(y-1)^2+3x^2-15\quad \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}6x(y-1)-12=0\\ 3(y-1)^2+3x^2-15=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\begin{cases}x(y-1)-2=0\\ (y-1)^2+x^2-5=0\end{cases}$. Из верхнего: $(y-1)=\frac{2}{x}$ подставляем в нижнее: $\frac{4}{x^2}+x^2-5=0\Rightarrow$

$$x^4-5x^2+4=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right.,\quad x^2=1:\left[\begin{array}{l}x_1=1\\ y_1=\frac{2}{x}+1=3\end{array}\right.,\ M_1(1;3),\ \left[\begin{array}{l}x_2=-1\\ y_2=\frac{2}{x}+1=-1\end{array}\right.\ M_2(-1;-1)$$

$$x^2=4:\left[\begin{array}{l}x_3=2\\ y_3=\frac{2}{x}+1=2\end{array}\right.,\ M_3(2;2),\ \left[\begin{array}{l}x_4=-2\\ y_4=\frac{2}{x}+1=0\end{array}\right.\qquad M_4(-2;0)$$

2. Достаточные условия экстремума $\frac{\partial z}{\partial x}=6x(y-1)-12$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(y-1)^2+3x^2-15$

Находим все вторые производные: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6(y-1)\equiv A;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x\equiv B;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6(y-1)\equiv C$

2.1. $M_1(1;3)$: $A=12;\ B=6;\ C=12$, $\Delta=AC-B^2=144-36>0\Rightarrow M_1(1;3)$ min

2.2. $M_2(-1;-1)$: $A=-12<0;\ B=-6;\ C=-12$, $\Delta=AC-B^2=144-36>0\Rightarrow M_2(-1;-1)$ max

2.3. $M_3(2;2)$: $A=6;\ B=12;\ C=6$, $\Delta=AC-B^2=36-144<0\Rightarrow M_3(2;2)$ не экстремальная.

2.4. $M_4(-2;0)$: $A=-6;\ B=-12;\ C=-6$, $\Delta=AC-B^2=36-144<0\Rightarrow M_4(-2;0)$ не экстрем.

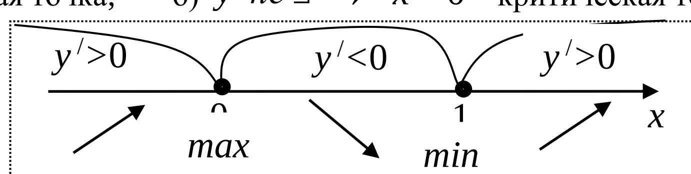
ДЗ $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; $z=12x^3+xy^2-40x+4y$

Пример 13. Исследовать на экстремум $y=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$.

1. Поиск критических точек $y'=x^{2/3}-\frac{1}{x^{1/3}}=\frac{x-1}{x^{1/3}}$

а) $y'=0\ \to\ x=1$ - критическая точка; б) $y'\ не\ \exists\ \to\ x=0$ - критическая точка

2. Метод интервалов для первой производной



ДЗ. $y=\frac{3}{17}x^{17/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$; $y=\frac{3}{38}x^{38/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

КР2 Банк задач

1. Найти первую производную

1.1. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(5x)}$

1.2. $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}(6x)}$

1.3. $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}(7x)}$

1.4. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\arctan(8x)}$

1.5. $y=(\operatorname{tg}x)^{\arcsin(3x)}$

1.6. $y=(\sin x)^{\operatorname{arctg}(7x)}$

1.7. $y=(\mathrm{tg}\,x)^{\arcsin(3x)}$

1.8. $y=(\mathrm{ctg}\,x)^{\arccos(4x)}$

1.9. $y=(\mathrm{ctg}\,x)^{\arctan(8x)}$

1.10. $y=(\cot x)^{\arctan(6x)}$

1.11. $y=(\cos x)^{\mathrm{arctg}(7x)}$

1.12. $y=(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{arctg}(6x)}$

1.13. $y=(\mathrm{tg}\,x)^{\arcsin(5x)}$

1.14. $y=(\mathrm{ctg}\,x)^{\arcsin(5x)}$

1.15. $y=(\cot x)^{\arccos(5x)}$

1.16. $y=(\tan x)^{\arcsin(6x)}$

2. Найти первую производную

2.1. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)+3=0$

2.2. $y^7x^5+\tan^4(8x-9y)+3=0$

2.3. $y^3x^2+\mathrm{tg}^4(2x-5y)+3=0$

2.4. $y^2x^3+\mathrm{ctg}^4(6x-2y)+2=0$

2.5. $y^5x^2+\sin^3(7x-5y)+3=0$

2.6. $y^4x^3+\mathrm{tg}^5(3x-2y)+4=0$

2.7. $y^5x^2+\sin^3(7x-5y)+3=0$

2.8. $y^4x^3+\mathrm{tg}^5(3x-2y)+4=0$

2.9. $y^5x^2+\mathrm{tg}^4(4x-7y)+6=0$

2.10. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)+3=0$

2.11. $y^3x^2+\mathrm{tg}^5(2x-5y)+3=0$

2.12. $y^5x^2+\mathrm{tg}^3(4x-7y)+6=0$

2.13. $y^3x^5+\cos^2(5x-6y)+3=0$

2.14. $y^3x^5+\cos^4(5x-6y)+3=0$

2.15. $y^3x^2+\mathrm{tg}^4(2x-5y)+3=0$

2.16. $y^5x^2+\mathrm{tg}^4(4x-7y)+6=0$

3. Найти вторую производную параметрически заданной функции

3.1. $\begin{cases} y=\cos^3 t \\ x=\sin^2 t \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} y=\sqrt{1-t^2} \\ x=\arcsin t \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} y=\arctan t \\ x=\ln(1+t^2) \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} y=\arccos t \\ x=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} y=\sin t \\ x=\mathrm{tg}\,t \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} y=\mathrm{ctg}\,t \\ x=\mathrm{tg}\,t \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} y=\cos t \\ x=\mathrm{ctg}\,t \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} y=3t^5+t^3 \\ x=5t^3+3t \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} y=\cos^2 t \\ x=\cot^3 t \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y=\sin^3 t \\ x=\cos^3 t \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} y=\ln(1+t^2) \\ x=\mathrm{arcctg}\,t \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} y=(1-t^2)^{5/2} \\ x=\arccos t \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} y=t^6+t^4 \\ x=\ln(t^3+2t) \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} y=(t^4-1)^2 \\ x=(t^2-1)^2 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} y=\cos t \\ x=\cot t \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} y=\sin^3 t \\ x=\cos^3 t \end{cases}$

4. Исходя из определения, найти производную

4.1. $y=\cos(10x^6)$

4.2. $y=\sin(4x^7)$

4.3. $y=\sin(7x^4)$

4.4. $y=e^{-6x^5}$

4.5. $y=e^{-8x^4}$

4.6. . $y=\sin(8x^4)$

4.7. $y=\cos(10x^5)$

4.8. $y=\cos(10x^5)$

4.9. $y=\sin(3x^5)$

4.10. $y=\cos(7x^5)$

4.11. $y=e^{-3x^7}$

4.12. $y=\cos(6x^7)$

4.13. $y=\cos(4x^8)$

4.14. . $y=e^{-3x^9}$

4.15. $y=\sin(4x^9)$

4.16. $y=e^{-4x^{10}}$

5. Найти предел

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(6x)-\mathrm{arctg}(6x)}{x^3}$

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,3x-\mathrm{tg}\,3x}{x^3}$

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{x^3}$

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\mathrm{tg}\,3x}{x^3}$

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-\sin 3x}{x^3}$

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\arcsin 5x}{x^3}$

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,8x-\mathrm{tg}\,8x}{x^3}$

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(12x)-\mathrm{arctg}(12x)}{x^3}$

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,4x-\arcsin 4x}{x^3}$

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,9x-\arcsin 9x}{x^3}$

5.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\mathrm{tg}\,2x}{x^3}$

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,11x-\arcsin 11x}{x^3}$

5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(15x)-\operatorname{arctg}(15x)}{x^3}$

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-\operatorname{tg}x}{x^3}$

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(6x)-\arcsin(6x)}{x^3}$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\arcsin 4x}{x^3}$

6. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции

6.1. $y=(x+2)^3\cdot(3-x)^2$

6.2. $y=(x+3)^4\cdot(4-x)^3$

6.3. $y=(x+4)^5\cdot(5-x)^4$

6.4. $y=(x+5)^6\cdot(6-x)^5$

6.5. $y=(x+6)^7\cdot(7-x)^6$

6.6. $y=(x+7)^8\cdot(8-x)^7$

6.7. $y=(x+8)^9\cdot(9-x)^8$

6.8. $y=(x+9)^{10}\cdot(10-x)^9$

6.9. $y=(x+10)^{11}\cdot(11-x)^{10}$

6.10. $y=(x+11)^{12}\cdot(12-x)^{11}$

6.11. $y=(x+12)^{13}\cdot(13-x)^{12}$

6.12. $y=(x+13)^{14}\cdot(14-x)^{13}$

6.13. $y=(2x-4)^6\cdot(3-2x)^5$

6.14. $y=(2x-1)^4(3-4x)^3$

6.15. $y=(2x-3)^2\cdot(3-4x)^3$

6.16. $y=(2x-1)^3(3-2x)^2$

7. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремальные точки функции

7.1. $y=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.2. $y=\frac{3}{20}x^{20/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.3. $y=\frac{3}{23}x^{23/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.4. $y=\frac{3}{29}x^{29/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.5. $y=\frac{3}{32}x^{32/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.6. $y=\frac{3}{8}x^{8/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.7. $y=\frac{3}{11}x^{11/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.8. $y=\frac{3}{14}x^{14/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.9. $y=\frac{3}{17}x^{17/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.10. $y=\frac{3}{26}x^{26/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.11. $y=\frac{3}{35}x^{35/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.12. $y=\frac{3}{38}x^{38/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.13. $y=\frac{3}{17}x^{17/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.14. $y=\frac{3}{29}x^{29/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.15. $y=\frac{3}{20}x^{20/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

7.16. $y=\frac{3}{32}x^{32/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$

8. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции

8.1. $y=\frac{1}{21}x^7+\frac{4}{5}x^5-3x^3$

8.2. $y=\frac{1}{30}x^6-\frac{1}{4}x^4-2x^2$

8.3. $y=\frac{1}{28}x^8-\frac{1}{5}x^6-\frac{2}{3}x^4$

8.4. $y=-\frac{1}{42}x^7+\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{2}x^3$

8.5. $y=\frac{1}{56}x^8-\frac{1}{10}x^6-\frac{1}{3}x^4$

8.6. $y=-\frac{1}{21}x^7-\frac{4}{5}x^5+3x^3$

8.7. $y=-\frac{1}{56}x^8+\frac{1}{10}x^6+\frac{1}{3}x^4$

8.8. $y=\frac{1}{30}x^6-\frac{2}{3}x^4-\frac{9}{2}x^2$

8.9. $y=-\frac{1}{28}x^8+\frac{1}{5}x^6+\frac{2}{3}x^4$

8.10. $y=\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{2}x^4-4x^2$

8.11. $y=-\frac{1}{7}x^7-\frac{12}{5}x^5+9x^3$

8.12. $y=\frac{1}{14}x^8-\frac{2}{5}x^6-\frac{4}{3}x^4$

8.13. $y=\frac{1}{30}x^6-\frac{2}{3}x^4-\frac{9}{2}x^2$

8.14. $y=-\frac{1}{30}x^6+\frac{1}{4}x^4+2x^2$

8.15. $y=-\frac{1}{30}x^6+\frac{2}{3}x^4+\frac{9}{2}x^2$

8.16. $y=\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{2}x^4-4x^2$

9. Провести исследование функции с помощью первой производной и построить график

9.1. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}$

9.2. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x-5)^2}$

9.3. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2}$

9.4. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}$

9.5. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}$

9.6. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-6)^2}$

9.7. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x-5)^2}$

9.8. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-4)^2}$

9.9. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-5)^2}$

9.10. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+5)^2}$

9.11. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-7)^2}$

9.12. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-5)^2}$

9.13. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x-5)^2}$

9.14. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-8)^2}$

9.15. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x-7)^2}$

9.16. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x-5)^2}$

10. Найти все асимптоты графика функции

10.1. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-16}$

10.2. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-1}$

10.3. $y=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-9}$

10.4. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-4}$

10.5. $y=\dfrac{x^3+7x^2+x+2}{x^2-36}$

10.6. $y=\dfrac{x^3+7x^2+x+2}{x^2-100}$

10.7. $y=\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^2-1}$

10.8. $y=\dfrac{x^3+4x^2+x+2}{x^2-121}$

10.9. $y=\dfrac{x^3+8x^2+x+2}{x^2-81}$

10.10. $y=\dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x^2-4}$

10.11. $y=\dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-49}$

10.12. $y=\dfrac{x^3+7x^2+x+2}{x^2-81}$

10.13. $y=\dfrac{x^3+7x^2+x+2}{x^2-64}$

10.14. $y=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-9}$

10.15. $y=\dfrac{x^3+5x^2+x+2}{x^2-16}$

10.16. $y=\dfrac{x^3+3x^2+x+2}{x^2-25}$

11. Провести исследование функции с помощью первой производной и построить график

11.1. $y=\dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-49}}$

11.2. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2-64}}$

11.3. $y=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-81}}$

11.4. $y=\dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

11.5. $y=\dfrac{2x^2+18}{\sqrt{x^2-36}}$

11.6. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$

11.7. $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2-16}}$

11.8. $y=\dfrac{3x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

11.9. $y=\dfrac{3x^2+21}{\sqrt{x^2-9}}$

11.10. $y=\dfrac{3x^2+6}{\sqrt{x^2-1}}$

11.11. $y=\dfrac{x^2+25}{\sqrt{x^2-100}}$

11.12. $y=\dfrac{x^2+14}{\sqrt{x^2-25}}$

11.13. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-1}}$

11.14. $y=\dfrac{3x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

11.15. $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-121}}$

11.16. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2-64}}$

12. Показать равенство смешанных частных производных функции

12.1. $z=\sin(x-y)e^{4xy}$

12.2. $z=\mathrm{ctg}(x+y)e^{3xy}$

12.3. $z=\cos(xy)e^{2x+2y}$

12.4. $z=\mathrm{tg}(x+y)e^{4xy}$

12.5. $z=\cos(xy)e^{3x+3y}$

12.6. $z=\cos(xy)e^{2x+2y}$

12.7. $z=\sin(xy)e^{3x+3y}$

12.8. $z=\sin(xy)e^{4x+4y}$

12.9. . $z=\mathrm{ctg}(x+y)e^{6xy}$

12.10. $z=\cos(x-y)e^{3xy}$

12.11. $z=\cos(x-y)e^{5xy}$

12.12. $z=\mathrm{tg}(x-y)e^{3xy}$

12.13. $z=\mathrm{ctg}(x+y)e^{3xy}$

12.14. $z=\sin(3x-2y)e^{4xy}$

12.15. $z=\sin(xy)e^{5x+5y}$

12.16. $z=\cos(xy)e^{6x+6y}$

13. Исследовать на экстремум

13.1. $z=(x+4)^4+y^4-(x+y+4)^2$

13.2. . $z=(x+2)^4+(y-2)^4-(x+y)^2$

13.3. $z=(x+6)^4-4xy-24y+2y^2$

13.4. $z=x^4+y^4-x^2-y^2-2xy$

13.5. $z=x^4+(y-4)^4-(x+y-4)^2$

13.6. $z=(x+1)^4+(y-3)^4-(x+y-2)^2$

13.7. $z=(x+5)^4+(y+1)^4-(x+y+6)^2$

13.8. $z=(x-1)^3+3(x-1)y^2-15x-12y$

13.9. $z=2x^3-2xy^2+2x^2+4y^2$ 16.10.

13.10. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

13.11. $z=(x+1)^3+3(x+1)y^2-15x-12y$

13.12. $z=(y-1)^3+3(y-1)x^2-12x-15y+18$

13.13. $z=x^3+3x(y-1)^2-15x-12y$

13.14. $z=12x^3+xy^2-40x+4y$

13.15. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

13.16. $z=x^3+3x(y+1)^2-15x-12y$

КР3 Вариант 0

1. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}$

2. $\int\frac{\cos^5 x dx}{\sin^{13} x}$

3. $\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$

4. $\int\ln x dx$

5. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$

6. $\int_0^{\pi/4}\frac{(4-5\tan x)dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3x$.

8. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси oy фигуры, ограниченной графиками $y=\sqrt{16-x}$ и $y=0$ при $0\le x\le 16$.

9. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$

10. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}$

11. Исследовать на абсолютную и условную сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)$

12. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$

13. Теоретический вопрос

КР3 Теоретические вопросы

1. Неопределенный интеграл. Его свойства
2. Таблица неопределенных интегралов.
3. Таблица дифференциалов.
4. Таблица подведения под знак дифференциала.
5. Теорема интегрирования по частям.
6. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной дроби на простейшие.
7. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла.
8. Несобственные интегралы I рода. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы I рода.
9. Предельный признак сравнения несобственных интегралов I рода.
10. Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
11. Предельный признак сравнения числовых рядов.
12. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
13. Признаки Даламбера и Коши сходимости числовых рядов.
14. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся числовых рядов.
15. Условно и абсолютно сходящиеся числовые ряды.
16. Признак Даламбера сходимости степенного ряда.

КР3 Подготовка

Подведение функции под знак дифференциала: $f(x)dx = d(F(x))$, где $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Таблица подведения под знак дифференциала

1. $xdx = d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}d(x^2)$
2. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$
3. $e^x dx = d(e^x)$
4. $\sin x dx = d(-\cos x) = -d(\cos x)$
5. $\cos x dx = d(\sin x)$
6. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x)$
7. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = d(-\cot x) = -d(\cot x)$
8. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x)$
9. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
2. $\int d(F(x)) = F(x) + C$
3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

   то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} \arctan x + C \\ -\operatorname{arccot} x + C \end{array}\right.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Пример 1.1. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-7x+6}$

Метод: разложение подынтегральной дроби на простейшие

$$\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{1}{(x-6)(x-1)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-6)}{(x-6)(x-1)} = \frac{x(A+B)+x^0(-A-6B)}{(x-6)(x-1)} =$$

$$\left.\begin{aligned} x^1 &: 0 = A+B \\ x^0 &: 1 = -A-6B \end{aligned}\right\} +$$

$1 = -5B$. $B = -1/5$. Из (1): $A = -B = 1/5$

$$\frac{1}{x^2-7x+6} = \frac{1/5}{x-6} - \frac{1/5}{x-1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-7x+6} = \int \left(\frac{1/5}{x-6} - \frac{1/5}{x-1} \right) dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-6} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{5}\ln(x-6) - \frac{1}{5}\ln(x-1) + C$$

ДЗ $\int \frac{dx}{x^2+9x+8}$

Пример 1.2. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}$. Метод: разложение подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)(x-1)} = \frac{x^2(A+C)+x(-A+B-2C)+x^0(-B+2C)}{(x^2-2x+2)(x-1)} =$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: 1 = A+C \\ x^1 &: 0 = -A+B-2C \\ x^0 &: 1 = -B+2C \end{aligned}\right\} +$$

$2 = C$. Из (1): $A = 1-C = -1$. Из (3): $\boxed{B = 2C-1 = 3}$

$$\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{-x+3}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-2x+2)(x-1)} = -\int \frac{xdx}{(x^2-2x+2)} + 3\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)} + 2\int \frac{dx}{(x-1)} =$$

$$-\int \frac{xdx}{(x-1)^2+1} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)} = -\int \frac{(x-1+1)d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 3\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)} =$$

$$-\int \frac{(x-1)d(x-1)}{(x-1)^2+1} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 3\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)} =$$

$$-\int \frac{(x-1)d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} + 2\ln(x-1) = -\int \frac{d\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)}{(x-1)^2+1} + 2\arctan(x-1) + 2\ln(x-1) =$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2+1}+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left((x-1)^2+1\right)}{(x-1)^2+1}+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)=$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+1\right)+2\arctan(x-1)+2\ln(x-1)+C$$

ДЗ $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+2x+5)(x-7)}$; $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-5)}$; $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+8x+17)(x-13)}$.

Пример 2.1. $\int\frac{\sin^8 xdx}{\cos^{10}x}=\int\frac{\sin^8 xdx}{\cos^8 x\cos^2 x}=\left\{\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\tan x)\right\}=\int\tan^8 xd(\tan x)=\frac{1}{9}\tan^9 x+C$

ДЗ $\int\frac{\cos^{10}x\,dx}{\sin^{12}x}$

Пример 2.2. $\int\frac{\cos^5 xdx}{\sin^{13}x}=\int\frac{\cos^4 x\cos xdx}{\sin^{13}x}=\{\cos xdx=d(\sin x)\}=\int\frac{(\cos^2 x)^2 d(\sin x)}{\sin^{13}x}==$

$$=\{\sin x=t\}=\int\frac{(1-t^2)^2 dt}{t^{13}}=\int\frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^{13}}=\int\frac{dt}{t^{13}}-2\int\frac{dt}{t^{11}}+\int\frac{dt}{t^9}=$$

$$\int t^{-13}dt-2\int t^{-11}dt+\int t^{-9}dt=\frac{t^{-13+1}}{-13+1}-2\frac{t^{-11+1}}{-11+1}+\frac{t^{-9+1}}{-9+1}=$$

$$-\frac{1}{12}\frac{1}{\sin^{12}x}+\frac{1}{5}\frac{1}{\sin^{10}x}-\frac{1}{8}\frac{1}{\sin^8 x}+C$$

ДЗ $\int\frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^9 x}$, $\int\frac{\cos^5 xdx}{\sin^8 x}$

Пример 3.1. $\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}=\int\frac{dx}{x^{1/2}(1+x)}=\int\frac{d(2x^{1/2})}{(1+x)}=2\int\frac{d(x^{1/2})}{(1+x)}=2\int\frac{d(x^{1/2})}{\left(1+(x^{1/2})^2\right)}=2\arctan(x^{1/2})+C$

ДЗ $\int\frac{dx}{x^{2/3}+x^{4/3}}$; $\int\frac{dx}{x^{3/4}+x^{5/4}}$

Пример 3.2. $\int\frac{dx}{x^{1/10}+x}=\int\frac{dx}{x^{1/10}(1+x^{9/10})}=\int\frac{d\left(\frac{10}{9}x^{9/10}\right)}{(1+x^{9/10})}=\frac{10}{9}\int\frac{d(x^{9/10}+1)}{(1+x^{9/10})}=\frac{10}{9}\ln(x^{9/10}+1)+C$

ДЗ $\int\frac{dx}{x^{1/11}+x}$

Пример 4.1. $\int x\sin xdx$. Вычислим производную некоторого произведения, чтобы в правой части возникла подинтегральная функция: $(x\cos x)'=\cos x-x\sin x\ \Rightarrow\ x\sin x=-(x\cos x)'+\cos x\ \Rightarrow$

$$\int x\sin xdx=-\int(x\cos x)'dx+\int\cos xdx\ \Rightarrow\ \int x\sin xdx=-x\cos x+\sin x+C$$

Пример 4.2. $\int xe^x dx$. Вычислим производную некоторого произведения, чтобы в правой части возникла подынтегральная функция: $\left(xe^x\right)' = e^x + xe^x \Rightarrow xe^x = \left(xe^x\right)' - e^{3x} \Rightarrow$

$$\int xe^x dx = \int \left(xe^x\right)' dx - \int e^x dx \Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Пример 4.3. $\int \arctan x dx$. Вычислим производную некоторого произведения, чтобы в правой части возникла подынтегральная функция: $\left(x \arctan x\right)' = \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x = \left(x \arctan x\right)' - \frac{x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \int \arctan x dx = \int \left(x \arctan x\right)' dx - \int \frac{xdx}{1+x^2} \Rightarrow xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2} d\left(x^2+1\right) \Rightarrow$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C$$

ДЗ $\int x^2 \ln x dx$, $\quad \int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Пример 5. $\int\limits_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx$. Замена: $x = 4\sin t$, $dx = 4\cos t dt$, $\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = 4\cos t$

Нижний предел интегрирования: $x = 0 \rightarrow t = \arcsin\left(\frac{0}{4}\right) = 0$

Верхний предел интегрирования: $x = 4 \rightarrow t = \arcsin\left(\frac{4}{4}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(16\sin^2 t\right)\left(4\cos t\right) 4\cos t \, dt = 64 \cdot 4 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t\right) dt = \left\{ \sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t \right\} =$$

$$64 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = \left\{ \sin^2(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{2} \right\} = 64 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = 32 \int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t) dt =$$

$$32 \int\limits_0^{\pi/2} dt - 32 \int\limits_0^{\pi/2} \cos 4t \, dt = 32t\Big|_0^{\pi/2} - 8 \int\limits_0^{\pi/2} \cos 4t \, d(4t) = 32\frac{\pi}{2} - 8\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = 16\pi - 8(\sin 2\pi - \sin 0) = 16\pi$$

ДЗ $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$; $\int\limits_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx$

Пример 6.1. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{(4-5\tan x)dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{(4-5\tan x)dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\right)} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{(4-5\tan x) d(\tan x)}{\left(\tan^2 x + 4\right)} = \{\tan x = t\} =$

Нижний предел интегрирования $x = 0 \rightarrow t = \tan 0 = 0$

Верхний предел интегрирования $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{(4-5t)dt}{\left(t^2+4\right)} = 4\int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(t^2+4\right)} - 5\int\limits_0^1 \frac{tdt}{\left(t^2+4\right)} = \left\{ tdt = d\left(\frac{t^2}{2}\right) \right\} =$$

$$\frac{4}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}-5\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\left(t^2+4\right)}=2\int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}-\frac{5}{2}\int_0^1 \frac{d\left(t^2+4\right)}{\left(t^2+4\right)}=2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\ln\left(t^2+4\right)\Big|_0^1=2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}\ln\frac{5}{4}$$

ДЗ $\displaystyle\int_0^{\mathrm{arctg}3} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$

Пример 6.2. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin 2x}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg}x+5)\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}=$

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{d(\tan x)}{(3\tan x+5)\tan x}=\{\tan x=t\}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3} \frac{d(\tan x)}{(3\tan x+5)\tan x}$$

Нижний предел интегрирования $x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Верхний предел интегрирования $x=\arctan 3 \rightarrow t=\tan(\arctan 3)=3$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{(3t+5)t}=\left\{\begin{array}{l}\textit{подинтегральная функция } \frac{1}{(3t+5)t}\\ \textit{правильная рациональная дробь.}\\ \textit{Разваливаем на простейшие}\end{array}\right\}=$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{1}{(3t+5)t}=\frac{A}{3t+5}+\frac{B}{t}=\frac{At+B(3t+5)}{(3t+5)t}=\frac{t^1(A+3B)+t^0 5B}{(3t+5)t}=$$

$$\left.\begin{array}{l}t^1: 0=A+3B\\ t^0: 1=5B\end{array}\right\} \quad B=\frac{1}{5}. \quad A=-3B=-\frac{3}{5}$$

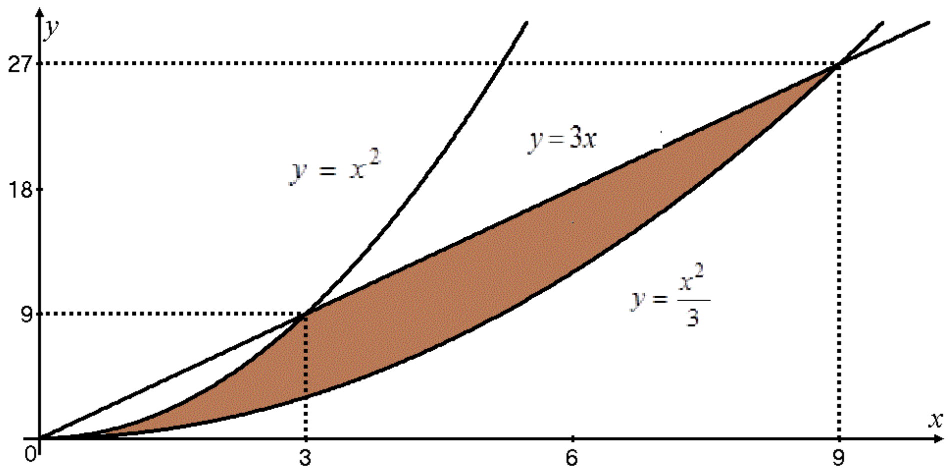
$$\frac{1}{(3t+5)t}=\frac{-3/5}{3t+5}+\frac{1/5}{t}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{(3t+5)t}=\frac{1}{2}\int_1^3\left(\frac{-3/5}{3t+5}+\frac{1/5}{t}\right)dt=-\frac{3}{10}\int_1^3 \frac{dt}{3t+5}+\frac{1}{10}\int_1^3 \frac{dt}{t}=$$

$$-\frac{1}{10}\int_1^3 \frac{d(3t+5)}{3t+5}+\frac{1}{10}\int_1^3 \frac{dt}{t}=-\frac{1}{10}\ln(3t+5)\Big|_1^3+\frac{1}{10}\ln t\Big|_1^3=-\frac{1}{10}(\ln 14-\ln 5)+\frac{1}{10}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{14}\right)$$

ДЗ $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}6} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+7)\sin 2x}$; $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}9} \frac{dx}{(\mathrm{tg}x+10)\sin 2x}$

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3x$.



$$x^2 = 3x \;\to\; \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right., \qquad \frac{x^2}{3} = 3x \;\to\; \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=9 \end{array}\right.$$

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx + \int_3^9 \left(3x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + 3\frac{x^2}{2}\Big|_3^9 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_3^9 = \frac{2}{9}27 + \frac{3}{2}\left(9^2 - 3^2\right) - \frac{1}{9}\left(9^3 - 3^3\right) =$$
$$6 + 108 - 78 = 36$$

ДЗ 1) $y = x^4$, $y = \dfrac{x^4}{27}$ и $y = 64x$; 2) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ и $y = 2x$; 3) $y = x^3$, $y = \dfrac{x^3}{9}$ и $y = 9x$.

Пример 8. Найти объемы тел, образованного при вращении вокруг осей ox и oy фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{16 - x}$ и $y = 0$ при $0 \le x \le 16$.

1. Вращение вокруг оси ox.

$$V_x = \pi \int_0^{16} (16 - x) dx = \pi \int_0^{16} (16 - x) dx = \pi \left(16x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^{16} = = \pi \left(16^2 - \frac{16^2}{2} \right) = \pi \frac{16^2}{2} = 8 \cdot 16\pi = 108\pi$$

2. Вращение вокруг оси oy. $V_y = 2\pi \int_0^{16} x\sqrt{16 - x}\, dx = 2\pi \int_4^0 \left(16 - t^2\right) t(-2t) dt = -4\pi \int_4^0 \left(16 - t^2\right) t^2 dt =$

Замена: $\sqrt{16 - x} = t \;\to\; 16 - x = t^2 \;\to\; x = 16 - t^2 \;\to\; dx = -2tdt$

Нижний предел интегрирования $x = 0 \;\to\; t = \sqrt{16 - x} = 4$

Верхний предел интегрирования $x = 16 \;\to\; t = \sqrt{16 - x} = 0$

$$-4\pi \int_4^0 \left(16t^2 - t^4\right) dt = -4\pi \left(16\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right)\Big|_4^0 = -4\pi \left[0 - \left(16\frac{4^3}{3} - \frac{4^5}{5} \right) \right] =$$

$$4\pi \left(16\frac{4^3}{3} - \frac{4^5}{5} \right) = 4\pi \left(\frac{4^5}{3} - \frac{4^5}{5} \right) = 4^6 \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \frac{2 \cdot 4^6}{15} > 0$$

ДЗ $y = \sqrt{25 - x}$ и $y = 0$ при $0 \le x \le 25$.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$.Признак Даламбера: $a_n = n^3 e^{-n}$, $a_{n+1} = (n+1)^3 e^{-(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 e^{-(n+1)}}{n^3 e^{-n}} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} < 1 \quad \textit{сходится}$$

ДЗ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-3n}$

Пример 10. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}$. Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n}=\left\{1^{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix}\textit{структура числа } e:\\ \lim\limits_{\varsigma\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varsigma}\right)^{\varsigma}=e\end{matrix}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)-5}{n+2}\right)^{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-5}}\right]^{\frac{-5n}{n+2}}=\left\{\begin{matrix}\textit{операцию предела и экспоненты}\\ \textit{меняем местами и переходим к пределу}\\ \textit{в показателе экспоненты}\end{matrix}\right\}=$$

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{-5n}{n+2}\right)=e^{-5}<1\ \textit{сходится}$$

ДЗ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-6}{n-5}\right)^{n^2}$

Пример 11. Исследовать на абсолютную и условную сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)$.

Используем предельный признак сравнения: найдем упрощенный числовой ряд, эквивалентный исходному ряду в смысле сходимости $n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)\xrightarrow[n>>1]{}\frac{(-1)^n}{n}$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

1. Исследование упрощенного знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем интегральный признак сходимости: данному знакоположительному ряду поставим в соответствии несобственный интеграл I рода $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$. Это эталонный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\alpha\le 1\ \textit{расходится}\\ \alpha>1\ \textit{сходится}\end{cases}$

В нашем случае $\alpha=1$ и интеграл расходится и знакоположительный ряд расходится $\rightarrow$ абсолютной сходимости у исходного числового ряда нет. Но отсутствие абсолютной сходимости оставляет возможность условной.

2. Исследование на условную сходимость (признак Лейбница)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n=\frac{1}{n}>0$$

2.1. Исследование на монотонность: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-n-1}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}<0\ \rightarrow\ \{a_n\}$ убывающая

2.2. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Оба пункта Лейбница выполнены: исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3+4}\right)$ сходится условно

ДЗ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

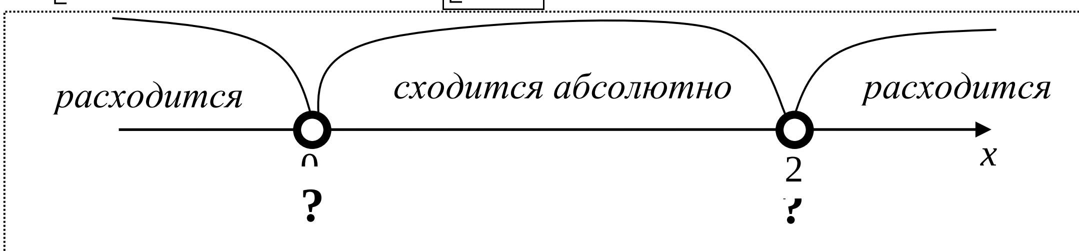
Пример 12. Исследовать степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}}$ на сходимость на всей действительной оси

1. Составляем ряд из модулей членов исходного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-1|^n}{n^{3/4}}$.

Признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}|x-1|^{n+1}}{C_n|x-1|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)^{3/4}}}{\frac{|x-1|^n}{n^{3/4}}}=|x-1|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{3/4}}{(n+1)^{3/4}}=|x-1|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/4}=|x-1|$

1.1. $|x-1|<1 \to -1<x-1<1$ сходится абсолютно при $\boxed{0<x<2}$

1.2. $|x-1|>1 \to \left[\begin{array}{l}x-1>1\\x-1<-1\end{array}\right.$ расходится при $\boxed{\left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.}$



2. Исследование на сходимость в точках $x=2$ и $x=0$

2.1. $x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}} \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-1)^n}{n^{3/4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ знакоположительный числовой ряд. Интегральный признак:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}\Leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/4}}$. Это эталонный несобственный интеграл I рода $\boxed{\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\alpha\le 1\ расходится\\ \alpha>1\ сходится\end{cases}}$ $\alpha=\frac{3}{4}<1$:

интеграл расходится $\to$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ расходится $\to$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}}$ при $x=2$ расходится.

2.2. $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{3/4}} \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ знакочередующийся числовой ряд

1. Исследование упрощенного знакочередующегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$ на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$

Используем интегральный признак сходимости: данному знакоположительному числовому ряду поставим в соответствие несобственный интеграл $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}\Leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/4}}$. Это эталонный несобственный интеграл

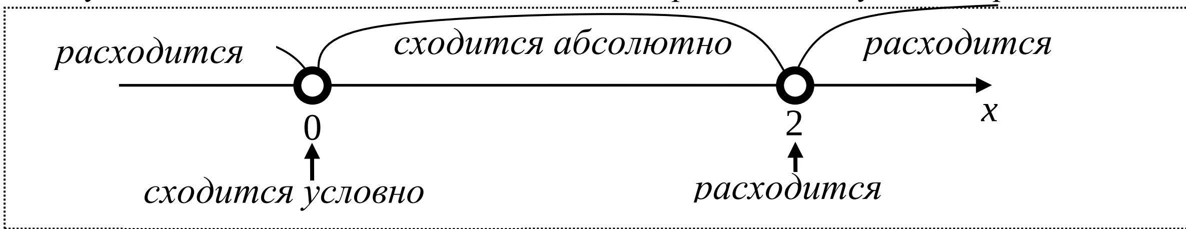
$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\alpha\le 1\ расходится\\ \alpha>1\ сходится\end{cases}$. В нашем случае $\alpha=3/4<1$ и несобственный интеграл расходится $\to$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ расходится $\to$ абсолютной сходимости у исходного числового ряда нет. Но отсутствие абсолютной сходимости оставляет возможность условной сходимости

2. Исследование на условную сходимость (признак Лейбница) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad a_n=\frac{1}{n^{3/4}}>0$

2.1. Исследование на монотонность: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^{3/4}}-\frac{1}{n^{3/4}}=\frac{n^{3/4}-(n+1)^{3/4}}{n^{3/4}(n+1)^{3/4}}<0 \quad\Rightarrow\quad \{a_n\}$ убывающая.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/4}}=0$.

Оба пункта Лейбница выполнены $\to$ исходный ряд сходится условно при $x=0$



ДЗ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$

КР3 Банк задач

1. Вычислить интеграл

1.1. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$	1.5. $\int\frac{dx}{x^2-7x+6}$	1.9. $\int\frac{dx}{x^2+4x+3}$	1.13. $\int\frac{dx}{x^2+8x+7}$
1.2. $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$	1.6. $\int\frac{dx}{x^2-8x+7}$	1.10. $\int\frac{dx}{x^2+5x+4}$	1.14. $\int\frac{dx}{x^2+9x+8}$
1.3. $\int\frac{dx}{x^2-5x+4}$	1.7. $\int\frac{dx}{x^2-9x+8}$	1.11. $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}$	1.15. $\int\frac{dx}{x^2+10x+9}$
1.4. $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}$	1.8. $\int\frac{dx}{x^2+3x+2}$	1.12. $\int\frac{dx}{x^2+7x+6}$	1.16. $\int\frac{dx}{x^2+11x+10}$

2. Вычислить интеграл

2.1. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-1)}$	2.6. $\int\frac{(x^2+5)dx}{(x^2-8x+17)(x-1)}$	2.12. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+5)(x-1)}$
2.2. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+2x+2)(x-1)}$	2.7. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+6x+10)(x-2)}$	2.13. $\int\frac{(x^2+5)dx}{(x^2-8x+17)(x-2)}$
2.3. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+5)(x-1)}$	2.8. $\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x+2)}$	2.14. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-6x+10)(x-1)}$
2.4. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-3)}$	2.9. $\int\frac{(x^2+x+1)dx}{(x^2-2x+2)(x+1)}$	2.15. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-10x+26)(x-1)}$
2.5. $\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x-3)}$	2.10. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-4x+5)(x-2)}$	2.16. $\int\frac{(x^2+5)dx}{(x^2+8x+17)(x-2)}$
	2.11. $\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+2x+2)(x-2)}$	

3. Вычислить интеграл

3.1. $\int\frac{\cos^5 x dx}{\sin^7 x}$	3.2. $\int\frac{\cos^5 x dx}{\sin^9 x}$	3.3. $\int\frac{\sin^5 x dx}{\cos^8 x}$	3.4. $\int\frac{\sin^5 x dx}{\cos^9 x}$

3.5. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{10} x}$

3.6. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{11} x}$

3.7. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^{12} x}$

3.8. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{12} x}$

3.9. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{13} x}$

3.10. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^{10} x}$

3.11. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{13} x}$

3.12. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{10} x}$

3.13. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^{14} x}$

3.14. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{16} x}$

3.15. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{18} x}$

3.16. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\cos^{20} x}$

4. Вычислить интеграл

4.1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$

4.2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$

4.3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5-3x^2}}$

4.4. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$

4.5. $\int \frac{\cos x dx}{e^{\sin x}}$

4.6. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

4.7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$

4.8. $\int \frac{\sqrt{\ln x+1} dx}{x}$

4.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

4.10. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$

4.11. $\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$

4.13. $\int \frac{\ln^2(\ln x) dx}{x\ln x}$

4.14. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

4.15. $\int \frac{\sin^2 dx}{\cos^4 x}$

4.16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

5. Вычислить интеграл

5.1. $\int x\sin x dx$

5.2. $\int xe^x dx$

5.3. $\int \arctan x dx$

5.4. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

5.5. $\int x\ln x dx$

5.6. $\int x\tan^2 x dx$

5.7. $\int \ln x dx$

5.8. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

5.9. $\int \arcsin x dx$

5.10. $\int x^2 \ln x dx$

5.11. $\int x\cot^2 x dx$

5.12. $\int x\cos x dx$

5.13. $\int x\arctan x dx$

5.14. $\int \arccos x dx$

5.15. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

5.16. $\int x^4 \ln x dx$

6. Вычислить интеграл

6.1. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

6.2. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$

6.3. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\, dx$

6.4. $\int_0^6 x^2\sqrt{36-x^2}\, dx$

6.5. $\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\, dx$

6.6. $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}\, dx$

6.7. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$

6.8. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, dx$

6.9. $\int_0^8 \sqrt{64-x^2}\, dx$

6.10. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

6.11. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$

6.12. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

6.13. $\int_0^9 \sqrt{81-x^2}\,dx$

6.14. $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$

6.15. $\int_0^8 x^2\sqrt{64-x^2}\,dx$

6.16. $\int_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}\,dx$

6. Вычислить интеграл

7.1. $\int \frac{dx}{x^{2/3}+x^{4/3}}$

7.2. $\int \frac{dx}{x^{3/4}+x^{5/4}}$

7.3. $\int \frac{dx}{x^{4/5}+x^{6/5}}$

7.4. $\int \frac{dx}{x^{5/6}+x^{7/6}}$

7.5. $\int \frac{dx}{x^{6/7}+x^{8/7}}$

7.6. $\int \frac{dx}{x^{7/8}+x^{9/8}}$

7.7. $\int \frac{dx}{x^{8/9}+x^{10/9}}$

7.8. $\int \frac{dx}{x^{9/10}+x^{11/10}}$

7.9. $\int \frac{dx}{x^{10/11}+x^{12/11}}$

7.10. $\int \frac{dx}{x^{11/12}+x^{13/12}}$

7.11. $\int \frac{dx}{x^{12/13}+x^{14/13}}$

7.12. $\int \frac{dx}{x^{13/14}+x^{15/14}}$

7.13. $\int \frac{dx}{x^{14/15}+x^{16/15}}$

7.14. $\int \frac{dx}{x^{15/16}+x^{17/16}}$

7.15. $\int \frac{dx}{x^{16/17}+x^{18/17}}$

7.16. $\int \frac{dx}{x^{17/18}+x^{19/18}}$

8. Вычислить интеграл

8.1. $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x}$

8.2. $\int \frac{dx}{x^{1/3}+x}$

8.3. $\int \frac{dx}{x^{1/4}+x}$

8.4. $\int \frac{dx}{x^{1/5}+x}$

8.5. $\int \frac{dx}{x^{1/6}+x}$

8.6. $\int \frac{dx}{x^{1/7}+x}$

8.7. $\int \frac{dx}{x^{1/8}+x}$

8.8. $\int \frac{dx}{x^{1/9}+x}$

8.9. $\int \frac{dx}{x^{1/10}+x}$

8.10. $\int \frac{dx}{x^{1/11}+x}$

8.11. $\int \frac{dx}{x^{1/12}+x}$

8.12. $\int \frac{dx}{x^{1/13}+x}$

8.13. $\int \frac{dx}{x^{1/14}+x}$

8.14. $\int \frac{dx}{x^{1/15}+x}$

8.15. $\int \frac{dx}{x^{1/16}+x}$

8.16. $\int \frac{dx}{x^{1/4}+x}$

9. Вычислить интеграл

9.1. $\int_0^{\mathrm{arctg}5} \frac{(2+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+25\cos^2 x}$

9.2. $\int_0^{\mathrm{arctg}8} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+64\cos^2 x}$

9.3. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{(8+\mathrm{tg}x)dx}{9\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.4. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/2)} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.5. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/4)} \frac{(12+\mathrm{tg}x)dx}{16\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.6. $\int_0^{\mathrm{arctg}3} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+9\cos^2 x}$

9.7. $\int_0^{\mathrm{arctg}6} \frac{(12+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+36\cos^2 x}$

9.8. $\int_0^{\mathrm{arctg}7} \frac{(4+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+49\cos^2 x}$

9.9. $\int_0^{\mathrm{arctg}9} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+81\cos^2 x}$

9.10. $\int_0^{\mathrm{arctg}10} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+100\cos^2 x}$

9.11. $\int_0^{\mathrm{arctg}11} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+121\cos^2 x}$

9.12. $\int_0^{\mathrm{arctg}12} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+144\cos^2 x}$

9.13. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/5)} \frac{(6+\mathrm{tg}x)dx}{25\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.14. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/6)} \frac{(7+\mathrm{tg}x)dx}{36\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.15. $\int_0^{\mathrm{arctg}(1/7)} \frac{(8+\mathrm{tg}x)dx}{49\sin^2 x+\cos^2 x}$

9.16. $\int_0^{\mathrm{arctg}4} \frac{(5+\mathrm{tg}x)dx}{\sin^2 x+16\cos^2 x}$

10. Вычислить интеграл

10.1. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+3)\sin 2x}$

10.2. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+4)\sin 2x}$

10.3. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}4} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+5)\sin 2x}$

10.4. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}5} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+6)\sin 2x}$

10.5. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}6} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+7)\sin 2x}$

10.6. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}7} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+8)\sin 2x}$

10.7. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}8} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+9)\sin 2x}$

10.8. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}10} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+11)\sin 2x}$

10.9. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}11} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+12)\sin 2x}$

10.10. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}12} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+13)\sin 2x}$

10.11. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}13} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+14)\sin 2x}$

10.12. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}14} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+15)\sin 2x}$

10.13. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}15} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+16)\sin 2x}$

10.14. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}16} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+17)\sin 2x}$

10.15. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}17} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+18)\sin 2x}$

10.16. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}18} \frac{dx}{(\operatorname{tg}x+19)\sin 2x}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

11.1. $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3x$.

11.2. $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$ и $y=4x$

11.3. $y=x^3$, $y=\frac{x^3}{9}$ и $y=4x$

11.4. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{27}$ и $y=64x$.

11.5. $y=x^2-8x+9$ и $y=x+1$.

11.6. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{8}$ и $y=8x$.

11.7. $y=x^3$, $y=\frac{x^3}{25}$ и $y=9x$.

11.8. $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{16}$ и $y=16x$

11.9. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{27}$ и $y=27x$.

11.10. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{27}$ и $y=64x$

11.11. $y=x^3$, $y=\frac{x^3}{16}$ и $y=9x$

11.12. $y=x^3$, $y=\frac{x^3}{16}$ и $y=16x$

11.13. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{8}$ и $y=8x$.

11.14. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{8}$ и $y=27x$.

11.15. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{27}$ и $y=8x$

11.16. $y=x^4$, $y=\frac{x^4}{27}$ и $y=27x$

12. Найти объемы тел, образованных при вращении вокруг осей ox и oy фигуры, ограниченной графиками

12.1. $y=\sqrt{36-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 36$.

12.2. $y=\sqrt{49-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 49$

12.3. $y=\sqrt{64-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 64$

12.4. $y=\sqrt{81-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 81$.

12.5. $y=\sqrt{121-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 121$

12.6. $y=\sqrt{100-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 100$

12.7. $y=\sqrt{196-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 196$.

12.8. $y=\sqrt{144-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 144$.

12.9. $y=\sqrt{4-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 4$.

12.10. $y=\sqrt{16-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 16$.

12.11. $y=\sqrt{256-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 256$.

12.12. $y=\sqrt{9-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 9$.

12.13. $y=\sqrt{25-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 25$.

12.14. $y=\sqrt{225-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 225$.

12.15. $y=\sqrt{36-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 36$.

12.16. $y=\sqrt{121-x}$ и $y=0$, $0\le x\le 121$.

13. Исследовать на сходимость

13.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\cdot e^{-3n}$

13.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\cdot e^{-3n}$

13.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^7\cdot e^{-3n}$

13.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^5\cdot e^{-3n}$

13.5. $\sum_{n=1}^{\infty} n^6\cdot e^{-3n}$

13.6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{11}\cdot e^{-3n}$

13.7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{12}\cdot e^{-3n}$

13.8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^8\cdot e^{-3n}$

13.9. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{14}\cdot e^{-3n}$

13.10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^7\cdot e^{-3n}$

13.11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^9\cdot e^{-3n}$

13.12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^8\cdot e^{-3n}$

13.13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10}\cdot e^{-3n}$

13.14. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{15}\cdot e^{-3n}$

13.15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{16}\cdot e^{-3n}$

13.16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{15}\cdot e^{-3n}$

14. Исследовать на сходимость

14.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

14.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n^2}$

14.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2}$

14.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-6}{n-5}\right)^{n^2}$

14.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n+6}\right)^{n^2}$

14.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{n-3}\right)^{n^2}$

14.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+8}{n+7}\right)^{n^2}$

14.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^{n^2}$

14.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n^2}$

14.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-9}{n-8}\right)^{n^2}$

14.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-8}{n-7}\right)^{n^2}$

14.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2}$

14.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}$

14.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{n-4}\right)^{n^2}$

14.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+9}{n+8}\right)^{n^2}$

14.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-10}{n-9}\right)^{n^2}$

15. Исследовать на абсолютную и условную сходимости

15.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

15.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}+4}\right)$

15.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[7]{n}+2}\right)$

15.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+2}}$

15.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[6]{n}+4}\right)$

15.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[8]{n}}\right)$

15.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}\right)$

15.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)$

15.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[10]{n}}\right)$

15.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[11]{n}}\right)$

15.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)$

15.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

15.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[8]{n}}\right)$

15.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[9]{n}+4}\right)$

15.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[8]{n}+2}\right)$

15.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[10]{n}+6}\right)$

16. Найти интервал сходимости степенного ряда

16.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$

16.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cdot(x-3)^n$

16.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt[5]{n^2}}$

16.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$

16.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[7]{n^6}}$

16.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[6]{n}\cdot(x+4)^n$

16.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt[5]{n^3}}$

16.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^3}\cdot(x+1)^n$

16.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$

16.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{\sqrt[8]{n^7}}$

16.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[7]{n^5}\cdot(x-6)^n$

16.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$

16.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n^3}\cdot(x+1)^n$

16.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$

16.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{\sqrt[9]{n^8}}$

16.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[7]{n^6}}$

КР4 Вариант 0

В заданиях 1-8 найти общее решение

1. $xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+(\arccos y)dy=0$
2. $y'+\frac{9y}{x}=11x$.
3. $xy'-y=x\cot\frac{y}{x}$.
4. $\left(x^4\ln x+y\right)dx+\left(\frac{1}{1+y^2}+x\right)dy=0$
5. $\sqrt[13]{x}\cdot y'''=1$.
6. $x\cdot y''+y'+x=0$
7. $xy''y+x(y')^2+5y'y=1$
8. $y''-6y'+5y=2e^x(x+1)$.

9. Найти структуру частного решения

$$y''-4y'+3y=x^2e^x+e^{2x}\cos x.$$

В заданиях 10-13 решить задачу Коши

10. $y''=6y^{11}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

11. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y,\\ \frac{dy}{dt}=2x+3y\end{cases}$ при $x(0)=1,\ y(0)=1$.

12. $y'''-12y''+36y'=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$

13. $y''+y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

КР4 Подготовка

Пример 1. Найти общее решение $xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+(\arccos y)dy=0$. С разделяющимися:

$$xe^{x^2}dx=-\frac{(\arccos y)dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \int xe^{x^2}dx=-\int\frac{(\arccos y)dy}{\sqrt{1-y^2}}+C \Rightarrow xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}d\left(x^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-d(\arccos y) \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\int(\arccos y)d(\arccos y)+C \rightarrow \frac{1}{2}e^{x^2}=\frac{1}{2}\arccos^2 y+C$$

ДЗ $\arctan y dy=\left(1+y^2\right)dx$; $y\cdot\operatorname{tg}(x)dx+(\ln y)dy=0$; $\left(1+\sin^2 x\right)\ln y dy+y\cos x dx=0$

Пример 2. Найти общее решение $y'+\frac{9y}{x}=11x$.

1-й метод: Классический. Классификация: НЛУ $\quad y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$

1. $y_{оо}$. $y'+\frac{9y}{x}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-9\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-9\int\frac{dx}{x}+C \Rightarrow \ln y=-9\ln x+C \Rightarrow$

$$e^{\ln y} = e^{-9\ln x + C} \quad \Rightarrow y_{oo} = \frac{C}{x^9}$$

2. $y_{чн} = \dfrac{C(x)}{x^9} \Rightarrow y' + \dfrac{9y}{x} = 11x \Rightarrow \dfrac{dC}{dx}\dfrac{1}{x^9} - \dfrac{9}{x^{10}}C + \dfrac{9}{x}\dfrac{C}{x^9} = 11x \Rightarrow \dfrac{dC}{dx}\dfrac{1}{x^9} = 11x \Rightarrow$

$$dC = 11x^{10}dx \Rightarrow \int dC = 11\int x^{10}dx + 0 \to C(x) = x^{11} \to y_{чн} = \frac{C(x)}{x^9} = \frac{x^{11}}{x^9} = x^2$$

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = \frac{C}{x^9} + x^2$$

2-й метод: Выделение дифференциальных структур. Умножим $y' + \dfrac{9y}{x} = 11x$ на x^9:

$$x^9y' + 9x^8y = 11x^{10} \Rightarrow 9x^8 = \left(x^9\right)' \Rightarrow x^9y' + \left(x^9\right)'y = 11x^{10} \Rightarrow \left(x^9y\right)' = 11x^{10} \Rightarrow$$

$$\frac{d\left(x^9y\right)}{dx} = 11x^{10} \Rightarrow d\left(x^9y\right) = 11x^{10}dx \Rightarrow \int d\left(x^9y\right) = 11\int x^{10}dx + C \Rightarrow x^9y = 11\frac{x^{11}}{11} + C \Rightarrow$$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^9}$$

ДЗ $y' + \dfrac{8y}{x} = 10x$; $y' + \dfrac{5y}{x} = 7x$

Пример 3. Найти общее решение $xy' - y = x\cot\dfrac{y}{x}$. Делим на x: $y' = \dfrac{y}{x} + \cot\left(\dfrac{y}{x}\right)$ - с однородной функцией.

Замена $U(x) = \dfrac{y}{x}$, $y' = U + x\dfrac{dU}{dx} \Rightarrow U + x\dfrac{dU}{dx} = U + \cot(U) \Rightarrow x\dfrac{dU}{dx} = \cot(U) \equiv \dfrac{\cos U}{\sin U} \Rightarrow$

$$\int\frac{\sin U dU}{\cos U} = \int\frac{dx}{x} + C \Rightarrow \boxed{\sin x dx = d(-\cos x) = -d(\cos x)} \Rightarrow -\int\frac{d(\cos U)}{\cos U} = \ln x + C \Rightarrow$$

$$-\ln(\cos U) = \ln x + C \Rightarrow -\ln\left(\cos\frac{y}{x}\right) = \ln x + C.$$

ДЗ 1) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 2) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\arcsin\dfrac{y}{x}$; 3) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

Пример 4. Найти общее решение: $(2x + \ln y)dx + \left(\dfrac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0$.

Классификация: $\begin{cases} \dfrac{\partial(2x + \ln y)}{\partial y} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{y} + \sin y\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \end{cases}$ в полных дифференциалах: Левая часть– полный дифференциал $U(x, y)$:

$dU(x, y) = \dfrac{\partial U(x, y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U(x, y)}{\partial y}dy = 0$. Сопоставляя данную форму с исходным уравнением

$dU(x,y)=(2x+\ln y)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$, получим для $U(x,y)$: $\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=2x+\ln y & (1)\\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\dfrac{x}{y}+\sin y & (2)\end{cases}$. (1)

интегрируем по x: $U(x,y)=\int(2x+\ln y)dx+\varphi(y)$. При интегрировании по x функция $\varphi(y)$ играет роль константы. $U(x,y)=x^2+x\ln y+\varphi(y)$ $\Rightarrow$ (2): $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\dfrac{x}{y}+\sin y$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\left(x^2+x\ln y+\varphi(y)\right)}{\partial y}=\frac{x}{y}+\sin y \to \frac{x}{y}+\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{x}{y}+\sin y \to \frac{d\varphi(y)}{dy}=\sin y \Rightarrow$$

$\varphi(y)=-\cos y+C$. $\quad U(x,y)=x^2+x\ln y-\cos y=C$

ДЗ. $\left(x\cos x-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\dfrac{dy}{x}=0$, $(\arcsin x-3y)\,dx+\left(\dfrac{1}{1+y^2}-3x\right)dy=0$

Пример 5. Найти общее решение $\sqrt[13]{x}\cdot y'''=1$. Классификация: допускает понижение порядка: не содержит y. Замена $y''=p$. Для p: $\sqrt[13]{x}\cdot\dfrac{dp}{dx}=1 \Rightarrow \int dp=\int x^{-1/13}dx+C_1 \to p=\dfrac{x^{12/13}}{12/13}+C_1 \to$

$y''=\dfrac{13}{12}x^{12/13}+C_1$. Замена: $y'=R \Rightarrow \dfrac{dR}{dx}=\dfrac{13}{12}x^{12/13}+C_1 \Rightarrow dR=\dfrac{13}{12}x^{12/13}dx+C_1dx \to$

$$\int dR=\frac{13}{12}\int x^{12/13}dx+C_1\int dx+C_2 \Rightarrow R=\frac{13}{12}\frac{x^{25/13}}{25/13}+C_1x+C_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{13}{12}\frac{13}{25}x^{25/13}+C_1x+C_2 \Rightarrow$$

$$\int dy=\frac{13}{12}\frac{13}{25}\int x^{25/13}dx+C_1\int xdx+C_2\int dx+C_3 \Rightarrow y=\frac{13}{12}\frac{13}{25}\frac{13}{38}x^{38/13}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

ДЗ $\sqrt[10]{x}\cdot y^{(4)}=1$; $\sqrt[6]{x}\cdot y'''=1$

Пример 6. Найти решение Коши $y''=6y^{11}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$. Классификация: допускает понижение порядка (не содержит x). Замена: $y'_x=z(y)$. $y''_{xx}=\dfrac{dz(y)}{dx}=\dfrac{dz(y)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\equiv\dfrac{dz(y)}{dy}z(y)$. После замены:

$$\frac{dz}{dy}z=6y^{11} \Rightarrow zdz=6y^{11}dy \to \int zdz=6\int y^{11}dy \to \frac{z^2}{2}=6\frac{y^{12}}{12}+C_1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{y^{12}+C_1}$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^{12}+C_1}$. Из начальных условий $y(0)=1,\ y'(0)=1$: $1=\pm\sqrt{1+C_1}$ $\Rightarrow$ Знак + и $C_1=0$. В итоге имеем уравнение $\dfrac{dy}{dx}=y^6 \Rightarrow \int\dfrac{dy}{y^6}=\int dx+C_2 \Rightarrow -\dfrac{1}{5y^5}=x+C_2 \Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{-5x+C_2}}$.

Определим значение второй константы. Из начального условия $y(0)=1$: $1=\dfrac{1}{\sqrt[5]{0+C_2}}$ $\Rightarrow C_2=1$. Решение Коши $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{-5x+1}}$.

ДЗ. $y(0)=1,\ y'(0)=1$: 1) $y''=2y^3$; 2) $y''=3y^5$

Пример 7. Найти структуру частного решения $y''-4y'+3y=x^2e^x+e^{2x}\cos x$. Классификация: НЛУ второго порядка с постоянными коэффициентами (ВППК) и двумя спец. правыми частями. $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$

1. $y_{оо}$. $y''-4y'+3y=0$ Метод характеристического уравнения: $y=e^{\lambda x}\ \Rightarrow\ \lambda^2-4\lambda+3=0\ \Rightarrow$

$$\lambda_1=1,\lambda_2=3\ \Rightarrow\ y_{оо}=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

2. $y_{чн}$. Структура $y_{чн}$ повторяет структуру правой части уравнения. В правой части НЛУ два слагаемых с различными специальными частями

$$f_1(x)=x^2e^x\ \to\ y_{чн(1)}.\qquad f_2(x)=e^{2x}\cos x\ \to\ y_{чн(2)}$$

2.1. $y_{чн(1)}$. НЛУ с $f_1(x)=x^2e^x$: $y''-4y'+3y=x^2e^x$ $\quad y_{оо}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

Комплексное число правой части (КЧПЧ) $a+ib=1+i0\equiv 1$ совпадает с одним корнем характеристического

$$a+ib=1=\lambda_1\neq\lambda_2 \text{ простой резонанс } y_{чн(1)}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x$$

2.2. $y_{чн(2)}$. НЛУ с $f_2(x)=e^{2x}\cos x$: $y''-4y'+3y=e^{2x}\cos x$ $\quad y_{оо}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

КЧПЧ $a+ib=2+i$ не совпадает с корнями характеристического $a+ib=2+i\neq\lambda_{1,2}$ нет резонанса

$$y_{чн(2)}=e^{2x}(D\cos x+E\sin x)$$

$$y_{чн}=y_{чн(1)}+y_{чн(2)}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x+e^{2x}e^{2x}(D\cos x+E\sin x)$$

ДЗ $y''-10y'+24y=xe^x\sin x+x^2e^{4x}$, $\quad y''-8y'+15y=x^2e^{3x}+e^{2x}\cos x$;
$y''+8y'+12y=e^x\cos x+x^2e^{-2x}$

Пример 8. $y''-6y'+5y=2e^x(x+1)$. Классификация: НЛУ ВППК и со специальной правой частью

$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$.

1. $y_{оо}$. $y''-6y'+5y=0\ \Rightarrow\ \lambda^2-6\lambda+5=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=5,\lambda_2=1$.

2. $y_{чн}$. КЧПЧ $a+ib\equiv 1$ совпадает с одним корнем характеристического: $a+ib=1=\lambda_2\neq\lambda_1$ Простой резонанс: $y_{чн}=xe^x(Ax+B)=e^x\left(Ax^2+Bx\right)\to$ НЛУ

$$y'_{чн}=e^x\left(Ax^2+Bx\right)+e^x(2Ax+B)=e^x\left(Ax^2+x(2A+B)+B\right)\to \text{НЛУ}$$

$$y''_{чн}=e^x\left(Ax^2+x(2A+B)+B\right)+e^x(2Ax+2A+B)=e^x\left(Ax^2+x(4A+B)+2A+2B\right)\to \text{НЛУ}$$

$$e^x\left(Ax^2+x(4A+B)+2A+2B\right)-6e^x\left(Ax^2+x(2A+B)+B\right)+5e^x\left(Ax^2+Bx\right)=2e^x(x+1)$$

$$\left(Ax^2+x(4A+B)+2A+2B\right)-6\left(Ax^2+x(2A+B)+B\right)+5\left(Ax^2+Bx\right)=2(x+1)$$

$$x(-8A)+x^0(2A-4B)=2x+2\ \Rightarrow\ \begin{cases}-8A=2\\2A-4B=2\end{cases}$$

Из первого уравнения: $A=-\frac{1}{4}$, Из второго уравнения: $B=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$,

$$y_{чн}=xe^x(Ax+B)=xe^x\left(-\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\right)$$

ДЗ. 1) $y''-8y'+7y=2e^x(x+1)$; 2) $y''-14y'+13y=2e^x(x+1)$

Пример 9. Найти решение Коши $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y\end{cases}$, $x(0)=1,\ y(0)=1$. $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda t}\\ y(t)=y_0e^{\lambda t}\end{cases}$. $\Delta=\begin{vmatrix}(2-\lambda) & 1\\ 2 & (3-\lambda)\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)-2=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=4,\lambda_2=1 \Rightarrow x(t)=C_1e^{4t}+C_2e^t$$

$y(t)$ находим из первого уравнения системы: $\dfrac{dx}{dt}=2x+y$:

$$y=-2x+\frac{dx}{dt}=-2\left(C_1e^{4t}+C_2e^t\right)+\frac{d}{dt}\left(C_1e^{4t}+C_2e^t\right)=-2C_1e^{4t}-2C_2e^t+4C_1e^{4t}+C_2e^t$$

$$y(t)=2C_1e^{4t}-C_2e^t$$

2. Решение Коши при $x(0)=1,\ y(0)=1$. $x(t)=C_1e^{4t}+C_2e^t$, $y(t)=2C_1e^{4t}-C_2e^t$

$\begin{cases}1=C_1+C_2\\ 1=2C_1-C_2\end{cases}$. Первое складываем со вторым: $2=3C_1 \Rightarrow C_1=\dfrac{2}{3}$. Из первого $C_2=1-C_1=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Решение Коши: $x(t)=\dfrac{2}{3}e^{4t}+\dfrac{1}{3}e^t$, $y(t)=\dfrac{4}{3}e^{4t}-\dfrac{1}{3}e^t$

ДЗ. $x(0)=1,\ y(0)=1$, $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=12x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+13y\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=5x\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x\end{cases}$.

Пример 10. Решить задачу Коши $y'''-12y''+36y'=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$.

Классификация: ОЛУ третьего порядка с постоянными коэффициентами. $y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$

$$y=e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^3-12\lambda^2+36\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-12\lambda+36)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-6)^2=0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=0\to y_1=e^0=1\\ \lambda_2=6\to y_2=e^{6x}\\ \lambda_3=6\to y_3=xe^{6x}\end{matrix}.$$

$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=C_1+C_2e^{6x}+C_3xe^{6x}$$

$$y'_{oo}=6C_2e^{6x}+6C_3xe^{6x}+C_3e^{6x},\quad y''_{oo}=36C_2e^{6x}+36C_3xe^{6x}+12C_3e^{6x}$$

$$\begin{cases}y(0)=1: & C_1+C_2=1\\ y'(0)=1: & 6C_2+C_3=1\\ y''(0)=1: & 36C_2+12C_3=1\end{cases}$$

Второе уравнение умножаем на 6 и вычитаем третье уравнение: $-6C_3=5 \Rightarrow C_3=-\dfrac{5}{6}$

$$C_2=\frac{1-C_3}{6}=\frac{1+\frac{5}{6}}{6}=\frac{11}{36},\ C_1=1-C_2=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}.\quad y_{чо}=\frac{25}{36}+\frac{11}{36}e^{6x}-\frac{5}{6}xe^{6x}$$

ДЗ. $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$: 1) $y'''+12y''+36y'=0$; 2) $y'''-6y''+9y'=0$.

Пример 11. Решить задачу Коши $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$. Классификация: НЛУ ВППК.

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$$

1. y_{oo}. $y=e^{\lambda x}\ \Rightarrow\ y''+y=0\ \Rightarrow\ \lambda^2+1=0\ \Rightarrow\ \lambda_{1,2}=\pm i$.

$$\lambda_1=i\ \to\ y_1=e^{ix}=e^{ix}\ \to\ y_1=\cos x+i\sin x\ \to\ y_1=\cos x$$

$$\lambda_2=-i\ \to\ y_2=e^{-ix}=e^{-ix}\ \to\ y_2=\cos x-i\sin x\ \to\ y_2=\sin x$$

$$y_{oo}=C_1\sin x+C_2\cos x$$

2. $y_{чн}=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$. $\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{cases}\ \Rightarrow\ +\ \begin{array}{l}\sin x\times\\ \cos x\times\end{array}\begin{cases}C_1'\sin x+C_2'\cos x=0\\ C_1'\cos x-C_2'\sin x=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$

Верхнее умножаем на $\sin x$, нижнее на $\cos x$. Полученное верхнее складываем с полученным нижним:

$\dfrac{dC_1}{dx}=1\ \Rightarrow\ C_1=x$. Из верхнего уравнения системы $\begin{cases}C_1'\sin x+C_2'\cos x=0\\ C_1'\cos x-C_2'\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\end{cases}\ \Rightarrow$

$$C_2'=-C_1'\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow\ \frac{dC_2}{dx}=-\frac{\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow\ dC_2=-\frac{\sin x dx}{\cos x}\ \Rightarrow$$

$$C_2=-\int\frac{\sin x dx}{\cos x}=-\int\frac{d(-\cos x)}{\cos x}=\ln(\cos x)\ \Rightarrow\ C_2(x)=\ln(\cos x),\ \ C_1(x)=x$$

$$y_{чн}=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x=x\sin x+\ln(\cos x)\cos x$$

$$y_{он}=C_1\sin x+C_2\cos x+x\sin x+\ln(\cos x)\cos x$$

$$\frac{dy_{он}}{dx}=C_1\cos x-C_2\sin x+\sin x+x\cos x-\sin x-\ln(\cos x)\sin x$$

Найдем решение Коши $y(0)=1,\ y'(0)=1$: $\begin{cases}1=C_2\\ 1=C_1\end{cases}$.

$$y_{ЗандачаКоши}=\sin x+\cos x+x\sin x+\ln(\cos x)\cos$$

ДЗ. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; $y''+y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ при $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; $y''+y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^5 x}$ при $y(0)=1,\ y'(0)=1$

Пример 12. Найти общее решение $x\cdot y''+y'+x=0$. 1-й метод: уравнение допускает понижение порядка: не содержит y : замена $y'=p(x)$: $x\cdot\dfrac{dp}{dx}+p+x=0\ \Rightarrow\ \dfrac{dp}{dx}+\dfrac{p}{x}=-1$ НЛУ: $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$

1. y_{oo}. $\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{p}{x}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \displaystyle\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{x}+C_1\ \Rightarrow\ \ln p=-\ln x+C_1\ \Rightarrow\ e^{\ln p}=e^{-\ln x+C_1}$

$$\Rightarrow\ p_{oo}=\frac{C_1}{x}$$

2. $y_{чн}$. $\frac{dp}{dx}+\frac{p}{x}=-1$. $p_{чн}=\frac{C_1(x)}{x}\ \Rightarrow\ \frac{dp}{dx}+\frac{p}{x}=-1\ \Rightarrow\ \frac{dC_1}{dx}\frac{1}{x}-\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_1}{x^2}=-1\ \Rightarrow\ \frac{dC_1}{dx}\frac{1}{x}=-1$

$$\Rightarrow\ \int dC_1=-\int xdx+0\ \to C_1(x)=-\frac{x^2}{2}.\ \Rightarrow\ p_{чн}=\frac{C_1(x)}{x}=-\frac{x}{2}\ \Rightarrow$$

$$p_{он}=p_{oo}+p_{чн}=\frac{C_1}{x}-\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x}-\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ dy=-\frac{1}{2}xdx+\frac{C_1dx}{x}\ \Rightarrow$$

$$\int dy=C_1\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int xdx+C_2\ \Rightarrow\ y=C_1\ln x-\frac{x^2}{4}+C_2$$

2-й метод: выделение дифференциальных структур $x\cdot y''+y'+x=0$.

Первые два слагаемых левой части свернем в производную произведения: $(xy')'+x=0\ \Rightarrow\ (xy')'=-x$

$$\Rightarrow\ \frac{d(xy')}{dx}=-x\ \Rightarrow\ d(xy')=-xdx\ \to\ \int d(xy')=-\int xdx+C_1\ \Rightarrow xy'=-\frac{x^2}{2}+C_1\ \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}\ \to\ dy=-\frac{1}{2}xdx+\frac{C_1dx}{x}\ \Rightarrow\ \int dy=-\frac{1}{2}\int xdx+C_1\int\frac{dx}{x}+C_2\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1\ln x+C_2$$

ДЗ 1) $x^4y''+x^3y'=1$; 2) $x^7\cdot y''+x^6y'=1$.

Пример 13. Найти общее решение $xy''y+x(y')^2+3y'y=1$. Метод: выделение дифференциальных структур

В первых двух слагаемых левой части вынесем общий множитель: $x\left(y''y+(y')^2\right)+3y'y=1$

Большую круглую скобку в левой части свернем в производную произведения $x(y'y)'+3y'y=1$

Умножаем уравнение на x^2: $x^3(yy')'+3x^2y'y=x^2\ \Rightarrow 3x^2=(x^3)'\ \Rightarrow\ x^3(yy')'+(x^3)'y'y=x^2\ \Rightarrow$

$$(x^3yy')'=x^2\ \to\ x^3yy'=\frac{x^3}{3}+C_1\ \to\ yy'=\frac{1}{3}+\frac{C_1}{x^3}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{dx}=\frac{1}{3}+\frac{C_1}{x^3}\ \Rightarrow\ d(y^2)=\frac{2}{3}dx+2\frac{C_1dx}{x^3}$$

$$\Rightarrow\ \int d(y^2)=\frac{2}{3}\int dx+2C_1\int\frac{dx}{x^3}+C_2\ \Rightarrow\ y^2=\frac{2}{3}x+2C_1\int x^{-3}dx+C_2\ \Rightarrow\ y^2=\frac{2}{3}x-\frac{C_1}{x^2}+C_2\ \Rightarrow$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x-\frac{C_1}{x^2}+C_2}$$

ДЗ $xy''y+x(y')^2+4y'y=1$; $xy''y+x(y')^2+7y'y=1$

КР4 Банк задач

1. Найти общее решение

1.1. $e^{-x}\left(1+y^2\right)dx+(\operatorname{arctg}y)dy=0$

1.2. $y\cdot\operatorname{tg}xdx+\ln ydy=0$

1.3. $\left(1+\sin^2x\right)\ln ydy+y\cos xdx=0$

1.4. $e^{-x}\left(1+y^2\right)dx+(\operatorname{arcctg}y)dy=0$

1.5. $e^{-x}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+(\arcsin y)dy=0$

1.6. $x\left(1+\ln^2x\right)\sin ydy+\cos ydx=0$

1.7. $x\left(1+\ln^2x\right)\cos ydy+\left(1+\sin^2y\right)dx=0$

1.8. $xe^{-x^2}\left(1+y^2\right)dx+(\operatorname{arctg}y)dy=0$

1.9. $e^{-x}\sin y dx+\cos y dy=0$

1.10. $x\left(1+\ln^2 x\right)\sin y dy+\cos y dx=0$

1.11. $x\left(1+\ln^2 x\right)\sin y dy+\left(1+\cos^2 y\right)dx=0$

1.12. $e^{-2x}\left(1+y^2\right)dx+\operatorname{arcctg}^2 y\,dy=0$

1.13. $xe^{x^2}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\arccos^4 y\,dy=0$

1.14. $x\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0$

1.15. $e^{-3x}\left(1+y^2\right)dx+\operatorname{arctg}^3 y\,dy=0$

1.16. $e^{-2x}\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\arcsin^2 y\,dy=0$

2. Найти общее решение

2.1. $y'+\frac{4y}{x}=6x$

2.2. $\cdot\, y'+\frac{3y}{x}=5x$

2.3. $y'+\frac{5y}{x}=7x$

2.4. $y'+\frac{2y}{x}=4x$

2.5. $.\, y'+\frac{15y}{x}=17x$

2.6. $y'+\frac{6y}{x}=8x$

2.7. $y'+\frac{8y}{x}=10x$

2.8. $y'+\frac{14y}{x}=16x$

2.9. $\cdot\, y'+\frac{10y}{x}=12x$

2.10. $y'+\frac{8y}{x}=10x$

2.11. $y'+\frac{9y}{x}=11x$

2.12. $.\, y'+\frac{16y}{x}=18x$

2.13. $y'+\frac{11y}{x}=13x$

2.14. $y'+\frac{7y}{x}=9x$

2.15. $.\, y'+\frac{17y}{x}=19x$

2.16. $y'+\frac{18y}{x}=20x$

3. Найти общее решение

3.1. $xy'=y+\sqrt{x^2-y^2}$

3.2. $xy'-y=x\tan\frac{y}{x}$

3.3. $xy'=y-xe^{y/x}$

3.4. $y'=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}$

3.5. $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

3.6. $y'=\frac{y}{x}+\sin^2\frac{y}{x}$

3.7. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\arctan^2\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.8. $y'=\frac{y}{x}+\frac{\frac{y}{x}}{\ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.9. $xy'-y=x\frac{\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.10. $y'=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\arccos^3\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.11. $y'=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\arcsin^2\left(\frac{y}{x}\right)}$

3.12. $xy'-y=x\cot\frac{y}{x}$

3.13. $y'=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\arcsin\frac{y}{x}}$

3.14. $y'=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cdot\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

3.15. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\arctan\frac{y}{x}}$

3.16. $y'=\frac{y}{x}+\frac{\frac{y}{x}}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$

4. Найти общее решение

4.1. $\left(x\sin x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{dy}{x}=0.$

4.2. $\left(xe^x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{dy}{x}=0$

4.3. $\left(x^2\ln x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{dy}{x}=0$

4.4. $\left(\frac{\ln x}{x^2}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{dy}{x}=0$

4.5. $\left(x^3 \cdot \ln x + y\right)dx + \left(\frac{1}{1+y^2} + x\right)dy = 0$

4.6. $(\arccos x + \ln y)\,dx + \left(\frac{x}{y} + \cot y\right)dy = 0$

4.7. $(x \cdot \arctan x + \ln y)\,dx + \left(\frac{x}{y} + \cos y\right)dy = 0$

4.8. $\left(x \cdot \tan^2 x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0$

4.9. $\left(x \ln x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0$

4.10. $(x \cos x + y)\,dx + \left(\frac{1}{1+y^2} + x\right)dy = 0$

4.11. $\left(\operatorname{arcctg} x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0$

4.12. $\left(\ln x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0$

4.13. $(\arcsin x + \ln y)\,dx + \left(\frac{x}{y} + \cos y\right)dy = 0$

4.14. $\left(\frac{\ln x}{x^5} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{dy}{x} = 0$.

4.15. $\left(\frac{x}{\sin^2 x} + y\right)dx + \left(x + \frac{1}{\cos^2 y}\right)dy = 0$

4.16. $\left(\frac{x}{\cos^2 x} + y\right)dx + \left(x + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy = 0$

5. Найти общее решение

5.1. $\sqrt{x} \cdot y''' = 1$

5.2. $.\sqrt[3]{x} \cdot y''' = 1$

5.3. $\sqrt[4]{x} \cdot y''' = 1$

5.4. $\sqrt[8]{x} \cdot y''' = 1$

5.5. $\sqrt[9]{x} \cdot y''' = 1$

5.6. $\sqrt[10]{x} \cdot y''' = 1$

5.7. $\sqrt[15]{x} \cdot y''' = 1$

5.8. $\sqrt[7]{x} \cdot y''' = 1$

5.9. $\sqrt[10]{x} \cdot y''' = 1$

5.10. $\sqrt[11]{x} \cdot y''' = 1$

5.11. $\sqrt[14]{x} \cdot y''' = 1$

5.12. $\sqrt[12]{x} \cdot y''' = 1$

5.13. $\sqrt[13]{x} \cdot y''' = 1$

5.14. $\sqrt[5]{x} \cdot y''' = 1$

5.15. $\sqrt[6]{x} \cdot y''' = 1$

5.16. $\sqrt[16]{x} \cdot y''' = 1$

6. Найти частное решение при $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

6.1. $y'' = 7y^{13}$

6.2. $2y'' = 3y^2$

6.3. $2y'' = 13y^{12}$

6.4. $2y'' = 5y^4$

6.5. $y'' = 3y^5$

6.6. $2y'' = 7y^6$

6.7. $y'' = 4y^7$

6.8. $2y'' = 9y^8$

6.9. $y'' = 5y^9$

6.10. $2y'' = 11y^{10}$

6.11. $y'' = 6y^{11}$

6.12. $2y'' = 15y^{14}$

6.13. $2y'' = 17y^{16}$

6.14. $y'' = 7y^{13}$

6.15. $y'' = 8y^{15}$

6.16. $y'' = 9y^{17}$

7. Найти структуру частного решения неоднородного уравнения

7.1. $y'' - 8y' + 12y = e^{6x} \sin x + x^2 e^{2x}$

7.2. $y'' - 10y' + 24y = xe^{6x} \sin x + x^2 e^{4x}$

7.3. $y'' - 8y' + 15y = x^2 e^{3x} + e^{5x} \cos x$

7.4. $y'' - 9y' + 8y = x^2 e^{x} + e^{8x} \cos x$

7.5. $y'' - 8y' + 12y = e^{6x} \sin x + x^2 e^{2x}$

7.6. $y'' + 8y' + 12y = e^{-6x} \cos x + x^2 e^{-2x}$

7.7. $y'' - 7y' + 6y = x^2 e^{x} + e^{6x} \sin x$

7.8. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x} + e^{3x} \sin x$

7.9. $y'' - 8y' + 7y = x^2 e^{x} + e^{7x} \cos x$

7.10. $y'' - 6y' + 5y = x^2 e^{x} + e^{5x} \cos x$

7.11. $y'' - 5y' + 6y = x^2 e^{2x} + e^{3x} \sin x$

7.12. $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^{-x} + e^{-3x} \cos x$

7.13. $y'' - 7y' + 12y = x^2 e^{3x} + e^{4x} \sin x$

7.14. $y'' - 9y' + 14y = e^{2x} \cos x + x^2 e^{7x}$

7.15. $y'' + 9y' + 14y = x^2 e^{-2x} + e^{-7x} \cos x$

7.16. $y'' - 7y' + 10y = x^2 e^{2x} + e^{5x} \cos x$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения

8.1. $y'' - 8y' + 7y = e^{x}(x+1)$

8.2. $y'' - 10y' + 9y = e^{x}(x+1)$

8.3. $y'' - 11y' + 10y = e^{x}(x+1)$

8.4. $y'' - 12y' + 11y = e^{x}(x+1)$

8.5. $y'' - 16y' + 15y = e^{x}(x+1)$

8.6. $y'' - 14y' + 13y = e^{x}(x+1)$

8.7. $y''-4y'+3y=e^x(x+1)$

8.8. $y''-6y'+5y=e^x(x+1)$

8.9. $y''-15y'+14y=e^x(x+1)$

8.10. $y''-5y'+4y=e^x(x+1)$

8.11. $y''-9y'+8y=e^x(x+1)$

8.12. $y''-13y'+12y=e^x(x+1)$

8.13. $y''-17y'+16y=e^x(x+1)$

8.14. $y''-6y'+5y=e^x(x+1)$

8.15. $y''-7y'+6y=e^x(x+1)$

8.16. $y''-3y'+2y=e^x(x+1)$

9. Найти частное решение при $x(0)=1,\ y(0)=1$

9.1. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-5x-y,\\ \frac{dy}{dt}=4x\end{cases}$

9.2. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-11x-y,\\ \frac{dy}{dt}=10x\end{cases}$

9.3. . $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-12x-y,\\ \frac{dy}{dt}=11x\end{cases}$

9.4. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-14x-y,\\ \frac{dy}{dt}=13x\end{cases}$

9.5. . $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-5x-y,\\ \frac{dy}{dt}=4x\end{cases}$

9.6. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-4x-y,\\ \frac{dy}{dt}=3x\end{cases}$

9.7. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-13x-y,\\ \frac{dy}{dt}=12x\end{cases}$

9.8. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-10x-y,\\ \frac{dy}{dt}=9x\end{cases}$

9.9. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-8x-y,\\ \frac{dy}{dt}=7x\end{cases}$

9.10. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-9x-y,\\ \frac{dy}{dt}=8x\end{cases}$

9.11. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-7x-y,\\ \frac{dy}{dt}=6x\end{cases}$

9.12. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-6x-y,\\ \frac{dy}{dt}=5x\end{cases}$

9.13. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-2x-y,\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$

9.14. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-15x-y,\\ \frac{dy}{dt}=14x\end{cases}$

9.15. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-3x-y,\\ \frac{dy}{dt}=2x\end{cases}$

9.16. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-16x-y,\\ \frac{dy}{dt}=15x\end{cases}$

10. Найти частное решение при $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$

10.1. $y'''+2y''+y'=0$

10.2. $y'''-2y''+y'=0$

10.3. $y'''-6y''+9y'=0$

10.4. $y'''+6y''+9y'=0$

10.5. $y'''-14y''+49y'=0$

10.6. $y'''+4y''+4y'=0$

10.7. $y'''+14y''+49y'=0$

10.8. $y'''-16y''+64y'=0$

10.9. $y'''-4y''+4y'=0$

10.10. $y'''-10y''+25y'=0$

10.11. $y'''+10y''+25y'=0$

10.12. $y'''+12y''+36y'=0$

10.13. $y'''-12y''+36y'=0$

10.14. $y'''+8y''+16y'=0$

10.15. $y'''-8y''+16y'=0$

10.16. $y'''+16y''+64y'=0$

11. Найти частное решение

11.1. $y''+y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.2. $y''+y=\frac{1}{\cos x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

11.3. $y''+y=\frac{1}{\sin^3 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.4. $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

11.5. $y''+y=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.6. $y''+y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

11.7. $y''+y=\frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

11.8. $y''+y=\cos^2 x$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

11.9. $y''+y=\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

11.10. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.11. $y''+y=\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.12. $y''+y=\sin^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

11.13. $y''+y=\frac{1}{\cos^5 x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$

11.14. $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.15. $y'' + y = \cos^2 x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

11.16. $y'' + y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^5 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

12. Найти общее решение

12.1. $x^5 \cdot y'' + x^4 y' = 1$

12.2. $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = 1$

12.3. $x \cdot y'' + y' = x$

12.4. $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 1$

12.5. $x^7 \cdot y'' + x^6 y' = 1$

12.6. $x^6 \cdot y'' + x^5 \cdot y' = 1$

12.7. $x^{15} y'' + x^{14} y' = 1$

12.8. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$

12.9. $x^9 \cdot y'' + x^8 y' = 1$

12.10. $x^{14} y'' + x^{13} y' = 1$

12.11. $x^8 \cdot y'' + x^7 \cdot y' = 1$

12.12. $x^{12} y'' + x^{11} y' = 1$

12.13. $x^{13} y'' + x^{12} y' = 1$

12.14. $x^{16} y'' + x^{15} \cdot y' = 1$

12.15. $x^{10} y'' + x^9 \cdot y' = 1$

12.16. $x^{11} y'' + x^{10} \cdot y' = 1$

13. Найти общее решение

13.1. $xy''y + x(y')^2 + 2y'y = 1$

13.2. $xy''y + x(y')^2 + 3y'y = 1$

13.3. $xy''y + x(y')^2 + 4y'y = 1$

13.4. $xy''y + x(y')^2 + 5y'y = 1$

13.5. $xy''y + x(y')^2 + 6y'y = 1$

13.6. $xy''y + x(y')^2 + 7y'y = 1$

13.7. $xy''y + x(y')^2 + 8y'y = 1$

13.8. $xy''y + x(y')^2 + 9y'y = 1$

13.9. $xy''y + x(y')^2 + 10y'y = 1$

13.10. $xy''y + x(y')^2 + 11y'y = 1$

13.11. $xy''y + x(y')^2 + 12y'y = 1$

13.12. $xy''y + x(y')^2 + 13y'y = 1$

13.13. $xy''y + x(y')^2 + 14y'y = 1$

13.14. $xy''y + x(y')^2 + 15y'y = 1$

13.15. $xy''y + x(y')^2 + 16y'y = 1$

13.16. $xy''y + x(y')^2 + 17y'y = 1$