Математические заметки

Том 115 выпуск 4 апрель 2024

УДК 517.9

Квази-энергетическая функция для 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с неподвижными точками попарно различных индексов

О. В. Починка, Е. А. Таланова

Настоящая работа посвящена оценке снизу числа критических точек функции Ляпунова для 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с неподвижными точками попарно различных индексов. Известно, что при наличии единственной некомпактной гетероклинической кривой несущим многообразием рассматриваемых диффеоморфизмов является 3-сфера, а класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма f полностью определяется классом эквивалентности (которых бесконечно много) хопфовского узла L_f – узла в образующем классе фундаментальной группы многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Более того, любой хопфовский узел реализуется некоторым диффеоморфизмом рассмотренного класса. Известно, что диффеоморфизмы, определяемые стандартным хопфовским узлом $L_0 = \{s\} \times \mathbb{S}^1$, обладают энергетической функцией – функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством. Однако множество критических точек любой функции Ляпунова диффеоморфизма f с нестандартным хопфовским узлом строго больше цепно рекуррентного множества диффеоморфизма.

В настоящей работе для диффеоморфизмов, определенных обобщенными узлами Мазура, построена квази-энергетическая функция – функция Ляпунова с минимальным числом критических точек.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, узел Хопфа.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13918

1. Введение и формулировка результатов. Пусть M^n – гладкое замкнутое n-многообразие с метрикой d и $f\colon M^n \to M^n$ – диффеоморфизм. Для характеристики блуждаемости траекторий диффеоморфизма традиционно используется понятие цепно рекуррентности. *ε-Цепью длины $m \in \mathbb{N}$, соединяющей точку x с точкой y,* диффеоморфизма f называется последовательность точек $x = x_0, \dots, x_m = y$ такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект № 22-11-00027), кроме построения квази-энергетической функции, которое поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант правительства РФ (договор № 075-15-2022-1101).

Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* точкой диффеоморфизма f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует m, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины m, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек f называется *цепно рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathcal{R}_f$. На цепно рекуррентном множестве можно ввести отношение эквивалентности следующим правилом: $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи, соединяющие x с y и y с x. Тогда цепно-рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности, называемые *цепными компонентами*.

Если цепно рекуррентное множество диффеоморфизма f конечно, то оно состоит из периодических точек. Периодическая точка $p \in \mathcal{R}_f$ периода m_p называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $(\partial f^{m_p}/\partial x)|_p$ по модулю не равны единице. Если все собственные значения по модулю меньше (больше) единицы, то p называют *стоковой* (*источниковой*) *точкой*. Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является *узловой*, то она называется *седловой точкой*.

Из гиперболической структуры периодической точки p и конечности цепно рекуррентного множества следует, что ее *устойчивое*

$$W^s_p = \Big\{x \in M^n\colon \lim_{k\to+\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\Big\}$$

и *неустойчивое*

$$W^u_p = \Big\{x \in M^n\colon \lim_{k\to+\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\Big\}$$

многообразия являются гладкими подмногообразиями, диффеоморфными $\mathbb{R}^{n-\lambda_p}$ и $\mathbb{R}^{\lambda_p}$ соответственно, где λ_p – число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы (*индекс Морса точки* p). Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W^u_p \setminus p$ (соответственно $W^s_p \setminus p$) называется *неустойчивой* (соответственно *устойчивой*) *сепаратрисой* точки p.

Диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если

1) цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ состоит из конечного числа гиперболических точек;
2) для любых точек $p, q \in \mathcal{R}_f$ многообразия W^s_p и W^u_q пересекаются трансверсально.

Согласно определению Конли [1] *функция Ляпунова* для диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$ – это непрерывная функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если $x \notin R_f$;
- $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$, если $x \in R_f$.

Заметим, что для любого диффеоморфизма Морса–Смейла f существует функция *Морса–Ляпунова*[1] – функция Ляпунова $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, являющаяся функцией

[1]Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке. Именно, пусть $\widehat{f}^t$ – топологический поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, заданный формулой $\widehat{f}^t(x) = x + t$. Определим диффеоморфизм $g\colon M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,\tau) = (f(x), \tau - 1)$. Положим $G = \{g^k,\, k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_W\colon M^n \times \mathbb{R} \to W$ естественную проек-

Морса, имеющей в любой периодической точке $p \in \mathcal{R}_f$ невырожденную критическую точку индекса λ_p с координатами Морса

$$(V_p, \phi_p\colon y \in V_p \mapsto (x_1(y), \dots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n$$

такими, что

$$\phi_p^{-1}(Ox_1 \dots x_{\lambda_p}) \subset W_p^u, \qquad \phi_p^{-1}(Ox_{\lambda_p+1} \dots x_n) \subset W_p^s. \tag{$*$}$$

Если при этом функция φ не имеет критических точек вне $\mathcal{R}_f$, то, следуя [3], мы называем ее *энергетической функцией* для диффеоморфизма Морса–Смейла f.

Доказательство существования энергетической функции Морса для диффеоморфизма Морса–Смейла на окружности является несложным упражнением. Пикстон [3] в 1977 г. доказал существование энергетической функции у любого диффеоморфизма Морса–Смейла на поверхности. Там же он построил пример диффеоморфизма Морса–Смейла на 3-сфере, не обладающего энергетической функцией. Препятствием к существованию энергетической функции у такого диффеоморфизма является *дикое вложение* седловых сепаратрис в несущее многообразие (т.е. замыкание сепаратрисы не является подмногообразием объемлющего пространства). Из результатов работы [4] следует, что на многообразиях любой размерности $n > 2$ существуют диффеоморфизмы Морса–Смейла, не обладающие энергетической функцией. В связи с чем в работе [5] для диффеоморфизмов Морса–Смейла f введено следующее понятие.

Определение 1. *Квази-энергетической функцией* для f называется функция Морса–Ляпунова для диффеоморфизма Морса–Смейла f, имеющая минимально возможное число критических точек среди всех функций Морса–Ляпунова для f.

Обозначим через ρ_f число критических точек квази-энергетической функции диффеоморфизма Морса–Смейла f. Заметим, что введенное число является топологическим инвариантом системы, т.е. если диффеоморфизмы $f, f'\colon M^n \to M^n$ топологически сопряжены (существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$ такой, что $hf = f'h$), то $\rho_f = \rho_{f'}$.

Настоящая работа посвящена оценке снизу числа ρ_f для диффеоморфизмов класса G, сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ со следующими свойствами (см. рис. 1 и детальное описание диффеоморфизмов класса G в п. 2):

- неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ состоит в точности из четырех точек $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$, размерности неустойчивых многообразий (*индексы Морса*) которых равны $0, 1, 2, 3$ соответственно;
- множество $H_f = W^s_{\sigma_f^1} \cap W^u_{\sigma_f^2}$ состоит из единственной некомпактной кривой.

Пусть $f \in G$. Обозначим через ℓ_f^1, ℓ_f^2 неустойчивые сепаратрисы седловой точки σ_f^1. Тогда (см., например, [6]) замыкание сепаратрисы $\mathrm{cl}(\ell_f^i)$, $i = 1, 2$, гомеоморфно простой замкнутой кривой, которая состоит из этой сепаратрисы и двух точек: седла σ_f^1 и стока ω_f (см. рис. 1).

цию и через f^t поток на многообразии W, заданный формулой $f^t(x) = p_W(\widehat{f}^t(p_W^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* f. По построению цепно рекуррентное множество потока f^t состоит из конечного числа периодических орбит $\delta_i = p_W(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R})$, $i \in \{1, \dots, k_f\}$. То есть надстройка f^t является потоком Морса–Смейла. Для таких потоков в работе [2] построена функция Ляпунова, ограничение которой на M является искомой функцией Ляпунова для f.

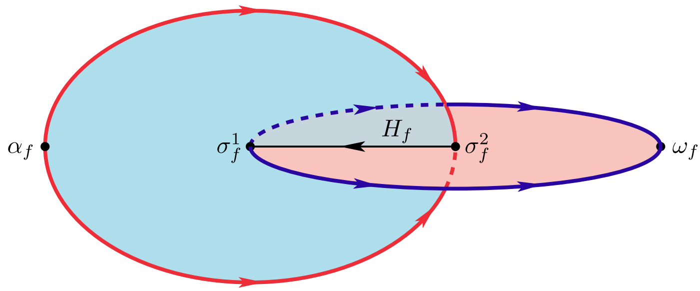

Рис. 1. Динамика диффеоморфизма $f \in G$

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и $\nu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм, заданный формулой $\nu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/2$. Определим отображение $p\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{x_3}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2(\|\mathbf{x}\|) \pmod 1\right).$$

Положим $V_{\omega_f} = W^s_{\omega_f} \setminus \omega_f$. В силу гиперболичности стока ω_f существует диффеоморфизм $\psi_f\colon V_{\omega_f} \to \mathbb{R}^3 \setminus O$, который сопрягает диффеоморфизмы f и h. Положим

$$p_{\omega_f} = p\psi_f\colon V_{\omega_f} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \qquad L^i_f = p_{\omega_f}(\ell^i_f), \quad i = 1, 2.$$

Согласно [7] множества L^1_f, L^2_f являются эквивалентными узлами Хопфа – узлами в образующем классе фундаментальной группы многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через $[L_f]$ класс эквивалентности этих узлов. Согласно [7] класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in G$ полностью определяется классом эквивалентности узла L_f. Более того, любой хопфовский узел реализуется некоторым диффеоморфизмом класса G (см. предложение 1 ниже).

Напомним, что *узлом* на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ называется гладкое вложение $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или образ этого вложения $L = \gamma(\mathbb{S}^1)$. Узлы L, L' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм

$$h\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$$

такой, что $h(L) = L'$.

Любой хопфовский узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ гладко гомотопен стандартному хопфовскому узлу $L_0 = \{s\} \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [8]), но не является изотопным или эквивалентным ему в общем случае. Мазур [9] построил хопфовский узел L_M, который мы будем называть *узлом Мазура*, неэквивалентный и неизотопный узлу L_0 (см. рис. 2).

Согласно работе [4] диффеоморфизм $f \in G$ обладает энергетической функцией Морса тогда и только тогда, когда узел L_f *тривиален* (эквивалентен стандартному узлу). В случае, когда узел L_f не тривиален, число ρ_f критических точек квази-энергетической функции Морса диффеоморфизма f является, очевидно, четным числом, не меньшим шести:

$$\rho_f \geqslant 6.$$

В работе [10] введено следующее понятие рода узла Хопфа.

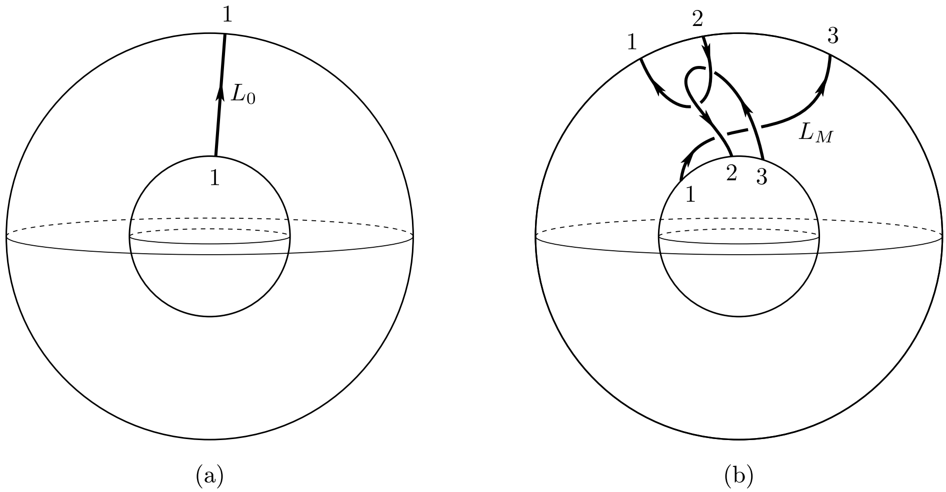

Рис. 2. Неизотопные и неэквивалентные хопфовские узлы L_0 и L_M: a) стандартный хопфовский узел L_0; b) узел Мазура L_M

Пусть L – узел Хопфа и $\overline{L} = p^{-1}(L)$ – его поднятие в $\mathbb{R}^3 \setminus O$. Замкнутую ориентируемую поверхность $\Sigma \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ назовем *секущей поверхностью узла* L, если она имеет единственную точку пересечения с узлом L. Минимально возможный род g_L секущей поверхности называется *родом узла* L. Секущая поверхность узла L рода g_L называется *минимальной*.

В настоящей работе мы даем следующую оценку числа ρ_f критических точек квазиэнергетической функции $f \in G$.

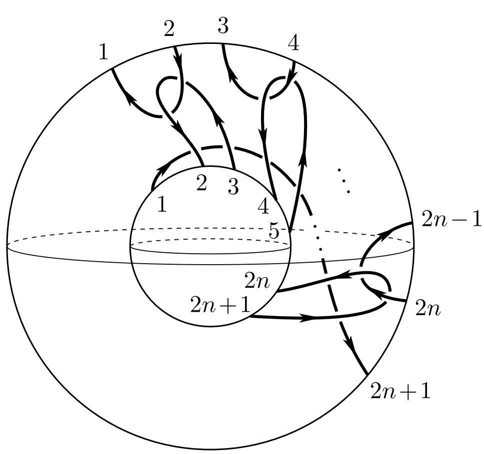

Рис. 3. Обобщенный узел Мазура L_n

Теорема 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедлива следующая оценка*:

$$\rho_f \geqslant 4 + 2g_{L_f}.$$

В работе [11] построено счетное семейство хопфовских узлов L_n – *обобщенных узлов Мазура* (см. рис. 3, а также подробную конструкцию узлов в п. 4), для которых там же доказано, что они попарно неэквивалентны.

Основным результатом работы является доказательство следующего факта.

Теорема 2. *Пусть $f \in G$ – диффеоморфизм такой, что $[L_f] = [L_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда число ρ_f критических точек квази-энергетической функции диффеоморфизма f вычисляется по формуле*

$$\rho_f = 4 + 2n.$$

2. Конструкция диффеоморфизма класса G. В настоящем пункте мы реализуем любой узел Хопфа диффеоморфизмом $f \in G$.

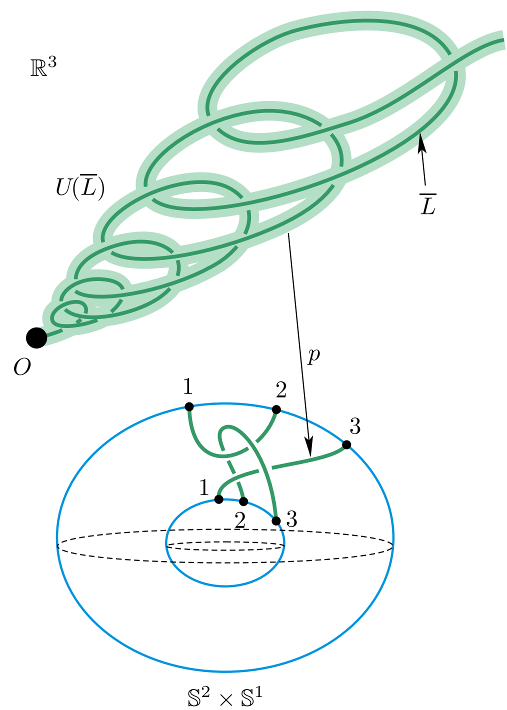

Рис. 4. Поднятие узла Хопфа L

Пусть $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – хопфовский узел и $U(L)$ – его трубчатая окрестность. Тогда множество $\overline{L} = p^{-1}(L)$ является ν-инвариантной дугой в $\mathbb{R}^3 \setminus O$ и $U(\overline{L}) = p^{-1}(U(L))$ – ее ν-инвариантная окрестность, диффеоморфная $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$ (см. рис. 4). Положим

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$$

и определим поток $g^t \colon C \to C$ формулой

$$g^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta\colon U(L)\to C$, который сопрягает диффеоморфизмы $\nu|_{U(L)}$ и $g=g^1|_C$. Определим поток ϕ^t на C следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot x_1 = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{9}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-4)^2, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4,\\ 1, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4,\end{cases}\\ \dot x_2 = \begin{cases} \dfrac{x_2}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-3)\right)-1\right), & 2<x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4,\\ -x_2, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 2,\\ 0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4,\end{cases}\\ \dot x_3 = \begin{cases} -\dfrac{x_3}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-3)\right)-1\right), & 2<x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4,\\ x_3, & x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 2,\\ 0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2>4.\end{cases}\end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi=\phi^1$ имеет два неподвижных гиперболических седла: седло $P_1(-1,0,0)$ с индексом Морса 1 и седло $P_2(1,0,0)$ с индексом Морса 2 (см. рис. 5). Некомпактная гетероклиническая кривая $W^s_{P_1}\cap W^u_{P_2}$ совпадает с открытым интервалом $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\colon |x_1|<1,\ x_2=x_3=0\}$. Заметим, что ϕ совпадает с диффеоморфизмом $g=g^1$ вне шара $\{\mathbf{x}\in C\colon \|\mathbf{x}\|\leqslant 4\}$.

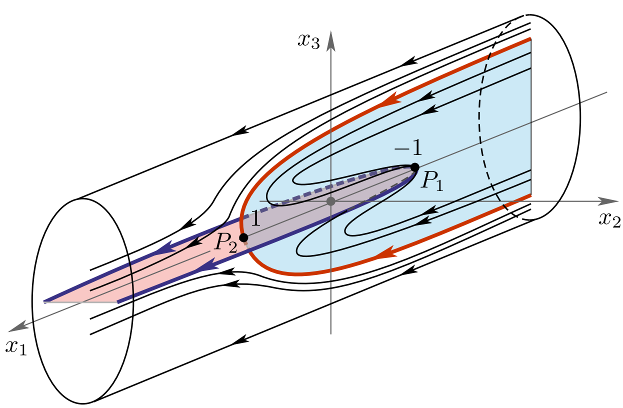

Рис. 5. Траектории потока ϕ^t

Определим диффеоморфизм $\overline{f}_L\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ таким образом, что $\overline{f}_L$ совпадает с ν вне $U(L)$ и совпадает с $\zeta^{-1}\phi\zeta$ на $U(L)$. Тогда $\overline{f}_L$ имеет в $U(L)$ две неподвижные точки: седло $\zeta^{-1}(P_1)$ и седло $\zeta^{-1}(P_2)$.

Обозначим через $N(0,0,0,1)$ северный полюс сферы $\mathbb{S}^3=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon \|\mathbf{x}\|=1\}$ и через $\vartheta\colon \mathbb{R}^3\to(\mathbb{S}^3\setminus\{N\})$ – стандартную стереографическую проекцию. По построению диффеоморфизм $\overline{f}_L$ совпадает с ν в некоторой окрестности точки O и бесконечно удаленной точки, следовательно, он индуцирует на $\mathbb{S}^3$ диффеоморфизм Морса–Смейла

$$f_L(\mathbf{s})=\begin{cases}\vartheta(\overline{f}_L(\vartheta(\mathbf{s}))), & \mathbf{s}\neq N,\\ N, & \mathbf{s}=N.\end{cases}$$

Непосредственно из построения следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма f_L состоит из четырех неподвижных гиперболических точек: стока $\omega = S$, двух седел $\sigma^1 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_1))$, $\sigma^2 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_2))$ и одного источника $\alpha = N$. Построенный диффеоморфизм принадлежит классу G; назовем такие диффеоморфизмы *модельными* (см. рис. 6).

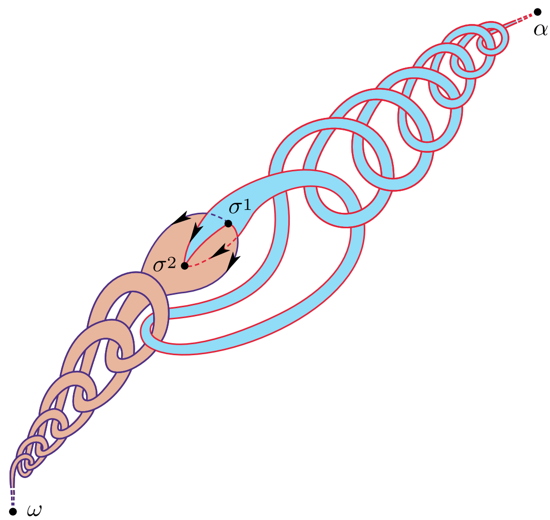

Рис. 6. Диффеоморфизм f_L

Предложение 1 [7]. *Выполнены следующие утверждения*:

- *любой диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен модельному диффеоморфизму f_L, где $[L] = [L_f]$;*
- *модельные диффеоморфизмы f_L, $f_{L'}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $[L] = [L']$.*

3. Оценка числа критических точек квази-энергетической функции диффеоморфизма $f_L \in G$ через род узла L. В настоящем пункте мы докажем теорему 1: для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедлива следующая оценка:

$$\rho_f \geqslant 4 + 2g_{L_f}.$$

Доказательство теоремы 1. В силу предложения 1, не уменьшая общности, можно считать, что f совпадает с модельным диффеоморфизмом f_L. Рассмотрим произвольную функцию Морса–Ляпунова $\varphi\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма f_L. Положим для определенности, что $\varphi(\omega_f) = 0$, $\varphi(\sigma_f^1) = 1$, $\varphi(\sigma_f^2) = 2$ и $\varphi(\alpha_f) = 3$. Рассмотрим неустойчивые сепаратрисы ℓ_f^1, ℓ_f^2 точки σ_f^1. Из определения функции Морса–Ляпунова следует, что функция $\varphi|_{\ell_f^i}$, $i \in \{1, 2\}$, монотонно убывает в некоторой окрестности седла σ_f^1. Следовательно, существует значение $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ такое, что интервал $(1-\varepsilon_1, 1)$ не содержит критических значений функции φ и поверхность $\varphi^{-1}(1-\varepsilon_1)$ пересекает сепаратрису ℓ_f^i в единственной точке, которую обозначим w_i.

Пусть $\overline{Q}_1$ – компонента связности множества $\varphi^{-1}([0, 1-\varepsilon_1])$, содержащая отрезок $[w_1, w_2]$ замыкания $\mathrm{cl}(W^u_{\sigma^1_f})$ (см. рис. 7). В силу убывания φ вдоль траекторий диффеоморфизма f значения функции φ на $W^s_{\sigma^1_f}$ больше 1 и, следовательно, многообразие $\overline{Q}_1$ целиком лежит в многообразии $W^s_{\omega_f}$, диффеоморфном $\mathbb{R}^3$. Пусть функция $\varphi|_{\overline{Q}_1}$ имеет k_q, $q \in \{0, \dots, 3\}$, критических точек индекса q. В силу [12; теорема 6.1] на многообразии $\overline{Q}_1$ существует правильная функция Морса ψ (значение функции в критической точке совпадает с индексом этой точки), имеющая k_q критических точек индекса q и являющаяся константой на $\partial\overline{Q}_1$. Таким образом, многообразие $\overline{Q}_1$ представляет собой заполненную поверхность $\widetilde{Q}_1$ рода $g_1 = 1 + k_1 - k_0$ с приклееными к ней ручками индексов 2 и 3. Откуда следует, что род любой поверхности множества $\partial\overline{Q}_1$ не превосходит числа g_1.

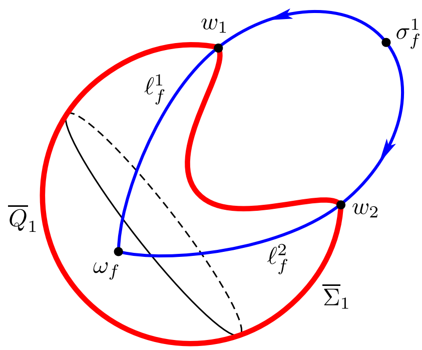

Рис. 7. Многообразие $\overline{Q}_1$

С другой стороны, число критических точек функции $\varphi|_{\overline{Q}_1}$ не меньше, чем k_0+k_1. При условии, что $k_0 \geqslant 1$ и $g_1 = 1+k_1-k_0$, получаем, что $k_0+k_1 = g_1+2k_0-1 \geqslant g_1+1$. То есть функция $\varphi|_{\overline{Q}_1}$ имеет не менее g_1+1 критических точек.

Обозначим через $\overline{\Sigma}_1$ компоненту связности множества $\partial\overline{Q}_1$, имеющую непустое пересечение с сепаратрисой ℓ^1_f. Тогда поверхность $\overline{\Sigma}_1$ делит многообразие $W^s_{\omega_f}$ на две части, одна из которых $\overline{Q}_1$ содержит отрезок $[w_1, \omega_f]$ замыкания сепаратрисы $\mathrm{cl}(\ell^1_f)$ и является h-сжимаемым телом. То есть $\Sigma_1 = p(\overline{\Sigma}_1)$ – секущая поверхность к узлу $L = p(\ell^1_f)$ и, следовательно,

$$g_1 \geqslant g_L.$$

Поскольку функция $3-\varphi$ является функцией Ляпунова для диффеоморфизма f^{-1} и критические точки функций φ и φ^{-1} совпадают, то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, приводят к существованию компоненты связности $\overline{Q}_2$ множества $\varphi^{-1}[2+\varepsilon_2, 3]$, $\varepsilon_2 > 0$, содержащей не менее g_L+1 точек. Откуда следует, что общее число критических точек функции φ не меньше, чем

$$g_L + 1 + 2 + g_L + 1 \geqslant 4 + 2g_L.$$

4. Конструкция обобщенного узла Мазура L_n. Рассмотрим множество

$$K_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{1}{2} \leqslant \|\mathbf{x}\| < 1\right\},$$

замыкание которого $K = \mathrm{cl}\, K_0$ является фундаментальной областью диффеоморфизма $\nu|_{\mathbb{R}^3\setminus O}$ с границей

$$\mathbb{S}^2 = \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\mathbf{x}\| = 1\bigr\}, \qquad \nu(\mathbb{S}^2).$$

Выберем на окружности

$$\mathbb{S}^1 = \bigl\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\bigr\}$$

попарно различные точки $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}$, пронумерованные в порядке их появления на окружности при движении по часовой стрелке (см. рис. 8). Пусть a_i, $i \in \{1, \dots, 2n\}$, – дуга окружности $\mathbb{S}^1$, ограниченная точками α_i, α_{i+1} и не содержащая в своей внутренности точек множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1}\}$. Пусть $B, A_i \subset K$, $i \in \{1, \dots, 2n\}$ – попарно непересекающиеся гладкие дуги такие, что:

1) граничными точками B являются α_{2n+1}, $\nu(\alpha_1)$; граничными точками A_{2j-1} являются α_{2j-1}, α_{2j}; граничными точками A_{2j} являются $\nu(\alpha_{2j})$, $\nu(\alpha_{2j+1})$ для $j \in \{1, \dots, n\}$, а дуга $\mathrm{cl}(\nu(A_1) \cup A_2 \cup \dots \cup \nu(A_{2n-1}) \cup A_{2n} \cup B)$ гладкая;
2) замкнутые кривые $c_{2j-1} = \mathrm{cl}(a_{2j-1} \cup A_{2j-1})$, $c_{2j} = \mathrm{cl}(\nu(a_{2j}) \cup A_{2j})$ ограничивают в K 2-диски d_{2j-1}, d_{2j}, трансверсальным пересечением которых является дуга l_j с граничными точками $b_{2j-1} = d_{2j-1} \cap A_{2j}$, $b_{2j} = d_{2j} \cap A_{2j-1}$, и $K \setminus (B \cup \bigcup_{i=1}^{2n} d_i)$ гомеоморфен $D_n \times [0,1]$, где D_n – открытый 2-диск с n дырками.

Положим

$$\overline{L}_n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \nu^k(B \cup A_1 \cup \dots \cup A_{2n}), \qquad L_n = p(\overline{L}_n).$$

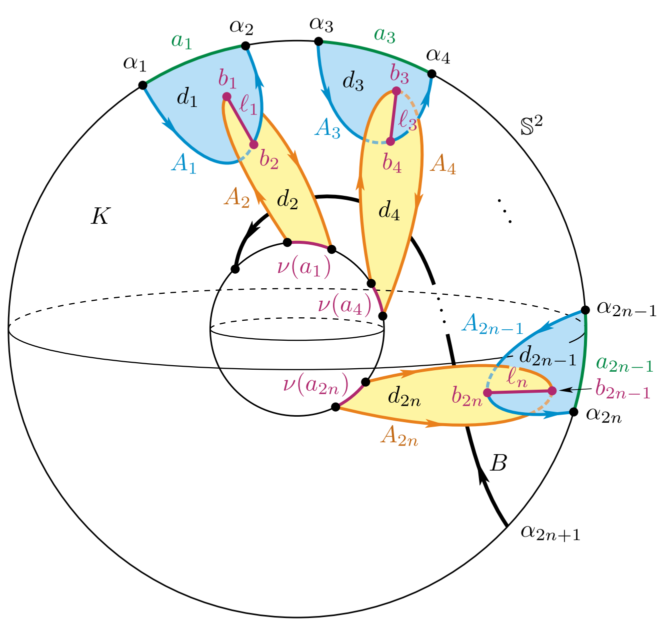

Рис. 8. Построение узла L_n

5. Построение квази-энергетической функции для диффеоморфизма $f_{L_n} \in G$ с хопфовским узлом L_n. В настоящем пункте мы доказываем теорему 2. Пусть $f \in G$ – диффеоморфизм такой, что $[L_f] = [L_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда число ρ_f критических точек квази-энергетической функции диффеоморфизма f вычисляется по формуле

$$\rho_f = 4 + 2n.$$

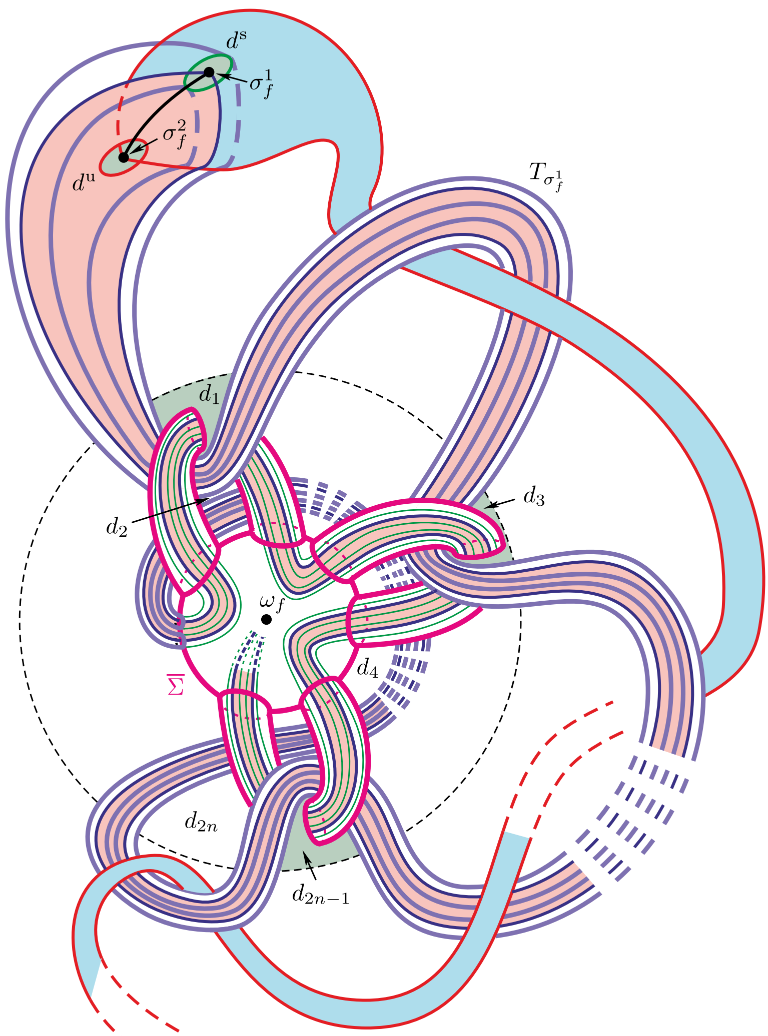

Рис. 9. Ручечное тело $Q_\Sigma \cup T_{\sigma_f^1}$

Доказательство теоремы 2. В силу предложения 1, не уменьшая общности, можно считать, что f совпадает с модельным диффеоморфизмом f_{L_n}. Тогда неблуждающее множество $\mathcal{R}_f$ состоит из четырех точек: стока ω_f, источника α_f и седел σ_f^1, σ_f^2. В силу [10; лемма 3] род g_{L_n} узла L_n равен n. Тогда в $S^2 \times \mathbb{S}^1$ существует поверхность Σ рода n, имеющая с узлом L_n единственную точку пересечения. Пусть компонента связности $\overline{\Sigma}$ прообраза $p^{-1}(\Sigma)$ ограничивает ручечное тело Q_Σ того же рода (см. рис. 9). Построим для диффеоморфизма f функцию Морса–Ляпунова с числом критических точек $4+2n$.

Построение квази-энергетической функции мы будем делать аналогично построению энергетической функции, проведенному в работе [5].

Шаг 1. Выберем энергетическую функцию $\varphi_p\colon U_p\to\mathbb{R}$ в окрестности каждой неподвижной точки p диффеоморфизма f так, что $\varphi_p(p)=\dim W^u_p$. Пусть B_{ω_f}, B_{α_f} – 3-шары, являющиеся множествами уровня функций φ_{ω_f}, φ_{α_f} соответственно такие, что $B_{\omega_f}\subset\operatorname{int}Q_\Sigma$. Выберем трубчатую окрестность $T_{\sigma_f^1}$ дуги $W^u_{\sigma^1_f}\setminus Q_\Sigma$ так, что ручечное тело $Q_\Sigma\cup T_{\sigma^1_f}$ рода $n+1$ является f-сжимаемым и его пересечение с $W^s_{\sigma^1_f}$ является двумерным диском; обозначим его через d^s (см. рис. 9).

Обозначим через P^+ сглаживание этого тела путем добавления малого внешнего воротника.

Шаг 2. Диски $d^s,d_1,\dots,d_{2n-1}$ разрезают ручечное тело P^+ до 3-шара (см. рис. 9). Обозначим через B_Σ f-сжимаемое сглаживание этого шара путем удаления внутреннего воротника. Согласно [5; лемма 4.2] функция φ_{ω_f} продолжается на шар B_Σ энергетической функцией, имеющей на нем единственную критическую точку ω_f индекса Морса 0. Поскольку $f(Q_\Sigma)\subset\operatorname{int}B_\Sigma$, то построенная функция убывает вдоль траекторий диффеоморфизма f. Согласно [5; п. 4.3] и результатам классической теории Морса (см., например, [13]) функция φ_ω продолжается на множество P^+ энергетической функцией, имеющей на нем $n+1$ критическую точку индекса Морса 1, по одной на каждом диске $d^s,d_1,\dots,d_{2n-1}$ и точку ω_f индекса Морса 0.

Шаг 3. Из определения узла L_n следует, что $P^-=\mathbb{S}^3\setminus\operatorname{int}P^+$ – f^{-1}-сжимаемое ручечное тело рода $n+1$ и его пересечение с $W^u_{\sigma^2_f}$ является двумерным диском; обозначим его d^u. Кроме того, диски $d^u,d_2,\dots,d_{2n}$ разрезают ручечное тело P^- до 3-шара (см. рис. 9). Аргументы, аналогичные приведенным в п. 2, позволяют продолжить функцию φ_{ω_f} на множество P^- так, что она имеет на нем $n+1$ критическую точку индекса Морса 2, по одной на каждом диске $d^u,d_2,\dots,d_{2n}$ и точку α_f индекса Морса 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ch. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.

[2] K.R. Meyer, “Energy functions for Morse–Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.

[3] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[4] В.З. Гринес, Ф. Лауденбах, О.В. Починка, “Энергетическая функция для градиентноподобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях”, *Докл. АН*, **422**:3 (2008), 299–301.

[5] В.З. Гринес, Ф. Лауденбах, О.В. Починка, “Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 175–183.

[6] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on* 2- *and* 3-*Manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016.

[7] О. В. Починка, Е. А. Таланова, Д. Д. Шубин, “Узел как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками”, *Матем. сб.*, **214**:8 (2023), 94–107.

[8] P. Kirk, Ch. Livingston, “Knot invariants in 3-manifolds and essential tori”, *Pacific J. Math.*, **197**:1 (2001), 73–96.

[9] B. Mazur, “A note on some contractible 4-manifolds”, *Ann. of Math.* (2), **73** (1961), 221–228.

[10] T. Medvedev, O. Pochinka, *A quasi-energy function for Pixton diffeomorphisms defined by generalized Mazur knots*, 2023, arXiv: 2301.02405.

[11] P. M. Akhmetiev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms”, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **20**:3 (2021), 1–15.

[12] А. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983.

[13] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2016.

О. В. Починка
Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Е. А. Таланова
Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: eltalanova72@gmail.com

Поступило
09.02.2023
После доработки
08.11.2023
Принято к публикации
15.11.2023