АКТУАЛЬНЫЙ ВОПРОС

А.Л. СЕМЕНОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ РОССИЙСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В XXI ВЕКЕ[1]

(механико-математический факультет ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»; Институт кибернетики и образовательной информатики имени А. И. Берга, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»;
e-mail: alsemno@ya.ru).

doi: 10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45

Большинство математиков, говоря о том, что подтолкнуло их к занятиям математикой, подчеркивают интерес, возникший в школе или на занятиях в кружке, к решению какой-то задачи или многих задач, которые неизвестно, как решать. Пример такой задачи мы видим на знаменитой картине Н. П. Богданова-Бельского, ставшей символом российской школы. Интерес будущих математиков поддерживался и университетом. В статье обсуждается возможность в XXI веке построить математическое образование для всех учащихся, а не только для избранных, высокомотивированных, на задачах, которые неизвестно, как решать, — разных для разных учеников. Изучение математики может стать интересным и психологически комфортным для учащихся с разными способностями и склонностями, оно будет способно приблизить работу ученика к работе взрослого математика и к потребностям реальной жизни.

Ключевые слова: школьное математическое образование; задачи, которые «неизвестно-как-решать»; математические кружки; результативное образование; навыки XXI века.

[1] Данная статья подготовлена при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

Введение

Настоящая статья является итогом моего участия в математическом образовании, начавшемся осенью 1964 года в качестве восьмиклассника, пришедшего на занятия математического кружка в Зоологический музей МГУ и понявшего, что он оказался в совсем другом процессе учения, чем тот, который его окружал до этого в детском саду и школе.

Я принимал участие в математическом образовании в самых разных ролях: в качестве ученика, родившегося в семье Евгении Тихоновны и Льва Афанасьевича Семеновых — инженеров отечественной радиоэлектронной промышленности, в качестве родителя и дедушки учеников, в качестве автора учебников для школы, в качестве школьного учителя и вузовского преподавателя, в качестве руководителя крупнейшей системы повышения квалификации учителей и головного педагогического вуза, участника создания стандартов и экзаменационных материалов.

Центральный вопрос, который волнует нас всех и с которым мы сталкиваемся и в школе, и в вузе, — это вопрос о мотивации учащегося. Почему тот или иной ребенок, молодой человек, студент, аспирант придет в школу, в университет, будет слушать наши лекции, писать контрольные, защищать дипломы и диссертации, и не скажет в какой-то момент: «А что я здесь делаю? У меня есть прекрасные жизненные перспективы, не требующие тех математических знаний, которые мне предлагаются». И начинается это с первого класса, когда ребенку, держащему в руках сотовый телефон, предлагают выучить наизусть таблицу умножения.

Вопрос об индивидуальной мотивации связан и с вопросом общественной ценности математического образования. Есть ли экономический и социальный смысл затрачивать существенную долю времени и энергии школьника на школьную математику?

Ответ на эти вопросы я вижу в синтезе традиций российского математического образования в цифровом обществе.

Две традиции

Начну с истории вопроса: нет смысла что-то проектировать в будущем, не учитывая прошлое. Я думаю, что мы должны искать истоки и источники для будущего математического образования России в его важнейших продуктивных традициях.

В советской школе отчетливо выявляются две разные традиции, которые можно назвать даже двумя разными образованиями.

Одна традиция — это массовое математическое образование в школе, продолжающееся, говоря старомодно, во втузе (высшем техническом учебном заведении), где оно обеспечивало математическую грамотность инженеров Советского Союза, в том числе инженеров атомной, авиационно-космической, радиоэлектронной промышленности и пр., прежде всего — оборонных отраслей (Минмаша, Минобoронпрома, Минсредмаша, Минобщемаша, Минэлектронпрома, Минхимпрома...).

Вторая традиция — это математическое образование, связанное с проведением олимпиад и кружков для школьников и студентов, реализовавшееся далее в виде проведения семинаров научных школ ведущими университетами, которое и дало миру российскую выдающуюся математику, а также сформировало ведущих математиков и физиков, построивших фундаментальные основы упомянутых инженерных отраслей, в большой степени обеспечивших подготовку инженеров для них и преподавателей для втузов (то есть — воспроизводство первой традиции).

Мы последовательно рассмотрим обе эти традиции в исторической перспективе.

Цели математического образования в массовой советской школе. Механическая, рецептурная математика

Если говорить о реальной массовой послереволюционной школе, то во многом она была выстроена как результат политического решения руководства страны, когда в 30-е годы XX века стало ясно, что страна не выживет (прежде всего, в военном, но не только, противостоянии), если не осуществит масштабную форсированную индустриализацию. Мы знаем, что к моменту революции меньше 20% взрослого населения России было грамотным, затем, в течение предвоенных десятилетий, мы перешли к поголовной грамотности населения. Необходимые дальнейшие шаги сегодня — это, конечно, математическая грамотность, техническая грамотность, инженерная грамотность. Если говорить более детально о ситуации, которая сложилась в 50–60 гг., то целью школьного математического образования были (проценты даны очень грубо, «качественно»):

- минимальная жизненная грамотность после семилетки (в некоторые периоды — восьмилетки) — для примерно 40% молодых людей соответствующего возраста;
- готовность к продолжению обучения в профтехучилище, то есть к тому, что сегодня называется «среднее профессиональное образование», к получению рабочей профессии — для 35% выпускников семилетки;
- готовность к продолжению образования в высшей школе, после 10 или 11 лет обучения, в том числе к карьере учителя или преподавателя математики, — примерно для 20% выпускников;
- готовность к будущей карьере математика — менее 1%.

Массовая школа должна была все эти категории учить одинаково: то, что называлось «по одной и той же программе». При этом идеалом школы являлся отличник по всем предметам, медалист и хороший (отвечающий задачам индустриализации) инженер в дальнейшем. Результаты остальных оценивались «путем вычитания».

Попытаемся более детально посмотреть на результаты образования именно основной массы учащихся и понять, в какой степени эти результаты могли соответствовать задаче качественной подготовки инженеров, готовых решать разнообразные задачи, или математиков, способных получать новые математические результаты.

Можно было бы обратиться к впечатлениям и воспоминаниям известных математиков и инженеров. Однако вряд ли это нам многое скажет о массовой школе. Весьма вероятно, что этим известным людям повезло с родителями или учителями, которые «отклонялись от программы»; они прочитали что-то «вне школьной программы»; принимали участие во **вне**школьной, **вне**урочной деятельности. К обобщениям этих знаменитых и влиятельных людей относительно «лучшей в мире советской школы» стоит относиться с осторожностью.

Обратимся к математикам, для которых массовое школьное математическое образование было важной частью их профессиональной деятельности и жизненной миссии.

Один из них — это Игорь Владимирович Арнольд, отец Владимира Игоревича Арнольда, член-корреспондент Академии педагогических наук, автор известных учебников, в том числе по арифметике. Вот, что он пишет: «Учеников — в том или ином порядке — знакомят с соответствующими «типами» задач, причем обучение решению задач сплошь и рядом сводится к «натаскиванию», к пассивному запоминанию учениками небольшого количества стандартных примеров решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно. В итоге — полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простых арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач» [1].

Еще один математик, один из первых по времени учеников Лузина, член-корреспондент Академии наук и академик Академии педагогических наук — Александр Яковлевич Хинчин, много занимавшийся проблемой школьного образования, писал: «Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, то есть такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удается научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявляли, что “этому вообще научить невозможно.

Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач, ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах) ...

... но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашёл решение задачи нового, хотя бы и очень простого типа, — это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях. Если в отдельных случаях дети все же научаются решать задачи, интуитивно отличают правильное суждение от ложного, находят в этих упражнениях ума здоровое удовольствие и в конечном счёте действительно развивают свою сообразительность, то такие исключения способны только подтвердить печальное общее правило» [2].

В лучшем, идеальном, случае результат массовой школы 50-х годов для подавляющего большинства учащихся состоял в том, что ученики:

- безошибочно вычисляли по известной формуле или осуществляли алгебраическое преобразование по простейшему эвристическому правилу — перемножить, перенести и так далее;
- умели перевести словесные конструкции нескольких известных типов в последовательность арифметических действий или систему уравнений;
- воспроизводили на память ряд геометрических доказательств с пониманием некоторых из них, практически без использования потенциала геометрии для возможности самостоятельного рассуждения учащегося с опорой на наглядность.

Итак, нужно было безошибочно и быстро решать задачи, для которых *известно, как их решать*. Алгоритм предлагался учителем и имелся в учебнике, надо было его понять или заучить без особого понимания, применить в достаточном количестве примеров, чтобы дальше применять уже автоматически; такой автоматизм и есть результат. Есть алгоритм решения; следуя этому алгоритму, безошибочно получишь ответ, желательно «не задумываясь», потому что в будущем нужно будет быстро принимать единственно правильное решение. Если говорить о так называемых нестандартных задачах, которые тоже встречались, то идея состояла в том, что и для нестандартных задач нужно тоже дать ученику какой-то алгоритм их решения, объяснить, как решать нестандартную задачу, фактически включив ее в круг стандартных для данного ученика, уже «освоившего обязательную программу».

Остановимся чуть подробнее на геометрии, за которую мы все так болеем душой. Справедливо принято считать, что именно геометрия позволяет развивать способности к логическому рассуждению, доказательству с опорой на наглядность. На самом деле, опять-таки для абсолютного большинства учащихся массовой школы и в 50-е гг., и позднее большая часть времени и усилий при изучении геометрии затрачивались на заучивание доказательств — на самостоятельное построение доказательств просто не хватало учебного времени.

Математика должна была быть единой для всех. Пятерка — это подготовка будущего инженера, вооруженного логарифмической линейкой и таблицами Брадиса (или другими — еще более объемными) и при необходимости арифмометром. От этой пятерки надо было отсчитывать вниз, вычитанием, когда ты выучил не все формулы и приемы вычислений и решения уравнений, когда решаешь с ошибками, медленнее, чем требуется и так далее. Часто и для будущих профессиональных математиков эта пятерка, а тем паче золотая медаль, были совершенно недостижимыми. Могло случиться, что ученик соображал медленно, отвлекался, у него возникали разные идеи по ходу решения задачи, и вовсе не всегда он получал правильный ответ и пятерку. Можно ссылаться на конкретные имена известных математиков, но я вместо этого процитирую В.Г. Болтянского и И.М. Яглома [3], которые говорили, что «круглые пятерки по всем математическим предметам — весьма маловыразительный критерий..., а скромные оценки — далеко не всегда свидетельство математической неодаренности». Это значит, что «отметочная» мотивация вовсе не для всех способствовала развитию математического таланта.

Подводя итог, можно сказать, что системно и закономерно существовал разрыв между тем, что старалась обеспечить массовая школа с единой программой и массовым учителем, и задачей обучения разных, единичных, «не массовых» детей.

Завершая эту часть нашего исторического экскурса, подчеркнем, что такая ситуация, которая кажется печальной с точки зрения большой математики, с точки зрения развития математического мышления на самом деле была естественным порождением индустриальной эры, причем в условиях форсированной индустриализации, «построения социализма в отдельно взятой стране». И дело не в том, какие «плохие авторы учебников и задачников», хотя ругали их много и иногда заслуженно. Дело в том, что фактически с нуля с использованием осколков дореволюционной гимназии, которая была элитным образованием, и реального училища, которое заканчивали немногие, вряд ли можно было подготовить учителей и выстроить иное советское массовое образование в 30-е годы, и продолжить в 50-е массово воспитывать иное математическое мышление. Заметим при этом, что и для дореволюционного математического образования «по Киселеву» были характерны те же черты, которые мы обсуждали в данном разделе. И они тоже имели свои социально-экономические причины. Выпускник школы (гимназии, училища), который овладел «механической» арифметикой, да еще включая «тройное правило» и «проценты», умеющий решать задачи про купцов, пешеходов и бассейны, а что более практически ценно — «на смеси» и «банковский интерес», имел очевидное преимущество на рынке труда. Приведение тригонометрических выражений «к виду, удобному для логарифмирования» могло оказаться критически важным элементом элитной инженерной и естественнонаучной подготовки десятков, в крайнем случае — сотен, профессионалов, по всей стране в год.

Горькие слова классиков отечественного математического образования, процитированные выше, подталкивают нас к оценке ситуации сегодня. В большой степени эти критические оценки можно отнести к массовой подготовке к существующей государственной итоговой аттестации. Для этой аттестации характерны: большое количество заданий, жесткое ограничение времени экзамена, ограничение (а по существу, отсутствие) разнообразия в 90% заданий, фактически повторяющих так называемый демонстрационный вариант (то, о чем говорит Хинчин). Это приводит к тому же эффекту натаскивания в ЕГЭ, который был абсолютно ясно выявлен упомянутыми лидерами российского математического образования.

И возникает вопрос «Есть ли причины в точности продолжать движение по этому вектору или есть какие-то альтернативы?» Для этого, видимо, нужно понять, во что в XXI веке трансформировались императивы индустриализации и массовой математической грамотности, породившие описанную выше ситуацию.

Но прежде чем переходить к ответу на этот вопрос, рассмотрим еще одну важнейшую традицию российского математического образования.

Задачи, которые «неизвестно-как-решать», — основа университетского кружка

В Московской и Петербургской математических школах еще в XIX веке возникло понятие о математическом кружке, причем в связи с обсуждением профессорами университета проблем школы. Не буду вдаваться в детали исторического процесса, укажу только на один важнейший прецедент — это кружок Лузина, знаменитая «Лузитания», из которой возникла едва ли не вся Московская математика. И среди участников Семинара В. А. Садовничего немного найдется тех, кто не указал бы в качестве своих научных «дедов», «прадедов», «прапрадедов» великих участников Лузитании. Для меня это — Петр Сергеевич Новиков.

Не пытаясь целостно охарактеризовать деятельность кружка Лузина, укажу характерное высказывание Лазаря Ароновича Люстерника: «Другие профессора показывают математику как завершенное прекрасное здание — можно лишь восхищаться им. Лузин же показывает науку в ее незавершенном виде, пробуждает желание самому принять участие в ее строительстве» [4].

В мировой математике такой подход, когда математику нужно осваивать создавая и тем самым понимать и изучать ее, неуникален. Замечательный математик, родом из Венгрии (с ее сильной школьной математикой), Пол Халмош говорил о том, что лучший и единственный способ изучать математику — это ее создавать [5]. Это, конечно, парадоксальная формулировка, но в ней есть, над чем задуматься.

Заметим, что именно создание новой математики, новой для ученика, решение задачи, которую «неизвестно-как-решать», роднит работу кружковца, олимпиадника с работой взрослого, профессионального математика.

Замечательно, что в такой же ситуации оказывался иногда и выпускник школы на вступительном экзамене в ведущий университет, когда новая математика в решении задачи, которую ты не знаешь, как решать, о которой вообще не слышал, возникает буквально на экзамене, «на входе» в систему.

Я сейчас приведу знакомую многим цитату из воспоминаний выдающегося математика. «На вступительном экзамене, как это бывает, попались логарифмы. И мне экзаменатор, известный математик сказал: батенька, как же это вы приехали на мехмат без логарифмов?.. Я говорю: учитель не знал. Он так голову чесал-чесал и спрашивает: а показательную функцию знаете? А я ее знал. Он говорит: логарифм — это обратная к показательной. Тогда я самостоятельно вывел её свойства и получил свою пятерку». Многие из нас слышали этот рассказ Виктора Антоновича Садовничего о том, что с ним произошло в очень стрессовой ситуации в ограниченном времени в беседе с серьезным взрослым математиком, когда надо было на месте создать новую математику: исходя из идеи логарифма как обратной функции [6].

Могу сказать о себе, что я учился — мне повезло — в хорошей школе, и на письменном экзамене я занимался выводом формулы площади сферического треугольника, но при этом использовал неправильную формулу для корней квадратного уравнения. На устном экзамене я попал к экзаменатору, который обсудил со мной билет и задачу, посмотрел мою письменную работу, которая его несколько удивила; он поговорил со мной еще немножко и спросил: «А у Вас есть медаль?» Я сказал: «Да, есть золотая медаль». Он сказал: «Ну, хорошо. Можете не сдавать физику». И исправил мне прямо на письменной работе четверку на пятерку, хотя там были очевидные, «недопустимые», ошибки. Через несколько лет, уже будучи студентом мехмата, я понял, что этим экзаменатором был Владимир Игоревич Арнольд, отца которого я цитировал выше.

Конечно, в ЕГЭ такая ситуация невозможна в принципе.

Кружки, олимпиады для школьников

В описанной выше ситуации массовой школы 30-х годов прошлого века крупнейшие математики Москвы и Ленинграда пришли к выводу, что им нужно что-то срочно сделать, чтобы вырастить себе смену не ту, что готовит массовая школа, а в каком-то параллельном математическом потоке. В 1933–34 гг. Б. Н. Делоне, А. Н. Колмогоров и другие осознали, что им надо заниматься школьниками отдельно от массовой школы, что массовой школы недостаточно. И были организованы олимпиады — в Москве в 1934 году, в Ленинграде на год раньше. Заработали кружки при Ленинградском университете (Г.М. Фихтенгольц, Л.А. Люстерник) и при Московском университете — (И.М. Гельфанд и др.); ключевым руководителем московских кружков был Д.О. Шклярский, погибший на войне. После войны кружки возобновились, крупные математики собрали их задачи, которые вошли в «Библиотеку математического кружка» [7–9], всего вышло 19 выпусков разного стиля (не все они были сборниками задач [10]). Вышло также 62 выпуска «Популярных лекций по математике» [11]. Большинство этих выпусков таже содержало большое количество задач, которые «неизвестно-как-решать».

Если поговорить с кем-то из выдающихся математиков, уже почти ушедшего поколения школьников конца 40-х — 50-х годов, то большинство из них, сказав что-то, может быть, хорошее, иногда плохое, о школе, где они учились, говорили нечто вроде: «Но я пришел на кружок в МГУ. И вот на этом кружке я и понял, что такое математика». Заметим, что в высказываниях такого сорта не говорится о скорости решения задач, о подготовке к экзаменам для поступления в университет, о будущих перспективах, или даже о каких-то важных математических темах. Самым важным было получение задач, которые интересно решать и обсуждать с другими. Могу сказать о себе, не относя себя к упомянутой замечательной когорте, что я тоже из слабой микрорайонной школы почти случайно попал на кружок в Зоологический музей МГУ, и первая серьезная задача, которую я решил, была задача о том, что если две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный. Я увидел недавно в статье [3], которую уже цитировал, что это одна из задач, которая по-своему замечательна в истории московских кружков.

Крупнейшим математическим кружком в стране сегодня является малый мехмат МГУ [12].

Кружковый стиль, вошедший в школьное образование

Итак, кружки стали и остаются по сей день важным элементом российского математического образования. Но дальше кончилось «сталинское время» и произошло событие, которое можно считать фантастическим везением для развития довузовского математического образования. Кружок стал частью основного учебного процесса многих школ. Это стало возможным благодаря политическому решению Никиты Сергеевича Хрущева: теперь школу обязали давать выпускникам практические профессии. При этом, по-видимому, Никита Сергеевич и близкие к нему люди имели в виду профессии рабочие, но при этом требующие полного среднего образования. Крупнейшие математики А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев А.С. Кронрод, И.М. Гельфанд ухватились за эту идею и заявили, что одной из профессий может быть «программист», тогда чаще говорилось «оператор ЭВМ». Эта идея очень созвучна нашим сегодняшним представлениям о том, что учить программированию весьма уместно уже в школе.

Семен Исаакович Шварцбурд под лозунгом обучения технике, технологии, программированию, создал около 1960 г. первую математическую школу в Москве — школу № 425, в дальнейшем получившую номер 444. В последующие годы движение математических школ расширилось. Возникли знаменитые матшколы в Москве и в Ленинграде и физ-мат школы-интернаты при университетах — то, что впоследствии было трансформировано в специализированные учебно-научные центры, выпускниками которых гордятся и Московский государственный университет, и Новосибирский, и Санкт-Петербургский, в последующие годы — и Екатеринбургский. Структура и культура, педагогика, которые сформировались к тому моменту в кружках, были интегрированы в общеобразовательную школу.

Позволим себе некоторое отвлечение общего характера. Часто говорят о полной унификации советской школы. Конечно, это преувеличение. Например, английские спецшколы начиная с 1960-х гг. обладали собственным учебным планом. А если говорить о математических школах, то объем нешкольной математики в их расписании, включая программирование, доходил до 25%. Если же учитывать время и энергию самостоятельной работы учащихся, то можно сказать, что математика для многих из них составляла половину всего образования и до 100% положительной мотивации в старших классах этих школ. Что еще очень важно: в этих школах и классах изменились ориентиры и приоритеты учащихся, педагогических коллективов, родителей. Быть отличником по всем предметам, медалистом было, конечно, неплохо, «но не это главное». Олимпиадные успехи были более важны, но все же часто учителям математики удавалось вносить разумную коррекцию: и олимпиада тоже «не самое главное», главное — интерес к математике, решение индивидуально сложных задач, которые «неизвестно-как-решать». Важным является то, что математику учащиеся часто именно «делали сами». Так же, как они делали это на олимпиадах, на кружках, в школе, они создавали свой систематический курс алгебры, математического анализа или дискретной математики.

И еще одно важное обстоятельство — в этих школах, где-то больше, где-то меньше, как правило, были и уроки программирования, то есть детям прививалась способность решать посильные неожиданные задачи уже из области программирования.

Подчеркнем, что основной образовательной целью в матклассах было не узнать, выучить, пройти какой-то список определений, теорем и алгоритмов — «обязательной программы для матклассов» не было. Целью было освоить способ деятельности математика, приобрести способность, готовность и желание решать новые задачи, создавать математику — вспомним Лузина и Халмоша, о которых я говорил. И на этом уже формировались и логическое мышление, и ценность доказательства, и интеллектуальная красота, интеллектуальная честность, формулировался язык для описания реальности — то есть достигались все те цели, которые обычно связываются с нашим представлением о лучшем возможном математическом образовании.

Эта традиция не прерывается и по сей день.

Информатика и программирование

Продолжим описание линии программирования, но уже для массовой школы. Здесь тоже ключевым стало политическое решение. В марте 1985 года вышло постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР, предусматривающее введение предмета «Основы информатики и вычислительной техники» в программу общеобразовательной школы [13].

Содержание этого курса, учебник по этому курсу, подготовка учителей были выстроены в большой степени на основе той же самой традиции самостоятельного исследования и решения новых задач в математике — олимпиад, матклассов, программирования, которое к этому моменту существовала на механико-математическом факультете МГУ.

Неслучайно авторами и концепции курса, и первого учебника по этой новой дисциплине были представители именно мехматской математической традиции и традиции матшкол [14]. Это не были «чистые» программисты, хотя блестящие программисты тоже возникли из этой традиции, можно назвать Алексея Андреевича Ляпунова, или Александра Семеновича Кронрода, например. Но конкретными авторами учебника оказались выпускники мехмата: Андрей Петрович Ершов, Анатолий Георгиевич Кушниренко (выпускник московской школы № 444), Геннадий Викторович Лебедев (сын учительницы математики, выпускник математической школы в Бобруйске), я (выпускник московской школы № 7) и Александр Шень (выпускник московской школы № 2). Все эти люди, обладающие математической культурой, понимающие, как устроено, в частности, преподавание и обучение в математической школе, создали курс на основе задач, которые «неизвестно-как-решать».

Почти каждая задача по программированию в курсе как раз обладала такой олимпиадной, кружковой новизной: сразу непонятно, как это делать. Задачи, где для решения нужно только изменить числа в уже решенной или использовать формулу, которую уже «прошли», были маргинальными для курса.

Роль цифровых технологий в математике и математическом образовании

Хотелось бы обратиться к еще одному этапу в развитии нашей темы: в руки к математикам попала непредсказуемо мощная вычислительная техника. И здесь тоже сошлюсь на Виктора Антоновича Садовничего, который вспоминает, как Андрей Николаевич Тихонов в 1962 году, когда масштабы цифровой революции еще были не очевидны, начал массовое внедрение на мехмате вычислительной техники, создал кафедру вычислительной математики. В.А. Садовничий пишет: «Я принадлежу к тому поколению людей, которые в числе первых под руководством Андрея Николаевича Тихонова начинали компьютерное дело в России. Это выдающийся ученый, академик; он одним из первых в России понял, что запрещение кибернетики было грубейшей ошибкой, которую надо исправлять. И он создал на мехмате кафедру вычислительной математики и начал внедрять в учебный процесс те компьютеры, которые были в то время. Это были машины «Мерседес», как бы первый тип компьютера. На них можно было считать. И мы на втором курсе начали считать на этих машинах. Это было для нас чудо. Раньше были счеты или арифмометры, и вдруг — некая электрическая машинка, которая делала операции с огромным количеством цифр после запятой с большой точностью» [6].

Это было важнейшим элементом того, что было сделано для математиков. Андрей Николаевич уже тогда осознал, что развитие страны без компьютера невозможно даже в ближайшей перспективе. И это значит, что перед математическим образованием нужно ставить другие цели. Снизилась важность «четкого выполнения инструкции» и умения считать «на бумажке». Сегодня для компьютерной алгебры не нужен настольный «Мерседес». Достаточно мобильника, систем Mathematica и Coq. И возникает вопрос «Как сегодня в подготовке математиков мы учитываем существование систем компьютерной алгебры, способных решать большую часть «задач из Демидовича» и много другого?» Более того, еще в 1970-е гг. известный математик, ученик и соавтор Льва Семеновича Понтрягина, член-корреспондент АПН СССР Владимир Григорьевич Болтянский и уже упомянутый С.И. Шварцбурд осуществили практический опыт по использованию в разных классах школы электронных калькуляторов. Результатом этого опыта были рекомендации Министерства просвещения по распространению этого опыта в школах страны [15].

Цифровые технологии дают замечательные возможности для эксперимента в самой математике. В нашей стране это направление представлено, в частности, Ю. В. Матиясевичем [16] и Н.А. Вавиловым [17; 18] в Петербурге. На школьном уровне замечательная системная работа была проделана Г.Б. Шабатом с «Живой геометрией» [19]. Разработка системы мирового уровня для школьного математического эксперимента прошла в сотрудничестве преподавателя мехмата и СУНЦ МГУ Владимира Натановича Дубровского с компанией 1С — они создали «Математический конструктор» [20]. В нем школьник может быстро построить красивый и ясный чертеж, «проиграть» на экране бесчисленное количество частных случаев заданной конфигурации, нащупать закономерность. Остается творческая работа: выдвигать, проверять гипотезы, находить решения задач, которые «неизвестно-как-решать».

Появление ЕГЭ. Попытка закрепления одной традиции

Следующий этап в истории российской школьной математики, который я должен упомянуть, — это опять политическое решение о введение государственной итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена. Это было решение, которое привело к закреплению в начале 2000-х гг. традиции массовой, «индустриальной», унифицированной и унифицирующей школы 1930–50-ых годов.

Но ситуация в стране и в мире уже была другой. Сверхцель индустриализации исчезла — из-за ее исчезновения мотивация учащихся радикально упала (я об этом ещё скажу), а сверху скомандовали: «А давайте тренировать всех на инженеро́в!»

Какая-то коррекция в дальнейшем все же была сделана. Например, около 2010 года я проявил инициативу по отказу от заданий с выбором ответа, неорганичных для российского образования и для целей развития математического мышления.

Еще более существенным было сохранение и развитие системы олимпиад по математике и другим предметам, начиная со Всероссийской олимпиады школьников. Всероссийский совет олимпиад школьников под председательством академика В.А. Садовничего постоянно ведет работу по тонкой настройке олимпиадного движения, позволяющего сочетать «индустриальную» линию ЕГЭ с творческой традицией кружков, олимпиад и матшкол.

Цели XXI века и синтез традиций

Если говорить о перспективе, то сейчас ситуация в разных отношениях принципиально другая, чем даже около 2000 года. Я не буду затрагивать весь спектр изменений в мире, но скажу о двух взаимосвязанных факторах. Первый — это продолжающаяся революция искусственного интеллекта и всех цифровых технологий, сравнимая по масштабности с революциями, связанными с появлением сознания человека, речи и письма. Второй — это скорость изменений, в которые мы вовлечены. То, что каждый следующий год, пятилетие и подавно, приводит к существенной трансформации всей сферы цифровых технологий, не надо пояснять. Но мы видим и трансформацию общественных отношений, трансформацию мировосприятия и т.п.

При огромной скорости изменений сохраняются как мировые константы свойства: любопытство и любознательность человека, который склонен от самого рождения решать задачи, которые «неизвестно-как-решать». Я еще раз возвращаюсь к этой ситуации, ключевой для нас: р*ешение задач, которые «неизвестно-как-решать»*.

Начиная обсуждение завтрашнего дня, вспомним попытку братьев Стругацких его увидеть в советской действительности и сошлемся на известный диалог между Фёдором Симеоновичем и Кристобалем Хунтой:

«Г-голубчики, — сказал Фёдор Симеонович озадаченно...

— Это же п-проблема Бен Б-бецалеля. К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения.

— Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта. — Мы хотим знать, как её решать.

— К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо... К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то...

— Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. *Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть.* Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет» [21].

То, что Стругацкие называли в этом диалоге задачами, которые не имеют решения, в моей терминологии — задачи, которые заранее «неизвестно-как-решать». Заметим, что повесть Стругацких «Понедельник начинается в субботу» многими людьми старших поколений считается гимном реальной инженерной деятельности в СССР, шедшей в НИИ, КБ и п/я «группы машиностроительных министерств», а до этого во многом — в «шарашках».

Сегодня мы должны говорить о целях образования для разных ролей человека в обществе и использования им математики. Имеет смысл исследовать, как эта система целей для разных категорий выпускников отличается от системы целей и категорий 1950-х гг., о которых шла речь выше.

Выпускники школы — это, во-первых, (для нас) будущие профессиональные математики — те самые доли процента, которые не сильно выросли за последнее столетие, несмотря на существенное повышение роли математики в экономике и в жизни общества за это время. Дальше идут категории граждан, по-разному использующих математику: профессионалы, строящие математические модели, создающие новые информационные технологии, программисты, авторы других элементов технологий, те, кто профессионально применяет математику: бухгалтеры, архитекторы, учителя, преподаватели математики… Наконец, есть и «основная масса населения»: от иногда упоминаемых «балерин», до «домохозяек» и безработных.

Мы должны говорить о результатах образования для всех граждан XXI века. Постараемся кратко описать перспективу для разных категорий.

Сохранение кружковой и олимпиадной традиции для высокомотивированных школьников — для нас очевидный приоритет. Конечно, для этих школьников и достижение результатов, отнесенных нами к первой традиции, результатов, требуемых массовой школой в цифровом мире, будет намного проще, чем в 1950-е гг. Скорость и безошибочность в решении более широкого круга «инженерных задач» достигается за счет применения цифровых технологий. Мы сможем при этом приложить дополнительные усилия к тому, чтобы и будущие профессиональные математики освоили элементы математического моделирования реальности, соотнесения результатов моделирования с ограничениями и здравым смыслом и т.п.

Очередная политическая задача, приоритетная сегодня, — это подготовка гораздо большего, чем сегодня количества IT-специалистов, сочетающих технологическую грамотность с творчеством и мотивацией. Это значит, что нужно найти больше детей-первоклассников, которые не потеряют интерес к математике к пятому классу, которые не боятся и любят решать задачи, которые «неизвестно-как-решать». Нужно найти больше восьмиклассников, которые захотят все-таки сдать аттестацию по информатике с элементами программирования и с охотой пойдут дальше в профильный класс или в СПО с IT-ориентацией. Нужно найти больше десятиклассников, которые захотят в 11 классе готовиться к ЕГЭ по математике и информатике и сознательно выберут IT-карьеру. Мы видим, что эта задача намного масштабнее задачи подготовки тысяч и десятков тысяч профессиональных математиков, речь идет о сотнях тысяч и миллионах

IT-специалистов, которые постоянно будут решать те самые задачи, которые «неизвестно-как-решать». Нужны и специалисты по математическому моделированию, десятки тысяч, сотни тысяч специалистов, которые будут постоянно сталкиваться с новыми задачами. И это значит, что нам нужно уже для основной массы учащихся задать мотивацию для решения таких задач, готовность их решать, привычку к их решению.

И в этой связи задача массового учителя изменяется: она становится тоже принципиально новой. Значит, и будущих учителей уже со школы надо учить решать задачи, которые «неизвестно-как-решать».

Можем ли мы продолжить и существенно расширить в школе традицию подготовки выпускников к решению задач, которые «известно-как-решать»? Можем, и даже можем достичь здесь бóльших успехов, если разрешим школьникам при решении этих задач использовать те инструменты, которые сегодня используются для решения разнообразных задач взрослыми — эти инструменты в будущем не исчезнут, скорее станут более эффективными. Дадим школьникам вместо логарифмической линейки, таблиц Брадиса и арифмометра (когда-то не везде доступного) калькулятор, который есть в каждом мобильнике, — при этом существенно расширим класс решаемых задач. Например, школьник будет анализировать данные, собираемые цифровыми датчиками в физическом эксперименте и рассматривать более широкий класс моделей. Тем самым, мы продолжим первую из двух традиций — массовое математическое образование — и, повторю, с бóльшим успехом, чем в 1950-е годы.

Что же будет со второй традицией в массовой школе? Мы утверждаем, что ее необходимо продолжить, при этом намного более массово, успешно и целесообразно, по сравнению с теми же 1950-ми годами. Начнем и здесь с общественной потребности. Принципиально важным обстоятельством, как мы считаем, является то, что для разных категорий людей создание нового в решении задач, которые «неизвестно-как-решать», необязательно математических, становится ключевым профессиональным и жизненным фактором. И это связано с тем, что нам всем приходится действовать в новых неожиданных условиях, постоянно решать задачи, которые мы не знаем, как решать.

Здесь мы подходим к ключевому элементу нашей концепции.

Сегодня мы можем и должны перейти от того, что задачи, которые «неизвестно-как-решать», решаются только элитной частью школьников, олимпиадниками, которых мы стараемся спасти от ЕГЭ, к их постоянному и системному включению в математическую деятельность всех учащихся массовой школы.

Мы считаем, что в XXI веке все учащиеся могут и должны получить опыт, навык и готовность к решению задач, которые «неизвестно-как-решать». Для математика это и будет его основной работой в жизни; для программиста и инженера — это важный, хотя не единственный элемент его работы, а для каждого человека — это важная общая способность жить продуктивно и счастливо в непредсказуемом, быстро меняющимся мире (VUCA-мире) [22].

Реальность цели

Возникает вопрос: ну хорошо, согласимся с представленной перспективой, может, было бы неплохо всех этому научить, но почему это достижимая цель?

Здесь стоит обратить внимание на обстоятельства, уже обсужденные выше. Первое — именно в нашей стране за последнее столетие создан массовый опыт и массовая культура кружков, олимпиад и математических школ. Второе — задачу, которую «известно-как-решать», человечество поручает машине. Конечно, задачи, которые известно, как решать, из сегодняшней школьной программы, тоже будут встречаться в будущей программе. Радикальное отличие будет состоять в следующих обстоятельствах:

- для каждого типа таких задач ученик на небольшом количестве простейших примеров сам найдет, изобретет способ решения, сформирует, осознает для себя общую модель, «большую идею» (например, идею решения уравнения с помощью алгебраических преобразований или решения жизненной или текстовой задачи из задачника введением переменных и записью соотношений с помощью уравнений);
- ученик получит цифровые инструменты, позволяющие эффективно решать намного более сложные задачи, чем те, для которых он сам придумал, как искать решение; в решении этих более сложных задач он будет использовать цифровые инструменты и продолжит развитие своего видения «больших идей», ориентирующих его в мире.

В некоторых случаях цифровой инструмент будет использоваться с самого начала. Например, нет большого смысла в том, чтобы строить в курсе статистики столбчатые диаграммы карандашом не бумаге, если они сразу получаются при использовании динамических таблиц.

Таким образом, реальность перспективы во многом зависит от использования в школе цифровых технологий, которые помогают:

- подготовке на следующих уровнях образования специалистов, которые приоритетно необходимы;
- массовому формированию и поддерживанию мотивации учащихся;
- освобождению учителя и ученика от нетворческой, рутинной деятельности;

– реальной постановке и проведению математического эксперимента, самостоятельному исследованию и открытию;
– использованию систем разноуровневых заданий, систем во много раз более объемных и разнообразных, чем в традиционных учебниках, персонализации образовательного пути каждого ученика, фиксации достижения им запланированного, а не «абсолютного» уровня;
– постепенному и все большему учету цифровой истории обучения ребенка при принятии решения, консультированию относительно продолжения образования, дальнейшему снижению роли ЕГЭ, особенно для «крайних» категорий учащихся — для самых «сильных» и самых «слабых».

Последовательная и наглядная демонстрация (в частности, в рамках ЕГЭ) того, что школьники с использованием цифровых инструментов могут массово решать задачи, которые их родители не могли решать, будет убедительна. Аргумент «но ведь решают не на бумажке, как мы когда-то, а с компьютером...» будет ослабевать — ведь мы сами решаем нужные нам сегодня задачи с компьютером.

Итак, постепенная трансформация математического образования в школе, которую мы предлагаем, основывается на двух основных факторах:
– на решении всеми учащимися задач, которые «неизвестно-как-решать»; задачи берутся из российской и мировой традиции и современных областей математики и программирования;
– на применении цифровых технологий в математической работе учащихся.

Первый фактор увеличит количество детей, кому может быть интересна математика, воспитает из них творческих математиков, программистов, граждан XXI века. Второй фактор обеспечит большее понимание ими задач и решений цифровой цивилизации и тоже даст вклад в повышение мотивации и творческого элемента. О вузовском образовании мы несколько слов скажем позднее.

Математика для всех

Мы последовательно пришли к вопросу о трансформации массового математического образования и здесь тоже обратимся к более широкой перспективе. В 1956 году прошла представительная международная конференция по математическому образованию, и один из ключевых пунктов ее резолюции был: «нет детей, неспособных к математике» — т.е. «каждый ребенок, который учится, может освоить математику» [23]. Имеется в виду, что каждый ребенок, который учится, осваивает язык, правила поведения и так далее, может освоить и математику. Конечно, есть дети, которые действительно необучаемы. Но если ребенок пришел в школу, если он может научиться читать и что-то еще делать в школе, то он способен к математике. Когда я этот лозунг произношу среди других вещей, которые я рассказываю, именно он вызывает наибольшее сопротивление со стороны учителей. Учитель говорит: «Да я-то знаю, у меня есть дети в классе, которые не способны усвоить математику!» Это печально, хотя и объяснимо. Конечно, этого учителя не удивляет, что такой «необучаемый» ребенок может прекрасно проверить сдачу в магазине, или спланировать поездку на метро и не опоздать на электричку. Такой ребенок не способен усвоить ту математику, которую преподают в школе так, как ее предлагает ему школа. Но сегодня он намного естественнее и эффективнее, чем в 1950-е годы (напомним, что тогда никто не мог себе даже представить калькулятор в кармане каждого ученика), сможет вписаться в тот синтез традиций, о котором мы говорим: научиться применять цифровые технологии для рутинных жизненных задач и получить опыт решения задач, которые «неизвестно-как-решать».

Возвращаясь к вопросу о том, насколько реальны описанные перспективы, можно говорить о кружках, например о Малом мехмате, или о матшколах, например о московской 179 школе, в воссоздании которой в начале 2000-х мне удалось принять участие, или о СУНЦ при университетах. Однако мне кажется более убедительной ситуация с массовыми олимпиадами для начальной школы.

Одна из них — это упоминавшееся выше олимпиада под названием «Кенгуру», во многом сформированная Марком Ивановичем Башмаковым, замечательным питерским математиком и историком искусств, умершем в 2022 году. В этой олимпиаде по всей стране принимают и принимали участие в те или иные годы 20 и даже больше процентов учеников начальной школы. Сегодняшние, а не будущие или «экспериментальные» учителя начальной школы любят эту олимпиаду, предлагают ее ученикам. Эта олимпиада не имеет никакой государственной поддержки, ее не рекламируют в «Сириусе» или где-то еще — наоборот, она испытывает сопротивление со стороны органов управления образованием. Можно было бы сказать, что «Кенгуру» — это что-то исключительное, что с уходом Башмакова исчезнет и уникальная олимпиада. Чтобы проверить этот аргумент, я проделал эксперимент: взял в интернете олимпиаду наугад. Это оказалась XXIV олимпиада Юношеской математической школы СПбГУ, заочный тур (13 сентября — 15 октября 2020), задания для 4 класса [24]. Это заочный тур, в нем участвуют тысячи школьников, естественно олимпиада учитывает уровень массы четвероклассников, которым интересна математика. Конечно, эти задачи не требуют никаких дополнительных знаний.

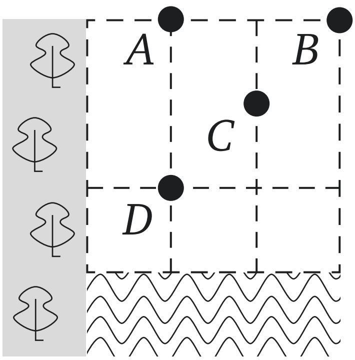
Я предлагаю читателю реально решить эти задачи, потом представить себе решающего их четвероклассника и ответить себе на вопросы «Когда деятельность школьника ближе к работе математика или программиста — при решении этих задач или при решении задач из школьного учебника?» и «И что для нас служит показателем пригодности ребенка к будущей карьере в указанных профессиональных областях?»

«Задача 1. В отмеченных точках (см. рисунок) находятся 4 норы. В них живут хоббиты: Фродо, Сэм, Мерри и Пиппин.

– Нора Фродо ближе к норе Мерри, чем к норе Пиппина.

– Нора Сэма находится ближе к реке, чем нора Мерри, но дальше от леса, чем нора Пиппина.

Кто где живёт?»



Подойдя к этой задаче, и четвероклассник, и учительница, и читатель данной статьи начинает размышлять: «давайте посмотрим, попробуем, разберемся...». Может возникнуть идея заняться Сэмом, поскольку о нем что-то говорится «в абсолютных координатах» — по отношению к лесу и к реке и т.д. Это и есть начало настоящей математики — задача, которую «неизвестно-как-решать»; ученику надо пробовать.

«Задача 2. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной).

– Георг может показывать одну или несколько монет барону Мюнхгаузену, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых, названный им результат всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число.
– Барона не смущает, что он может сказать, например, «три», если ему дали всего две монеты.

– Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?»

Это задача про взвешивание монет, тоже совсем не школьная. Там 100 монет, какой-то барон Мюнхгаузен сравнивает их по весу, что-то говорит и так далее. Тоже не видно, как решать, но мы беремся и решаем. И то же делают дети — детям интересно решать то, что они раньше не видели. Заметим, что при этом умение решать какие-то популярные нестандартные задачи про «взвешивание монет» (на самом деле, уже ставшие стандартными для некоторых учеников и учителей) может и не помочь, и даже может помешать при решении этой задачи.

«**Задача 3.** 31 машина одновременно стартовала из одной точки на круговой трассе:

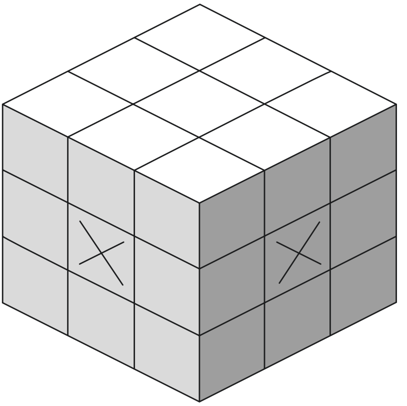
– первая машина — со скоростью 61 км/ч,
– вторая — 62 км/ч и т.д.,
– 31-я — 91 км/ч.

Трасса узкая, и если одна машина на круг обгоняет другую, то они врезаются друг в друга, обе вылетают с трассы и выбывают из гонки. В конце концов осталась одна машина. С какой скоростью она едет?»

Тоже интересно: начинаешь себе представлять, как они гоняются, кто-то с кем-то столкнулся, выпал. А кто же останется в конце концов? Ребенок начинает это решать, пробует запустить машинки в голове и на бумаге, многие дети находят ответ.

«**Задача 4.** Из куба 3×3×3 вырезали тоннель из трёх кубиков, соединяющий центральные клетки двух соседних граней (на рисунке они отмечены крестиками).

Разрежьте остальное на фигурки такой же формы, как и тоннель (тоже из трёх кубиков).



Потратив минут 10, я не смог решить эту задачу. При этом я не понимаю даже, как должен выглядеть ответ, в каких терминах надо это разрезание представить. То есть для меня это уж точно задача, которую я не знаю, как решать. Видимо, и для четвероклассника — тоже, но при этом некоторые четвероклассники все-таки ее решают.

Для полноты картины приведу и две оставшиеся задачи, чтобы было видно, что они тоже «не по программе».

«Задача 5. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет».

«Задача 6. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. Могут ли все алмазы оказаться у одного гнома?»

Думаю, что приведенный пример олимпиадного задания из шести задач достаточно убедителен. При этом он демонстрирует разнообразие используемых для решения математических и «общежизненных» подходов.

Естественно, возникает вопрос: чему же учится школьник, решая эти задачи? Во-первых, конечно, он учится решать задачи, которые «неизвестно-как-решать». Формируются и другие жизненные стратегии — например, просто попробовать, не сидеть перед задачей, думая над тем, как ее решить, а начинать действовать. Действие может состоять в рассмотрении частичного решения: например, можно поселить куда-то хоббита, потом другого и посмотреть, что получится, можно запустить машины и попытаться понять, какие из них первыми столкнутся и почему. Общие стратегии возникают и в других задачах, и они могут быть применимы и вне математики.

Разумеется, профессиональный математик и думающий учитель увидит в этих задачах и конкретное математическое содержание — мы не будем на нем здесь останавливаться.

Мотивация

Мотивация учащегося — главная проблема сегодняшнего образования. Мы полагаем, что достижение выпускниками результатов математического образования, необходимых экономике и обществу, в большой степени определяется интересом к математике на разных уровнях школьного образования.

Анализируя мотивацию советского школьника, можно выделить следующие ее источники, отчасти взаимосвязанные:

– польза математики после окончания школы: ВПК, другие инженерные профессии;
– авторитет Родителя и Школы в авторитарном обществе;
– мотивация наказания и принуждения в школе;
– внешняя положительная мотивация: отметка, мороженое.

Видно, что все эти виды мотивации снизились за последние десятилетия.

Роль инженерных профессий снизилась существенно. Родители моей жены проектировали широкий спектр летающих «изделий». Мой отец проектировал радиолокаторы, которые должны были помогать обнаруживать эти «изделия», моя мать участвовала в создании первого советского серийного компьютера, который должен был вычислять траекторию ракеты, поражающей это «изделие». Я участвовал в создании отечественного суперкомпьютера в коллективе, среди прошлых достижений которого — БЭСМ-6. Все это закончилось на моих глазах. При этом школьник, пытающийся сегодня разобраться в математике, начинает понимать, что умения, которые от него требуют, мало нужны в профессиональной деятельности, в которой они могли быть полезны до появления современных компьютеров.

Авторитет родителей, в том числе инженеров, преподавателей, также сильно упал; большинство из них сами осознают свою инженерную карьеру как неудачу.

Авторитет школы понизился.

Предложение «мороженого» того или иного вида также работает хуже.

Чем можно заменить эти виды мотивации?

Мы считаем, что, если ребенку дать задачу, посильную для него, но которую «неизвестно-как-решать», в нем срабатывают те самые механизмы, которые срабатывают у младенца, с которыми он приходит в жизнь в этом мире, когда он постоянно решает новые задачи, которые «неизвестно-как-решать». Если этот интерес к новому, любопытство, желание решать задачу не подавлять, предлагая что-то принудительное и неинтересное, то эти качества можно сохранить намного дольше, чем это происходит в сегодняшней школе. В идеале — на всю жизнь, это и будет учением во всей жизни (Life-Long Learning).

Важнейшие из задач, которые *«неизвестно-как-решать»,* которые *«мы-не-проходили»*, возникают из экспериментов и наблюдений за окружающим миром. Одновременно такое наблюдение вместе с математическим анализом ситуации может дать понимание того, как это работает? (мобильный телефон и т.п.), а это тоже — желаемый результат образования.

Самостоятельное открытие, изобретение, доказательство дает почувствовать красоту математических объектов и рассуждений и увлекательность учения. Когда человек решает в сотый или пятисотый раз квадратное уравнение, то, если даже у него было исходное ощущение красоты открытия, если учителю удалось эту красоту передать, это ощущение стирается, уничтожается от скучного рутинного труда.

Заметим также, что математика является правильным полем для развития умения искать ошибку в собственных решениях, использовать обратную связь для коррекции собственного поведения. И здесь тоже можно и очень полезно выработать мотивацию охоты за ошибкой, развития наблюдательности и зоркости, получения обратной связи от математического или реального мира.

Математика среди других школьных предметов является наиболее естественным полем для того, чтобы решать новые, ни на что не похожие задачи, именно здесь можно готовить человека к будущему миру. И это ценность математики за пределами математики. Важно, что даже если ребенок не станет потом математиком, то все равно то, что мы приучили его решать новые, неожиданные, необычные задачи, может помочь ему и в бизнесе, и в семейной жизни, и во многих других обстоятельствах.

Опыт реализации

Начнем, в соответствии с принципами, которые мы провозгласили, с источников и традиций.

Конечно, одним из источников построения новой системы школьного математического образования является **материал, уже накопленный в матклассах** (см., например, [25]). Однако этого недостаточно: наработанный здесь материал все же ориентирован на старшие классы и хорошо подготовленных учащихся, в существенной степени освоивших школьную программу предшествующих лет обучения.

Занимательные задачи и игры. Я уже говорил об истоках рассматриваемого подхода в мире российских **математических кружков**, но есть и более древние источники. Задача о волке, козе и капусте встречается, наряду с другими *занимательными* задачами, в «Задачах для оттачивания молодого ума» (лат. Propositiones ad Acuendos Juvenes), написанных Алкуином в VIII веке [26]. Когда-то мы ее поместили в наш учебник по информатике. Многие человеческие игры также дают прекрасные примеры задач, которые «неизвестно-как-решать». Предложите двум детям игру в *камешки*: за ход можно взять из кучи от одного до трех камешков; начинаем играть. Проигрывает тот, кому нечего будет взять. Как выиграть? Неизвестно, но можно поэкспериментировать. Игры позволяют начать систематическое освоение инвариантов процессов и индуктивного доказательства их свойств.

Программирование. Я уже сказал, что нам повезло, когда мы получили возможность начать строить курс школьной математической информатики с нуля и смогли ввести в блок программирования (алгоритмики) постоянное решение новых задач. При этом освоение технических, синтаксических условностей какого-либо языка программирования было сведено до минимума за счет использования базового алгоритмического языка. Можно надеяться, что это направление удастся систематически расширять и учитывать при разработке государственной итоговой аттестации по информатике и математике.

Математика дискретных наглядных объектов. В течение многих десятилетий я со своими коллегами создавал курс «Математика и информатика» для начальной школы. Этот курс покрывает содержание традиционной арифметики, но при этом предлагает ученику новые объекты, объекты информатики, дискретной математики, которые по-новому позволяют в очень наглядной среде решать интересные, комбинаторные, логические задачи. Важнейшей особенностью этого курса является также последовательное проведение установки на самостоятельное построение математического знания учащимися, постоянное решение задач, которые «неизвестно-как-решать».

Мы никак не рекламировали этот курс. В 1980-х гг. мы испытали шок, когда увидели, как 3 миллиона наших учебников по информатике одновременно пошли во все советские школы, и поняли, что надо как-то всех научить, что с этими учебниками делать. Я спросил в издательстве «Просвещение», каков тираж нашего учебника «Информатика» для первого класса. Оказалось, несколько больше, чем я ожидал,— 50 000 экземпляров, но совсем не миллионы. Но это — школы и учителя, которые самостоятельно выбрали для себя этот учебник, готовы объяснять руководителям школы и родителям, почему они это сделали. При этом информатики нет в основой программе начальной школы: ее можно преподавать только за счет школьного компонента.

Объем статьи (и тем паче доклада), конечно, не позволяет сколько-нибудь детально изложить структуру и содержание курса. Поэтому мы ограничимся, с одной стороны, перечислением его основных понятий, с другой стороны, приведем пример трансформации традиционного содержания.

Для достижения принципиально большей наглядности, чем в традиционном курсе арифметики, и одновременно — приближения к современной математике и информатике, мы берем в качестве базовых объектов цепочки символов — бусин, а также мешки бусин и таблицы.

Вот пример нашей задачи из начальной школы. Детям раздают прозрачные пакетики, в которых лежат цветные конфетки «m&m», — по одному пакетику на человека. Задача — найти пару одинаковых пакетиков.

Это задача с понятным условием и неочевидным решением. Среди учеников начинается обсуждение: «А у тебя какой? — У тебя другой! — А у тебя какой? У кого есть зеленая?» Собираются все с зеленой. «А у кого две зеленые?» Выделяется часть класса с двумя зелеными и т.д. Этот пример иллюстрирует важные черты курса: наглядность и логику.

Еще один пример: таблица умножения. В большинстве школ на земном шаре таблицу умножения учат наизусть. Таблицу временно убирают со стены, чтобы все выучили и не подсматривали. Вызывают Иванова: «Иванов! Шестью семь?» Мы же предлагаем каждому ученику самостоятельно построить таблицу умножения, пересчитывая клеточки в прямоугольниках (рис. 1). С точки зрения традиционного подхода, это неоправданно. Если ученик будет потом счетоводом, бухгалтером, пусть он просто наизусть ее выучит, будем его тренировать, «дрессировать». Выше уже объяснялись причины, почему этот подход не работает. У всех таблица умножения в кармане — в мобильнике, и чего ради я буду учить?! Нет причин. А вот если считать площадь прямоугольников самостоятельно, не потому, что начальство ему велело, и не потому, что 6×7 будет 42, а потому что он сам аккуратненько посчитал, нашел 41, сосед его нашел 43, дальше они поразбирались, поняли, что на самом деле ответ — 42, и занесли его в таблицу, висящую на стене. Это — самостоятельное получение математического результата, что намного интереснее, чем его выучивание. И именно поэтому это запоминается, откладывается в памяти — как результат, который был получен самостоятельно и который в случае необходимости можно получить снова.

Рис.1. Самостоятельное построение таблицы умножения

Таким образом, и в начальной школе и за ее пределами речь идет о том, чтобы мы начали постепенно трансформировать школьную математику, расширяя круг ее задач, исходя из богатой традиции XX века, но при этом используя всю перспективу и цифровые инструменты XXI века. Это приведет к постепенной смене приоритетов для образовательных целей. Поясню эту мысль также на примере.

Недавно я был в Майкопе на конференции «Математический талант и математическое образование», организованной Адыгейским государственным университетом. В весьма содержательном докладе главный тренер сборной России на Международной олимпиаде школьников по математике Кирилл Сухов подчеркнул, что одной из главных проблем подготовки олимпиадников является освоение ими принципа «Оценка и пример». Это значит, что, скажем, решая задачу «сколько можно расставить ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга», требуется, с одной стороны, указать расстановку некоторого количества ладей, с другой стороны, доказать, что большее количество ладей расставить нельзя. Кирилл подчеркивал, что освоение упомянутого принципа требует существенных усилий от олимпиадников. Меня это потрясло. Я подошел потом, переспросил, он говорит: «Да, оценка и пример — это главное, чему я учу на сборах». Возможно, что я что-то понял неточно, тут есть какая-то тонкость; это не так уж важно. Существенно другое. При нашем подходе этот принцип тоже является важным. Но мы считаем, что не только олимпиадники, но и абсолютно все учащиеся должны этот принцип самостоятельно открыть, усвоить и применять как очевидный уже во втором-третьем классах начальной школы (конечно, на доступном им классе задач). Также они должны открыть в математической или в жизненной ситуации полный перебор конечного числа вариантов и рассмотрение каждого из них (см. [27]).

В рамках рассматриваемой перспективы необходимо рассмотреть и проблематику государственной итоговой аттестации. Мы не можем больше считать, что олимпиадников мы «спасли», а ЕГЭ может идти по тому же пути, по которому шли в не лучших российских вузах вступительные экзамены в 1960–1970-х гг., когда первая задача была «вот на это», вторая задача — «на это», третья задача — «на то», и сужение класса экзаменационных задач для каждого вуза продолжалось и поддерживалось репетиторами. Сейчас ведущие репетиторы ЕГЭ говорят так: «Из первых задач ты должен каждую решать за 40 секунд. Должен получить задачу, реагировать на такие-то ключи, быстро считать, правильный ответ через 40 секунд. Если ты делаешь ее 2 минуты, то все, ты уже не получишь 85 баллов».

Вот пример «из жизни ЕГЭ». В какой-то момент, отчасти спровоцированные выступлениями Владимира Игоревича Арнольда, мы впервые включили в ЕГЭ задачу, которая теперь называется «задача на йогурты». В этой задаче существенным является целочисленность — поиск частного с избытком или недостатком (не может получиться «два землекопа и две трети»). Эта задача в первый год была примером такой, которую «неизвестно-как-решать». Но уже в следующий год учителя начали тренировать выпускников на это: начали натаскивать на решение задач «про йогурты». Сразу видно: задача про йогурты, значит надо понять, «больше или меньше», то есть — приближать с избытком или с недостатком. Есть стандартные способы решения. Ничего особенно плохого в этом нет, еще один элемент разумной математики вошел в фактическую школьную программу. Но мы говорим о другом. Во-первых, нужно постепенно переходить к замещению все большей доли заданий задачами, которые берутся из действительно открытого банка заданий ЕГЭ, ранжированных по сложности. Пусть там будут простые задания, еще более простые, чем сегодня, но разнообразные, скажем, случайно выбранные (с заданной сложностью). Задачи должны быть простыми, но неожиданными. С другой стороны, цифровые технологии могут помочь в сдаче ЕГЭ, как мы говорили выше, начиная с пересдачи на базовом уровне.

Естественно, возникает вопрос о роли учителя. Сегодня учитель настроен на то, чтобы транслировать знания предыдущих веков, а не готовить детей к самостоятельному открытию и изобретению. Но опыт показывает, что можно работать и с массовым учителем. Принципы такой работы просты. Надо разворачивать перед учителями долгосрочную перспективу: что будет через два года, а что — через десять. Изменения должны быть постепенными. Нужно дать возможность учителю выбирать индивидуальную траекторию изменений. Доля задач, которые «неизвестно-как-решать», может быть разной для разных учителей, как и их сложность. Важно постепенно сформировать у учителя установку на решение вместе с детьми задач, которые ты и сам не знаешь, как решать, ищешь решение вместе с детьми, и они учатся такому поиску на твоем примере. Наш опыт работы с учителями начальной школы показывает, что это возможно. Также мы помним, что и переход к ЕГЭ за два года оказался возможным, хотя и травматичным для массового учителя. Но теперь травм нужно стараться избегать.

Заметим, наконец, что, как справедливо отмечает Д.Э. Шноль [28], исследовательский подход сегодня провозглашается как один из элементов массового образования, и это делает его реальное применение еще более реальным.

Университетское образование

Рассматриваемый подход, как уже говорилось выше, имеет своим истоком университетское образование, подготовку математиков — исследователей. Если говорить о Московском университете и о других ведущих университетах страны, то они по своему статусу исследовательские, то есть должны сами вести исследования, а главное — готовить исследователя — человека, который сам создает новую физику, математику, биологию и так далее, а не выучивает наизусть рецепты, которые даст кто-то знающий. Целый ряд наших коллег десятилетия создавали учебники, состоящие из задач [29–33], ориентированные на тот стиль изучения математики, о котором говорил Халмош (см. выше).

Сегодня мы оказываемся перед проблемой: к нам приходят все более слабые по некоторой «абсолютной шкале» студенты. Видимо, это объективный факт, а не просто: «... в нашей юности трава была зеленее и солнце светило ярче». Причин такого ослабления мы отчасти касались выше. В каком направлении должно эволюционировать содержание образования? Один из очевидных путей — в основном сохранение содержания математического образования с добавлением в него новых разделов. При этом учитывать снижение уровня студентов, снижая требования на экзаменах и зачетах, идти на компромисс с преподавательской совестью, закрывать глаза на реальное непонимание математического содержания, даже на списывание, делать курсовые и дипломные работы «реферативными». Альтернативой, которую мы предлагаем, может быть сохранение исследовательского компонента, самостоятельного решения задач как основного стержня курса. При этом мы должны гарантировать студенту, который действительно разобрался в базовых теоретических задачах (при необходимости существенно сократив обязательное для всех формальное математическое содержание), минимальную оценку — настоящее «удовлетворительно», повышая ее при расширении круга самостоятельно решенных задач. Система оценивания должна адаптироваться к способностям и достижениям студента, но не за счет выбрасывания исследовательского компонента.

Я в последние годы пробую такой подход в своем обязательном курсе по математической логике и теории алгоритмов для третьего семестра мехмата. Каждая теорема там разбита на последовательность посильных задач. Студент получает формулировку задачи и начинает думать, как ее решать. Не получается, но он уже знает, что это — не теорема для выучивания, а задача для решения. Дальше он читает подсказку, как бывает в олимпиадных книжках. Ага, подсказка ему помогла — он построил решение. Не помогла — тогда он читает решение, но читает решение уже озадаченный: он уже понял, что нужно выяснить, с чем нужно разобраться, он знает, в чем трудность, и теперь более ясно видит, как кто-то до него эту трудность преодолел. Теперь он понимает, на какие вопросы дает ответ автор курса, а не автор курса заставляет выучить наизусть ход своего рассуждения, отвечающий на вопросы, которые не пришли в голову студенту.

С некоторым удивлением я обнаружил, что этот способ работает, несмотря на то что предшествующее обучение в школе и в университете устроено в основном иначе. Особенно этот способ хорошо работал в ситуации дистанционного обучения: в группе из сотни студентов находились десять человек, которые решали задачи прямо во время лекции, давали свои предложения, обсуждали свои идеи, высказывали гипотезы, как нужно двигаться в решении задачи; еще десять человек их слушали и как-то с ними взаимодействовали. Остальные видели, что это возможный способ изучения математики, видели, как она создается, а не получали готовой.

В 2022 году мы проделали в Образовательном центре «Сириус» эксперимент. Мы отобрали десяток школьников 10–11 классов по стандартной схеме «Сириуса». Приехали 10 человек из Кургана, Новоуральска, из Самары, из-под Рыбинска, из Санкт-Петербурга и Москвы тоже, но не большинство. Мы дали школьникам исследовательские задачи, новую математику, которую они никогда не видели — из теории определимости. И они сделали за 21 день исследовательские работы, которые вполне доводимы до научных публикаций. Да, это были сильные дети. Но мы им предложили настоящее математическое исследование, создание математики.

Если говорить о технических вузах, то и здесь можно пытаться использовать тот же подход, который мы предлагаем для общеобразовательной школы. Нужно использовать базовые математические курсы для формирования установки на самостоятельное решение задач. Эта установка поможет и в инженерной деятельности, и в организации производства. Исходя из этой установки нужно осваивать применение цифровых технологий решения профессиональных задач в широкой и узкой областях подготовки.

Заключение

Итак, мы предлагаем освободить человека — и школьника, и учителя — от механического труда ради творческого, самостоятельного, ответственного образа деятельности, который дает математика. В результате — самостоятельное открытие истины и постижение красоты математики оттого, что ты сам ее открываешь.

На классической картине Н. П. Богданова–Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского» (рис. 2), написанной в 1895 году, учащиеся вовсе не соревнуются в быстроте перемножения трех- или четырехзначных чисел. Они решают задачу, которую «неизвестно-как-решать», и именно это в сельской школе они обсуждают со своим учителем.

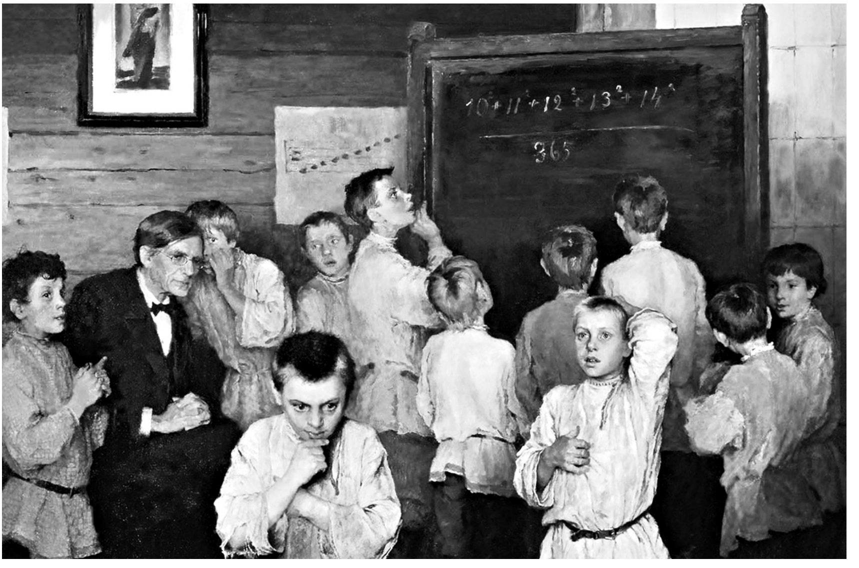


Рис. 2. Н. П. Богданов–Бельский «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского»

Я считаю, что именно по этому пути должна идти наша школа. Именно этот путь позволит достичь гармонии интересов личности и общества.

Благодарности

Выражаю благодарность руководителю семинара «Время, хаос и математические проблемы» Виктору Антоновичу Садовничему за возможность выступления 30 ноября 2022 г., легшего в основу настоящей статьи. Также выражаю благодарность В.С. Басюку за интерес, проявленный к этой к работе.

Список литературы

1. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. — 1946. — Вып. 6. — С.8–28. — URL: https://math.ru/lib/files/iva46.htm (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
2. *Хинчин А.Я.* О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики // Математика, ее преподавание, приложения и история, Матем. просв. — Сер. 2. — № 6. — 1961. — С. 29–36. — URL: https://

www.mathnet.ru/rus/mp677 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Математическое просвещение». — Текст: электронный.
3. *Болтянский В.Г., Яглом И.М.* Школьный математический кружок при МГУ и Московские математические олимпиады // Сборник задач московских математических олимпиад. Сост. А. А. Леман, ред. В. Г. Болтянский. — М., Просвещение. — 1965. — С. 3–46. — URL: http://math.ru/lib/90 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
4. *Люстерник Л.А.* Молодость Московской математической школы. // Успехи математических наук. — 1967. — т. 22. — вып. 4 (136). — С. 147–185. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm5779 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Математическое просвещение». — Текст: электронный.
5. *Halmos P.R.* The problem of learning to teach // American Mathematical Monthly. — 1975. — 82. — Pp. 466–476.
6. *Садовничий В.* Когда ректор был юным, он не знал логарифмов // Московский комсомолец. — 16.04.2002. — URL: https://www.mk.ru/old/article/2002/04/16/168370-kogda-rektor-byil-yunyim-on-ne-znal-logarifmov.html (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Московский комсомолец». — Текст: электронный.
7. *Шклярский Д.О., Адельсон-Вельский Г.М., Ченцов Н.Н., Яглом А.М., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра // Сер. «Библиотека математического кружка». — Вып. 1. — М. — Л.: ГТТИ, 1950. — 296 с. — URL: http://math.ru/lib/bib-mat-kr/1 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
8. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия) // Сер. «Библиотека математического кружка». — Вып. 2. — М.: ГТТИ. — 1952. — 380 с. — URL: https://math.ru/lib/bib-mat-kr/2 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
9. *Ченцов Н.Н., Шклярский Д.О., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия) // Сер. «Библиотека математического кружка». — вып. 3. — М.: ГТТИ. — 1954. — 267 с. — URL: http://math.ru/lib/bib-mat-kr/3 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
10. Серия «Библиотека математического кружка» // Страница Библиотеки math.ru — URL: https://math.ru/lib/ser/bib-mat-kr (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.

11. Серия «Популярные лекции по математике» // Страница Библиотеки math.ru — URL: https://math.ru/lib/ser/plm (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт Math.ru. — Текст: электронный.
12. Малый мехмат МГУ. — URL: http://mmmf.msu.ru/ (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Малых мехмат МГУ». — Текст: электронный.
13. Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 28 марта 1985 года № 271 «О мерах по обеспечению компьютерной грамотности учащихся средних учебных заведений и широкого внедрения электронно-вычислительной техники в учебный процесс» // Вопросы образования. — 2005. — № 3. — С. 341–346.
14. Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х. Основы информатики и вычислительной техники. Проб. учебник для сред. учеб. заведений // Под ред. А. П. Ершова. — М.: Просвещение. — 1988. — 207 с.
15. Об использовании микрокалькуляторов в учебном процессе (Инструктивно-методическое письмо), НИИ содержания и методов обучения АПН СССР и Главное управление школ Министерства просвещения СССР // Математика в школе. — № 3. — 1982. — С. 6–8.
16. *Матиясевич Ю.В.* Быстрая арифметика // Математическая составляющая. Ред. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюшкин. — М.: Математические этюды. — 2015. — С. 86–91.
17. *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account // Компьютерные инструменты в образовании. — 2020. — № 2. — С. 5–26.
18. *Халин В.Г., Вавилов Н.А., Юрков А.В.* Небеса падают: математика для нематематиков // Математическое образование цифрового века. Доклады РАН. — Математика, информатика, процессы управления. — 2023 (в печати).
19. *Шабат Г.Б.* «Живая математика» и математический эксперимент // Вопросы образования. — 2005. — 3. — С. 156–165. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/zhivaya-matematika-i-matematicheskiy-eksperiment (дата обращения: 05.03.2023). — Режим доступа: сайт «Научная электронная библиотека «КиберЛенинка». — Текст: электронный.
20. *Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А.* 1С: Математический конструктор — новая программа динамической геометрии // Компьютерные инструменты в образовании. — 2007. — 3. — С. 47–56.
21. *Стругацкие А. и Б.* Понедельник начинается в субботу // (Эксклюзивная классика). — М.: АСТ. — 2022. — 320 с.

22. Mobilis in mobili: личность в эпоху перемен // Под общ. ред. А. Асмолова. — М.: Изд. дом ЯСК, 2018. — 546 с. ISBN 978–5–907117–24–2. — URL: https://asmolovpsy.ru/wp-content/uploads/2022/12/mobilis-in-mobili.pdf (дата обращения: 05.03.2023). — Режим доступа: сайт «Миры и смыслы Александра Асмолова». — Текст: электронный.
23. *Маркушевич А. И.* На XIX международной конференции по народному просвещению // Математика, ее преподавание, приложения и история. Матем. просв. — сер. 2, 1. — 1957. — С. 9–15. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/mp375 (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Математическое просвещение». — Текст: электронный.
24. XXIV олимпиада Юношеской математической школы СПбГУ, заочный тур (13 сентября — 15 октября 2020). Задания для 4 класса. — URL: https://rsr-olymp.ru/upload/files/tasks/66/2020/18474214-sol-math-4-otbor-20–21.pdf (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт «Российский совет олимпиад школьников». — Текст: электронный.
25. *Гельфанд С.И., Гервер М.Л., Кириллов А.А., Константинов Н.Н., Кушниренко А. Г.* Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы // Серия «Библиотечка физико-математической школы». — Вып. 3. — М.: Наука. — 1965. — 176 с.
26. Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes // Страница Википедии. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvene (дата обращения: 24.03.2023). — Оригинальный латинский текст: URL: http://www.thelatinlibrary.com/alcuin/propos.shtml (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: сайт The Latin Library. — Текст: электронный.
27. *Посицельская М.А.* Перечислительная комбинаторика в начальной школе // Математическое образование цифрового века. Доклады РАН, Математика, информатика, процессы управления, доп. сборник, 2023 (в печати).
28. *Шноль Д.Э.* Исследовательские задачи по математике в российской школе // Материалы Российско-американского симпозиума «Проблемы современного математического образования», 18–20 ноября 2016 г. — М.: МПГУ. — 2017. — С. 13–132. — URL: https://www.mathedu.ru/text/problemy_sovrem_matobrazovaniya_materialy_simpoziuma_2017/p113/ (дата обращения: 24.03.2023). — Режим доступа: общедоступная электронная библиотека «Математическое образование». — Текст: электронный.
29. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб. пособие для вузов // 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. — 1988. — 398 с.
30. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах // Пер. с англ. И. Д. Новикова, Т. В. Соколовской. Под ред. Р. А. Минлоса. — М.: Издательство «Мир». — 1970. — 352 с.

31. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях //М.: Наука. — 1974. — 424 с.
32. *Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В.* Программирование для математиков. Учебное пособие для вузов // М.: Наука. — 1988. — 384 с.
33. *Шень А.Х.* Программирование. Теоремы и задачи // Изд. 2-е, доп. — М.: МЦНМО. — 2004. — 296 с.

Сведения об авторе

Семенов Алексей Львович — академик РАН, академик РАО, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»; директор Института кибернетики и образовательной информатики имени А.И. Берга, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН; главный научный сотрудник Научно-исследовательской лаборатории перспективных проектов в образовании, ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена», Москва, Россия; ORCID ID: https://orcid.org/0000–0002–1785–2387. E-mail: alsemno@ya.ru

On the Continuation of Russian Mathematical Education in the 21st Century

A.L. Semenov

When talking about what prompted them to study mathematics, most mathematicians, emphasize the interest that arose at school or in a club when solving some problem or many problems that are “unknown-how-to-solve’’. We see an example of such a task in the famous painting by N. P. Bogdanov-Belsky, which has become a symbol of the Russian school. The interest of future mathematicians was also supported by the university. The reseach discusses the possibility in the 21st century to build mathematical education for all students, not just selected and highly motivated students, based on the tasks that are “unknown-how-to-solve’’ — different for different students. The study of mathematics can become interesting and psychologically comfortable for students of different abilities and inclinations, simultaneously bringing the student’s work closer to the work of an adult mathematician and the needs of real life.

Keywords: school mathematics education; problems that are “unknown-how-to-solve”; mathematics clubs; results-based education; skills of the 21st century.

References

1. *Arnol'd I.V.* Printsipy otbora i sostavleniya arifmeticheskikh zadach // Izvestiya APN RSFSR. — 1946. — Vyp. 6. — S. 8–28. — URL: https://math.ru/lib/files/iva46.htm (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
2. *Khinchin A.Ya.* O tak nazyvaemykh «zadachakh na soobrazhenie» v kurse arifmetiki // Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya, Matem. prosv. — Ser. 2. — № 6. — 1961. — S. 29–36. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/mp677 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Matematicheskoe prosveshchenie». — Tekst: elektronnyi.
3. *Boltyanskii V.G., Yaglom I.M.* Shkol'nyi matematicheskii kruzhok pri MGU i Moskovskie matematicheskie olimpiady // Sbornik zadach moskovskikh matematicheskikh olimpiad. Sost. A. A. Leman, red. V. G. Boltyanskii. — M., Prosveshchenie. — 1965. — S. 3–46. — URL: http://math.ru/lib/90 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
4. *Lyusternik L.A.* Molodost' Moskovskoi matematicheskoi shkoly. // Uspekhi matematicheskikh nauk. — 1967. — t. 22. — vyp. 4 (136). — S. 147–185. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm5779 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Matematicheskoe prosveshchenie». — Tekst: elektronnyi.
5. *Halmos P.R.* The problem of learning to teach // American Mathematical Monthly. — 1975. — 82. — Pp. 466–476.
6. *Sadovnichii V.* Kogda rektor byl yunym, on ne znal logarifmov // Moskovskii komsomolets. — 16.04.2002. — URL: https://www.mk.ru/old/article/2002/04/16/168370-kogda-rektor-byil-yunyim-on-ne-znal-logarifmov.html (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Moskovskii komsomolets». — Tekst: elektronnyi.
7. *Shklyarskii D.O., Adel'son-Vel'skii G.M., Chentsov N.N., Yaglom A.M., Yaglom I. M.* Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoi matematiki. Chast' 1. Arifmetika i algebra // Ser. «Biblioteka matematicheskogo kruzhka». — Vyp. 1. — M. — L.: GTTI, 1950. — 296 s. — URL: http://math.ru/lib/bib-mat-kr/1 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
8. *Shklyarskii D.O., Chentsov N.N., Yaglom I.M.* Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoi matematiki. Chast' 2. Geometriya (planimetriya) // Ser. «Biblioteka matematicheskogo kruzhka». — Vyp. 2. — M.: GTTI. — 1952. — 380 s. — URL: https://math.ru/lib/bib-mat-kr/2 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.

9. *Chentsov N.N., Shklyarskii D.O., Yaglom I.M.* Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoi matematiki. Geometriya (stereometriya) // Ser. «Biblioteka matematicheskogo kruzhka». — vyp. 3. — M.: GTTI. — 1954. — 267 s. — URL: http://math.ru/lib/bib-mat-kr/3 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
10. Seriya «Biblioteka matematicheskogo kruzhka» // Stranitsa Biblioteki math.ru — URL: https://math.ru/lib/ser/bib-mat-kr (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
11. Seriya «Populyarnye lektsii po matematike» // Stranitsa Biblioteki math.ru — URL: https://math.ru/lib/ser/plm (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait Math.ru. — Tekst: elektronnyi.
12. Malyi mekhmat MGU. — URL: http://mmmf.msu.ru/ (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Malykh mekhmat MGU». — Tekst: elektronnyi.
13. Postanovlenie TsK KPSS i Soveta Ministrov SSSR ot 28 marta 1985 goda № 271 «O merakh po obespecheniyu komp'yuternoi gramotnosti uchashchikhsya srednikh uchebnykh zavedenii i shirokogo vnedreniya elektronno-vychislitel'noi tekhniki v uchebnyi protsess» // Voprosy obrazovaniya. — 2005. — № 3. — S. 341–346.
14. *Ershov A.P., Kushnirenko A.G., Lebedev G.V., Semenov A.L., Shen' A.Kh.* Osnovy informatiki i vychislitel'noi tekhniki. Prob. uchebnik dlya sred. ucheb. zavedenii // Pod red. A. P. Ershova. — M.: Prosveshchenie. — 1988. — 207 s.
15. Ob ispol'zovanii mikrokal'kulyatorov v uchebnom protsesse (Instruktivno-metodicheskoe pis'mo), NII soderzhaniya i metodov obucheniya APN SSSR i Glavnoe upravlenie shkol Ministerstva prosveshcheniya SSSR // Matematika v shkole. — № 3. — 1982. — S. 6–8.
16. *Matiyasevich Yu.V.* Bystraya arifmetika // Matematicheskaya sostavlyay-ushchaya. Red. N. N. Andreev, S. P. Konovalov, N. M. Panyushkin. — M.: Matematicheskie etyudy. — 2015. — S. 86–91.
17. *Vavilov N.A.* Komp'yuter kak novaya real'nost' matematiki. I. Personal account // Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii. — 2020. — № 2. — S. 5–26.
18. *Khalin V.G., Vavilov N.A., Yurkov A.V.* Nebesa padayut: matematika dlya nematematikov // Matematicheskoe obrazovanie tsifrovogo veka. Doklady RAN. — Matematika, informatika, protsessy upravleniya. — 2023 (v pechati).
19. *Shabat G.B.* «Zhivaya matematika» i matematicheskii eksperiment // Voprosy obrazovaniya. — 2005. — 3. — S. 156–165. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/zhivaya-matematika-i-matematicheskiy-eksperiment (data obrashcheniya: 05.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Nauchnaya elektronnaya biblioteka «KiberLeninka». — Tekst: elektronnyi.

20. *Dubrovskii V.N., Lebedeva N.A., Belaichuk O.A.* 1S: Matematicheskii konstruktor — novaya programma dinamicheskoi geometrii // Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii. — 2007. — 3. — S. 47–56.
21. *Strugatskie A. i B.* Ponedel'nik nachinaetsya v subbotu // (Eksklyuzivnaya klassika). — M.: AST. — 2022. — 320 s.
22. Mobilis in mobili: lichnost' v epokhu peremen // Pod obshch. red. A. Asmolova. — M.: Izd. dom YaSK, 2018. — 546 c. ISBN 978–5–907117–24–2. — URL: https://asmolovpsy.ru/wp-content/uploads/2022/12/mobilis-in-mobili.pdf (data obrashcheniya: 05.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Miry i smysly Aleksandra Asmolova». — Tekst: elektronnyi.
23. *Markushevich A.I.* Na XIX mezhdunarodnoi konferentsii po narodnomu prosveshcheniyu // Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya. Matem. prosv. — ser. 2, 1. — 1957. — S. 9–15. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/mp375 (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Matematicheskoe prosveshchenie». — Tekst: elektronnyi.
24. XXIV olimpiada Yunosheskoi matematicheskoi shkoly SPbGU, zaochnyi tur (13 sentyabrya — 15 oktyabrya 2020). Zadaniya dlya 4 klassa. — URL: https://rsr-olymp.ru/upload/files/tasks/66/2020/18474214-sol-math-4-otbor-20–21.pdf (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait «Rossiiskii sovet olimpiad shkol'nikov». — Tekst: elektronnyi.
25. *Gel'fand S.I., Gerver M.L., Kirillov A.A., Konstantinov N.N., Kushnirenko A. G.* Zadachi po elementarnoi matematike. Posledovatel'nosti. Kombinatorika. Predely // Seriya «Bibliotechka fiziko-matematicheskoi shkoly». — Vyp. 3. — M.: Nauka. — 1965. — 176 s.
26. Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes // Stranitsa Vikipedii. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvene (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Original'nyi latinskii tekst: URL: http://www.thelatinlibrary.com/alcuin/propos.shtml (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: sait The Latin Library. — Tekst: elektronnyi.
27. *Positsel'skaya M.A.* Perechislitel'naya kombinatorika v nachal'noi shkole // Matematicheskoe obrazovanie tsifrovogo veka. Doklady RAN, Matematika, informatika, protsessy upravleniya, dop. sbornik, 2023 (v pechati).
28. *Shnol' D.E.* Issledovatel'skie zadachi po matematike v rossiiskoi shkole // Materialy Rossiisko-amerikanskogo simpoziuma «Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya», 18–20 noyabrya 2016 g. — M.: MPGU. — 2017. — S. 13–132. — URL: https://www.mathedu.ru/text/problemy_sovrem_matobrazovaniya_materialy_simpoziuma_2017/p113/ (data obrashcheniya: 24.03.2023). — Rezhim dostupa: obshchedostupnaya elektronnaya biblioteka «Matematicheskoe obrazovanie». — Tekst: elektronnyi.

29. *Kirillov A. A., Gvishiani A. D.* Teoremy i zadachi funktsional'nogo analiza: Ucheb. posobie dlya vuzov // 2-e izd., pererab. i dop. — M.: Nauka — 1988. — 398 s.
30. *Khalmosh P.* Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh // Per. s angl. I. D. Novikova, T. V. Sokolovskoi. Pod red. R. A. Minlosa. — M.: Izdatel'stvo «Mir». — 1970. — 352 s.
31. *Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I.* Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh //M.: Nauka. — 1974. — 424 s.
32. *Kushnirenko A.G., Lebedev G.V.* Programmirovanie dlya matematikov. Uchebnoe posobie dlya vuzov // M.: Nauka. — 1988. — 384 s.
33. *Shen' A.Kh.* Programmirovanie. Teoremy i zadachi // Izd. 2-e, dop. — M.: MTsNMO. — 2004. — 296 s.

About the Author

Semenov Aleksei L. — Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Logic and Theory of Algorithms of the Lomonosov Moscow State University; Director of the Berg Institute of Cybernetics and Educational Informatics of the Federal Research Center for Informatics and Control of the Russian Academy of Sciences; Chief Researcher of the Research Laboratory for Advanced Projects in Education of the Herzen State Pedagogical University, Moscow, Russia. ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1785-2387. E-mail: alsemno@ya.ru