DOI 10.18699/sblai2023-46
УДК 510.63

Вопросы определимости

Definability issues

可定義性問題

Семенов А.Л.
*академик РАН, академик РАО,
Заведующий кафеджрой математической логики и теории
алгоритмов МГУ им. М.В. Ломоносова
Директор Института кибернетики и образовательной
инофрматики им. А.И. Берга ФИЦ ИУ РАН*

*Academician of the RAS, Academician of the RAE,
Head of the Department of Mathematical Logic and Theory
algorithms of Moscow State University named after M.V. Lomonosov,
Director of the Institute of Cybernetics and Educational Informatics
named after A.I. Berg*

*俄羅斯科學院院士、俄羅斯教育科學院院士，
數理邏輯與理論系主任
以 M.V. 命名的莫斯科國立大學演算法 羅蒙諾索夫
以 A.I. 命名的控制論和教育資訊學研究所所長 伯格*

Аннотация. Работа посвящёна вопросам определимости, понятию, которое связано с понятием определения. Определение - столь же базовое поняти математики и ее приложений, в том числе, в области искусственного интеллекта, как и модель, доказательство, вычисление. Теория определимости - это область математики занятая именно определениями. Одним из классических результатов здесь является доказательство А. Тарского неопределимости арифметической истины. Дано описание состояния теории определимости, включая работы М. Пресбургера, Л. Свенониуса, Ан. Мучника, автора и других учёных, дано описание открытых проблем теории определимости.
Ключевые слова: определимость, формулы, кванторы, логика, отношения, решетки определимости, редукты, автоморфизмы, конечные автоматы, искусственный интеллект

Annotation. The work is devoted to the issues of definability, a concept that is related to the concept of definition. Definition is as basic a concept of mathematics and its applications, including in the field of artificial intelligence, as a model, a proof, a calculation. Definability theory is an area of mathematics concerned specifically with definitions. One of the classic results here is A. Tarski's proof of the indefinability of arithmetic truth. A description of the state of the theory of definability is given, including the works of M. Presburger, L. Svenonius, An. Muchnik, the author and other scientists, a description of the open problems of the theory of definability is given.
Keywords: definability, formulas, quantifiers, logic, relations, definability lattices, reducts, automorphisms, finite automata, artificial intelligence

註解。 這項工作致力於可定義性問題，這是一個與定義概念相關的概念。 定義是數學及其應用的基本概念，包括在人工智慧領域，作為模型、證明、計算。 可定義性理論是專門與定義相關的數學領域。 這裡的經典結果之一是 A. Tarski 對算術真理的不可定義性的證明。 給出了可定義性理論的狀態描述，包括 M. Presburger、L. Svenonius、An. 的著作。 作者穆奇尼克和其他科學家對可定義性理論的開放性問題進行了描述。

關鍵字：可定義性、公式、量詞、邏輯、關係、可定義格、約簡、自同構、有限自動機、人工智慧

Введение

Дорогие друзья, мой доклад посвящён вопросам определимости. И мы начнём с того, что понятие определимости связано с понятием определения. Определение - столь же базовое поняти математики и ее приложений, в том числе, в области искусственного интеллекта, как и

- модель,
- доказательство,
- вычисление.

И, соответственно, теория определимости это область математики занятая, именно, определениями, что это значит более точно, мы объясним позднее.

При этом, замечательное положение в теории определимости состоит в том, что в ней имеется большое количество открытых проблем, и не так уж много полученных результатов. Если сравнивать, скажем, с теорией моделей или теорией доказательств, где количество публикаций исчисляется тысячами и даже десятками тысяч, то в теории определимости это скорее сотни, в крайнем случае, немногие тысячи. И вот это даёт надежду на то, что здесь можно получить некоторые очень интересные новые результаты, в том числе, связанные с практическими приложениями. Как часто бывает в математике, дело начинается с абстрактных построений, потом некоторые из них оказываются важными и практически.

Начнём с постановки вопроса, как одно понятие определить через другое, или как выработать какую-то систему понятий, которой достаточно для определения всего, скажем, всего, что мы хотим описать в том или ином языке.

Это не новая идея, скажем, в 18 веке её развивал великий философ Лейбниц в своём представлении об универсальном языке Lingua Universalis.

А в 21 веке можно упомянуть известного лингвиста, начавшего работу в Польше, и сейчас последние 10 лет живущего в Австралии Anna Wierzbicka, которая предложила систему 65 базовых понятий, общих для всех человеческих языков, через которые можно в каждом языке определить все более сложные производные понятия.

Если говорить о математическом аспекте, то можно сказать, что начало системного представления теории определимости - это логика отношений C.S. Pierce, возникшая в середине 19 века.

Опять-таки, обращаясь к ленгвистическим представлениям, ленгвистическим ситуациям, соответствующий контекст рассматривался такими крупными лингвистами, как N. Chomsky, J. Fodor, G. Lakoff .

Попытки построения математических теорий и теорий в рамках теории систем, которая тоже является одной из тем нынешнего конгресса, принадлежит R. Wille и N. B. Seiler. Ясно, что теория реляционных баз данных тоже в большой степени связана с теорией определимости. Разметка больших данных является одним из прикладных аспектов теории определимости. Особую важность сейчас приобретает доверительный, в том числе, объяснительный искусственный интеллект, когда то или иное предложение, исходящее от искусственного интеллекта, та или иная оценка, та или иная интерпретация нуждаются в объяснении. Одна из важных задач, то есть образовательных, это как научить человека правильно задавать вопросы, как научить искусственный интеллект правильно давать на них ответы, делать свои выводы убедительными для человека. И с этим тоже связана проблематика из теории определимости.

Внутри математики теория определимости в 19 веке развивалась прежде всего как такая прикладная внутриматематическая задача, в частности, попытка создать наилучшую систему базовых понятий для геометрии и арифметики. Вот здесь есть несколько имен, я не буду тратить время, чтобы их перечислить, достаточно посмотреть на список известных математиков, в том числе немецких и итальянских. Центральной фигурой 20 века в теории определимости был Альфред Тарский и, в частности, польская школа. Общеизвестен доклад Тарского на эту тему польскому математическому обществу в 1930 году.

Роль Альфреда Тарского и польской школы в определимости и роль определимости в трудах Тарского

- Доклад польскому Математическому обществу 1930 г.
- Элиминация, как определение семантики, Сколем
- Ученик Тарского Мойжеш Пресбургер (Mojzesz Presburger) дипломная работа с элиминацией кванторов для сложени я целых
- Неопределимость арифметической истины (1933) , Гедель (1930), фон Нейман, ...
- Основыне понятия геометрии

С другой стороны, и до этого вопросы теории определимости поднимались как попытки определить формальную семантику логических языков. В частности, здесь можно упомянуть работы Сколема.

Одним из знаменитых известных первых результатов теории определимости можно считать результат дипломной работа Мойжеша Пресбургера (Mojzesz Presburger), ученика Тарского, где он доказал, что возможна элиминация кванторов для сложения целых чисел с соответствующими функциональными символами.

С другой стороны, выдающимся отрицательным результатом теории определимости можно считать неопределимость арифметической истины.

Мойжеш Пресбургер
(Mojzesz Presburger)
1904-1943

Мне кажется, что вот, собственно утверждение о невозможности определения арифметической истины является сердцем, основным содержанием теоремы Гёделя. В то же время, обычно этот результат связывается с именем Тарского. Известна, работа Тарского относящаяся к основным понятиям геометрии. Ну, скажем, результат о том, что двухместных отношений недостаточно для определения всех геометрических понятий. Одна из вершин математической логики, имеющих смысл и вне логики, важная точка зрения алгебры и всей математики, это результат, который можно сформулировать, как то, что семейство полуалгебраических множеств замкнуто относительно проекции, отсюда получалась разрешимость элементарной геометрии. Эта его работа опубликованна была в конце сороковых годов, но, практически, результат был получен еще в Польше. Сам Тарский, формулировал, проблематику теории определимости в рамках своих цилиндриических алгебр, которые он также называл алгебрами понятий.

Американский период Тарского

- Замкнутость полуалгебраических множеств относительно проекции - разрешимость элементарной алгебры и геометрии - около 1938-1948 г.
- Цилиндрические алгебры = алгебры понятий (concept algebras) 1947 г.
- Самоопределимость, 1948 г., (далее Андрей Мучник)
- Геометрия логики, параллели с Эрлагенской программой Феликса Клейна Whats are Logical Notions? Лекция в Университете Лондона, 16 мая 1966 г.

Тарский Альфред
Tarski Alfred (1902 - 1983)

Интересным понятием, которое возникало у Тарского, была самоопределимость, мы еще вернемся к этому, надеюсь, в конце нашего доклада. Тарский говорил, что, вот, в теории определимости ясно прослеживаются, параллели с Эрлагенской программой Феликса Клейна, такая геометрия логики. В частности, об этом он говорил в своей лекции What are Logical Notions? в университете Лондона 16 мая, 1966 года. Оценивая в целом деятельность Тарского и в целом теорию определимости, Адисон говорил о том, что эта теория обобщает результаты из анализа, общей топологии, и должна быть одной из центральных ветвей математической логики, все более и более важной для информатики (computer science). С другой стороны он адресуется и к исходным работам Николая Николаевича Лузина 1927 года.

Наши собственные работы начались в 1970-е годы, задачей поставленной Альбертом Мучником, учеником Петра Сергеевича Новикова, вот, непосредственно мне. К этой задаче мы еще вернемся позднее.

На этом историческое введение я хотел бы завершить и перейти просто к основному определению, я хотел бы, чтобы оно было понятно для всех слушателей моего доклада. В том числе, может быть, не для математиков, а для тех, кто имеет просто элементарное представление из математических курсов, относящихся к логике.

Основные понятия теории определимости

Пусть у нас есть какой-то универсум, который обозначим U. И есть язык L, логический язык логики отношений. Это значит, что в качестве нелогических имён используются имена отношений: двухместных, трехместных, одноместных и нульместных тоже (мы не используем имена для функций). Используются кванторы по элементам универсума, разумеется, логические связки и так далее. В этом логическом языке можно определить какое-то отношение R, через другие отношения, образующие множество S. Это и есть главное определение, которое мы используем.

Теперь, взяв какое-то множество отношений, может быть, даже очень большое, несчётное, какое угодно, можно образовать его замыкание - всё, что можно через него определить. Ясно, что это финитная операция, в каждой формуле конечное число имен для отношений из S. Возникает определение замыкания, ситуации замыкания, ясно, что если мы что-то определили через что-то, то дальше ничего нового мы уже не получим. Возникает замкутое множество, которое можно назвать пространством определимости. Эти пространства определяют решетку, исходя из отношения вложенности, которое между ними есть, можно определить операции *inf* (инфимум) и *sup* (супремум), и, вот, будет такая решетка определимости для каждого, скажем, исходного универсума и множества отношений на нём. Ну, вот, например, возникает арифметическая определимость. Взяли натуральные числа, есть трёхместное отношение сложения, трехместное отношение умножения. Дальше, можно видеть, что все арифметические отношения и будут образовывать пространство определимости. Подпространством будет пространство, которое можно определить, только через сложение, вот, такая ситуация сужения, с ней связан термин редукты, который используется для пространства определимости. Заметим, что наши определения ивариантны относительно выбора имён для исходного множества отношений. Вот, пример, частной теоремы из области теории определимости, которая известна под названием теорема Кобхема-Семёнова

Теорема Кобхема - Семёнова

Всякое отношение, определимое конечными автоматами, работающими в существенно разных системах счисления, определимо в арифметике сложения.

Существенно разные системы - это мультипликативно независимые системы счисления, например, 4 и 8, это мультипликативно зависимые основания систем счисления. А, скажем, 6 и 12 оказываются независимыми. Так выглядит пример теоремы из теория определимости арифметики сложения натуральных чисел. Перейдем к решёткам определимости. Начнём тоже с конкретного примера. Эдвард Хантингтон (Edward Huntington), известный американский математик, изучал те пространства, которые могут получиться на линейно упорядоченном множестве, если рассмотреть некоторые подпространства для пространства порядка. Ниже указан сам порядок (пространство - это все, что выразимо или определимо через отношение меньше) и другие отношения

$(x_1<x_2)$ - сам порядок;

$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_3<x_2<x_1)$ - “between”;

$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_2<x_3<x_1) \vee (x_3<x_1<x_2)$ - “cycle”;

«separation» («link»): интервалы с концами x_1, x_3 и концами x_2, x_4 пересекаются, но не вложены один в другой, эквивалентно сонаправленности (эквиполлентности);

«равенство».

Рассмотрим пространство, порождённое отношением «между», геометрический смысл здесь очевиден. Дальше отношение цикла, ну, тоже довольно понятно. Если склеить такое кольцо, то там будет идти всё по часовой стрелке, скажем. Отношение разделения *separation*, если есть два интервала (это четырехместное отношение) $[x_1, x_3]$, $[x_2, x_4]$, то они должны пересекаться, но не быть вложеными один в другой. Кроме того задано отношение равенства. Оно выражено просто в языке, тут нет ничего удивительного. Итак, мы видим 5 отношений. В конкретных ситуациях, какие-то из них могут задавать одно и то же пространство. Но, если взять просто рациональные числа и на них посмотреть эти 5 отношений, то они задают различные пространства, и мы ещё упомянем как доказать их различия. Кроме того, пространства, порожденные этими 5-ю отношениями, исчерпывают всю решётку для рациональных чисел. Это результат был получен, как было сказано, французским математиком Claude Frasnay в 1965-м году и потом неоднократно переоткрывался другими авторами. В том числе, и автором вместе с Андреем Мучником в какой-то момент. Вот, как выглядит эта решётка,

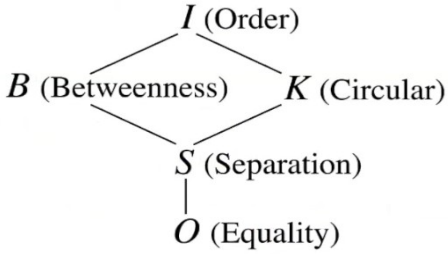


Рис.1. Решетка для случая рациональных чисел
Fig.1. Lattice for the case of rational numbers
圖 1. 有理數情況的格子

она имеет максимальный элемент I - сам порядок. Есть два меньших элемента, B - «между» и K - «цикл». Их пересечением оказывается элемент S - «зацепления» или «разделения». Здесь не так сложно все эти отношения доказать, это простая история. Ну, и можно задать такой вопрос, через некоторое время я на него дам ответ: представим себе, что мы к этой структуре добавляем одну константу ноль, что и как изменится? Понятно, что будет определимо, что-то большее. Ну, например, сам ноль будет определим, такое одноместное отношение «быть нулем». Будет определено, отношение больше нуля, конечно. Вот, сколько всего будет пространств в той решётке, о которой мы говорим, можете пока подумать и высказать гипотезу о том, что будет получаться. Рациональные числа с порядком - это однородная структура в следующем смысле: каждый частичный изоморфизм, конечных подструктур, продолжается до автоморфизма всей структуры.

Определение

Структура называется однородной, если каждый (частичный) изоморфизм конечных (под)структур продолжается до автоморфизма всей структуры.

Это свойство однородности, удобно с точки зрения теории моделей, есть большое количество работ, относящихся, именно, к однородным структурам, в том числе, связанным с порядком и так далее.

Еще одна замечательная однородная структура - это случайный граф $R^{(k)}$, для k = 2, 3, 4, 5, ..., все его элементы x_1, ..., x_k различны и количество ребер между ними нечетно.

Если взять случайный неориентированный граф, то оказывается, что у такой структуры число подпространств тоже будет равно пяти и решетка будет очень похожей на ту решетку, о которой мы только что говорили.

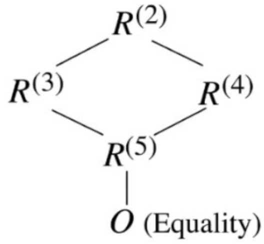


Рис.2. Решетка для случая случайных графов
Fig.2. Lattice for the case of random graphs
圖 2. 隨機圖情況的格子

Может это всё показаться довольно скучным. На самом деле, мы увидим, что это не так. Но, сначала, ещё одна общая конструкция. Мы понимаем, что определимость можно доказать легко, надо написать формулы. Как доказать неопределимость? Если заниматься этим со студентами, то они сами довольно быстро придумывают такую идею, которая многим из вас, наверное, тоже пришла в голову. Она пришла в голову ещё и Падоа (метод автоморфизмов Падоа), он об этом говорил в своем докладе на конгрессе математиков в 1900 году, там где Гильберт ставил свои проблемы. Это идея автоморфизмов. Значит, если мы можем придумать какой-то автоморфизм, который что-то оставляет на месте, какие-то отношения, какие-то другие двигает, то эти двигающиеся нельзя определить теми, которые остались на месте. Поэтому, возникает такая идея, для каждого пространства определимости, посмотреть на его группу автоморфизмов. Это можно назвать группой Галуа, возникает соответствие Галуа, это такой антимонотонный гомоморфизм между решёткой определимости структуры и решеткой замкнутых надгрупп группы автоморфизмов новой структуры. Замкнутость не будем сейчас определять, она имеет топологический смысл, что естественно для определения замкнутости. Ну, и дальше получается такая идея: чтобы доказать, что какое-то отношение, неопределимо, надо рассмотреть группу автоморфизмов.

Метод автоморфизмов

$$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Rightarrow R \notin [S]$$

S - пространство определимости,
Γ_S - группа его автоморфизмов.

Некоторая проблема состоит том, что иногда не получается так поступить, и этим сейчас мы, как раз, займёмся. Ниже дан пример этого преобразования для отношения порядка, для отношения «между» (ещё добавляются убывающие, естественно, отображения), для «цикла» (видим такие перекладывания отрезков, получающиеся разрезанием по иррациональному сечению).

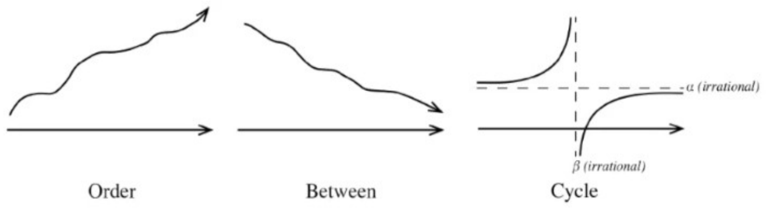


Рис.3. Графики преобразований для порядков
Fig.3. Transformation graphs for orders
圖 3。 訂單轉換圖

Ну, вот, оказывается, если добавить константу, то получается 116 отношений. То есть, если для случая рациональных чисел добавить одноместное отношение быть 0, то получается количество отношений 115. Если добавить иррациональную точку, то есть всё большее и всё меньшее этой иррациональной точки, то количество подпространств, оказывается несколько меньшим, это 53. Рассмотрев ряд ситуаций, в частности, ситуацию с однородными графами, Томас высказал следующую гипотезу.

Гипотеза Томаса

Каждая счетная однородная конечнопорожденная структура имеет конечную решётку определимости.

Можно также спросить, не верно ли, что каждая структура с конечной решёткой определимости будет однородной.

Эти две проблемы открыты, стоят уже около 40 лет. Ну, вот, интересно, над ними было бы подумать.

В случае ω-категоричных структур (в них из элементарной эквивалентности следует изоморфность), к которому относятся и однородные структуры, оказывается, что метод автоморфизмов решает проблему (результаты Rull-Nardzewski, Engeler and Svenonius конца 1950-х годов).

Там имеет место изоморфизм между структурами надгрупп и решёткой.

Теорема изоморфизма

Решетка определимости всякой ω-категоричной структуры (анти)-изоморфна решетке замкнутых надгрупп группы автоморфизмов структуры.

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$ (S - пространство определимости, R - отношение)

Что происходит за пределами ω-категоричности? Здесь имеет место совершенно замечательная теорема Ларса Свенониуса (L. Svenonius), опубликованная в 1959 году, и она состоит в следующем. Если рассматривать не только саму структуру, но и её элементарные решения, тогда метод автоморфизма работает.

Теорема Свенониуса

Для любой счетной структуры, элемента S ее решётки определимости и отношения $R \notin S$ существует элементарное расширение структуры, в котором $\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}}$.

Результат этот, кстати, оказался довольно малоизвестным. По-видимому, всвязи с тем, что он был напечатан в Швеции (Ларс Свенониус исходно швед, потом он жил в Америке) в журнале под названием «Теория», издававшимся тиражом в пару сотен экземпляров. И долгое время эта теорема не замечалась. Но в 1973 году [1] известный американский математик (исходно швейцарский) ученик Бернайса и соученик Маклейна, с которым они потом были дружны до конца жизни, Бюхи (Buchi J. Richard), изучая тексты Тарского, естественно, задался вопросом, нет ли какой-нибудь такой универсальной теоремы про определимость? В частности, есть ссылки Тарского на Эрлагенскую программу и так далее. Оказалось, что, да, есть, вот, Свенониус, по-существу, доказал такую теорему полноты для определимости, пользуясь, с одной стороны, идеей автоморфизмов преобразований, что-то сохраняющих, с другой стороны, идеей добавления идеальных элементов.

Я просто вспомню Клейна, проективную геометрию, когда добавляются некоторые элементарные идеальные объекты, позволяющие действовать правильной системой автоморфизмов. Бюхи посвятил пару работ этому подходу к результату Свенониуса. Вот, мы, в свою очередь, смотрели обобщение ситуации однородности, когда, вообще говоря, структура не ω-категоричная, у неё есть разные элементарные эквивалентные структуры, но скажем, дальше расширить ее нельзя, то есть расширение не существует. Но ясно, что и в этом случае теорема Свенониуса даёт ответ, если структура полна вверх, то есть дальше её нельзя расширять, то вот тут, как раз, мы можем рассмотреть все автоморфизмы самой структуры и ее подпространств. Там будет изоморфизм, соответствие Галуа будет антизоморфизмом.

Соответственно, возникает определение пополнимой вверх структуры, когда есть просто её расширение, которое дальше расширять некуда. И там получается теорема полноты для таких структур, там уже не нужны идеальные элементы, а в самой структуре всё это делается. Метод автоморфизмов начинает работать в полной мере.

Определение

Структура ***полна вверх***, если все ее элементарыне расширения ей изоморфны.

Теорема полноты для пополнимых вверх структур

Если у структуры существует полное вверх элементарное расширение, то ее решётка определимости (анти-)изоморфна решётке замкнутых надгрупп ее группы автоморфизмов.

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$, S - полное вверх пространство, R - отношение.

В разных естественных структурах оказывается, что, вот, эта самая полнота вверх имеет место:

рациональный порядок $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ - однородная структура, элементарно эквивалентная $\langle \mathbb{R}; < \rangle$ (5-и элементаная решетка), пополнимые вверх структуры $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$, $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$.

В частности, к таким структурам относятся исследования о целых числах, то есть двухместные отношения $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$, что одно число на единицу больше другого, в этом случае мы получаем уже не конечную структуру, а счётную, состоящую из трех довольно понятных и естественных серий отношений, как написано ниже,

Теорема

Положим (тильда означает «равно по определению», $S_2 \triangleright S_1$ обозначает строгую вложенность пространства определимости набора отношений S_2 в пространство определимости, порожденное набором отношений S_1 на том же носителе, см. [2])

$A_{0,n}(x_1, x_2) \sim |x_1 - x_2| = n$,

$A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n \vee x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n$,

$A_{2,n}(x_1, x_2) \sim x_1 - x_2 = n.$

Тогда каждый элемент $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ порожден $A_{i,n}$ для некоторых $i \le 2$ и натурального n;

для каждых $0 < i \le 2$ и натурального n, m

$A_{i,n} \triangleright A_{i-1,n}$, $A_{i,n} \triangleright A_{i,m} \Leftrightarrow n$ делит $m;$

$[A_{i,d}] \cup [A_{j,k}] = [A_{m,n}], m = \max\{i, j\}, n = GCD(d, k);$

$[A_{i,d}] \cap [A_{j,k}] = [A_{m,n}], m = \min\{i, j\}, n = LCM(d, k);$

Все $A_{i,n}$ различны.

порождающих, например, «расстояние равно n», или вот нечто похожее на зацепление, оно такое сонаправленность, «расстояние равно n» и направленное в одну сторону. Тут получается описание соответствующих групп автомофизмов, полное описание решетки, это результат наш с Сопруновым С.Ф., полученный примерно 2-3 года назад [2].

Дальше, начинается уже открытая проблематика. Я предупреждал, что исходно есть очень много открытых проблем. Ну, например, что будет, если взять не целое число, а натуральное плюс единица. Казалось бы, должно получиться что-то примерно то же самое, ну, в некотором смысле, да, будет получаться, хотя вопрос формально открытый, но, по-моему, ясно, как тут двигаться.

Возможные варианты и обобщения

Счётный универсум, конечная сигнатура.

Построение пополнений

- <N; +1>;
- Z × Z - два коммутирующих следования;
- несколько свободных следований;
- бескорневое двоичное дерево, например, одна ось - <Z; +1> со сдвигом 0, в каждой точке добавляем ребро - сдвиг 1, из которого растет корневое двоичное, из каждой точки выходит 0 и 1, в каждую точку входит 0 или 1;
- можно стереть пометки и направления ребер.

Можно рассмотреть вместо целых чисел, два коммутирующих следования. Можно рассмотреть такую клетчатую бумагу и можно идти вправо, влево, верх, вниз, и вот какая будет структура, и какая будет решетка в этой ситуации. Можно не коммутирующее следование, рассмотреть, а, так сказать, свободное, то есть бесконечное двоичное дерево, например, и дальше двигаться по ребрам этого дерева. Можно их помечать, можно не помечать, можно смотреть наличие корня, можно не рассматривать, будет возникать некоторая богатая структура. Можно дать общее определение, относящееся к такого сорта ситуации, в каком-то смысле такой дискретный вариант идеи однородности, которая позволяет строить соответствующую группу автоморфизмов.

Общая идея

Условие однородности: финитно-глобальное -

- изоморфизм конечных подструктур продолжается до автоморфизма структуры;

- конечная подструктура может содержать далекие элементы.

Локальная однородность: двухместные отношения в сигнатуре и т.д.

- изоморфизм конечных связных структур (графов) продолжается до автоморфизма структуры.

Если пытаться дальше двигаться по целым числам, то, что будет, если рассматривать отношение Хантингтона на целых числах, будет возникать соответствующая структура, можно рассматривать подпространства.

Следующие шаги

Порядок целых чисел

- гомоморфизм отношений Хантингтона;
- аналоги серий для целых чисел;
- пополонение вверх для $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$.

Следования и порядки целых и натуральных

- периодические и почти периодические одноместные отношения;
- несколько следований, деревья.

И возникает ситуация с пополнением, возникают аналоги этих самых серий, и, тем не менее, задача для целых чисел с отношением порядка, является тоже открытой. Тоже точного ответа, мы пока не знаем. Ну, и дальше можно постепенно расширять классы структур, например, добавлять периодические или почти периодические одноместное отношения на целых натуральных числах, смотреть, что из этого получится.

Перспектива (*отдалённая*?)

Сложение целых (натуральных) чисел

Задача, поставленная Ал. Мучником Семенову А.Л. (около 1970 г.) со ссылкой на П.С. Новикова (одновременно с обобщением Кобхэма)

- пополнимость вверх;
- поиск новых отношений/ «понятно устроенных» расширений.

Хочу сказать, что исходно, как раз, Ал. Мучник поставил проблему сложения для целых чисел, скажем. Ну, одновенно поставил задачу обобщения теоремы Кобхэма, которую я уже упоминал. Здесь ситуация оказывается достаточно сложная, и до сих пор мы очень далеки от окончательного решения проблемы по сложению для целых чисел.

Элиминация кванторов

Конечная реляционная сигнатура

- ◆ Однородные структуры допускают элиминацию кванторов
- ◆ Арифметика Пресбургера - не допускает (даже, если использовать функциональные символы).
- ◆ Разрешение бесконечной сигнатуры делает задачу неопределенной.

Вот, еще некоторый класс вопросов, в том числе, имеющих отношение к проблематике искусственного интеллекта, анализ естественных языков, относится к проблематике элиминации кванторов. Вы помните, что арифметика Пресбургера экзистенциальна, в ней можно элиминировать кванторы, но не совсем, а до глубины один. То есть можно подставить квантор существования, тогда все будет получаться. В однородных структурах кванторы просто элиминируются, там всякая формула эквивалентна бескванторной.

Давайте теперь посмотрим, сколь сложными могут быть кванторные приставки. В арифметике Пресбургера можно добавлять быстро растущую функцию, это мои работы 1970-80-х годов.

Экзистенциальная элиминация кванторов

Если разрешить только кванторы существования, получаем:

- ◆ алгоритмическую разрешимость;
- ◆ возможность заменить функциональные имена именами отношений;
- ◆ арифметика Пресбургера экзистенциальна, добавление быстро растущих функций не выводит за пределы экзистенциальности (Семенов А.Л., 1979, 1983);
- ◆ конечно-автоматная определимость (во многих случаях) экзистенциальна (существует допускающий ход автомата);
- ◆ CSP Constraint satisfaction problem? Обобщенная выполнимость - вложимость структуры описывается экзистенциально.

В рассматриваемых структурах и их редуктах экзистенциально элиминируются кванторы, разрешимы проблемы принадлежности, CSP и т.д.

Но если мы будем рассматривать, конечно-автоматные структуры, то там уже экзистенциальности не хватает, нужно в некоторых ситуациях иметь более сложные кванторные приставки. И возникает такой вопрос. Ясно, что есть структуры с бесконечной кванторной глубиной. Например, арифметика со сложением и умножения.

Кванторная высота

Логическая сложность - (кванторная) высота пространства - минимальное количество перемен кванторов, позволяющее получить все пространство, начиная с конечного числа отношений.

Проблема пробела в кванторной высоте.

- Почему естественно возникающие структуры имею малую (обычно 0 или 1) или бесконечную высоту?
- Естественные неразрешимые случаи - имеют бесконечную кванторную высоту.
- Можно построить неразрешимые и разрешимые случаи любой кванторной высоты.

С другой стороны, есть структуры с малой кванторной высотой (синоним глубины). Можно строить искусственные примеры с любой фиксированной кванторной высотой, с разрешимостью, неразрешимостью, но естественных примеров этого неизвестно.

Последнее интересное понятия, это понятие, принадлежащее Андрею Мучнику, сыну Альберта Абрамовича Мучника и моему ученику. Это понятие самоопределимости, тоже восходящее к Тарскому. Тарским предлагалась сама определимость, когда можно в какой-то структуре определять, определимо в ней что-то или нет. Но это значит, что мы просто берём символ дополнительный, добавляем уже не для объектов, а для отношения n-местного, и дальше берём замкнутую формулу с одной переменной, если мы в этой n-местной предикатной, так сказать, переменной, добавляем определимое отношение, то истина, если неопределимая, то ложно.

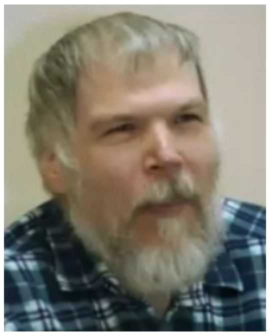
И вот Ан. Мучник доказал, что пространство 000 $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ самоопределимое и отсюда получил более простое и красивое доказательство теоремы Кобхэма-Семенова. Возникает вопрос, когда еще бывает самоопределимость.

Пока не удаётся найти ситуации самоопределимости, кроме одного тривиального случая, не буду о нём говорить. Вот, надо рассмотреть такие естественные кандидаты, как

- $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$.

Андрей Мучник, к сожалению, в 2007 году от нас ушел, это был очень талантливый человек, действительно молодой ученый. Проблематика его осталась.

Андрей Мучник доказал свою теорему в успешной попытке упростить доказательство Семенова А.Л. теоремы Кобхэма-Семенова. Его доказательство имело резонанс и теорему сегодня стоит называть Теоремой Кобхэма - Семенова - Мучника. Теорема естественно позволяет проверять определимость, если структуру, в которой мы записываем и в которой есть сложение - разрешима (например, автоматна). Очевидно, если множество n-местного отношения конечно для каждого n=1, 2, ... , то структура самоопределима.



Мучник А.А.
1958-2007

Думаю, что я показал достаточное количество примеров и открытых проблем, в том числе, повторяю, вероятно, не таких уж сложных, которыми можно заниматься. Предлагаю всем сотрудничать в этой интересной области.

Introduction

Dear friends, my report is devoted to the issues of definability. And we will begin with the fact that the concept of definability is connected with the concept of determination. Definition is as basic a concept of mathematics and its applications, including in the field of artificial intelligence, as

- model,
- proof,
- calculation.

And, accordingly, the theory of definability is an area of mathematics occupied, namely, with definitions; what this means more precisely, we will explain later.

That being said, the remarkable thing about definability theory is that it has a large number of open problems, but not many results. If we compare, say, with the theory of models or the theory of proofs, where the number of publications is in the thousands and even tens of thousands, then in the theory of definability it is rather hundreds, or at least a few thousand. And this gives hope that some very interesting new results can be obtained here, including those related to practical applications. As often happens in mathematics, it starts with abstract constructions, then some of them turn out to be important in practice.

Let's start by posing the question of how to define one concept through another, or how to develop some kind of system of concepts that is sufficient to define everything, say, everything that we want to describe in a particular language.

This is not a new idea; let’s say, in the 18th century it was developed by the great philosopher Leibniz in his idea of a universal language, Lingua Universalis.

And in the 21st century, we can mention the famous linguist who began working in Poland, and now has been living in Australia for the last 10 years, Anna Wierzbicka, who proposed a system of 65 basic concepts common to all human languages, through which more and more complex derivative concepts can be defined in each language .

If we talk about the mathematical aspect, we can say that the beginning of a systemic representation of the theory of definability is the logic of C.S. relations. Pierce, which originated in the mid-19th century.

Again, turning to linguistic ideas, linguistic situations, the corresponding context was considered by such major linguists as N. Chomsky, J. Fodor, G. Lakoff.

Attempts to construct mathematical theories and theories within the framework of systems theory, which is also one of the topics of the current congress, belong to R. Wille and N. B. Seiler. It is clear that the theory of relational databases is also largely related to the theory of definability. Big data tagging is one of the applied aspects of definability theory. Confidential, including explanatory, artificial intelligence is now of particular importance when this or that proposal emanating from artificial intelligence, this or that assessment, this or that interpretation needs explanation. One of the important tasks, that is, educational ones, is how to teach a person to ask questions correctly, how to teach artificial intelligence to correctly answer them, and make its conclusions convincing for a person. And this is also related to problems from the theory of definability.

Within mathematics, the theory of definability in the 19th century developed primarily as an applied intra-mathematical problem, in particular, an attempt to create the best system of basic concepts for geometry and arithmetic. There are several names here, I will not waste time listing them, just look at the list of famous mathematicians, including German and Italian. The central figure of the 20th century in definability theory was Alfred Tarski and, in particular, the Polish school. Tarski's report on this topic to the Polish Mathematical Society in 1930 is well known.

The role of Alfred Tarski and the Polish school in definability and the role of definability in the works of Tarski

Report to the Polish Mathematical Society 1930

Elimination as a definition of semantics, Skolem

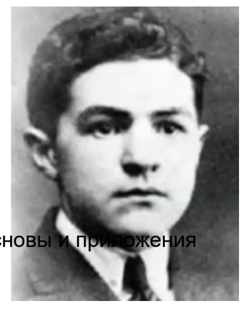
Tarski's student Mojzesz Presburger's thesis on the elimination of quantifiers for the addition of integers

The Indefinability of Arithmetic Truth (1933), Gödel (1930), von Neumann, ...

Basic concepts of geometry

On the other hand, even before this, questions of the theory of definability were raised as attempts to determine the formal semantics of logical languages. In particular, the work of Skolem can be mentioned here.

One of the famous famous first results of the theory of definability can be considered the result of the thesis



work of Mojzesz Presburger, a student of Tarski, where he proved that it is possible to eliminate quantifiers for the addition of integers with the corresponding function symbols.

On the other hand, the indefinability of arithmetic truth can be considered an outstanding negative result of the theory of definability.

Mojzesz Presburger
1904-1943

It seems to me that the actual statement about the impossibility of determining arithmetic truth is the heart, the main content of Gödel’s theorem. At the same time, this result is usually associated with the name of Tarski. Tarski's work related to the basic concepts of geometry is well known. Well, let's say the result is that binary relations are not enough to define all geometric concepts. One of the peaks of mathematical logic, which has meaning even outside of logic, an important point of view of algebra and all of mathematics, is a result that can be formulated as the fact that the family of semi-algebraic sets is closed under projection, hence the solvability of elementary geometry. This work of his was published in the late forties, but, practically, the result was obtained in Poland. Tarski himself formulated the problems of the theory of definability within the framework of his cylindrical algebras, which he also called algebras of concepts.

American Tarski period

Closedness of semi-algebraic sets under projection - solvability of elementary algebra and geometry - around 1938-1948.
Cylindrical algebras = concept algebras (1947)
Self-determination, 1948, (hereinafter Andrey Muchnik)
Geometry of logic, parallels with Felix Klein's Erlagen program
What are Logical Notions? Lecture at the University of London, 16 May 1966

Tarski Alfred (1902 - 1983)

An interesting concept that arose from Tarski was self-determination; we will return to this, I hope, at the end of our report. Tarski said that, in the theory of definability, parallels with the Erlagen program of Felix Klein, such a geometry of logic, are clearly visible. In particular, he spoke about this in his lecture What are Logical Notions? at the University of London on May 16, 1966. Assessing the overall activity of Tarski and the theory of definability in general, Adison said that this theory generalizes the results of analysis, general topology, and should be one of the central branches of mathematical logic, more and more important for computer science. On the other hand, it also addresses the original works of Nikolai Nikolaevich Luzin in

1927.

Our own work began in the 1970s, with the task posed by Albert Muchnik, a student of Pyotr Sergeevich Novikov, directly to me. We will return to this problem later.

With this, I would like to complete the historical introduction and move simply to the main definition; I would like it to be clear to all listeners of my report. Including, perhaps, not for mathematicians, but for those who have just an elementary understanding from mathematical courses related to logic.

Basic concepts of definability theory

Let us have some kind of universe, which we denote by U. And there is a language L, the logical language of the logic of relations. This means that relation names are used as non-logical names: double, triple, single and null (we do not use names for functions). Quantifiers based on the elements of the universe are used, of course, logical connectives, and so on. In this logical language, it is possible to define some relation R through other relations that form the set S. This is the main definition that we use.

Now, taking some set of relations, maybe even a very large, uncountable, whatever, you can form its closure - everything that can be defined through it. It is clear that this is a finite operation, in each formula there is a finite number of names for relations from S. The definition of closure, the situation of closure arises, it is clear that if we have defined something through something, then we will not get anything new further. A closed set arises, which can be called a definability space. These spaces define a lattice, based on the nesting relation that exists between them, you can define the operations inf (infimum) and sup (supremum), and, behold, there will be such a definability lattice for each, say, initial universe and the set of relations on it. Well, for example, arithmetic definability arises. We took natural numbers, there is a three-place addition relation, a three-place multiplication relation. Further, one can see that all arithmetic relations will form a definability space. A subspace will be a space that can be defined only through addition, so this is a situation of narrowing, the term reducts is associated with it, which is used for the space of definability. Note that our definitions are variable with respect to the choice of names for the original set of relations. Here is an example of a particular theorem from the field of definability theory, which is known as the Cobham-Semyonov theorem

Cobham-Semyonov theorem

Any relation that is definable by finite automata operating in significantly different number systems is definable in addition arithmetic.

Significantly different systems are multiplicatively independent number systems, for example, 4 and 8, these are multiplicatively dependent bases of number systems. And, say, 6 and 12 turn out to be independent. This is an example of a theorem from the theory of definability of the arithmetic of addition of natural numbers. Let's move on to definability lattices. Let's also start with a specific example. Edward Huntington, a famous American mathematician, studied the spaces that can be obtained on a linearly ordered set if we consider some subspaces for the order space. Below is the order itself (space is everything that is expressible or definable through the relation less than) and other relations

$(x_1<x_2)$ - the order itself;
$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_3<x_2<x_1)$ - “between”;
$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_2<x_3<x_1) \vee (x_3<x_1<x_2)$ - “cycle”;
“separation” (“link”): intervals with ends x1, x3 and ends x2, x4 intersect, but are not nested, equivalent to codirectionality (equipollence);
"equality".

Let's consider the space generated by the relationship “between”; the geometric meaning here is obvious. Further, the relation of the cycle, well, is also quite clear. If you glue such a ring, then everything will go clockwise, say. Separation relation, if there are two intervals (this is a quadruple relation) $[x_1, x_3]$, $[x_2, x_4]$, then they must intersect, but not be nested one inside the other. In addition, an equality relation is specified. It is expressed simply in language, there is nothing surprising here. So, we see 5 relationships. In specific situations, some of them may define the same space. But, if you take just rational numbers and look at these 5 relations, then they define different spaces, and we will also mention how to prove their differences. Moreover, the spaces generated by these 5 relations exhaust the entire lattice for rational numbers. This result was obtained, as was said, by the French mathematician Claude Frasnay in 1965 and was then repeatedly rediscovered by other authors. Including the author, together with Andrei Muchnik, at some point. This is what the grid looks like:

Fig.1. Lattice for the case of rational numbers

it has a maximum element I - order itself. There are two smaller elements, B - "between" and K - "cycle". Their intersection turns out to be the element S - “linkage” or “separation”. It's not that difficult to prove all these relationships, it's a simple story. Well, you can ask this question, after a while I will answer it: imagine that we add one constant zero to this structure, what will change and how? It is clear that something more will be definable. Well, for example, zero itself will be definable, such a one-place relation “to be zero.” It will be determined that the ratio is greater than zero, of course. Now, just how many spaces there will be in the lattice we are talking about, you can now think about it and make a hypothesis about what will happen. Rational numbers with order are a homogeneous structure in the following sense: every partial isomorphism of finite substructures extends to an automorphism of the entire structure.

<u>Definition</u>
A structure is called homogeneous if each (partial) isomorphism of finite (sub)structures extends to an automorphism of the entire structure.

This property of homogeneity is convenient from the point of view of model theory; there is a large number of works related specifically to homogeneous structures, including those related to order and so on.
Another remarkable homogeneous structure is the random graph $R^{(k)}$, for k = 2, 3, 4, 5, ..., all its elements x_1, ..., x_k are different and the number of edges between them is odd.
If we take a random undirected graph, it turns out that such a structure will also have five subspaces and the lattice will be very similar to the lattice we just talked about.

Fig.2. Lattice for the case of random graphs

This may all seem rather boring. In fact, we will see that this is not the case. But first, one more general design. We understand that definability can be proven easily; we need to write formulas. How to prove indeterminability? If you do this with students, they themselves will quickly come up with an idea that many of you have probably also thought of. It also came to Padoa's mind (Padoa's method of automorphisms), he spoke about this in his report at the Congress of Mathematicians in 1900, where Hilbert posed his problems. This is the idea of automorphisms. This means that if we can come up with some kind of automorphism that leaves something in place, some relationships, moves some others, then these moving ones cannot be defined by those that remain in place. Therefore, the idea arises, for each definability space, to look at its group of automorphisms. This can be called a Galois group, a Galois correspondence arises, this is an antimonotone homomorphism between the definability lattice of the structure and the lattice of closed overgroups of the automorphism group of the new structure. We will not define closedness now; it has a topological meaning, which is natural for defining closedness. Well, then we get the following idea: in order to prove that some relation is indefinable, we need to consider a group of automorphisms.

Automorphism method

$$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Rightarrow R \notin [S]$$

S - definability space,
GS is the group of its automorphisms.

Some of the problem is that sometimes it is not possible to do this, and this is exactly what we will do now. Below is an example of this transformation for an order relation, for a relation "between" (of course, decreasing mappings are also added), for a "cycle" (we see such rearrangements of segments obtained by cutting along an irrational section).

Fig.3. Transformation graphs for orders

Well, it turns out that if you add a constant, you get 116 relations. That is, if for the case of rational numbers we add the one-place relation to be 0, then the number of relations is 115. If we add an irrational point, that is, more and more and less of this irrational point, then the number of subspaces turns out to be somewhat smaller, it is 53. Having considered a number of situations , in particular, the situation with homogeneous graphs, Thomas proposed the following conjecture.

<u>*Thomas conjecture*</u>
Every countable homogeneous finitely generated structure has a finite definability lattice.

One might also ask whether it is not true that every structure with a finite definability lattice will be homogeneous.

These two problems have been open for about 40 years. Well, it would be interesting to think about them.

In the case of ω-categorical structures (in which isomorphism follows from elementary equivalence), which also includes homogeneous structures, it turns out that the method of automorphisms solves the problem (results of Rull-Nardzewski, Engeler and Svenonius in the late 1950s).
There is an isomorphism between the structures of supergroups and the lattice.

<u>*Isomorphism theorem*</u>
The definability lattice of any ω-categorical structure is (anti)-isomorphic to the lattice of closed supergroups of the group of automorphisms of the structure.

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$ (S - definability space, R - relation)

What happens beyond ω-categoricality? This is where an absolutely remarkable theorem by L. Svenonius, published in 1959, comes into play, and it goes as follows. If we consider not only the structure itself, but also its elementary solutions, then the automorphism method works.

Svenonius's theorem

For any countable structure, an element S of its definability lattice and the relation R $\notin$ S, there is an elementary extension of the structure in which $\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}}$.

This result, by the way, turned out to be quite unknown. Apparently, due to the fact that it was published in Sweden (Lars Svenonius was originally a Swede, then he lived in America) in a magazine called “Theory”, published in a circulation of a couple of hundred copies. And for a long time this theorem was not noticed. But in 1973 [1], the famous American mathematician (originally Swiss) student of Bernays and fellow student of MacLane, with whom they were later friends until the end of their lives, Buchi J. Richard, while studying Tarski’s texts, naturally wondered if there was some Any such universal theorem about definability? In particular, there are Tarski's references to the Erlagen program and so on. It turned out that, yes, there is, so Svenonius, in essence, proved such a completeness theorem for definability, using, on the one hand, the idea of automorphisms of transformations that preserve something, on the other hand, the idea of adding ideal elements.

I'll just remember Klein, projective geometry, when some elementary ideal objects are added, allowing the correct system of automorphisms to operate. Büchi devoted a couple of papers to this approach to Svenonius's result. Now, we, in turn, looked at a generalization of the situation of homogeneity, when, generally speaking, the structure is not ω-categorical, it has different elementary equivalent structures, but let’s say, it cannot be expanded further, that is, the expansion does not exist. But it is clear that in this case, Svenonius’s theorem gives the answer: if the structure is complete upward, that is, it cannot be expanded further, then here, precisely, we can consider all the automorphisms of the structure itself and its subspaces. There will be an isomorphism, the Galois correspondence will be an antisomorphism.

Accordingly, the definition of an upwardly replenished structure arises, when there is simply its expansion, which has nowhere to expand further. And there we get a completeness theorem for such structures; ideal elements are no longer needed, and all this is done in the structure itself. The automorphism method begins to work fully.

Definition

A structure is complete upward if all its elementary extensions are isomorphic to it.

Completeness theorem for upward-completed structures

If a structure has an upwardly complete elementary extension, then its definability lattice is (anti-)isomorphic to the lattice of closed supergroups of its automorphism group.

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$, S - full up space, R - ratio.

In various natural structures it turns out that this same fullness upward takes place: rational order $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ - homogeneous structure, elementarily equivalent to $\langle \mathbb{R}; < \rangle$ (5-element lattice), upwardly replenished structures $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$, $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$.

In particular, such structures include studies of integers, that is, binary relations $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$, that one number is one greater than the other, in this case we no longer get a finite structure, but a countable one, consisting of three fairly understandable and natural series of relations, like written below,

<u>*Theorem*</u>

Let us put (tilde means "equal by definition", $S_2 \triangleright S_1$ denotes strict nesting of the definability space of a set of relations S_2 into the definability space generated by a set of relations S_1 on the same carrier, see [2])

$$A_{0,n}(x_1, x_2) \sim |x_1 - x_2| = n,$$
$$A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n \vee x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n,$$
$$A_{2,n}(x_1, x_2) \sim x_1 - x_2 = n.$$

Then each element $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ is generated by $A_{i,n}$ for some $i \leq 2$ and natural n; for every $0 < i \leq 2$ and natural n, m

$A_{i,n} \triangleright A_{i-1,n}$, $A_{i,n} \triangleright A_{i,m} \Leftrightarrow$ n divides m;

$$[A_{i,d}] \cup [A_{j,k}] = [A_{m,n}], m = \max\{i, j\}, n = GCD(d, k);$$
$$[A_{i,d}] \cap [A_{j,k}] = [A_{m,n}], m = \min\{i, j\}, n = LCM(d, k);$$

All $A_{i,n}$ are different.

generating, for example, "the distance is equal to n", or something similar to a link, it is such a co-direction, "the distance is equal to n" and directed in one direction. Here we get a description of the corresponding groups of automophisms, a complete description of the lattice, this is the result of ours with Soprunov S.F., obtained approximately 2-3 years ago [2].

Further, an already open problem begins. I warned that initially there are a lot of open problems. Well, for example, what happens if you take not an integer, but a natural number plus one. It would seem that something approximately the same should turn out, well, in a sense, yes, it will work out, although the question is formally open, but, in my opinion, it is clear how to move here.

Possible options and generalizations

Countable universe, finite signature.
Construction of replenishments
<N; +1>;
$Z \times Z$ - two commuting sequences;
several free trails;
unrooted binary tree, for example, one axis - <Z; +1> with a shift of 0, at each point we add an edge - a shift of 1, from which the root binary grows, 0 and 1 come out of each point, 0 or 1 enters each point;
You can erase the marks and directions of the edges.
Instead of integers, we can consider two commuting consequences. You can look at such checkered paper and you can go right, left, up, down, and this is what the structure will be, and what the lattice will be in this situation. You can consider not a commuting sequence, but, so to speak, a free, that is, an infinite binary tree, for example, and continue to move along the edges of this tree. You can mark them, you can not mark them, you can look for the presence of a root, you can not look at them, some rich structure will emerge. It is possible to give a general definition relating to this kind of situation, in a sense, such a discrete version of the idea of homogeneity, which allows us to construct the corresponding group of automorphisms.

General idea

Homogeneity condition: finite-global -
an isomorphism of finite substructures extends to an automorphism of a structure;
the final substructure may contain distant elements.

Local homogeneity: binary relations in signature, etc.
an isomorphism of finite connected structures (graphs) extends to an automorphism of the structure.

If we try to move further along integers, then what will happen is that if we consider the Huntington relation on integers, a corresponding structure will arise, we can consider subspaces.

Next steps

Order of integers
homomorphism of Huntington relations;
analogues of series for integers;
replenishment up for $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

Sequences and orders of integers and naturals
periodic and almost periodic single relationships;
several trails, trees.

And a situation arises with replenishment, analogues of these same series arise, and, nevertheless, the problem for integers with an order relation is also open. We also don't know the exact answer yet. Well, then you can gradually expand the classes of structures, for example, add periodic or almost periodic unary relations on natural integers, and see what comes of it.

Perspective (distant?)

Addition of whole (natural) numbers
The task posed by Al. Muchnik Semenov A.L. (circa 1970) with reference to P.S. Novikov (simultaneously with Cobham's generalization)
replenishment up;
search for new relationships/ "clearly arranged" extensions.

I want to say that initially, just Al. Muchnik posed the problem of addition for integers, say. Well, I immediately set the task of generalizing Cobham's theorem, which I already mentioned. Here the situation turns out to be quite complicated, and we are still very far from the final solution to the problem of addition for integers.

Elimination of quantifiers

Ultimate relational signature
Homogeneous structures allow the elimination of quantifiers
Presburger's arithmetic does not allow it (even if you use function symbols).
Allowing an infinite signature makes the problem undefined.

Here, another class of questions, including those related to the problems of artificial intelligence, the analysis of natural languages, relates to the problem of eliminating quantifiers. You remember that Presburger's arithmetic is existential, in it it is possible to eliminate quantifiers, but not completely, but to a depth of one. That is, you can substitute the existence quantifier, then everything will work out. In homogeneous structures, quantifiers are simply eliminated; there, every formula is equivalent to a quantifier-free one.
Let's now see how complex quantifier prefixes can be. In Presburger arithmetic you can add a rapidly growing function, these are my works from the 1970s and 80s.

Existential elimination of quantifiers

If we allow only existence quantifiers, we get:
algorithmic solvability;
the ability to replace functional names with relation names;
Presburger's arithmetic is existential, the addition of rapidly growing functions does not lead beyond the limits of existentiality (Semyonov A.L., 1979, 1983);
finitely automata definability is (in many cases) existential (there is an admissible move of the automaton);
CSP Constraint satisfaction problem? Generalized satisfiability - the embeddability of a structure is described existentially.
In the structures under consideration and their reducts, quantifiers are existentially eliminated, problems of belonging, CSP, etc. are solvable.

But if we consider finite-automaton structures, then there is not enough existentiality there; in some situations it is necessary to have more complex quantifier prefixes. And this question arises. It is clear that there are structures with infinite quantifier depth. For example, arithmetic with addition and multiplication.

Quantifier height

Logical complexity - (quantifier) height of a space - the minimum number of changes of quantifiers that allows you to obtain the entire space, starting from a finite number of relations.
The problem of space in quantifier height.
Why do naturally occurring structures have small (usually 0 or 1) or infinite heights?
Natural undecidable cases have infinite quantifier height.
It is possible to construct undecidable and decidable cases of any quantifier height.

On the other hand, there are structures with low quantifier height (synonymous with depth). It is possible to construct artificial examples with any fixed quantifier height, with solvability and undecidability, but there are no natural examples of this.
The last interesting concept is a concept belonging to Andrei Muchnik, the son of Albert Abramovich Muchnik and my student. This is the concept of self-determination, which also goes back to Tarski. Tarski proposed definability itself, when it is possible to determine in some structure whether something is definable in it or not. But this means that we simply take an additional symbol, add it not for objects, but for an n-ary relation, and then we take a closed formula with one variable, if in this n-ary predicate, so to speak, variable, we add a definable relation , then true; if indefinable, then false.

And here is An. Muchnik proved that the space 000 is self-determining and from this

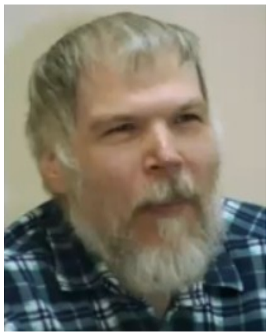
he obtained a simpler and more beautiful proof of the Cobham-Semyonov theorem. The question arises when self-determination still exists.
While it is not possible to find situations of self-determination, except for one trivial case, I will not talk about it. Now, we need to consider such natural candidates as

$\langle \mathbb{Z}; + \rangle$

$\langle \mathbb{Q}; + \rangle$.

Andrei Muchnik, unfortunately, left us in 2007; he was a very talented person, a truly young scientist. His problem remains.

Andrey Muchnik proved his theorem in a successful attempt to simplify the proof of Semenov A.L. Cobham-Semenov theorems. His proof had resonance and the theorem today should be called the Cobham-Semyonov-Muchnik Theorem. The theorem naturally allows us to check definability if the structure in which we write and in which there is addition is decidable (for example, automaton). Obviously, if the set of n-ary relation is finite for each n=1, 2, ..., then the structure is self-determining.



Andrey Muchnik
1958-2007

I think that I have shown a sufficient number of examples and open problems, including, I repeat, probably not so difficult ones that can be dealt with. I invite everyone to collaborate in this interesting area.

介紹

親愛的朋友們，我的報告主要討論可定義性問題。 我們將從可定義性概念與可確定性概念相關這一事實開始。 定義是數學及其應用（包括人工智慧領域）的基本概念，就像

模型，

證明，

計算。

因此，可定義性理論是一個數學領域，即定義；更準確地說，這意味著什麼，我們稍後會解釋。

話雖這麼說，可定義性理論的顯著之處在於它有大量未解決的問題，但結果卻不多。 如果我們與模型理論或證明理論相比，其出版物數量達到數千甚至數萬，那麼可定義性理論的出版物數量則相當數百，或至少數千。 這給我們帶來了希望，可以在這裡獲得一些非常有趣的新結果，包括與實際應用相關

的結果。 正如數學中經常發生的那樣，它從抽象結構開始，然後其中一些在實踐中變得非常重要。

讓我們先提出如何透過一個概念來定義另一個概念的問題，或是如何發展某種足以定義一切的概念系統，例如我們想要用特定語言描述的一切。

這並不是一個新想法；可以說，它是在 18 世紀由偉大哲學家萊布尼茨在他的通用語言——通用語言（Lingua Universalis）的想法中發展起來的。

在 21 世紀，我們可以提到一位著名的語言學家，她開始在波蘭工作，現在已經在澳洲生活了 10 年，她提出了一個由 65 個所有人類語言共有的基本概念組成的系統，透過它每種語言都可以定義越來越複雜的衍生概念。

如果從數學的角度來說，可定義性理論的系統表述的起點就是 C.S.關係的邏輯。 皮爾斯，起源於 19 世紀中葉。

再一次，轉向語言思想、語言情境，相應的語境被 N. Chomsky、J. Fodor、G. Lakoff 等主要語言學家考慮。

試著在系統論架構內建構數學理論和理論，這也是本屆大會的主題之一，屬於 R. Wille 和 N. B. Seiler。 顯然，關係資料庫理論也很大程度上與可定義性理論相關。 大數據標籤是可定義性理論的應用面向之一。 當人工智慧提出的這個或那個提案、這個或那個評估、這個或那個解釋需要解釋時，人工智慧的機密性（包括解釋性）現在變得特別重要。 重要的任務之一，即教育的任務，是如何教人們正確提出問題，如何教導人工智慧正確回答問題，並使其結論對人有說服力。 這也與可定義性理論的問題有關。

在數學領域，19 世紀的可定義性理論主要作為應用數學問題而發展，特別是試圖創建幾何和算術基本概念的最佳系統。 這裡有幾個名字，我不會浪費時間列出他們，只要看看著名數學家的名單，包括德國和義大利。 20 世紀可定義性理論的核心人物是阿爾弗雷德·塔斯基，尤其是波蘭學派。 塔斯基在 1930 年向波蘭數學會提交的關於這個主題的報告是眾所周知的。

阿爾弗雷德•塔斯基和波蘭學派的作用
可定義性以及可定義性在塔斯基作品中的作用

1930 年向波蘭數學會提交的報告
消除作為語意的定義，Skolem
Tarski 的學生 Mojzesz Presburger 關於消除整數加法量詞的論文
算術真理的不可定義性 (1933)、哥德爾 (1930)、馮諾依曼、...
幾何基本概念

另一方面，甚至在此之前，可定義性理論的問題就被提出來試圖確定邏輯語言的形式語義。 這裡特別值得一提的是 Skolem 的工作。

可定義性理論最著名的第一個結果可以被認為是塔斯基的學生 Mojzesz Presburger 的論文工作的結果，他證明了可以消除整數與相應函數符號相加的量詞。

另一方面，算術真理的不可定義性可以被認為是可定義性理論的一個突出的否定結果。

Mojzesz Presburger
1904-1943

在我看來，關於無法確定算術真理的實際陳述是核心，是哥德爾定理的主要內容。 同時，這個結果通常與塔斯基的名字連結在一起。 塔斯基與幾何基本概念相關的工作是眾所周知的。 好吧，假設結果是二元關係不足以定義所有幾何概念。 數理邏輯的頂峰之一，即使在邏輯之外也有意義，是代數和所有數學的一個重要觀點，其結果可以表述為半代數集族在投影下閉集的事實，因此初等幾何具有可解性。 他的這部作品發表於四十年代末，但實際上，成果是在波蘭取得的。 塔斯基本人在他的圓柱代數框架內闡述了可定義性理論的問題，他也稱之為概念代數。

美國塔斯基時期

投影下半代數集的閉性 - 初等代數和幾何的可解性 - 約 1938-1948 年。

圓柱代數 = 概念代數 (1947)

自決，1948 年，(以下簡稱安德烈・穆奇尼克)

邏輯幾何，與 Felix Klein 的 Erlagen 程式相似 什麼是邏輯概念? 1966 年 5 月 16 日在倫敦大學演講

Tarski Alfred (1902 - 1983)

塔斯基提出的一個有趣的概念是自決；我希望在報告結束時我們會回到這個概念。 塔斯基說，在可定義性理論中，與菲利克斯・克萊因的埃爾拉根綱領的相似之處，這種邏輯幾何學，是清晰可見的。 他在演講《什麼是邏輯概念？》中特別談到了這一點。 1966 年 5 月 16 日在倫敦大學。 在評估塔斯基的整體活動和一般可定義性理論時，艾迪生表示，該理論概括了分析結果、一般拓撲，應該成為數理邏輯的中心分支之一，對電腦科學越來越重要。 另一方面，它也提到了尼古拉・尼古拉耶維奇・盧津 (Nikolai Nikolaevich Luzin) 1927 年的原創作品。

我們自己的工作始於 20 世紀 70 年代，這項任務是彼得・謝爾蓋耶維奇・諾維科夫(Pyotr Sergeevich Novikov) 的學生阿爾伯特・穆奇尼克(Albert Muchnik) 直接向我提出的。 我們稍後會再回到這個問題。

至此，我想完成歷史介紹並簡單地轉向主要定義；我希望我的報告的所有聽眾都能清楚地了解這一點。 也許不是針對數學家，而是針對那些剛從與邏輯相關的數學課程中獲得基本了解的人。

可定義性理論的基本概念

讓我們有某種宇宙，用 U 表示。並且有一種語言 L，關係邏輯的邏輯語言。 這意味著關係名稱被用作非邏輯名稱：double、triple、single 和 null（我們不使用函數名稱）。 當然，使用的是基於宇宙元素的量詞、邏輯連接詞等等。 在這種邏輯語言中，可以透過形成集合 S 的其他關係來定義某些關係 R。這是我們使用的主要定義。

現在，採用一些關係集，甚至可能是一個非常大的、不可數的關係，無論如何，你都可以形成它的閉包——可以透過它定義的一切。 很明顯，這是一個有限運算，在每個公式中都有有限數量的來自 S 的關係名稱。閉包的定義，閉包的情況出現，很明顯，如果我們透過某物定義了某物，那麼我們不會再得到任何新的東西。 一個閉集合出現，可以稱為可定義空間。 這些空間定義了一個格，基於它們之間存在的嵌套關係，您可以定義操作 inf（下確界）和 SU（至上），並且，看哪，每個初始宇宙和初始宇宙都會有這樣一個可定義性格。其上的關係集。 例如，算術可定義性就出現了。 我們拿自然數來說，有一個三位加法關係，一個三位乘法關係。 進一步地，我們可以看到所有的算術關係都會形成一個可定義空間。 子空間是只能透過加法來定義的空間，因此這是一種縮小的情況，術語約簡與之相關，用於可定義的空間。 請注意，我們的定義對於原始關係集的名稱選擇是可變的。 這是可定義性理論領域的一個特定定理的範例，該定理被稱為科巴姆-謝苗諾夫定理

<u>*科巴姆-謝苗諾夫定理*</u>

任何可由在顯著不同的數字系統中運行的有限自動機定義的關係都可以在加法算術中定義。

顯著不同的系統是乘法獨立的數字系統，例如 4 和 8，它們是乘法依賴的數字系統的基數。 比如說，6 和 12 結果是獨立的。 這是自然數加法算術可定義性理論中的定理範例。 讓我們繼續討論可定義性格。 我們也從一個具體的例子開始。 美國著名數學家愛德華・亨廷頓（Edward Huntington）研究瞭如果我們考慮有序空間的一些子空間，則可以在線性有序集上獲得的空間。

下面是順序本身（空間是透過小於關係可以表達或定義的一切）和其他關係

$(x_1<x_2)$ – 訂單本身；

$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_3<x_2<x_1)$ – 「之間」；

$(x_1<x_2<x_3) \vee (x_2<x_3<x_1) \vee (x_3<x_1<x_2)$ – 「循環」；

「分離」（「連結」）：端點 x1、x3 與端點 x2、x4 相交的區間，但不嵌套，相當於同向性（等價性）；

「平等」。

讓我們考慮一下「之間」關係所產生的空間；這裡的幾何意義是顯而易見的。 另外，週期的關係呢，嗯，也很清楚。 如果你黏上這樣一個環，那麼一切都會順時針方向移動。 分離關係，如果有兩個區間（這是四元關係）$[x_1, x_3]$, $[x_2, x_4]$，那麼它們必須相交，但不能嵌套在另一個內部。 另外，指定了等式關係。 用語言簡單地表達出來，這並不奇怪。 所以，我們看到 5 種關係。 在特定情況下，其中一些可能會定義相同的空間。 但是，如果你只用有理數來觀察這 5 個關係，那麼它們定義了不同的空間，我們也會提到如何證明它們的差異。 此外，這 5 個關係產生的空間耗盡了有理數的整個格。 據稱，這一結果是由法國數學家克勞德・弗拉斯奈 (Claude Frasnay) 在 1965 年得出的，隨後又被其他作者反覆重新發現。 包括作者，以及安德烈・穆奇尼克（Andrei Muchnik），在某個時候。 網格如下圖所示：

圖 1. 有一定狀況的格子

它有一個最大元素 I – order 本身。 有兩個較小的元素，B – “之間”和 K – “循環”。 它們的交集就是元素 S—「連動」或「分離」。 證明所有這些關係並不困難，這是一個簡單的故事。 好吧，你可以問這個問題，過一會兒我會回答它：想像一下，我們在這個結構中添加一個常量零，會改變什麼以及如何改變？ 顯然，還有更多的東西是可以定義的。 嗯，例如，零本身是可以定義的，這樣的一位關係「為零」。 當然，將確定該比率大於零。 現在我們正在討論的格子中有多少個空間，你現在可以思考並假設會發生什麼。有序有理數在以下意義上是齊次結構：有限子結構的每個部分同構都擴展到整個結構的自同構。

定義

如果有限（子）結構的每個（部分）同構延伸到整個結構的自同構，則該結構稱為齊次結構。

同質性的這種性質從模型論的角度來看很方便；有大量的工作專門與同質

結構相關，包括與序等相關的工作。

另一個值得注意的齊次結構是隨機圖 $R^{(k)}$，對於 k = 2, 3, 4, 5, ...，其所有元素 x_1, ..., x_k 都不同，並且它們之間的邊數為奇數。

如果我們取一個隨機無向圖，結果發現這樣的結構也將有五個子空間，並且格子將與我們剛才討論的格子非常相似。

圖 2. 隨機圖情況的格子

這一切看起來可能相當無聊。 事實上，我們將會看到事實並非如此。 但首先是一個更通用的設計。 我們知道可定義性很容易被證明；我們需要寫公式。 如何證明不確定性？ 如果你對學生這樣做，他們自己很快就會想出一個想法，你們中的許多人可能也想到過。 帕多亞也想到了這一點（帕多亞的自同構方法），他在 1900 年數學家大會上的報告中談到了這一點，會上希爾伯特提出了他的問題。 這就是自同構的思想。 這意味著，如果我們能夠提出某種自同構，將某些東西留在原處，某些關係，移動其他一些東西，那麼這些移動的東西就不能由那些保留在原處的東西來定義。 因此，對於每個可定義空間，出現了查看其自同構組的想法。 這可以稱為伽羅瓦群，產生伽羅瓦對應，這是該結構的可定義格與新結構的自同構群的閉超群格之間的反單調同態。我們現在不定義封閉性；它具有拓樸意義，這對於定義封閉性來說是很自然的 好吧，那我們得到以下想法：為了證明某些關係是不可定義的，我們需要考慮一組自同構。

自同構法

$$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Rightarrow R \notin [S]$$

S – 可定義空間，

GS 是它的自同構群。

有些問題是有時無法做到這一點，而這正是我們現在要做的。 以下是對於順序關係、「之間」關係（當然也加入了遞減映射）、「循環」（我們看到透過沿著無理部分切割而獲得的線段的重新排列）的這種變換的範例。

圖 3。訂單轉換圖

事實證明，如果加上一個常數，就會得到 116 個關係。 也就是說，如果對於有理數的情況，我們加上一位關係為 0，則關係數為 115。如果我們加上一個無理數點，即這個無理數點越來越多越來越少，那麼結果子空間的數量稍微少了一些，為 53。在考慮了多種情況，特別是齊次圖的情況後，Thomas 提出

了以下猜想。

湯瑪斯猜想

每個可數齊次有限生成結構都有一個有限可定義格。

人們可能還會問，每個具有有限可定義性格的結構是否都是同質的，這是否正確。

這兩個問題已經開放了大約 40 年。 嗯，想想它們會很有趣。

在ω 範疇結構（其中同構源自基本等價）的情況下，也包括齊次結構，事實證明自同構方法解決了這個問題（Rull-Nardzewski、Engeler 和 Svenonius 在 20 世紀 50 年代末的結果） 。

超群的結構與晶格之間存在著同構。

同構定理

任何 ω-範疇結構的可定義格與該結構的自同構群的封閉超群的格是（反）同構的。

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$ （S – 可定義空間，R – 關係）

超出 ω 範疇會發生什麼事？ 這正是 L. Svenonius 於 1959 年發表的一個絕對引人注目的定理發揮作用的地方，其原理如下。 如果我們不只考慮結構本身，也考慮其初等解，那麼自同構方法就有效。

斯維諾尼斯定理

對於任何可數結構，其可定義格的元素 S 和關係 R $\notin$ S，存在該結構的初等擴展，其中 $\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}}$ 。

順便說一句，這個結果是相當未知的。 顯然，這是因為它發表在瑞典（拉斯•斯維諾尼烏斯原本是瑞典人，後來住在美國）一本名為《理論》的雜誌上，發行量為幾百本。 而且很長一段時間這個定理沒有被注意到。 但在 1973 年[1]，美國著名數學家（原籍瑞士）伯奈斯的學生、麥克萊恩的同學（後來他們成為了終生的朋友）布奇•J•理查德(Buchi J. Richard) 在研究塔斯基的文本時，很自然地想知道：有一些關於可定義性的普遍定理嗎？ 特別是塔斯基提到了埃爾拉根計劃等等。 事實證明，是的，存在，所以斯維諾

尼烏斯本質上證明了這樣一個可定義性的完備性定理，一方面使用了保留某些東西的變換自同構的思想，另一方面使用了這個思想添加理想元素。

我只會記住克萊因，射影幾何，當添加一些基本理想物件時，允許正確的自同構系統運作。 布奇（Büchi）專門發表了幾篇論文來探討斯維諾尼烏斯結果的這種方法。 現在，我們反過來看一下同質性情況的概括，一般來說，結構不是ω-範疇的，它具有不同的基本等價結構，但可以說，它不能進一步擴展，即，擴展不存在。 但很明顯，在這種情況下，斯維諾尼烏斯定理給出了答案：如果結構是向上完整的，即它不能進一步展開，那麼在這裡，準確地說，我們可以考慮結構本身及其子空間的所有自同構。 將存在同構，伽羅瓦對應將是反同構。

因此，當僅存在其擴展而無處進一步擴展時，就出現了向上補充結構的定義。 我們得到了這種結構的完備性定理；不再需要理想元素，所有這些都在結構本身中完成。 自同構方法開始充分發揮作用。

定義

如果一個結構的所有基本外延都與它同構，那麼它就是向上完整的。

向上完備結構的完備性定理

如果一個結構具有向上完備的初等擴張，那麼它的可定義格子與其自同構群的閉超群格是（反）同構的。

$\Gamma_S \not\subset \Gamma_{\{R\}} \Leftrightarrow R \notin [S]$ ，S-滿空間，R-比率。

事實證明，在各種自然結構中，都會發生同樣的向上豐滿：

有理序 $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ – 均質結構，基本上等價於 $\langle \mathbb{R}; < \rangle$（5 元晶格），向上補充結構 $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$、$\langle \mathbb{Q}; + \rangle$。

特別是，這種結構包括對整數的研究，即二元關係 $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$，一個數字比另一個數字大，在這種情況下，我們不再得到一個有限的結構，而是一個可數的結構，由三個相當容易理解和自然的結構組成一系列關係，如下所示，

定理

讓我們把（波浪號的意思是“定義相等”，$S_2 \triangleright S_1$ 表示將一組關係 S2 的可定義空間嚴格嵌套到同一載體上的一組關係 S1 生成的可定義空間中，參見[2]）

$$A_{0,n}(x_1, x_2) \sim |x_1 - x_2| = n,$$
$$A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n \vee x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n,$$
$$A_{2,n}(x_1, x_2) \sim x_1 - x_2 = n.$$

然後對於某個 i ≤ 2 和自然 n，每個元素 $\langle\mathbb{Z};+1\rangle$ 由 $A_{i,n}$ 產生；
對於每個 0 < i ≤ 2 和自然 n, m

$A_{i,n} \triangleright A_{i\text{-}1,n}$, $A_{i,n} \triangleright A_{i,m} \Leftrightarrow$ n 除 m；

$$[A_{i,d}]\cup[A_{j,k}]=[A_{m,n}], m=\max\{i,j\}, n=GCD(d,k);$$
$$[A_{i,d}]\cap[A_{j,k}]=[A_{m,n}], m=\min\{i,j\}, n=LCM(d,k);$$

所有 $A_{i,n}$ 都不同。

產生例如“距離等於 n”，或類似於連結的東西，它是這樣一個同向，“距離等於 n”並且指向一個方向。 在這裡，我們得到了相應的自同構群的描述，即晶格的完整描述，這是我們與 Soprunov S.F. 合作的結果，大約 2-3 年前獲得[2]。

此外，一個已經懸而未決的問題開始了。 我警告說，最初存在著許多未解決的問題。 舉例來說，如果您採用的不是整數而是自然數加一，會發生什麼事。 似乎應該出現大致相同的結果，嗯，從某種意義上說，是的，它會解決，儘管問題已正式開放，但在我看來，如何搬到這裡是很清楚的。

可能的選項和概括

可數宇宙，有限簽名。

補給建設

⟨N; +1⟩;

Z × Z - 兩個通勤序列;

多條免費步道;

無根二元樹，例如，一個軸 - ⟨Z; +1⟩ 移位為 0，在每個點我們添加一條邊 - 移位為 1，根二進制從中增長，0 和 1 從每個點出來，0 或 1 進入每個點;

您可以擦除邊緣的標記和方向。

我們可以考慮兩種通勤後果，而不是整數。 你可以看看這樣的方格紙，你可以向右、向左、向上、向下移動，這就是結構，以及在這種情況下的格子 例如，您可以考慮的不是一個通勤序列，而是一個自由的，即無限二叉樹，並繼續沿著該樹的邊緣移動。 你可以標記它們，你不能標記它們，你可以尋找根的存在，你不能看它們，一些豐富的結構將會出現。 可以給出與這種情況相關的一般定義，在某種意義上，同質性思想的離散版本，它允許我們建構

相應的自同構群。

大概的概念

齊次條件：有限全局 –
有限子結構的同構擴展到結構的自同構；
最終的子結構可能包含遙遠的元素。

局部同質性：簽名中的二元關係等。
有限連通結構（圖）的同構擴展到結構的自同構。

如果我們嘗試沿著整數進一步移動，那麼會發生的情況是，如果我們考慮整數上的亨廷頓關係，就會出現相應的結構，我們可以考慮子空間。

下一步

整數的順序
亨廷頓關係的同態；
整數級數的類似物；
補貨最多 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ 。

整數和自然數的序列和階
週期性和幾乎週期性的單身關係；
幾條小徑，樹木。

並且隨著補給出現了一種情況，出現了這些相同系列的類似物，並且儘管如此，具有順序關係的整數的問題也是開放的。 我們還不知道確切的答案。好吧，那麼你可以逐漸擴展結構的類別，例如，在自然整數上添加週期性或幾乎週期性的一元關係，然後看看會發生什麼。

透視（遠距離？）

整數（自然）數的加法
A1 提出的任務。 穆奇尼克·謝苗諾夫 A.L. （約 1970 年）參考 P.S. 諾維科夫（與科巴姆的概括同時進行）
補貨上來；

尋找新的關係/「清晰安排」的擴展。

我首先想說的是，阿爾。 例如，穆奇尼克提出了整數加法問題。 好吧，我立刻設定了推廣科巴姆定理的任務，這一點我已經提過。 事實證明，情況相當複雜，距離整數加法問題的最終解決方案還很遠。

消除量詞

最終關係簽名
同質結構允許消除量詞
Presburger 的算術不允許這樣做（即使你使用函數符號）。
允許無限簽名會使問題變得不確定。

這裡，另一類問題，包括與人工智慧問題、自然語言分析相關的問題，涉及消除量詞的問題。 你記得普雷斯堡的算術是存在主義的，因為它可以消除量詞，但不是完全消除，但深度為一。 也就是說，你可以取代存在量詞，那麼一切就解決了。 在齊次結構中，量詞被簡單地消除；在那裡，每個公式都相當於一個無量詞的公式。

現在讓我們來看看量詞前綴有多複雜。 在 Presburger 算術中，你可以添加一個快速增長的函數，這些是我 20 世紀 70 年代和 80 年代的作品。

量詞的存在消除

如果我們只允許存在量詞，我們會得到：
演算法的可解性；
用關係名稱取代功能名稱的能力；
Presburger 的算術是存在性的，快速成長的函數的增加不會導致超出存在性的限制（Semyonov A.L.，1979，1983）；
有限自動機的可定義性（在許多情況下）是存在的（自動機有一個可接受的移動）；
CSP 約束滿足問題？ 廣義可滿足性－結構的可嵌入性是存在性描述的。
在所考慮的結構及其簡化中，量詞在存在上被消除，歸屬、CSP 等問題是可以解決的。

但如果我們考慮有限自動機結構，那麼那裡就沒有足夠的存在性；在某些情況下，有必要有更複雜的量詞前綴。 這個問題就出現了。 很明顯，存在著具有無限量詞深度的結構。 例如，加法和乘法算術。

量詞高度

邏輯複雜度-（量詞）空間的高度-允許您從有限數量的關係開始獲得整個空間的量詞變化的最小次數。

量詞高度的空間問題。

為什麼自然存在的結構具有較小的高度（通常為 0 或 1）或無限高？

自然不可判定的情況具有無限量詞的高度。

可以構造任何量詞高度的不可判定和可判定的情況。

另一方面，存在量詞高度較低的結構（與深度同義）。 可以建構具有任何固定量詞高度、可解性和不可判定性的人工範例，但沒有這樣的自然範例。

最後一個有趣的概念是屬於安德烈・穆奇尼克的概念，他是阿爾伯特・阿布拉莫維奇・穆奇尼克的兒子，也是我的學生。 這就是自決的概念，這也可以追溯到塔斯基。 塔斯基提出了可定義性本身，即可以在某種結構中確定某些東西是否可定義。 但這意味著我們只需採用一個附加符號，不是為物件添加它，而是為n 元關係添加它，然後我們採用一個帶有一個變數的封閉公式，如果在這個n 元謂詞中，可以這麼說，變量，我們添加一個可定義的關係，則為 true；如果不可定義的關係，則為 false。

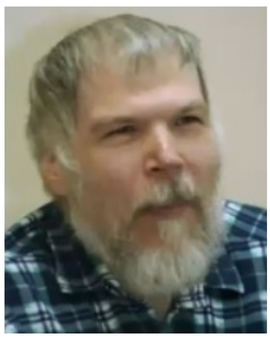
這是安。 穆奇尼克證明了空間000是自決定的，並由此得到了科巴姆-謝苗諾夫定理的更簡單、更漂亮的證明。 當自決仍然存在時，問題就出現了。

雖然不可能找到自決的情況，但除了一件小事外，我不會談論它。 現在，我們需要考慮這樣的自然候選人：

$$\langle \mathbb{Z}; + \rangle$$
$$\langle \mathbb{Q}; + \rangle .$$

不幸的是，Andrei Muchnik 於 2007 年離開了我們；他是一位非常有才華的人，一位真正年輕的科學家。 他的問題仍然存在。

Andrey Muchnik 在簡化 Semenov A.L. 證明的成功嘗試中證明了他的定理。 科巴姆-謝苗諾夫定理。他的證明引起了共鳴，今天的定理應該被稱為科巴姆-謝苗諾夫-穆赫尼克定理。 如果我們編寫的結構和其中存在加法是可判定的（例如自動機），則該定理自然地允許我們檢查可定義性。 顯然，如果n元關係的集合對於每個n=1, 2, ...都是有限的，那麼該結構是自決定的。



Andrey Muchnik
1958-2007

我認為我已經展示了足夠數量的範例和開放性問題，包括，我重複一遍，可能不是那麼難以處理的問題。 我邀請大家在這個有趣的領域合作。

Литература ***References*** ***参考書目***

1. Buchi J. Richard., Danhof Kenneth J. Definibility in normal theories, in The Collected Works of J. Richard Büchi, Springer Science & Business Media, 2012, 696p.
2. Семёнов А.Л., Сопрунов С.Ф. Решетка определимости (редуктов) для целых чисел с операцией следования, Изв. РАН. Сер. матем., 2021, том 85, выпуск 6, 245–258.