Раздел I

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Раздел «Числовые ряды» является одним из наиболее важных и интересных разделов вузовского курса математического анализа, как с теоретической, так и с практической точки зрения. В этом разделе обобщаются ранее рассмотренные понятия и методы курса, а также предлагается новый инструмент решения самых разнообразных задач.

Глава 1. Общие определения и свойства числовых рядов

Изучение теории рядов мы начнем с введения общих понятий для числовых рядов, рассмотрим их примеры, свойства и необходимый признак сходимости.

1.1. Определение и примеры числового ряда

Пусть дана числовая последовательность $A=\{a_n\}$. ***Числовым рядом*** называется бесконечная сумма членов данной числовой последовательности вида

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,, \tag{1.1}$$

здесь числа $a_1, a_2, a_3,... a_n,...$ называются ***членами ряда,*** а член a_n с произвольным номером называется ***общим членом ряда.***

Правило, записанное в виде формулы и позволяющее каждому номеру $n\in N$ поставить в соответствие член a_n ряда (1), называется ***формулой общего члена ряда.*** Ряд считается заданным, если задан его общий член.

Пример 1.1. Дана формула общего члена числового ряда

$$a_n=\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)}{n!},$$

записать его первые пять членов.

Решение. Подставляем в формулу общего члена номер n и находим соответствующий член ряда:

$$a_1=\frac{(-1)^1\cdot(2\cdot1-1)}{1!}=-1; \qquad a_2=\frac{(-1)^2\cdot(2\cdot2-1)}{2!}=\frac{3}{2};$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot (2\cdot 3-1)}{3!} = -\frac{5}{6}; \quad a_4 = \frac{(-1)^4 \cdot (2\cdot 4-1)}{4!} = \frac{7}{24};$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot (2\cdot 5-1)}{5!} = -\frac{9}{120} = -\frac{3}{40}. \blacktriangleright$$

Ряд также может быть задан рекуррентным соотношением, связывающим последующий член ряда с предыдущим, при этом задаются один или несколько членов ряда и формула, по которой находятся последующие члены ряда.

Пример 1.2. Записать третий, четвертый и пятый члены ряда, определяемого рекуррентными соотношениями $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = 2\cdot a_{n-1} + 3\cdot a_{n-2}$.

Решение. Последовательно находим:

$a_3 = 2\cdot a_2 + 3\cdot a_1 = 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = 9;$

$a_4 = 2\cdot a_3 + 3\cdot a_2 = 2\cdot 9 + 3\cdot 3 = 27;$

$a_5 = 2\cdot a_4 + 3\cdot a_3 = 2\cdot 27 + 3\cdot 9 = 81.$ ▶

Возможно также решение обратной задачи: по известным нескольким последовательным членам ряда записать формулу его общего члена.

Пример 1.3. Записать формулу n-го члена для данных рядов:

1) $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} \ldots;$

2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots;$

3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \frac{1}{37} \ldots.$

Решение. 1) По условию $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{4}{2},\ a_3 = \frac{9}{6},\ a_4 = \frac{16}{24},\ a_5 = \frac{25}{120}$. Очевидно, что общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

2) По условию члены ряда меняют знак, начиная с «+», при этом в знаменателе наблюдаются последовательные значения нечетных чисел. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

3) По условию $a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = \frac{1}{11},\ a_4 = \frac{1}{20},\ a_5 = \frac{1}{37}$. Так как $3 = 2+1,\ 6 = 4+2 = 2^2+2,\ 11 = 2^3+3,\ 20 = 2^4+4$, то общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{1}{2^n+n}$. ▶

В некоторых случаях формулу общего члена можно получить и для ряда, заданного рекуррентными соотношениями. Так, для ряда примера 1.2 несложно заметить, что формула его общего члена $a_n = 3^{n-1}$.

Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Конечная сумма n первых членов ряда (1.1) обозначается S_n и называется его n***-ой частичной суммой.***

Частичные суммы

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots,$$

образуют числовую последовательность $\{S_n\}$.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{1.2}$$

то ряд (1.1) называется ***сходящимся,*** а значение предела — число S называется ***суммой ряда.*** Символически сходящийся ряд может быть представлен равенством:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если предел (1.2) не существует или равен бесконечности, то ряд (1.1) называется ***расходящимся.***

Итак, чтобы исследовать ряд (1.1) на сходимость необходимо получить формулу его n-ой частичной суммы, а затем вычислить предел(1.2).

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии (геометрического ряда)

$$a_1 + a_1 q + a_1 q_2 + a_1 q_3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1},\ a_1 \neq 0.$$

Решение. Составим n-ую частичную сумму геометрического ряда:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^{n-1}.$$

Умножим S_n на q, получим

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n.$$

Вычтем из первого равенства второе, получим

$$S_n - S_n q = a_1 - a_1 q^n \quad \text{или} \quad S_n(1-q) = a_1(1-q^n).$$

Таким образом, формула n-ой частичной суммы геометрического ряда имеет вид:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Вычислим предел (1.2):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right) = \frac{a_1}{1-q}\left(1-\lim_{n\to\infty} q^n\right).$$

Значение предела зависит от величины q знаменателя прогрессии.

Если $0<|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, следовательно, согласно определению, геометрический ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, а, значит, согласно определению, геометрический ряд расходится. ▶

Пример 1.5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Решение. Запишем частичные суммы данного ряда:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1-\frac{1}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 1-\frac{1}{4}, \ldots.$$

Таким образом, формула n-ой частичной суммы ряда имеет вид $S_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$.

Воспользуемся определением сходимости числового ряда (1.2) и вычислим предел его n-ой частичной суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Так как этот предел принимает конечное значение, то исследуемый ряд сходится и его сумма S равна 1. ▶

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Решение. Общий член ряда представляет собой правильную дробь, которая может быть разложена на три простейших дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2\cdot(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Составим n-ую частичную сумму ряда:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Можно заметить, что при суммировании каждых трех последовательных элементов ряда взаимно уничтожается третье слагаемое в первом элементе, второе во втором и первое в третьем. Формула n-ой частичной суммы ряда имеет вид:
$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$, т.е. последовательность частичных сумм ряда сходится, а, значит, сходится и ряд. ▶

1.2. Свойства числовых рядов

Сходимость числового ряда и его остатка. Если отбросить первые m членов ряда (1.1), то получится числовой ряд вида
$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n\,, \qquad (1.3)$$
называемый ***остатком ряда после*** m***-го члена.***

Теорема 1.1. Если сходится числовой ряд (1.1), то сходится любой из его остатков (1.3) и, наоборот, если сходится любой из остатков ряда (1.3), то сходится и сам числовой ряд (1.1).

Доказательство. **1.** Пусть числовой ряд (1.1) сходится и его сумма равна S (т.е. выполняется равенство (1.2)).

Зафиксируем число m. Обозначим k-ую частичную сумму ряда (1.3) S'_k, она определяется равенством:
$$S'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}.$$

Тогда k-ая частичная сумма ряда (1.1) определяется равенством: $S_k=S_m+S'_k$, где $S_m=a_1+a_2+\ldots+a_m$ — частичная сумма ряда (1.1) — некоторое число.

Получаем, что k-ая частичная сумма ряда (1.3) равна
$$S'_k=S_k-S_m.$$

Вычислим ее предел:

$$\lim_{k\to\infty} S'_k = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_m = S - S_m.$$

Предел частичной суммы ряда (1.3) принимает конечное значение, следовательно, этот ряд сходится. Первая часть теоремы доказана.

2. Пусть ряд (1.3) сходится и его сумма равна S' (т.е. выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} S'_k = S'$). Вычислим предел k -ой частичной суммы S_k ряда (1.1):

$$S_k = S_m + S'_k, \quad \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_m + \lim_{k\to\infty} S'_k = S_m + S' = S.$$

Предел частичной суммы ряда (1.1) принимает конечное значение, следовательно, этот ряд сходится. Вторая часть теоремы доказана. ■

Таким образом, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или приписывание нескольких новых членов в его начале, не отражается на поведении ряда.

Теорема 1.2. Если числовой ряд (1.1) сходится, то сумма его остатка после m-го члена стремится к нулю с возрастанием m.

Доказательство. Если числовой ряд (1.1) сходится, то, в соответствии с теоремой 1.1, сходится и его остаток — ряд (1.3). Обозначим сумму его остатка (1.3) после m-го члена S'_m. Сумму ряда (1.1) можно представить в виде

$$S = S_m + S'_m,$$

а, значит, сумма его остатка (1.3) определяется равенством

$$S'_m = S - S_m.$$

Тогда предел суммы остатка:

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{k\to\infty} S - \lim_{k\to\infty} S_m = S - S = 0,$$

т.е. сумма остатка после m -го члена с возрастанием m стремится к нулю. ■

Линейные операции над числовыми рядами. Определим линейные операции над рядами.

Произведением ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***на число*** c называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, члены которого получены умножением членов исходного ряда на данное число.

Суммой числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, члены которого получены суммированием соответствующих членов исходных рядов.

Теорема 1.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, где c — некоторое число, также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

Доказательство. Основано на определении сходимости числового ряда. Пусть S_n частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, обозначим $\overline{S}_n$ частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Так как

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

то

$$\overline{S}_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n = c \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_n) = c \cdot S_n.$$

По условию теоремы выполняется равенство (1.2).

Вычислим предел частичной суммы $\overline{S}_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} (c \cdot S_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S.$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится и его сумма равна $c \cdot S$. ■

Теорема 1.4. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а их суммы равны соответственно $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$, то также сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и его сумма равна $\overline{S} + \overline{\overline{S}}$.

Доказательство. Основано на определении сходимости числового ряда. Обозначим n-е частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно $\overline{S}$ и $\overline{\overline{S}}$. Они определяются равенствами:

$$\overline{S} = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad \overline{\overline{S}} = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Тогда частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ имеет вид:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n) = \overline{S} + \overline{\overline{S}}.$$

Так как по условию теоремы выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \overline{S} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{\overline{S}}_n = \overline{\overline{S}}, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_n+\overline{\overline{S}}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n+\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{S}}_n=\overline{S}+\overline{\overline{S}},$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ сходится и имеет сумму $\overline{S}+\overline{\overline{S}}$. ■

1.3. Необходимый признак сходимости

Для исследования сходимости ряда по определению необходимо иметь формулу его n-ой частичной суммы S_n, которую далеко не всегда можно найти. Потому на практике применяются специальные признаки сходимости. Как правило, исследование начинают с использования необходимого признака сходимости.

Теорема 1.5. Если ряд (1.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Представим n-ую частичную сумму ряда (1.1) в виде: $S_n=S_{n-1}+a_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}+\lim_{n\to\infty} a_n.$$

По условию теоремы ряд сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S$.

Имеем $S=S+\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. ■

Замечание. Теорема 1.5 представляет необходимый, но недостаточный признак сходимости, т.е. если равенство (1.4) выполняется, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Однако, если равенство (1.4) не выполняется, то ряд однозначно расходится. Поэтому условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ называется ***достаточным признаком расходимости.***

Пример 1.7. Исследовать заданные ряды с помощью необходимого признака:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-5}\right)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n}$.

Решение. Для каждого ряда вычислим предел общего члена (1.4) и сделаем вывод о поведении ряда.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1}=0$, необходимый признак выполняется, следовательно, ряд может сходиться, а может расходиться. Для установления поведения ряда требуется дополнительное исследование.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$, необходимый признак не выполняется, ряд расходится.

3) рассмотрим последовательности $\{\sin n\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, из которых первая является ограниченной, а вторая — бесконечно малой. Известно, что последовательность, полученная умножением ограниченной на бесконечно малую, является бесконечно малой.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$, значит, требуется дополнительное исследование для установления поведения ряда.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{n}=m,\\ m\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sin m}{m}=1$, так как в результате замены получим первый замечательный предел. Необходимый признак не выполняется, следовательно, ряд расходится.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n-5}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$, необходимый признак выполняется, для установления поведения ряда требуется дополнительное исследование.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n}=\left[1^\infty\right]$. Выполним преобразования и выделим второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3-4}{2n+3}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n+3}\right)^{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{2n+3}{4}}\right)^{-\frac{2n+3}{4}}\right]^{-\frac{4}{2n+3}\cdot 3n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{12n}{2n+3}}=e^{-6}\neq 0,$$

необходимый признак не выполняется, ряд расходится. ▶

Гармонический ряд. Большое значение в исследовании рядов на сходимость имеют так называемые ***эталонные ряды,*** сходимость или расходимость которых установлена. Так, эталонным является геометрический ряд, рассмотренный в примере 1.4.

Эталонным также является ряд вида

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

называемый ***гармоническим.***

Для гармонического ряда необходимый признак сходимости выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Покажем, что ряд расходится. Для этого сгруппируем члены ряда, начиная с третьего, последовательно по 2, 4, 8 и т.д. членов:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+....$$

В каждой из круглых скобок заменим все слагаемые последним:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)+....$$

Очевидно, что в результате такой замены сумма в скобках уменьшилась и стала равной $\frac{1}{2}$. Получили сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}...,$$

которая стремится к бесконечности.

Итак, сумма меньших членов стремится к бесконечности, а, следовательно, и сумма больших членов, представляющая гармонический ряд, также стремится к бесконечности. Таким образом, гармонический ряд расходится.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Ряды заданы формулой общего члена a_n. Определить их третий и десятый члены:

1) $a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$; 2) $a_n=\frac{(2n)!}{2n-1}$;

3) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{2n+1}$; 4) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n}{3n+2}$;

5) $a_n=\frac{2n-1}{4n^2+1}$; 6) $a_n=\frac{2n}{n!}$;

7) $a_n\frac{(2n-1)!!}{n\cdot\left(2^{n+1}\right)}$; 8) $a_n=\frac{1}{2n!!}$,

где $(2n-1)!!=1\cdot7\cdot...\cdot(2n-1)$, $2n!!=2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2n$.

1.2. Ряды заданы рекуррентным соотношением. Записать формулу их общего члена:

1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 2$; 2) $a_1 = -5,\ a_{n+1} = a_n + 3$;

3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = -3 \cdot a_n$; 4) $a_1 = -3,\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n$;

5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n!$; 6) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$;

7) $a_1 = 1,\ a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$; 8) $a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 1$.

1.3. Для данного ряда записать формулы общего члена:

1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \ldots$; 2) $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{24} + \ldots$;

3) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{8} - \frac{8}{11} + \frac{16}{14} + \ldots$; 4) $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{7}{9} + \ldots$;

5) $1 + 2\frac{1}{4} + \frac{27}{9} + 3\frac{1}{16} + 3\frac{6}{25}$; 6) $2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \ldots$;

7) $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$; 8) $-1;\ 1;\ -1\ 1;\ -1 \ldots$.

1.4. Для данных рядов записать формулу n-ой частичной суммы. Исследовать поведение рядов и в случае сходимости определить их сумму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + 24n + 35}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + 32n + 63}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5)}$;

9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{4n - 2}{(n^2 - 1) \cdot (n-2)}$; 10) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n + 5}{(n+2) \cdot (n^2 - 1)}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{3n + 2}{3n - 1}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{5n - 3}{5n + 2}$.

1.5. Для данных рядов проверить выполнение необходимого признака сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 3n - 4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3n + 2}{\sqrt{n^2 - 3n + 5}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 3n}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n-4}{5n+7}\right)^{-n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{5n-1}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{2-3n}$.

Глава 2. Исследование сходимости числовых рядов с положительными членами

Определение и необходимый признак сходимости во многих случаях не позволяют установить поведение числового ряда. На практике для решения вопроса о том, сходится данный ряд или расходится, чаще всего используют достаточные признаки.

В этой главе будем исследовать числовые ряды постоянного знака, точнее, положительные ряды, для которых $a_n \geq 0$. Рассмотрим условие сходимости, а затем достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов.

Замечание. Нет необходимости отдельно рассматривать отрицательные ряды, для которых $a_n \leq 0$, так как, отрицательный ряд становится положительным при умножении его на (-1), при этом, согласно теореме 1.3, поведение ряда не меняется.

2.1. Условие сходимости числового ряда

Будем рассматривать положительный числовой ряд, члены которого неотрицательны:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \ \ (a_n \geq 0). \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. Ряд (2.1) имеет конечную сумму (т.е. сходится), если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена сверху. В противном случае ряд имеет бесконечную сумму (т.е. расходится).

Доказательство. Для частичных сумм ряда (2.1) выполняется равенство

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n\,,$$

значит, последовательность частичных сумм является монотонно возрастающей. Если при этом найдется положительное число $M > 0$, такое, что для любого номера n будет выполняться неравенство $S_n \leq M$, то последовательность частичных сумм является также ограниченной сверху. Известно, что любая монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет конечный предел (теорема Вейерштрасса). Таким образом, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, соответствующее определению сходимости. Следовательно, ряд (2.1) сходится. ■

Итак, условием сходимости положительного числового ряда является ограниченность сверху последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$.

Обобщенный гармонический ряд. Рассмотрим числовой ряд вида

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}(\alpha\in R),$$

который называется ***обобщенным гармоническим.***

Для обобщенного гармонического ряда необходимый признак сходимости выполняется $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\right)$, ряд может сходиться, а может расходиться. Исследуем поведение ряда.

При $\alpha=1$ имеем гармонический ряд, который, как было показано ранее, расходится.

При $\alpha<1$ выполняется неравенство $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^\alpha}$. Следовательно, в этом случае обобщенный гармонический ряд расходится, так как каждый его член больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда, последовательность частичных сумм не может быть ограниченной, условие теоремы 2.1 не выполняется.

Пусть $\alpha>1$. Сгруппируем члены ряда, начиная со второго, последовательно по 2, 4, 8 и т.д. членов:

$$1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{8^\alpha}+\ldots+\frac{1}{15^\alpha}\right)+\ldots.$$

Если в каждой скобке заменить все слагаемые на первое в этой скобке, то получим:

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}=\frac{2}{2^\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha-1}};$$

$$\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}=\frac{4}{4^\alpha}=\frac{1}{4^{\alpha-1}}=\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}};$$

$$\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}=\frac{8}{8^\alpha}=\frac{1}{8^{\alpha-1}}=\frac{1}{2^{3(\alpha-1)}},$$

$$\ldots.$$

Обозначим $k=\alpha-1$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}=\frac{1}{2^k};$$

$$\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}<\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}=\frac{1}{2^{2k}};$$

$$\frac{1}{8^\alpha}+\ldots+\frac{1}{15^\alpha}<\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}=\frac{1}{2^{3k}};$$

$$\ldots .$$

Таким образом, сгруппированные члены обобщенного гармонического ряда меньше соответствующих членов сходящегося геометрического ряда, сумма которого $S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^k}}$. Значит, последовательность частичных сумм обобщенного гармонического ряда ограничена сверху, по теореме 2.1 ряд сходится.

Обобщенный гармонический ряд будем в дальнейшем использовать как эталонный.

Рассмотренное выше условие сходимости числового ряда является основой для доказательства ***достаточных признаков сходимости.***

2.2. Признаки сравнения

Теорема 2.2. Первый признак сравнения. Пусть даны два числовых ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,(*) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,(**),$$

причем для любого номера n выполняется неравенство $a_n \le b_n$, т.е. каждый член ряда $(*)$ не превосходит соответствующего члена ряда $(**)$. Тогда:

1) из сходимости ряда $(**)$ следует сходимость ряда $(*)$;

2) из расходимости ряда $(*)$ следует расходимость ряда $(**)$.

Доказательство. Если $S_n^{(*)}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ и $S_n^{(**)}=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ — частичные суммы рядов и ряд $(**)$ сходится, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(**)}=S^{(**)}$, причем $S_n^{(*)}\le S_n^{(**)}\le S^{(**)}$, следовательно, последовательность частичных сумм ряда $(*)$ ограничена сверху числом $S^{(**)}$, а значит, по теореме 2.1 ряд $(*)$ сходится. Если же ряд $(*)$ расходится, но поскольку, по условию теоремы, выполняется неравенство $S_n^{(*)}\le S_n^{(**)}$, то так же расходится ряд $(**)$. ■

Пример 2.1. Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8}{(n+2)^3\cdot 3^n};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-n-1}}.$$

Решение. 1) Подберем эталонный ряд, для этого преобразуем формулу его общего члена:

$$a_n=\frac{n^3+8}{(n+2)^3\cdot 3^n}=\frac{n^3+8}{\left(n^3+6n^2+12n+8\right)\cdot 3^n},$$

очевидно, что $a_n<\dfrac{n^3+8}{\left(n^3+8\right)\cdot 3^n}=\dfrac{1}{3^n}$.

Так как геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ является сходящимся, то по первому условию признака сравнения (теорема 2.2) исходный ряд сходится.

2) Общий член ряда удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-n-1}}.$$

В качестве эталонного возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, который является расходящимся обобщенным гармоническим $\left(\alpha=\dfrac{2}{3}<1\right)$. Тогда по второму условию признака сравнения (теорема 2.2) исходный ряд расходится. ▶

Теорема 2.3. Второй признак сравнения (предельный). Пусть даны два числовых ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A\quad(0<A)$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В соответствии с определением предела числовой последовательности, для любого положительного числа ε найдется номер n_0, начиная с которого (т.е. для всех $n\ge n_0$) будет выполняться неравенство: $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-A\right|<\varepsilon$ или $A-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon$, $(A-\varepsilon)b_n<a_n<(A+\varepsilon)b_n$. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, то по теореме 1.3 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)b_n$, и по признаку сходимости (теорема 2.2) сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$; если же сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, то по признаку сравнения (теорема 2.2) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)b_n$, а тогда по теореме 1.3 также сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Аналогично можно доказать теорему для расходящихся рядов. ■

Пример 2.2. Исследовать сходимость рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1};\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^4-2n^2+5}.$$

Решение. 1) Исследуем поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{n^2+1}$.
Воспользуемся предельным признаком (теорема 2.3) и сравним ряд с эталонным расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n}{n^2+1}:\frac{1}{n}\right)=\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=\pi,$$

то по предельному признаку сравнения (теорема 2.3) оба ряда расходятся.

Теперь используем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{n^2+1}$ как эталонный для исходного ряда. Вычислим предел отношения их общих членов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{n^2+1}}{\frac{\pi n}{n^2+1}}=\left|\begin{array}{l}\frac{\pi n}{n^2+1}=m,\\ m\to 0\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin m}{m}=1.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения (теорема 2.3) исходный ряд расходится.

2) Если общий член ряда представлен дробно рациональным выражением, то в качестве эталонного ряда следует взять обобщенный гармонический ряд с показателем степени α равным разности степеней многочленов знаменателя и числителя. Для данного ряда $\alpha=4-2=2>1$, т.е. эталонным будет сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{3n^4-2n^2+5}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2}{3n^4-2n^2+5}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4 \cdot \left(3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)} = \frac{1}{3},$$

то по предельному признаку сравнения (теорема 2.3) оба ряда сходятся. ▶

2.3. Достаточные признаки Даламбера, Коши, Коши–Маклорена

Теорема 2.4. Признак Даламбера. Пусть для положительного числового ряда (2.1) существует конечный или бесконечный предел отношения $(n+1)$-го члена ряда к предыдущему n-му члену:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Тогда:

1) при $A<1$ ряд (2.1) сходится;

2) при $A>1$ ряд (2.1) расходится;

3) при $A=1$ признак не дает ответ на вопрос о сходимости ряда, требуется дополнительное исследование.

Доказательство. В соответствие с определением предела числовой последовательности, для любого положительного числа ε найдется номер m, начиная с которого (т.е. для всех $n \ge m$) будет выполняться неравенство:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - A\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad A-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A+\varepsilon.$$

Пусть $A<1$, подберем ε так, чтобы $A+\varepsilon = A_1 < 1$. Тогда

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < A_1, \quad \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < A_1, \quad \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < A_1, \quad \ldots .$$

Получаем

$$a_{m+1} < A_1 a_m, \quad a_{m+2} < A_1 \cdot a_{m+1} < A_1^2 a_m,$$

$$a_{m+3} < A_1 \cdot a_{m+2} < A_1^2 \cdot a_m, \quad \ldots.$$

Члены ряда $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots$, являющегося остатком ряда (2.1) после m-го члена, меньше соответствующих членов сходящегося геометрического ряда $a_m\left(A_1 + A_1^2 + A_1^3 + \ldots\right)$.

По первому условию признака сравнения (теорема 2.2) остаток ряда (2.1) сходится, а, следовательно, по теореме 1.1 сходится и сам ряд (2.1).

Пусть $A>1$, подберем ε так, чтобы $A-\varepsilon = A_2 > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n$, т.е. последующий член ряда (2.1) всегда больше предыдущего, значит, необходимый признак сходимости (теорема 1.5), согласно которому общий член ряда должен стремиться к нулю не выполняется, ряд расходится. ■

Пример 2.3. Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n(n+1)!};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)\cdot n!}.$$

Решение. 1) Так как $a_n=\dfrac{5^n}{7^n(n+1)!}$, то

$$a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}(n+2)!}=\frac{5\cdot5^n}{7\cdot7^n(n+1)!(n+2)}.$$

Воспользуемся признаком Даламбера (теорема 2.4):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot5^n}{7\cdot7^n(n+1)!(n+2)}\cdot\frac{7^n(n+1)!}{5^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{7\cdot(n+2)}=0<1.$$

Таким образом, ряд сходится.

2) Общий член ряда имеет вид

$$a_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)\cdot n!},$$

тогда последующий член

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-1)}{((n+1)+1)\cdot(n+1)!}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{(n+2)\cdot n!\cdot(n+1)}.$$

Воспользуемся признаком Даламбера (теорема 2.4):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{(n+2)\cdot n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{(n+1)\cdot n!}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)}=2>1.$$

Следовательно, ряд расходится. ▶

Теорема 2.5. Радикальный признак Коши. Пусть для положительного числового ряда (2.1) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

Тогда:

1) при $A<1$ ряд (2.1) сходится;

2) при $A>1$ ряд (2.1) расходится;

3) при $A=1$ признак не дает ответ на вопрос о сходимости ряда, требуется дополнительное исследование.

Доказательство. Воспользуемся тем же подходом, что и при доказательстве признака Даламбера. По определению предела числовой последовательности имеем, что для любого положительного числа ε найдется номер n_0, начиная с которого (т.е. для всех $n \ge n_0$) будет выполняться неравенство: $\left|\sqrt[n]{a_n} - A\right| < \varepsilon$, или $A-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < A+\varepsilon$, или $(A-\varepsilon)^n < a_n < (A+\varepsilon)^n$.

Пусть $A<1$, подберем ε так, чтобы $A+\varepsilon = A_1 < 1$. Тогда $a_n < A_1^n$, т.е. члены ряда (2.1) меньше соответствующих членов сходящегося геометрического ряда. По первому условию признака сравнения (теорема 2.2) ряд (2.1) сходится.

Пусть $A>1$, подберем ε так, чтобы $A-\varepsilon = A_2 > 1$. Имеем $a_n > A_2^n$, т.е. члены ряда (2.1) больше соответствующих членов сходящегося геометрического ряда. По второму условию признака сравнения (теорема 2.2) ряд (2.1) расходится. ■

Пример 2.4. Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n+9}{5n-1}\right)^{-n^2};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}.$$

Решение. 1) Общий член ряда имеет вид

$$a_n = \left(\frac{10n+9}{5n-1}\right)^{-n^2} = \left(\frac{5n-1}{10n+9}\right)^{n^2}.$$

Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 2.5):

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\leftarrow\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{10n+9}\right)^{n^2}} = \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{5n-1}{10n+9}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{5}{10}\right)^{n} = \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0 < 1.$$

Таким образом, ряд сходится.

2) Общий член ряда имеет вид $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}$.

Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 2.5):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n} = \left[1^{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+4}\right)^{n+4}\right]^{\frac{n}{n+4}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+4}} = e > 1.$$

Таким образом, ряд расходится. ▶

Теорема 2.6. Интегральный признак Коши-Маклорена. Пусть элементы положительного числового ряда (2.1) являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при натуральных значениях ее аргумента x, т.е.

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ ...,\ f(n)=a_n,\ ...,$$

причем функция $f(x)$ монотонно убывает на интервале $[1;+\infty)$. Тогда ряд (2.1) и несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \tag{2.2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, с основанием от $x=1$ до $x=n$ $(n\in N)$ (рис. 2.1). Величина площади S этой криволинейной трапеции равна значению интеграла

$$S=\int_1^{n} f(x)dx. \tag{2.3}$$

Разобьем основание криволинейной трапеции на частичные отрезки точками $x=1$, $x=2,...,x=n+1$ и построим две n-ступенчатые фигуры: «входящую», площадь которой

$$S_{вх}=f(2)+f(3)+...+f(n)=S-f(1)=S_n-a_1;$$

«выходящую», имеющую площадь

$$S_{вых}=f(1)+f(2)+...+f(n-1)=S-f(n)=S_n-a_n,$$

где $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ — n-ая частичная сумма ряда (2.1).

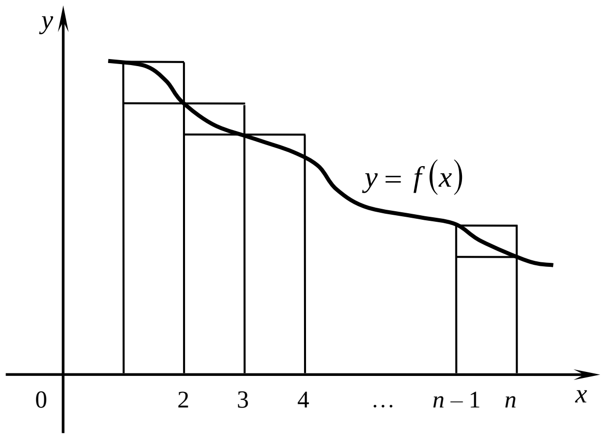

Рис. 2.1

Очевидно, что выполняется неравенство:

$$S_{вх}<S<S_{вых}$$

или

$$S_n - a_1 < \int_1^{\infty} f(x)dx < S_n - a_n. \qquad (2.4)$$

Так как по условию $f(x) > 0$, то значение интеграла (2.3) возрастает с ростом n.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = A$, т.е. несобственный интеграл (2.2) сходится, то из левой части неравенства (2.4) имеем $S_n < a_1 + A$. Следовательно, по теореме (2.1) ряд 2.1 сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = \infty$ несобственный интеграл расходится, т.е. несобственный интеграл (2.2) расходится, то из правой части неравенства (2.4) имеем неограниченное возрастание частичных сумм S_n ряда (2.1), следовательно, ряд расходится. ■

Пример 2.5. Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+1\right)\operatorname{arctg} n};\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}.$$

Решение. 1) Члены, определяемые формулой общего члена $a_n = \frac{1}{\left(n^2+1\right)\operatorname{arctg} n}$ $(n = 1, 2, ...)$, являются значениями функции $f(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x}$, убывающей и непрерывной на интервале $[1; +\infty)$.

Исследуем сходимость несобственного интеграла:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{b\to\infty}\ln\left|\operatorname{arctg} x\right|\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\operatorname{arctg} b\right| - \ln\left|\operatorname{arctg} 1\right|\right) = \ln\frac{\pi}{2} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right) = \ln 2.$$

Таким образом, интеграл сходится, значит, ряд также сходится (теорема 2.6).

2) Члены ряда определяются формулой $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ и являются значениями монотонно убывающей на интервале $[1; +\infty)$ непрерывной функции $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Исследуем сходимость несобственного интеграла:

$$\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_1^b\frac{dx^2}{x^2+1}\right)=\lim_{b\to\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln\left(b^2+1\right)-\ln 2=+\infty.$$

Таким образом, интеграл расходится, значит, ряд также расходится (теорема 2.6). ▶

Задания для самостоятельного решения

2.1. Исследовать данные ряды на сходимость используя признаки сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}}{1+n^4}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)\cdot(n+2)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{n^3+4}$.

2.2. Исследовать данные ряды на сходимость используя признак Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3^n(3n+5)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^n\left(n^3+1\right)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n^2}{n+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\ldots\cdot(5n-3)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots\cdot(3n-1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n(n+5)\cdot 7^n}$.

2.3. Исследовать данные ряды на сходимость используя радикальный признак Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n^2}$.

2.4. Исследовать данные ряды на сходимость используя интегральный признак Коши–Маклорена:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\left(1+\ln^2 n\right)}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln n}}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+4n+5}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$.

2.5. Исследовать данные ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{2^n+n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln^2 n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{2^n\cdot n!}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+4}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$;

12) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+5)}}$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+n+6}}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$;

17) $\sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{2n}{n\cdot(2^n+1)}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\sin n}$;

19) $\frac{1}{13}+\frac{2}{16}+\frac{3}{19}+\frac{4}{22}+\ldots$;

20) $\frac{\sqrt{1!}}{3}+\frac{\sqrt{2!}}{3^2}+\frac{\sqrt{3!}}{3^3}+\ldots$.

Глава 3. Исследование сходимости знакопеременных числовых рядов

Числовой ряд, члены которого могут быть как положительными, так и отрицательными, называется ***знакопеременным.*** Исследование сходимости знакопеременных рядов имеет свои особенности, но при этом основано на исследовании сходимости рядов с положительными членами. В данном параграфе сначала рассмотрим важный частный случай знакопеременного ряда — знакочередующийся ряд, затем перейдем к общему подходу к исследованию сходимости знакопеременных рядов.

3.1. Знакочередующиеся числовые ряды

Числовой ряд

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n \quad (a_n>0), \tag{3.1}$$

положительные и отрицательные элементы которого следуют друг за другом поочередно, называется ***знакочередующимся.***

Замечание. Знакочередующийся ряд может также иметь вид

$$-a_1+a_2-a_3+a_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n=-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n.$$

Для исследования сходимости знакочередующегося ряда используется единственный достаточный признак.

Теорема 3.1. Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда (3.1) выполняются условия:

1) члены ряда по абсолютной величине убывают, т.е. $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ... (a_n > a_{n+1})$;

2) общий член ряда стремится к нулю, т.е. выполняется необходимый признак сходимости числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

То тогда:

1) ряд (3.1) сходится;

2) сумма ряда не превосходит его первого члена, т.е. $S \le a_1$;

3) остаток ряда после m-го члена R_m меньше своего первого члена a_{m+1}, т.е. $R_m < a_{m+1}$.

Доказательство. Пусть для ряда (3.1) оба условия теоремы выполняются. Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда с четным числом членов $\{S_{2n}\}$, где

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Сгруппируем слагаемые частичной суммы:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

В силу первого условия теоремы все разности в скобках положительны, следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}$ — монотонно возрастающая.

Сгруппируем слагаемые частичной суммы иначе:

$$S_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}].$$

Так как разности в скобках положительны, выполняется неравенство: $S_{2n} < a_1$. Значит, последовательность S_{2n} — ограниченная.

Из ограниченности и монотонности следует, что последовательность $\{S_{2n}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда (3.1) с нечетным числом членов $\{S_{2n+1}\}$, где

$$S_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Перейдем к пределу, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S,$$

так как в силу второго условия теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$.

Таким образом, независимо от количества членов, последовательность частичных сумм ряда (3.1) $\{S_n\}$ сходится и имеет предел S, значит, сходится и сам ряд, причем его сумма равна S. Первое утверждение заключения теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения сгруппируем слагаемые частичной суммы нечетного числа членов

$$S_{2n+1} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + (a_{2n} - a_{2n+1})].$$

Как уже отмечалось, разности в скобках положительны, т.е. $S_{2n+1} < a_1$ и последовательность $\{S_{2n+1}\}$ — монотонно убывающая. Имеем:

$$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots \text{ и } S_1 > S_3 > S_5 > \ldots, \text{ причем } S_{2n} < S_{2n+1} < a_1.$$

Итак, последовательность частичных сумм ряда (3.1) приближается к своему пределу колеблясь и сумма ряда меньше его первого члена a_1 (рис. 3.1).

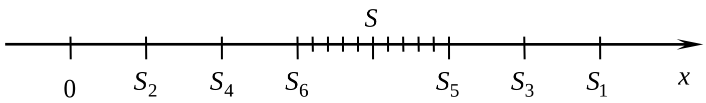

Рис. 3.1

Поскольку остаток ряда (3.1) $R_m = a_{m+1} + a_{m+2} \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы, значит, для него выполняются доказанные выше заключения, т.е. $R_m < a_{m+1}$. Третье утверждение также доказано. ■

Пример 3.1. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + n^2};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{(n+1)!}.$$

Решение. 1) Члены ряда по абсолютной величине убывают $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ $\left(1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots > \frac{1}{n} > \ldots\right)$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, т.е. оба условия признака Лейбница (теорема 3.1) выполняются, значит, данный ряд сходится.

2) Вычислим предел общего члена ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n + n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \ln 3}{3^n \cdot \ln 3 + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \ln^2 3}{3^n \cdot \ln^2 3 + 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \ln^3 3}{3^n \cdot \ln^3 3} = 1 \neq 0$$

(здесь трижды использовано правило Лопиталя).

Второе условие признака Лейбница (теорема 3.1) не выполняется, значит, ряд расходится.

3) Проверим выполнение условий признака Лейбница (теорема 3.1). Сравним последующий a_{n+1} и предыдущий a_n члены ряда:

$$a_n = \frac{2^n}{(n+1)!},\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{((n+1)+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+2)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)! \cdot (n+2)},$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)! \cdot (n+2)} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} < 1$, следовательно, $a_n > a_{n+1}$, т.е. первое условие выполняется.

Предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}=0$ (так как скорость роста знаменателя много больше скорости роста числителя) оба условия признака выполняются, ряд сходится. ▶

Пример 3.2. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 3^n}{(n+3)^n}$ с точностью $\delta=0{,}01$.

Решение. Члены ряда убывают с возрастанием номера:

$$\frac{3^n}{(n+3)^n}>\frac{3\cdot 3^n}{(n+4)^{n+1}}=\frac{3^n}{(n+4)^n}\cdot\frac{3}{n+4},\ \left(\frac{3}{n+4}<1\right).$$

Общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(n+3)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+3}\right)=0.$$

Так как условия признака Лейбница (теорема 3.1) выполняются, то ряд сходится.

Выпишем члены ряда:

$$a_1=\frac{3}{4};\quad a_2=\frac{9}{25};\quad a_3=\frac{27}{216};\quad a_4=\frac{81}{2401};\quad a_5=\frac{243}{32768}.$$

Начиная с пятого члены ряда меньше δ $(a_5<\delta=0{,}01)$.

Таким образом, для вычисления суммы ряда с заданной точностью достаточно просуммировать первые четыре члена ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(n+3)^n}\approx\frac{3}{4}+\frac{9}{25}-\frac{27}{216}+\frac{81}{2401}\approx -0{,}4813.$$ ▶

3.2. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных числовых рядов

Пусть члены числового ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,, \tag{3.2}$$

имеют произвольное распределение знаков.

Рассмотрим один общий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Теорема 3.2. Признак абсолютной сходимости. Если для знакопеременного ряда (3.2) сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ..., \tag{3.3}$$

то и сам знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (3.2), через S_n^+ — сумму всех положительных членов, а через S_n^- — сумму абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов ряда. Тогда

$$S_n = S_n^+ - S_n^- \quad \text{и} \quad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-,$$

где $\sigma_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ — сумма n первых членов ряда (3.3).

Так как по условию σ_n имеет предел (обозначим его через σ), а S_n^+ и S_n^- — положительные и возрастающие функции от n, причем $S_n^+ \le \sigma_n < \sigma$ и $S_n^- \le \sigma_n < \sigma$, то и они имеют пределы. Следовательно, и $S_n = S_n^+ - S_n^-$ при $n \to \infty$ стремится к пределу, т.е. ряд (3.2) сходится. ■

Замечание. Признак абсолютной сходимости не является необходимым, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться и тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Знакопеременный ряд (3.2), для которого соответствующий ряд из абсолютных величин членов вида (3.3) сходится, называется ***абсолютно сходящимся.*** Если ряд (3.2) сходится, а соответствующий ряд (3.3) расходится, то знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся.***

Пример 3.3. Исследовать характер сходимости рядов примера 3.1.

Решение. 1) Для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ рядом из абсолютных величин членов является гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится, т.е. исходный ряд сходится условно.

2) Для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{(n+1)!}$ соответствующий ряд из абсолютных величин членов имеет вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера (теорема 2.4).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)! \cdot (n+2)} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0 < 1.$$

Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ▶

Пример 3.4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}.$$

Решение. Ряд является знакочередующимся с общим членом $a_n=\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}$.

Проверим выполнение условий признака Лейбница (теорема 3.1). Очевидно, что для любого номера выполняется неравенство

$$a_n=\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}\geq a_{n+1}=\left(\frac{7n+22}{14n+13}\right)^{(n+1)^2},$$

т.е. члены ряда убывают с возрастанием n. Общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}=0.$$

Оба условия выполняются, ряд сходится условно. Проверим абсолютную сходимость. Ряд из абсолютных величин членов имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}$.

Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 2.5):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+15}{14n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0.$$

Ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный знакопеременный ряд сходится и притом абсолютно. ▶

Разграничение абсолютной и неабсолютной (условной) сходимостей рядов является весьма существенным, так как некоторые свойства конечных сумм переносятся только на абсолютно сходящиеся ряды, в то время как условно сходящиеся ряды этими свойствами не обладают.

Так, абсолютно сходящиеся ряды обладают, как и обычные суммы конечного числа слагаемых, переместительным свойством, (т.е. при любой перемене мест членов абсолютно сходящегося ряда он остается абсолютно сходящимся и с той же суммой). Этим свойством не обладают условно сходящиеся ряды. Оказывается, переставляя члены такого ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится.

Например, переставим члены условно сходящегося ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

Затем сложим каждый положительный член с идущим после него отрицательным:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

В результате получим ряд, члены которого образованы произведениями членов исходного ряда на $\frac{1}{2}$. По свойству (1.3) имеем, что этот ряд тоже сходится и сумма его равна половине суммы исходного ряда. Таким образом, изменив только порядок следования членов ряда, мы уменьшили его сумму вдвое.

Отметим так же, что абсолютно сходящиеся ряды обладают еще одним важным свойством: их можно перемножать. При этом получается ряд из всевозможных парных произведений членов исходных рядов, который также является абсолютно сходящимся, и его сумма равна произведению сумм рядов сомножителей.

Задания для самостоятельного решения

3.1. Исследовать данные ряды на абсолютную или условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 4^{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(n-3)}{n^2-1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\frac{3n-2}{5n+1}\right)^{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\operatorname{arctg} n\cdot(1+n^2)}$.

3.2. Вычислить сумму данных рядов с указанной точностью δ:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \quad \delta=0{,}01;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \quad \delta=0{,}001;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \delta=0{,}01;$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}, \quad \delta=0{,}001;$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad \delta=0{,}01;$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n^4+2}, \quad \delta=0{,}01;$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}, \quad \delta=0{,}1;$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}, \quad \delta=0{,}1.$

Тесты для самоконтроля и систематизации знаний

Вариант 1

Задание 1

Задан числовой ряд с неотрицательными членами. Верными утверждениями являются:

A: числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху;

B: последовательность частичных сумм сходящегося числового ряда монотонна;

C: существует расходящийся числовой ряд с положительными членами;

D: все числовые ряды с положительными членами сходятся.

1) A и D;
2) B и C;
3) A и C;
4) A и B;
5) C и D.

Задание 2

Верными утверждениями, среди приведенных, являются:

A: общий множитель нельзя выносить за знак суммы числового ряда;

B: сходящиеся числовые ряды можно почленно складывать;

C: существует сходящийся числовой ряд, n-остаток которого расходится;

D: в сходящемся числовом ряду можно произвольно группировать его члены, без изменения их порядка.

1) B и C;
2) B и D;
3) C и D;
4) A и B;

5) B, C, D.

Задание 3

Задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$. Верным утверждением является только:

A: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$;

B: последовательность частичных сумм числового ряда расходится;

C: сумма числового ряда конечна;

D: числовой ряд расходится;

E: предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует.

1) A, C, E;
2) B и E;
3) B, D, E;
4) D и E;
5) B, C, D.

Задание 4

Для рядов A) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; B) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$; C) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$; D) $\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ выбрать верное утверждение:

1) только A, B, D — расходятся;
2) только A и B — расходятся;
3) только B и C — расходятся;
4) A, B, D — расходятся;
5) все расходятся.

Задание 5

Для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ выбрать верное утверждение:

A: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

B: ряд расходится;

C: сходимость ряда равносильна сходимости интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

D: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=1$.

1) только C и D;
2) только A и C;
3) только A и B;

4) только A и D;
5) только A, C, D.

Задание 6

Пусть неотрицательный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится. Какие из условий являются признаками сходимости?

1) $\exists\, q \in (0;1)$ и начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} \le q$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n+1}{a_n} = D > 1$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda = 1$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

5) начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

Задание 7

Отметьте верные утверждения:

A: любой знакочередующийся ряд сходится;

B: ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ сходится;

C: в условиях теоремы Лейбница сумма ряда удовлетворяет условию $S_{2n} \le S \le S_{2n+1}$.

1) A и C;
2) A и B;
3) только B;
4) B и C;
5) только C.

Задание 8

Для рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(1)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,(2)$ выбрать верные утверждения:

A: ряд (1) сходится условно, если он сходится, а ряд (2) расходится;

B: из условия сходимости (1) следует его абсолютная сходимость;

C: если ряд (1) абсолютно сходится, то сходится (2);

D: из сходимости (1), следует сходимость (2).

1) B и D;
2) A и C;
3) A и B;
4) A и D;
5) B и C.

Задание 9

Для рядов А: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, В: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}$ выбрать верное утверждение:

1) А и В — сходятся абсолютно;
2) А и В — сходятся условно;
3) А — сходится абсолютно, В — сходится условно;
4) А — сходится условно, В — сходится абсолютно;
5) А — расходится, В — абсолютно сходится.

Задание 10

Для рядов А: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ и В: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$ выбрать верное утверждение:

1) А и В — сходятся абсолютно;
2) А и В — сходятся условно;
3) А — сходится абсолютно, В — сходится условно;
4) А — сходится условно, В — сходится абсолютно;
5) А — расходится, В — абсолютно сходится.

Задание 11

Сумма $a_1+a_2+a_3$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n+1)$ равна:

1) 12;
2) 13;
3) 15;
4) 14;
5) 16.

Задание 12

Используя предельный признак для исследования на сходимость ряда А: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}$, ряд В может принимать вид:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$;

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\ln n}$;

5) среди приведенных нет верного ответа.

Задание 13

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ равна:

1) $\frac{1}{4}$;

2) $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{6}{5}$;

4) $\frac{4}{3}$;

5) $\frac{2}{3}$.

Задание 14

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n} \right)$ равна:

1) 4;
2) 3;
3) 2;
4) 1;
5) 5.

Задание 15

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{25n^2 - 15n - 4} \right)$ равна:

1) $\frac{2}{5}$;

2) 1;
3) 5;

4) $\frac{3}{5}$;

5) $\frac{1}{5}$.

Задание 16

Сумма ряда $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ равна:

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.

Задание 17

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$ с точностью до 0,01 приблизительно равна:

1) 0,17;
2) 0,2;
3) 0,15;
4) 0,24;
5) 0,26.

Задание 18

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ равна:

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.

Задание 19

Для рядов A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$, C: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}$ выбрать верное утверждение:

1) все сходятся;
2) все расходятся;
3) A и B — расходятся, C — сходится;
4) A и C — сходятся, B — расходится;
5) B и C — расходятся условно, A — сходится.

Задание 20

Для рядов А: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$ выбрать верное утверждение:

1) А и В — необходимое условие выполнено, ряд сходится;
2) А и В — необходимое условие не выполнено, ряд расходится;
3) А — необходимое условие выполнено, ряд расходится, В — необходимое условие выполнено, ряд сходится;
4) А — необходимое условие выполнено, ряд сходится, В — необходимое условие выполнено, ряд расходится;
5) ответ отличен от приведенных.

Задание 21

Применяя свойства линейных операций над числовыми рядами, исследуйте сходимость рядов А: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^3 \cdot 3^{2n} + 10^7 \cdot 7^n}{11^n}$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - \pi^n}{3^n}$:

1) оба расходятся;
2) оба сходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) ответ отличен от приведенных.

Задание 22

Исследуйте сходимость рядов, применяя признак сравнения

А: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1000n+1}$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)\cdot 2^n}$:

1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) признак сравнения применить нельзя.

Задание 23

Применяя признак Даламбера, исследуйте сходимость рядов А: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n}$,

В: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$:

1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) признак Даламбера применить нельзя.

Задание 24

Применяя радикальный признак Коши, исследуйте сходимость рядов

А: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n+n}$, В: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$:

1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) радикальный признак Коши применить нельзя.

Задание 25

Применяя интегральный признак Коши, исследуйте сходимость рядов

А: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$, В: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n^4-9}$:

1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) интегральный признак Коши применить нельзя.

Задание 26

Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 10^{-5}?

1) невозможно вычислить;
2) более 100;
3) более 100 000;
4) более 10 000;
5) более 1000.

Задание 27

Применяя признак Лейбница, исследуйте сходимость рядов А: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$, В: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$:

1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) признак Лейбница применить нельзя.

Задание 28

Для рядов A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^3}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ выбрать верное утверждение:

1) A и B — сходятся абсолютно;
2) A и B — сходятся условно;
3) A — сходится условно, B — сходится абсолютно;
4) оба расходятся;
5) A — сходится абсолютно, B — сходится условно.

Задание 29

Применяя предельный признак, исследуйте сходимость рядов

A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$:

1) A и B — сходятся;
2) A и B — расходятся;
3) A — сходится, B — расходится;
4) A — расходится, B — сходится;
5) предельный признак применить нельзя.

Задание 30

Девятый элемент числового ряда 2; 10; 26; 82; 242; … равен:

1) 7324;
2) 19684;
3) 6560;
4) 6562;
5) 19682.

Вариант 2

Задание 1

Задан числовой ряд с неотрицательными членами. Верными утверждениями являются:

A: числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм монотонна;

B: последовательность частичных сумм сходящегося числового ряда ограничена сверху;

C: существует расходящийся числовой ряд с положительными членами;

D: все числовые ряды с положительными членами сходятся.

1) A и B;
2) B и C;
3) C и D;
4) A, B, C;

5) A и C.

Задание 2

Верными утверждениями, среди приведенных, являются:

A: из сходимости суммы числового ряда, следует сходимость каждого слагаемого числового ряда;

B: общий множитель можно выносить за знак суммы числового ряда;

C: числовой ряд сходится, если его n-остаток сходится;

D: в расходящемся числовом ряду можно произвольно группировать без изменения порядка его члены.

1) B и C;
2) B и D;
3) C и D;
4) A и B;
5) B, C, D.

Задание 3

Задан числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Верным утверждением является только:

A: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$;

B: последовательность частичных сумм числового ряда расходится;

C: сумма числового ряда конечна;

D: числовой ряд расходится;

E: предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует.

1) A и E;
2) A и B;
3) A и D;
4) A и C;
5) B и D.

Задание 4

Для рядов A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1}$; B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$; C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n+1}$; D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ выбрать верное утверждение:

1) только A и B — сходятся;
2) только C и D — сходятся;
3) только B и C — сходятся;
4) A и C — сходятся;
5) A, B, C — сходятся.

Задание 5

Для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ выбрать верное утверждение:

A: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

B: ряд расходится;

C: сходимость ряда равносильна сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

D: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = 1$.

1) только C и D;
2) только A и C;
3) только A и B;
4) только A и D;
5) только A, C, D.

Задание 6

Пусть неотрицательный числовой ряд $\sum a_n$ расходится. Какие из условий являются признаками расходимости?

1) $\exists\, q \in (0;1)$ и начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} \le q$;

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n+1} < 1$;

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$;

4) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

5) начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} < 1$.

Задание 7

Отметьте верные утверждения:

A: любой знакочередующийся ряд сходится если $a_n > a_{n+1}$ и $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

B: ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{-1}}$ расходится;

C: в условиях теоремы Лейбница сумма ряда удовлетворяет условию $S_n \le S \le S_{n+1}$.

1) A и C;
2) A и B;
3) только B;
4) B и C;
5) только C.

Задание 8

Для рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(1)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,(2)$ выбрать верные утверждения:

A: ряд (1) сходится абсолютно, если ряд (2) сходится;
B: из условия сходимости (1) $\Rightarrow$ следует его абсолютная сходимость;
C: если ряд (1) сходится условно, то он расходится;
D: из сходимости (2), следует сходимость (1).

1) A и B;
2) A и D;
3) B и C;
4) B и D;
5) A.

Задание 9

Для рядов A: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3^{n+1}}\right)^n$, B: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3^n}$ выбрать верное утверждение:

1) A и B — сходятся абсолютно;
2) A и B — сходятся условно;
3) A — сходится абсолютно, B — сходится условно;
4) A — сходится условно, B — сходится абсолютно;
5) A — расходится, B — абсолютно сходится.

Задание 10

Для рядов A: $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$ и B: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$ выбрать верное утверждение:

1) A и B — сходятся абсолютно;
2) A и B — сходятся условно;
3) A — сходится абсолютно, B —сходится условно;
4) A — сходится условно, B — сходится абсолютно;
5) A — сходится условно, B — расходится.

Задание 11

Сумма $a_1 + a_2 + a_3$ для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (3n-1)$ равна:

1) 12;
2) 13;
3) 15;
4) 14;

5) 16.

Задание 12

Используя предельный признак для исследования на сходимость ряда А: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$, ряд В может принимать вид:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n^3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\ln n}$;

5) среди приведенных нет верного ответа.

Задание 13

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n}$ равна:

1) $-\frac{1}{5}$;

2) $\frac{1}{5}$;

3) $-\frac{1}{3}$;

4) $\frac{1}{3}$;

5) $\frac{1}{2}$.

Задание 14

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8^n-3^{n+1}}{10^n}\right)$ равна:

1) $\frac{5}{7}$;

2) $\frac{6}{7}$;

3) $\frac{4}{7}$;

4) 1;

5) $\frac{2}{9}$.

Задание 15

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{6}{9n^2+12n-5}\right)$ равна:

1) $\frac{3}{5}$;

2) $\frac{4}{5}$;

3) $\frac{2}{5}$;

4) $\frac{9}{10}1$;

5) $\frac{7}{10}$.

Задание 16

Сумма ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$ равна:

1) 1;

2) $\frac{1}{2}$;

3) 2;

4) $\frac{1}{3}$;

5) $\frac{3}{2}$.

Задание 17

Сумма ряда $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}$ с точностью до 0,01 приблизительно равна:

1) -0;

2) $-0{,}17$;

3) $-0{,}064$;

4) $-0{,}42$;

5) $-0{,}032$.

Задание 18

Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+3}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)$ равна:

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.

Задание 19

Для рядов A: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ln 5^{(n/2)}$, B: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-2)^n$, C: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ выбрать верное утверждение:

1) все сходятся;
2) все расходятся;
3) A и B — расходятся, C — сходится;
4) A и C — сходятся, B — расходится;
5) B и C — расходятся условно, A — сходится.

Задание 20

Для рядов A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$ выбрать верное утверждение:

1) A и B — необходимое условие выполнено, ряд сходится;
2) A и B — необходимое условие не выполнено, ряд расходится;
3) A — необходимое условие выполнено, ряд расходится, B — необходимое условие выполнено, ряд сходится;
4) A — необходимое условие выполнено, ряд сходится, B — необходимое условие выполнено, ряд расходится;
5) ответ отличен от приведенных.

Задание 21

Применяя свойства линейных операций над числовыми рядами, исследуйте сходимость рядов A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5^n+7^n+11^n}{13^n}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2}{n(n+1)}$:

1) оба расходятся;
2) оба сходятся;
3) A — сходится, B — расходится;
4) A — расходится, B — сходится;

5) ответ отличен от приведенных.

Задание 22

Исследуйте сходимость рядов, применяя признак сравнения

A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$:

1) A и B — сходятся;
2) A и B — расходятся;
3) A — сходится, B — расходится;
4) A — расходится, B — сходится;
5) признак сравнения применить нельзя.

Задание 23

Применяя признак Даламбера, исследуйте сходимость рядов A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+n^2}{3^n+n}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n \sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$:

1) A и B — сходятся;
2) A и B — расходятся;
3) A — сходится, B — расходится;
4) A — расходится, B — сходится;
5) признак Даламбера применить нельзя.

Задание 24

Применяя радикальный признак Коши, исследуйте сходимость рядов

A: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$, B: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n\cdot\sqrt[n]{n^2}}$:

1) A и B — сходятся;
2) A и B — расходятся;
3) A — сходится, B — расходится;
4) A — расходится, B — сходится;
5) радикальный признак Коши применить нельзя.

Задание 25

Применяя интегральный признак Коши, исследуйте сходимость рядов

A: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^3 n}$, B: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$:

1) A и B — сходятся;
2) A и B — расходятся;
3) A — сходится, B — расходится;

4) А — расходится, В — сходится;
5) интегральный признак Коши применить нельзя.

Задание 26

Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$ необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 10^{-3}?
1) 894;
2) 889;
3) 900;
4) 999;
5) 10 000.

Задание 27

Применяя признак Лейбница, исследуйте сходимость рядов А: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}tg\frac{1}{n}$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+20}$:
1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;
5) признак Лейбница применить нельзя.

Задание 28

Для рядов А: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4+5\cdot(-1)^n}{10}\right)^n$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$ выбрать верное утверждение:
1) А и В — расходятся;
2) А и В — сходятся абсолютно;
3) А — сходится абсолютно, В — сходится условно;
4) А — сходится абсолютно. В — расходится;
5) А — сходится условно, В — сходится абсолютно.

Задание 29

Применяя предельный признак, исследуйте сходимость рядов

А: $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$, В: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$:
1) А и В — сходятся;
2) А и В — расходятся;
3) А — сходится, В — расходится;
4) А — расходится, В — сходится;

5) предельный признак применить нельзя.

Задание 30

Восьмой элемент числового ряда 1; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{7}{9}$; $3\frac{1}{16}$; … равен:

1) $3\frac{31}{64}$;

2) $4{,}12$;

3) $3\frac{33}{64}$;

4) $4\frac{17}{81}$;

5) $4\frac{17}{64}$.