

# Подавление сверхпроводящих флуктуаций в многозонных сверхпроводниках как механизм повышения критической температуры (Миниобзор)

А. В. Красавин<sup>a,b1)</sup>, А. В. Вагов<sup>b</sup>, А. С. Васенко<sup>b,c</sup>, В. С. Столяров<sup>d,e,f</sup>, А. А. Шаненко<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 115409 Москва, Россия

<sup>b</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

<sup>c</sup>Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>d</sup>Национальный исследовательский университет “Московский институт стали и сплавов”, 119049 Москва, Россия

<sup>e</sup>Центр перспективных методов мезофизики и нанотехнологий, Национальный исследовательский университет “Московский физико-технический институт”, 141700 Долгопрудный, Россия

<sup>f</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, 127055 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 ноября 2023 г.

После переработки 4 декабря 2023 г.

Принята к публикации 7 декабря 2023 г.

Сочетание сильно связанных пар носителей заряда и слабых сверхпроводящих флуктуаций является важным условием достижения высокотемпературной сверхпроводимости. Обзор посвящен реализации этого условия в многозонных сверхпроводниках, при котором сильносвязанные пары носителей заряда в мелкой зоне проводимости (уровень Ферми близок ко дну/потолку зоны) сосуществуют с обычными, слабо флуктуирующими куперовскими парами, формирующимися в глубокой зоне. В результате джозефсоновского обмена парами между конденсатами в разных зонах такая система характеризуется высокой критической температурой когерентности, обусловленной наличием сильносвязанных пар и подавлением сверхпроводящих флуктуаций. Это подавление не требует никаких особых условий и является практически полным даже при наличии слабой джозефсоновской связи мелкой зоны со стабильным конденсатом глубокой зоны.

DOI: 10.31857/S1234567824030121, EDN: sqssqt

## 1. Введение.

*1.1. Многозонные сверхпроводники.* Объяснение явления сверхпроводимости и исследование возможностей для его использования являются одними из главных задач современной физики конденсированного состояния. Несмотря на то, что в настоящий момент нет законченной универсальной теории сверхпроводимости, применимой для любых материалов, физика твердого тела добилась значительных успехов в понимании свойств и технологических применениях традиционных сверхпроводников, к которым относятся металлы и сплавы, переходящие в сверхпроводящее состояние при очень низких температурах (менее 30 К).

Не относящиеся к этой категории сверхпроводники часто называют нетрадиционными. Они, как пра-

вило, имеют более сложную кристаллическую структуру и могут обладать механизмами спаривания, отличными от стандартной теории сверхпроводимости Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [1]. По сравнению со сверхпроводниками, описываемыми теорией БКШ, такие материалы часто имеют более высокие критические температуры, что дает возможность практического применения в более доступных условиях охлаждения. Одним из распространенных материалов такого типа являются купратные сверхпроводники [2], основанные на соединениях оксида меди. Купратные сверхпроводники имеют критические температуры, достигающие до 133 К при нормальном давлении. Однако механизмы сверхпроводимости в этих материалах не до конца понятны, что делает их изучение областью активных исследований [3–7].

Зонная структура многих из таких соединений имеет схожую конфигурацию [8], схематически по-

<sup>1)</sup>e-mail: avkrasavin@gmail.com

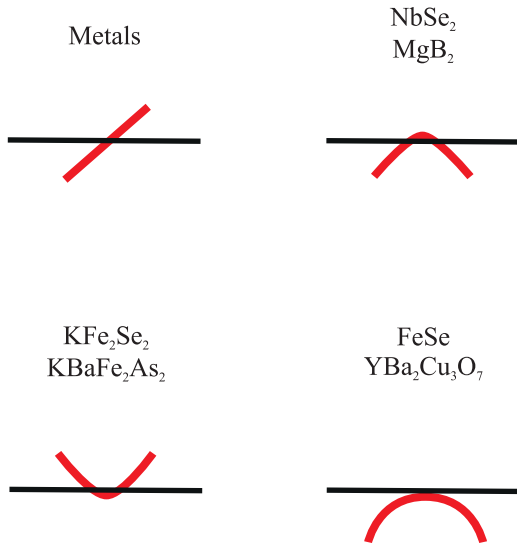


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематичное изображение зонной структуры некоторых сверхпроводящих соединений в сравнении с зонной структурой металлов

казанную на рис. 1. Их отличительной особенностью является наличие мелкой зоны, для которой уровень Ферми близок ко дну/потолку зоны. Такая зонная структура является характерной для окрестности фазового перехода Лифшица, при котором меняется топология Ферми-поверхности [9, 10]. В настоящем обзоре показывается, что данная конфигурация зонной структуры может привести к значительному повышению критической температуры сверхпроводящего перехода. Эта возможность достигается за счет взаимодействия сильносвязанных пар носителей заряда, формирующихся в мелкой зоне, с обычными куперовскими парами, существующими в других, глубоких зонах сверхпроводника.

Такой механизм применим ко многим соединениям, где возникает многозонная или многощелевая сверхпроводимость – когда амплитуды сверхпроводящих щелей на разных листах поверхности Ферми сильно различаются. Это может происходить, например, из-за разной размерности зон, как в случае  $MgB_2$ , из-за наличия отталкивающих межзонных парных взаимодействий, как в случае большинства сверхпроводников на основе железа, или из-за появления множественных карманов на поверхности Ферми, обусловленных кристаллической симметрией, как в  $FeSe_xTe_{1-x}$  [11]. В таких соединениях перекрестное спаривание между зонами, как правило, подавлено в силу большой разницы волновых функций. Поэтому с хорошей точностью зонные конденсаты образуются за счет куперовского спаривания носителей в каждой из зон по отдельности.

В многозонных системах большее число степеней свободы конденсатной волновой функции делает возможными квантовые эффекты, которые не могут реализоваться в однозонных сверхпроводниках. Ключевой характеристикой является возможность интерференции между зонными конденсатами. Как будет показано, эта интерференция может приводить к явлению экранирования флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка, что открывает прямую дорогу к повышению критической температуры.

*1.2. Теория среднего поля и флуктуации.* На протяжении многих десятилетий теория БКШ является мощным инструментом исследования сверхпроводимости. Являясь по своей сути теорией среднего поля, теория БКШ особенно успешна при описании сверхпроводящего перехода в традиционных сверхпроводниках. В этих материалах флуктуации сверхпроводящего параметра порядка не играют существенной роли практически во всем интервале температур – критическая область, где они существуют, является очень узкой [12, 13] и практически недостижима для эксперимента. Напротив, во многих сверхпроводящих материалах с высокой критической температурой (высокотемпературные сверхпроводники – ВТСП) эта область может сильно расширяться.

Сверхпроводящие флуктуации – это случайные изменения волновой функции конденсата (сверхпроводящего параметра порядка), задающего макроскопические свойства сверхпроводящего состояния. В традиционных материалах, описываемых теорией БКШ, такие флуктуации пренебрежимо малы, так что случайные отклонения параметра порядка ниже критической температуры практически ничтожны, что соответствует идеальной сверхпроводимости. Однако в высокотемпературных сверхпроводниках флуктуации остаются заметными и сильно ниже критической температуры, приводя к значительному отклонению от сверхпроводящего поведения, выражающемуся в появлении ненулевого удельного сопротивления. Для таких соединений становится актуальным вопрос влияния флуктуаций на критическую температуру перехода – они приводят к ее сильному понижению.

Флуктуации сверхпроводящего параметра порядка являются одним из основных факторов, подавляющих сверхпроводимость при температурах ниже критической температуры среднего поля  $T_{c0}$ . Хотя при температурах  $T < T_{c0}$  появляются куперовские пары, переход в сверхпроводящее состояние происходит при более низкой критической температуре  $T_c < T_{c0}$ . В интервале  $T_c < T < T_{c0}$  система на-

ходится в так называемом псевдощелевом состоянии [3, 5, 7], характеризующемся отсутствием когерентности куперовских пар. Роль флуктуаций усиливается с понижением размерности системы, так что для квазиодномерных материалов  $T_c \ll T_{c0}$ , см., например, [14–16].

Сдвиг критической температуры из-за флуктуаций, однако, не является универсальным свойством всех сверхпроводящих материалов. Таким образом, изучение механизмов воздействия флуктуаций на сверхпроводящее состояние, а также разработка стратегий, способных их контролировать, является важным аспектом в решении задачи о повышении критической температуры сверхпроводимости.

Механизм повышения критической температуры, представленный в этом обзоре, основан на взаимодействии двух зон в многозонном сверхпроводнике. Предполагается, что система близка к переходу Лифшица, поскольку одна из этих двух зон является мелкой. Сверхпроводящий конденсат в ней находится между режимом слабо связанных куперовских пар (БКШ) и режимом сильно связанных молекул (Бозе–Эйнштейна конденсат – БЭК). Такой режим получил название БКШ–БЭК кроссовер [17, 18, 19–24], и он характеризуется высокой среднеполевой критической температурой и большими флуктуациями. Вторая зона в этой системе предполагается глубокой и находится в обычном режиме БКШ со слабосвязанными куперовскими парами, который характеризуется низкой критической температурой и слабыми сверхпроводящими флуктуациями. Оказывается, что взаимодействие между зонами подавляет сильные флуктуации в мелкой зоне, но критическая температура всей системы остается на уровне среднеполевой  $T_{c0}$  температуры мелкой зоны.

Многозонный механизм подавления флуктуаций рассматривается в этом обзоре применительно к сверхпроводникам с обычным  $s$ -волновым спариванием, как в стандартной теории БКШ. Тем не менее, подобный эффект ожидается и в системах со спариванием  $d$ -типа. Кроме того, мы ограничиваемся исследованием двухзонной системы, которая рассматривается как прототип многозонного сверхпроводника. Весь формализм легко обобщается на случай большего числа зон проводимости, а качественные выводы остаются прежними.

## 2. Флуктуации в двухзонном сверхпроводнике.

2.1. *Микроскопическое описание системы.* Анализ двухзонного (в общем случае многозонного) сверхпроводника с обычным спариванием с

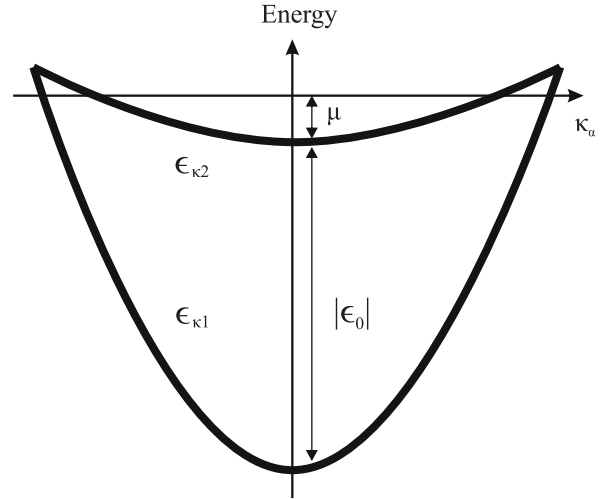


Рис. 2. Схематичное изображение зонной структуры, рассматриваемой в работе. Глубокая зона  $\nu = 1$  является трехмерной или квазидвумерной, зона  $\nu = 2$  является мелкой и низкоразмерной. Соответствующие законы дисперсии имеют вид  $\epsilon_{\kappa 1} = \epsilon_0 + \sum_{\alpha} \frac{\hbar^2 k_{\alpha}^2}{2m_1} - \mu$ ,  $\epsilon_{\kappa 2} = \sum_{\beta} \frac{\hbar^2 k_{\beta}^2}{2m_2} - \mu$ ;  $|\mu| \ll |\epsilon_0|$

$s$ -симметрией в каждой зоне базируется на использовании стандартного обобщения модели БКШ на ситуацию с несколькими типами носителей заряда. Напомним, что в рамках такого обобщения куперовское спаривание описывается взаимодействием

$$V_{BCS} = - \sum_{\nu, \nu'} g_{\nu\nu'} \int d\mathbf{r} \psi_{\nu\uparrow}^{\dagger} \psi_{\nu\downarrow}^{\dagger} \psi_{\nu'\downarrow} \psi_{\nu'\uparrow}, \quad (1)$$

где  $\psi_{\nu\sigma}^{\dagger} \equiv \psi_{\nu\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\nu\sigma} \equiv \psi_{\nu\sigma}(\mathbf{r})$  – операторы носителей заряда в зоне  $\nu$  ( $\nu = 1, 2$ );  $g$  – матрица рассеяния,  $g_{\nu\nu'} = g_{\nu'\nu}$ , а само выражение (1) получено при стандартном предположении, что элементы матрицы  $g$  слабо зависят от импульса, и этой зависимостью можно пренебречь.

В приближении среднего поля и в отсутствие примесей (в так называемом “чистом пределе”) и межзонного спаривания гамильтониан сверхпроводящей системы записывается в виде [25, 26]

$$H = \sum_{\nu} \int d\mathbf{r} \left[ \psi_{\nu\sigma}^{\dagger} T_{\nu}(\mathbf{r}) \psi_{\nu\sigma} + \left( \psi_{\nu\uparrow}^{\dagger} \psi_{\nu\downarrow}^{\dagger} \Delta_{\nu}(\mathbf{r}) + \text{H.c.} \right) \right] + (\mathbf{\Delta}, g^{-1} \mathbf{\Delta}), \quad (2)$$

где  $T_{\nu}(\mathbf{r})$  – одночастичный оператор энергии, а функции щелей для двухзонной системы представлены в векторном виде  $\mathbf{\Delta} \equiv (\Delta_1, \Delta_2)^T$  со скалярным произведением  $(A, B) \equiv \sum_{\nu} A_{\nu}^* B_{\nu}$ , так что последний член в уравнении (2) в явном виде записывается как

$$(\Delta, g^{-1} \Delta) = \frac{1}{G} \int d\mathbf{r} [g_{22} |\Delta_1|^2 + g_{11} |\Delta_2|^2 + g_{12} (\Delta_1^* \Delta_2 + \Delta_2^* \Delta_1)], \quad (3)$$

где  $G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ . В уравнениях (2) и (3) функции щелей удовлетворяют уравнению самосогласования среднего поля

$$\Delta_\nu = \sum_{\nu'} g_{\nu\nu'} \langle \psi_{\nu'\uparrow} \psi_{\nu'\downarrow} \rangle, \quad (4)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает аномальные средние (функции Грина) полевых операторов. Отсутствие межзонного куперовского спаривания означает, что в этом выражении присутствуют только средние от операторов с одинаковыми индексами зон  $\nu$ .

В этом обзоре мы рассмотрим специальные конфигурации зонной структуры двухзонного сверхпроводника, схематичное изображение которых показано на рис. 2. Одна из зон, скажем,  $\nu = 1$ , является трехмерной (3D) или квази-двумерной (Q2D) и “глубокой”, т.е. ее минимум (дно зоны) расположен далеко от уровня Ферми,  $|\epsilon_0| \ll \mu$ . Вторая зона ( $\nu = 2$ ) является квазиодномерной (Q1D) или квазидвумерной (Q2D) и “мелкой”, т.е. уровень Ферми расположен относительно близко ко дну зоны. В такой системе сверхпроводящий конденсат представляет собой когерентную смесь БКШ конденсата, формирующегося в глубокой зоне, и конденсата в режиме БКШ-БЭК кроссовера в мелкой зоне. В режиме БКШ-БЭК кроссовера размер куперовской пары сравним со средним расстоянием между частицами,  $\xi \sim 1/k_F$ , где  $k_F$  – импульс Ферми, или, что равнозначно, характерная энергия спаривания имеет порядок энергии Ферми,  $\Delta \sim E_F$ . Состояния же БКШ и БЭК характеризуются неравенствами  $k_F \xi \gg 1$  и  $k_F \xi \ll 1$ , соответственно. Впервые БКШ-БЭК кроссовер был экспериментально получен в системе ультрахолодных ферми-газов (см., например, [27]), для которых межчастичное взаимодействие возможно регулировать при помощи резонанса Фешбаха [28]. В твердотельных системах настройка кроссовера представляет собой намного более сложную задачу, связанную с варьированием соотношения  $\Delta/E_F$  путем химического инжиниринга, допирования, изменения подложки материала и прочих атрибутов системы.

**2.2. Функционал свободной энергии.** Для вычисления флуктуационных коррекций необходимо получить свободную энергии системы в виде функционала от функций щелей  $\Delta_\nu$ . Вклад флуктуаций затем учитывается усреднением релевантных физических величин по случайным вариациям щелевых функций  $\Delta_\nu$  со статистическим весом Гиббса

для свободной энергии. Вычисления с использованием выражений, полученных в рамках микроскопической теории БКШ, слишком сложны для практического использования. В случае одной зоны обычно ограничиваются несколькими наиболее важными членами разложения свободной энергии – функционалом Гинзбурга–Ландау (ГЛ) [29]. Такой подход вполне оправдан, особенно, в случае, когда флуктуации исследуются вблизи критической температуры перехода  $T_{c0}$ .

Для двухзонного сверхпроводника можно сделать такое же разложение, оставляя в нем только те вклады для каждой зоны, которые соответствуют стандартной теории ГЛ. Вблизи критической температуры  $T_{c0}$  соответствующий функционал получается с помощью микроскопического гамильтониана (2) путем разложения термодинамического потенциала по малым параметрам, которыми являются функции щели  $\Delta_\nu$ . Получение данного разложения для каждой зоны двухзонной модели полностью аналогично однозонному варианту [29]. В результате получается следующее выражение для свободной энергии (см., например, [30–32]):

$$F = \int d\mathbf{r} \left[ \sum_\nu f_\nu + (\Delta, \mathcal{L} \Delta) \right],$$

$$f_\nu = a_\nu |\Delta_\nu|^2 + \frac{b_\nu}{2} |\Delta_\nu|^4 + \sum_i \mathcal{K}_\nu^{(i)} |\nabla_i \Delta_\nu|^2,$$

$$\mathcal{L} = g^{-1} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь коэффициенты  $a_\nu, b_\nu, \mathcal{K}_\nu^{(i)}, \mathcal{A}_\nu$  зависят от размерности соответствующей зоны и ее микроскопических параметров, индекс  $i$  пробегает ее пространственные координаты, а магнитное поле равно нулю. Полевая поправка к температурным флуктуациям рассматривается ниже, в конце раздела.

**2.3. Эффективный однокомпонентный функционал свободной энергии.** Для вычислений, использующих функционал  $F$ , заданный уравнением (5), можно выделить наибольший вклад флуктуаций вблизи критической температуры сверхпроводящего фазового перехода. Для этого сначала вспомним, что последняя в рамках приближения среднего поля ( $T_{c0}$ ) определяется из решения линеаризованного уравнения самосогласования (4), которое дается выражением

$$\mathcal{L} \Delta = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение имеет нетривиальное решение при условии

$$\det[\mathcal{L}] = 0. \quad (7)$$

Из этого условия находится среднеполевая критическая температура  $T_{c0}$ . В общем случае существуют два решения, из которых следует выбрать наибольшую  $T_{c0}$  – это решение соответствует минимуму свободной энергии. Щелевые функции, соответствующие этому решению, удовлетворяют соотношению

$$\Delta(\mathbf{r}) = \eta_+ \psi(\mathbf{r}), \quad \eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ S \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\psi(\mathbf{r})$  – некоторая функция координат, и величина  $S$  определена как

$$S = \frac{g_{22} - GA_1}{g_{12}}. \quad (9)$$

Следует заметить, что уравнение (8) не является единственным выбором собственного вектора  $\eta_+$ , соответствующего нулевому собственному значению матрицы  $\mathcal{L}$ , поскольку нормировка этого вектора не имеет значения.

Если теперь мы выберем вектор, ортогональный к  $\eta_+$ , в виде

$$\eta_- = \begin{pmatrix} -S \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то произвольный вектор параметра порядка можно представить в виде суммы [33, 34]

$$\Delta(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\eta_+ + \phi(\mathbf{r})\eta_-, \quad (11)$$

где функции  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\phi(\mathbf{r})$  – две различные флуктуационные моды, отвечающие этим векторам.

В терминах  $\psi$  и  $\phi$  свободная энергия  $F$  в уравнении (5) разбивается на следующие три вклада:

$$F = \int d\mathbf{r} (f_\psi + f_\phi + f_{\psi\phi}), \quad (12)$$

где первые два члена дают независимые вклады каждой из мод, а третий – энергия их взаимодействия.

Первый вклад  $f_\psi$  имеет вид стандартного функционала ГЛ [29, 35]

$$f_\psi = a_\psi |\psi|^2 + \frac{b_\psi}{2} |\psi|^4 + \sum_i \mathcal{K}_\psi^{(i)} |\nabla_i \psi|^2, \quad (13)$$

где коэффициенты даются усреднением по зонным вкладам [33, 34, 36, 37]:

$$a_\psi = \sum_\nu \eta_{+,\nu}^2 a_\nu, \quad b_\psi = \sum_\nu \eta_{+,\nu}^4 b_\nu, \\ \mathcal{K}_\psi^{(i)} = \sum_\nu \eta_{+,\nu}^2 \mathcal{K}_\nu^{(i)}. \quad (14)$$

Вклад  $f_\phi$  в уравнении (12) также имеет вид уравнения (13), где  $\psi(\mathbf{r})$  меняется на  $\phi(\mathbf{r})$ , а соответствующие коэффициенты даются выражениями [33, 34, 36, 37]

$$a_\phi = a_\phi^{(0)} + \sum_\nu \eta_{-,\nu}^2 a_\nu, \quad b_\phi = \sum_\nu \eta_{-,\nu}^4 b_\nu, \\ \mathcal{K}_\phi^{(i)} = \sum_\nu \eta_{-,\nu}^2 \mathcal{K}_\nu^{(i)}, \quad (15)$$

где  $a_\phi^{(0)}$  имеет вид

$$a_\phi^{(0)} = (\eta_-, \mathcal{L}\eta_-) = \frac{g_{12}(1+S^2)^2}{GS}. \quad (16)$$

В свою очередь, функционал  $f_{\psi\phi}$  в (12) описывает взаимодействие двух мод.

Вкладами  $f_\phi$  и  $f_{\psi\phi}$  можно пренебречь, поскольку мода  $\phi$  не является критической. Это следует из наличия  $a_\phi^{(0)} \neq 0$  в выражении для коэффициента  $a_\phi$  в уравнении (15). Из уравнения (9) следует, что  $S$  – действительная величина, и, следовательно, константа  $a_\phi^{(0)}$  в общем случае отлична от нуля при  $T \rightarrow T_{c0}$ . Это приводит к тому, что характеристическая длина  $\xi_\phi^{(i)} = \sqrt{\mathcal{K}_\phi^{(i)}/a_\phi}$  моды  $\phi$  не является критической (расходящейся) вблизи  $T_{c0}$ . Следовательно, единственной модой, отвечающей за критическое поведение системы, является  $\psi$  с расходящейся характеристической длиной  $\xi_\psi^{(i)} = \sqrt{\mathcal{K}_\psi^{(i)}/a_\psi}$ , поскольку коэффициент  $a_\psi \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow T_{c0}$ . Мода  $\phi$  вносит несущественные поправки, которыми можно пренебречь вблизи  $T_{c0}$ .

Флуктуационная часть  $F$ , таким образом, может быть ашпроксимирована с использованием всего одной моды  $\psi$  с функционалом энергии, задаваемым уравнением (13). Факт наличия в системе двух взаимодействующих зон отражается в их вкладах в коэффициенты  $a_\psi, b_\psi$  и  $\mathcal{K}_\psi^{(i)}$  в уравнении (14). Таким образом, уравнение (13) определяет эффективную теорию ГЛ для двухзонной системы. Заметим, что эта теория имеет единственный параметр порядка  $\psi$  в полном соответствии с теорией фазовых переходов Ландау для равновесного случая рассматриваемой системы (см. обсуждение в работах [38–41]). Флуктуации этого параметра порядка являются критическими и доминируют вблизи фазового перехода. Заметим, что учет некритических флуктуаций по  $\phi$  может приводить к некоторым изменениям в коэффициентах функционала  $f_\psi$ , однако эти поправки не могут являться значительными ввиду некритического характера флуктуационной моды  $\phi$  и, соответственно, ими можно пренебречь.

### 3. Флуктуационный сдвиг критической температуры.

3.1. *Общие замечания.* Величина  $T_{c0}$ , полученная решением линеаризованного уравнения для щели (6), дает критическую температуру в рамках среднего поля. Реальная температура сверхпроводящего перехода  $T_c$  будет всегда ниже  $T_{c0}$  из-за термических флуктуаций, т.е. происходит флуктуационный сдвиг критической температуры. Его можно оценить, воспользовавшись тем, что эффективный функционал свободной энергии (13) системы имеет однокомпонентный параметр порядка, что позволяет использовать результаты для флуктуационных поправок для обычной однокомпонентной теории ГЛ. Однако следует помнить, что одна и та же компонента  $\psi$  описывает флуктуации параметра порядка сразу в обеих зонах, согласно  $\delta\Delta_1 = \delta\psi$ ,  $\delta\Delta_2 = S\delta\psi$ , и, таким образом,  $\delta\Delta_1$  и  $\delta\Delta_2$  не являются независимыми. Благодаря этому факту некоторые качественные выводы легко сделать уже из самого вида функционала и его коэффициентов в уравнении (14).

Например, если весовой фактор очень мал,  $S \ll 1$ , то щель второй зоны  $\Delta_2 \rightarrow S\psi$  практически не дает вклада в свободную энергию  $F$ , и тогда сверхпроводящие свойства полностью определяются зоной  $\nu = 1$ . В случае, когда весовой фактор  $S \gg 1$ , реализуется противоположный предел, и решающим является вклад зоны  $\nu = 2$ . Кроссовер между этими двумя предельными случаями происходит в диапазоне значений  $S \sim 1$ , где вклад одной зоны постепенно заменяется вкладом другой. Существенным, однако, является то, что коэффициенты функционала энергии, задаваемые уравнением (14), зависят от  $S$  по-разному. Это приводит к разной зависимости физических характеристик системы от  $S$ . Как следствие, интервал кроссовера между двумя предельными режимами зависит от того, какая физическая величина нас интересует.

В частности, флуктуации и критическая температура имеют разные зависимости от параметров системы. Это и является основной причиной, почему возможно одновременно увидеть сильное возрастание критической температуры, которое определяется влиянием одной (мелкой) зоны, и одновременно подавление флуктуаций, которое имеет место из-за преобладающего влияния другой (глубокой) зоны. Вопрос заключается в том, возможно ли найти область значений параметров системы, при которых снижение критической температуры  $T_c$  из-за флуктуаций по сравнению со среднеполевым значением  $T_{c0}$  не является слишком существенным, в то время как среднеполевая температура еще не уменьшилась

при переходе к режиму доминирующей глубокой зоны. Можно показать, что такая ситуация действительно наблюдается в широком интервале параметров для многих конфигураций зонной структуры с одной мелкой зоной.

Влияние термических флуктуаций на критическую температуру сверхпроводящего перехода можно грубо оценить из параметра Гинзбурга–Леванюка (известного также, как число Гинзбурга)

$$Gi = 1 - \frac{T_{Gi}}{T_{c0}}, \quad (17)$$

где  $T_{Gi}$  – температура, при которой вклад в теплоемкость, обусловленный флуктуациями, становится равным значению теплоемкости, рассчитанному в приближении среднего поля. Физически это означает, что в интервале температур  $T_{Gi} < T < T_{c0}$  влияние флуктуаций существенно.

Число Гинзбурга находится путем вычисления теплоемкости системы с использованием функционала энергии (13). Качественная оценка [42] дает следующий результат:

$$Gi \propto \left( \frac{T_{c0}}{E_F} \right)^{\frac{2(D-1)}{4-D}}, \quad (18)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми, а  $D$  – размерность пространства. Более точные вычисления для изотропного случая при  $D = 3$  и  $D = 2$  дают [12, 13]

$$Gi_{3D} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{T_{c0} b_\psi^2}{a'_\psi \mathcal{K}_\psi^3}, \quad Gi_{2D} = \frac{1}{4\pi} \frac{b_\psi n_z}{a'_\psi \mathcal{K}_\psi}, \quad (19)$$

где  $a'_\psi \equiv da_\psi/dT$ , и изотропия системы подразумевает равенство коэффициентов при градиентных членах  $\mathcal{K}_\psi = \mathcal{K}_\psi^{(i)}$ . В случае  $D = 2$  подразумевается вырождение вдоль направления  $z$ , и  $n_z$  – это фактор, который учитывает плотность состояний вдоль этого направления. Переход к анизотропному случаю в выражениях (19) осуществляется путем замены  $\mathcal{K}_\psi^3 \rightarrow \mathcal{K}_\psi^{(x)} \mathcal{K}_\psi^{(y)} \mathcal{K}_\psi^{(z)}$  для  $D = 3$  и  $\mathcal{K}_\psi \rightarrow \sqrt{\mathcal{K}_\psi^{(x)} \mathcal{K}_\psi^{(y)}}$  для  $D = 2$ .

Предположение  $T_c \sim T_{Gi}$  дает грубую оценку флуктуационного сдвига температуры перехода  $\delta T_c = T_{c0} - T_c$ . Более точные расчеты соотношения между  $\delta T_c$  и числом Гинзбурга можно сделать, например, воспользовавшись ренорм-групповым анализом для однокомпонентной теории с функционалом энергии (13) [13], либо, как в случае  $D = 2$ , можно применить критерий Нельсона–Костерлица, связывающий температуру фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулесса [43] с числом

Гинзбурга. Ниже мы разберем подробно следующие важные примеры, когда рассматриваемая двухзонная система имеет 1) квази-одномерную (Q1D) и трехмерную зоны (3D), 2) квази-одномерную и квази-двумерную зоны (Q1D + Q2D) и 3) две квази-двумерные зоны (Q2D + Q2D).

**3.2. Q1D + 3D.** Общий механизм подавления флуктуаций и повышения критической температуры особенно наглядно проявляется, если в системе есть квазиодномерная (Q1D) зона. Квазиодномерные зоны характеризуются наличием расходящихся особенностей ван Хофа на краях зоны. Если химический потенциал оказывается вблизи этой особенности, что реализуется, например, если система находится вблизи перехода Лифшица, то это приводит к большой плотности одночастичных состояний на поверхности Ферми и, соответственно, к большим значениям среднеполевой критической температуры  $T_{c0}$ . Размер пар в этой зоне резко уменьшается и, таким образом, реализуется режим БКШ–БЭК кроссовера. Однако большие флуктуации в Q1D системе полностью или значительно подавляют сверхпроводимость.

Как оказывается, обмен парами с 3D зоной способен подавить флуктуации и восстановить сверхпроводимость. В самом деле, при таком взаимодействии между зонами вклад флуктуаций определяется эффективным 3D функционалом (13), где коэффициенты даются формулами (14). В этих выражениях зонные коэффициенты для трехмерной зоны БКШ-типа со сферически симметричной поверхностью Ферми имеют стандартный вид [44]

$$A_1 = N_1 \ln \left( \frac{2e^\gamma \hbar \omega_c}{\pi T_{c0}} \right), \quad a_1 = \frac{N_1}{T_{c0}} (T - T_{c0}),$$

$$b_1 = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{N_1}{T_{c0}^2}, \quad \mathcal{K}_1^{(i)} = \mathcal{K}_1 = \frac{\hbar^2 v_1^2}{6} b_1, \quad (20)$$

где изотропия системы, как уже указывалось выше, означает равенство коэффициентов  $\mathcal{K}_1^{(i)}$  для всех направлений  $i$ ,  $N_1$  обозначает плотность состояний зоны  $\nu = 1$ ,  $\hbar \omega_c$  – обрезание по энергии (далее будем считать это энергетическим масштабом для всех энергетических величин),  $\gamma$  – постоянная Эйлера,  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана, а характеристическая скорость электронов равна скорости Ферми  $v_1 = \sqrt{2(\mu - \epsilon_{0,1})/m_1}$ , где  $m_\nu$  – эффективная масса.

Для Q1D зоны мы полагаем, что химический потенциал лежит рядом с ее дном, и поэтому коэффициенты могут быть выражены лишь с помощью интегралов, которые нужно вычислять численно,

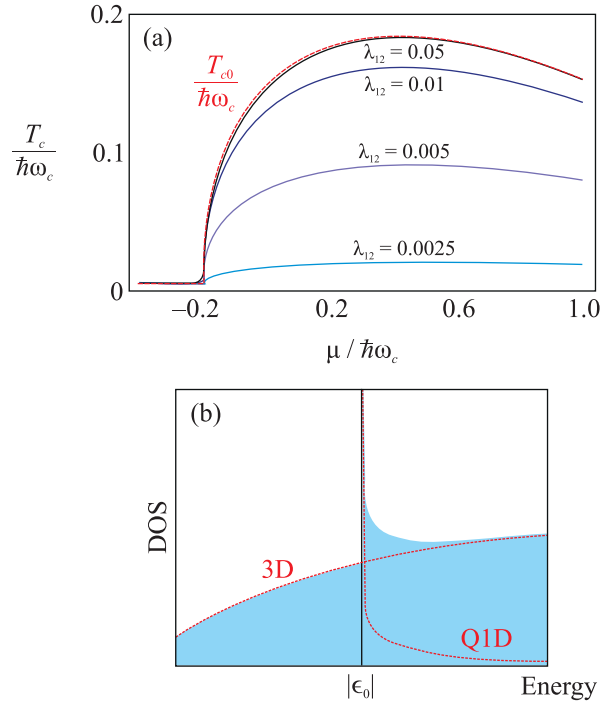


Рис. 3. (Цветной онлайн) (а) – Критическая температура с учетом флуктуаций как функция химического потенциала для значений межзонного взаимодействия  $\lambda_{12} = 0.0025; 0.005; 0.01; 0.05$  при  $\lambda_{11} = 0.18; \lambda_{22} = 0.2$ . Красной штриховой линией показана критическая температура  $T_{c0}$ . (б) – Схематичное изображение зависимости плотности состояний в двухзонной 3D + Q1D системе. Красными штриховыми линиями показана плотность состояний невзаимодействующих зон. Адаптировано из [33]

$$A_2 = N_2 \int_{-\tilde{\mu}}^1 dy \frac{\text{th}(y/2\tilde{T}_{c0})}{y\sqrt{y+\tilde{\mu}}},$$

$$a_2 = -\tau \frac{N_2}{2\tilde{T}_{c0}} \int_{-\tilde{\mu}}^1 dy \frac{\text{sch}^2(y/2\tilde{T}_{c0})}{\sqrt{y+\tilde{\mu}}},$$

$$b_2 = \frac{N_2}{4\hbar^2 \omega_c^2} \int_{-\tilde{\mu}}^1 dy \frac{\text{sch}^2(y/2\tilde{T}_{c0})}{y^3 \sqrt{y+\tilde{\mu}}} \left[ \text{sh} \left( \frac{y}{\tilde{T}_{c0}} \right) - \frac{y}{\tilde{T}_{c0}} \right],$$

$$\mathcal{K}_2^{(x)} = \hbar^2 v_2^2 \frac{N_2}{8\hbar^2 \omega_c^2} \int_{-\tilde{\mu}}^1 dy \frac{\sqrt{y+\tilde{\mu}}}{y^3} \text{sch}^2(y/2\tilde{T}_{c0})$$

$$\times \left[ \text{sh} \left( \frac{y}{\tilde{T}_{c0}} \right) - \frac{y}{\tilde{T}_{c0}} \right], \quad \mathcal{K}_2^{(y)} = \mathcal{K}_2^{(z)} = 0, \quad (21)$$

где мы ввели величину, описывающую близость к переходу  $\tau = 1 - T/T_{c0}$ , а также, для удобства, используем безразмерные переменные  $\tilde{T}_{c0} = T_{c0}/\hbar \omega_c$  и  $\tilde{\mu} = \mu/\hbar \omega_c$ . Заметим, что эффективная скорость  $v_2$  и плотность состояний  $N_2$  в выражениях для Q1D зоны определяются величиной обрезания по энергии,  $v_2 = \sqrt{2\hbar \omega_c/m_2}$  и  $N_2 = n_y n_z / 4\pi \hbar v_2$ . Здесь мы предполагаем, что вклад направлений  $y, z$  в плотность од-

ночастичных состояний Q1D зоны описывается некоторыми постоянными  $n_y$  и  $n_z$ , которые задаются размерами зоны Бриллюэна. Поскольку зона  $\nu = 2$  является квазиодномерной, то  $\mathcal{K}_\psi^{(y,z)} \neq \mathcal{K}_\psi^{(x)}$  и, следовательно, функционал (13) является анизотропным.

Далее мы воспользуемся известным результатом, получаемым с помощью ренорм-группы [13], согласно которому флуктуационный сдвиг критической температуры для трехмерного функционала ГЛ (13) равен

$$\frac{T_{c0} - T_c}{T_c} = \frac{8}{\pi} \sqrt{\text{Gi}}, \quad (22)$$

где число Гинзбурга для трехмерного анизотропного сверхпроводника дается выражением (см. пояснение после уравнения (19))

$$\text{Gi} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{T_{c0} b_\psi^2}{a'_\psi \mathcal{K}_\psi^{(x)} \mathcal{K}_\psi^{(y)} \mathcal{K}_\psi^{(z)}}. \quad (23)$$

Это выражение удобно представить в виде

$$\text{Gi} = \text{Gi}_1 \frac{(1 + S^4 b_2/b_1)^2}{(1 + S^2 a_2/a_1)(1 + S^2 \mathcal{K}_2^{(x)}/\mathcal{K}_1^{(x)})}, \quad (24)$$

где  $\text{Gi}_1$  – число Гинзбурга для 3D зоны  $\nu = 1$ , задаваемое уравнением (19), в котором коэффициенты  $a'_\psi, b_\psi, \mathcal{K}_\psi$  заменяются на  $a'_1, b_1, \mathcal{K}_1$ , так что

$$\text{Gi}_1 = \frac{1}{32\pi^2} \frac{T_{c0} b_1^2}{a_1^3 \mathcal{K}_1^3} = \frac{27\pi^4}{14\zeta(3)} \left( \frac{T_{c0}}{\mu + |\epsilon_0|} \right)^4. \quad (25)$$

Мы можем количественно оценить его значение как  $\text{Gi}_1 = 10^{-10}$ , что примерно соответствует середине диапазона значений, типичных для трехмерных сверхпроводников  $\text{Gi}_{3D} \simeq 10^{-16} \div 10^{-6}$  [12]. Отношение  $N_2/N_1$  можно принять равным единице, что близко к экспериментальным оценкам этого отношения  $N_2/N_1 \sim 1$  во многих многозонных сверхпроводящих материалах, см., например, [45]. Остаются, таким образом, параметры внутри- и межзонных взаимодействий  $g_{11}, g_{22}$  и  $g_{12}$ , которые будут определять критическую температуру. Отметим, что для вычислений удобно вводить безразмерные константы взаимодействий  $\lambda_{\nu\nu'} = g_{\nu\nu'} \sqrt{N_\nu N_{\nu'}}$ .

На рисунке 3а показана типичная зависимость критических температур  $T_{c0}$  и  $T_c$  от химического потенциала вблизи дна квазиодномерной зоны, рассчитанная в работах [33, 34, 37]. Для расчетов выбраны значения  $\lambda_{11} = 0.18$  и  $\lambda_{22} = 0.2$ , однако качественный характер полученных зависимостей сохраняется и для других значений констант внутризонного спаривания, характерных для традиционных сверхпроводников [44]. Значения константы межзонного взаимодействия  $\lambda_{12}$  выбираются согласно  $\lambda_{12} < 0.05$ , принимая во внимание, что соотношение  $\lambda_{12} \ll \lambda_{11}, \lambda_{22}$

является стандартным для многих двузонных сверхпроводников, см., например, таблицу констант взаимодействия в работе [45]. Химический потенциал варьируется вблизи края Q1D зоны и точно пересекает дно зоны при  $\mu = 0$ .

На рисунке 3а видно, что при достаточно низких значениях химического потенциала ( $\mu \lesssim -0.2$ ) вклад Q1D зоны отсутствует, и  $T_{c0}$ , определяемая трехмерной зоной, имеет достаточно малое значение, близкое к таковым в традиционных сверхпроводящих материалах. При приближении химического потенциала ко дну Q1D зоны ( $\mu \simeq 0$ )  $T_{c0}$  резко возрастает из-за сингулярности ван Хофа в плотности состояний, см. рис. 3б.

Отметим, что увеличение  $T_{c0}$  начинается раньше касания дна Q1D зоны химическим потенциалом, примерно при  $\mu \simeq -0.2$ . Это обусловлено, во-первых, влиянием энергии связи куперовских пар, которую можно оценить в области возрастания критической температуры как  $\text{max}(T_{c0}) \simeq 0.2$  и которая размывает поверхность Ферми. При конечных же температурах работает температурное размытие поверхности Ферми, которое также контролируется величиной  $\text{max}(T_{c0}) \simeq 0.2$ . Для больших значений химического потенциала ( $\mu > \hbar\omega_c$ ) влияние сингулярности в плотности состояний становится менее существенным, и  $T_{c0}$  уменьшается по закону  $1/\sqrt{\mu}$  (что характерно для Q1D зоны), пока не достигает значения, определяемого 3D зоной. На рисунке 3а зависимость среднеполевой критической температуры  $T_{c0}$  от  $\mu$  показана для  $\lambda_{12} = 0.05$ . Однако эта зависимость остается практически неизменной во всем рассматриваемом интервале  $\lambda_{12} \ll \lambda_{11}, \lambda_{22}$ . Следовательно, для этого интервала межзонного взаимодействия свойства двухзонного сверхпроводника, рассчитанные в рамках теории среднего поля, полностью определяются Q1D зоной.

Напротив, зависимость критической температуры  $T_c$ , учитывающей флуктуации, сильно зависит от  $\lambda_{12}$ . Действительно, при “выключении” межзонного взаимодействия  $\lambda_{12} \rightarrow 0$  флуктуации подавляют сверхпроводимость. Ситуация меняется при увеличении  $\lambda_{12}$ . Из рисунка 3а видно, что даже чрезвычайно малое межзонное взаимодействие  $\lambda_{12} \simeq 0.01$  позволяет вывести  $T_c$  практически на уровень его среднеполевого значения  $T_{c0}$ .

Этот расчет показывает, что обмен куперовскими парами со стабильным трехмерным конденсатом позволяет подавить сильные флуктуации, присущие квазиодномерным системам. Несмотря на то, что в реальных системах в силу различных факторов зонная картина может быть несколько отлична от пред-



ставленной на рис. 2, что может привести к некоторому ослаблению эффекта подавления флуктуаций, рассмотренный механизм является физически общим и приводит к существенному увеличению критической температуры сверхпроводящего перехода, если химический потенциал находится вблизи края квазиодномерной зоны.

**3.3. Q1D + Q2D.** Известно, что роль флуктуаций усиливается в низкоразмерных образцах [13]. Поэтому можно ожидать, что механизм подавления флуктуаций, рассмотренный в предыдущем разделе для взаимодействующих трехмерной и квазиодномерной зон, будет гораздо менее эффективен, если вместо трехмерной зоны в сверхпроводнике присутствует квазидвумерная зона. В этом разделе мы рассмотрим случай взаимодействия глубокой квазидвумерной (Q2D) и мелкой квазиодномерной (Q1D) зон и покажем, что в действительности механизм подавления флуктуаций остается почти таким же эффективным, как и в случае трехмерной зоны.

Для Q1D зоны ( $\nu = 2$ ) коэффициенты разложения функционала свободной энергии (5) даны в уравнении (21), а для глубокой Q2D зоны ( $\nu = 1$ ) можно получить следующие выражения: [46]

$$A_1 = N_1 \ln \left( \frac{2e^\gamma \hbar \omega_c}{\pi T_{c0}} \right), \quad a_1 = \frac{N_1}{T_{c0}} (T - T_{c0}),$$

$$b_1 = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{N_1}{T_{c0}^2}, \quad \mathcal{K}_1^{(x,y)} = \mathcal{K}_1 = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^2} \frac{N_1 \hbar^2 v_1^2}{T_{c0}^2}, \quad (26)$$

где  $N_1$  – плотность состояний зоны, которая включает в себя фактор  $n_z$ , появляющийся ввиду вырождения по оси  $z$  для Q2D зоны (для Q1D зоны мы имеем такой же фактор  $n_z$ , учитывающий вклад в плотность состояний от направления  $z$  и фактор  $n_y$ , необходимый для учета направления  $y$ ),  $v_1 = \sqrt{2(\mu - \epsilon_{0,1})/m_1}$ , а  $\mathcal{K}_1^{(z)} = 0$ .

Соответствующее число Гинзбурга для анизотропной двухзонной системы запишется в виде (см. пояснение после уравнения (19))

$$\text{Gi} = \frac{T_{c0} b_\psi n_z}{4\pi a'_\psi \sqrt{\mathcal{K}_\psi^{(x)} \mathcal{K}_\psi^{(y)}}}. \quad (27)$$

Как и в предыдущем случае, мы принимаем во внимание, что коэффициенты функционала (14) содержат вклад обеих зон, и перепишем число Гинзбурга для системы двух зон (27) в виде

$$\text{Gi} = \text{Gi}_1 \frac{1 + S^4 b_2/b_1}{(1 + S^2 a'_2/a'_1) \sqrt{1 + S^2 \mathcal{K}_2^{(x)}/\mathcal{K}_1^{(x)}}}, \quad (28)$$

где  $\text{Gi}_1$  – это число Гинзбурга глубокой Q2D зоны с  $\nu = 1$ , которое получается из уравнения (27) заменой

коэффициентов  $a'_\psi, b_\psi, \mathcal{K}_\psi$  на  $a'_1, b_1, \mathcal{K}_1$ . Эта замена позволяет получить

$$\text{Gi}_1 = \frac{T_{c0} b_1 n_z}{4\pi a'_1 \mathcal{K}_1^2} = \frac{T_{c0}}{\mu + |\epsilon_0|}. \quad (29)$$

Так как  $b_1 \propto n_z, a'_1 \propto n_z$  и  $\mathcal{K}_1^{(i)} \propto n_z$ , значение числа Гинзбурга не зависит от фактора  $n_z$ .

Для расчета температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  нашей эффективной Q2D системы можно использовать критерий Нельсона–Костерлица [43], согласно которому флуктуационный сдвиг критической температуры вычисляется как

$$\frac{T_{c0} - T_c}{T_c} = 4\text{Gi}, \quad (30)$$

где  $T_c$  – температура фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулесса [47]. Можно также воспользоваться методом ренорм-группы, который дает для  $D = 2$  [13]

$$\frac{T_{c0} - T_c}{T_c} = 2\text{Gi} \ln(1/4\text{Gi}). \quad (31)$$

Важно подчеркнуть, что отличие результата ренорм-группового анализа (31) от выражения Нельсона–Костерлица (30) становится существенным только при  $\delta T_c/T_c \lesssim 0.001$ , когда  $T_c$  и  $T_{c0}$  практически неразличимы. Кроме того, надо заметить, что выражение (31) справедливо лишь при  $(T_{c0} - T_c)/T_c \lesssim 0.1$ . Ниже используются оба варианта расчета  $T_c$ , которые приводят к очень близким результатам. В частности, данные на рис. 4 и 5 получены с помощью формулы (30), в то время как результаты, представленные в следующем разделе на рис. 6, основаны на уравнении (31).

На рисунке 4а показаны зависимости критических температур  $T_{c0}$  и  $T_c$  (рассчитанной согласно формуле (30)) как функций химического потенциала для констант межзонного взаимодействия  $\lambda_{11} = 0.24$ ,  $\lambda_{22} = 0.2$  и малых значений константы межзонного взаимодействия  $\lambda_{12} = 0.002; 0.005$ . Глубина квазидвумерной зоны  $\nu = 1$  выбрана равной  $|\epsilon_0| = 300$ , что задает энергию Ферми данной зоны  $E_F \approx 300$ , так как  $\mu \ll |\epsilon_0|$ . Это значение энергии Ферми соответствует реалистичным микроскопическим параметрам для традиционных одноэлементных сверхпроводников [48]. Например, для алюминия  $E_F \approx 350$ , а для свинца  $E_F \approx 1000$ .

Несмотря на общий тренд на возрастание роли флуктуаций при понижении размерности системы, сравнение рис. 3 и 4 показывает, что для механизма подавления сверхпроводящих флуктуаций, рас-

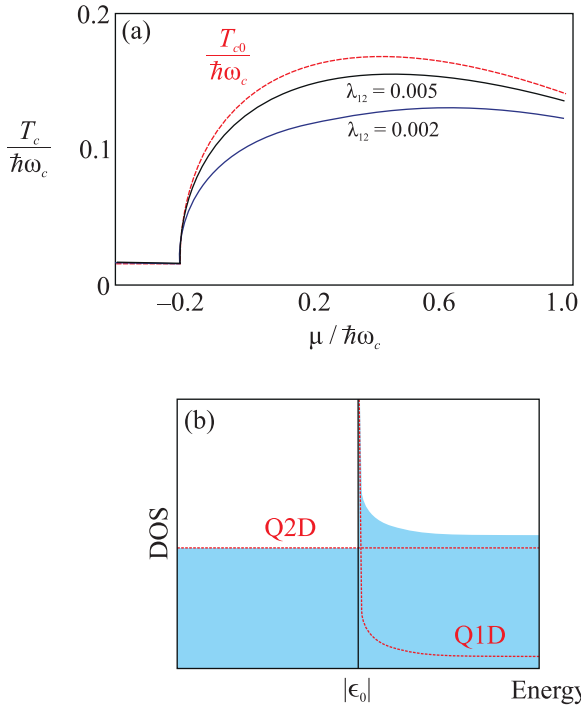


Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Критическая температура с учетом флуктуаций как функция химического потенциала, рассчитанная для значений межзонного взаимодействия  $\lambda_{12} = 0.002; 0.005$  при  $\lambda_{11} = 0.24; \lambda_{22} = 0.2$ . Красной штриховой линией показана среднеполевая критическая температура  $T_{c0}$ . Отношение эффективных масс в двух зонах  $m_2/m_1 = 1$ . (b) – Схематичное изображение зависимости плотности состояний в двухзонной Q2D + Q1D системе. Красными штриховыми линиями показаны плотности состояний невзаимодействующих зон. Адаптировано из [34]

смагриваемого в этом обзоре, понижение размерности глубокой зоны с  $D = 3$  до  $D = 2$  не играет существенной роли. Наибольшие различия в  $T_c$  для систем Q1D + 3D и Q1D + Q2D достигают всего лишь 30 % для значений  $\mu = 0.2 \div 0.6$ . Такая относительно слабая зависимость  $T_c$  от размерности зоны  $\nu = 1$  возникает из-за схожей картины плотности состояний (ср. рис. 3b и 4b), а также из-за характера зависимости  $(T_{c0} - T_c)/T_c$  от числа Гинзбурга: несмотря на то, что число Гинзбурга  $Gi_{2D}$  для 2D зоны на несколько порядков больше такового для 3D зоны  $Gi_{3D}$ , сдвиг критической температуры в уравнении (30) линеен по  $Gi_{2D}$  и зависит как квадратный корень от  $Gi_{3D}$  в уравнении (22), что делает сдвиг  $T_{c0} - T_c$  сопоставимым для этих двух случаев.

Предыдущие результаты были получены в предположении  $|\epsilon_0| \gg \hbar\omega_c$ , что является хорошим приближением для традиционных однокомпонентных сверхпроводников. В многозонных сверхпроводящих

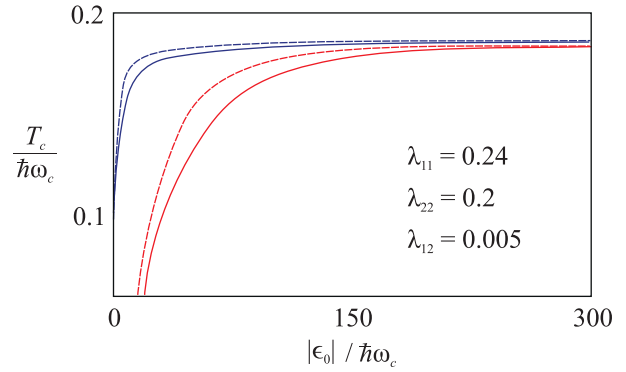


Рис. 5. (Цветной онлайн) Критическая температура с учетом флуктуаций в зависимости от глубины  $|\epsilon_0|$  высокоразмерной зоны. Синим цветом показаны результаты для системы Q1D + 3D, красным – для системы Q1D + Q2D. Сплошные линии соответствуют равным эффективным массам носителей в зонах, штриховые – отношению масс  $m_1/m_2 = 4$ ,  $\mu = 0.4$ . Адаптировано из [34]

соединениях энергия Ферми может быть на один или два порядка меньше этого значения,  $E_F \lesssim \lesssim 10\hbar\omega_c$ [17, 18, 21].

На рисунке 5 показана зависимость критической температуры с учетом флуктуаций от глубины зоны  $\nu = 1$  при значении химического потенциала, отвечающего максимуму  $T_c$  (снова используется (30)). Для малых значений  $|\epsilon_0|$  критическая температура довольно сильно отличается от среднеполевого значения  $T_{c0} \approx 0.18$ , однако быстро приближается к нему при увеличении  $|\epsilon_0|$ . Причиной сильного отличия  $T_c$  от  $T_{c0}$  при малых  $|\epsilon_0|$  является уменьшение длины когерентности в глубокой зоне 1, что приводит к увеличению  $Gi_1$ , и, соответственно, усилению флуктуаций в этой зоне.

Штриховыми линиями на рис. 5 показана та же зависимость  $T_c(|\epsilon_0|)$ , но для разных эффективных масс носителей в зонах,  $m_1/m_2 = 4$ . Видно, что изменение эффективной массы меняет зависимости лишь количественно, несколько сдвигая область сильных флуктуаций в зону меньших значений  $|\epsilon_0|$ .

**3.4. Q2D + Q2D.** Случай взаимодействия двух квазидвумерных зон также очень интересен, так как поверхности Ферми многих многозонных материалов имеют квазидвумерный характер [18]. Как и раньше, мы считаем, что одна из этих зон ( $\nu = 1$ ) – глубокая, а другая ( $\nu = 2$ ) – мелкая. В данном случае мы не будем иметь значительное повышение плотности состояний вблизи края мелкой зоны. Тем не менее, в этом случае конденсат мелкой зоны также может находиться в режиме БКШ–БЭК кроссовера, и механизм подавления флуктуаций и стабилизации крос-

совера будет эффективен при условии слабой связи с глубокой зоной.

Для глубокой Q2D зоны  $\nu = 1$  коэффициенты разложения в функционале энергии (5) приведены в уравнении (26). Для мелкой Q2D зоны  $\nu = 2$  они имеют тот же вид для всех коэффициентов, за исключением коэффициента при градиентном члене, который в этом случае записывается как [46]

$$\mathcal{K}_2 = \frac{3\zeta(2)}{8\pi^2} \frac{N_2 \hbar^2 v_2^2}{T_{c0}^2}, \quad (32)$$

где, как и раньше,  $N_2$  обозначает плотность состояний этой зоны, а характерная скорость  $v_2 = \sqrt{2T_{c0}/m_2}$  определяется критической температурой.

Заметим, что в данном случае мы можем в явном виде найти решение уравнения (7) для среднеполевой критической температуры [49]:

$$T_{c0} = \frac{2e^\gamma}{\pi} \hbar \omega_c \exp \left[ -\frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} \chi^{1/2} S}{\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12}^2} \right], \quad (33)$$

где  $\chi = N_2/N_1$ ,  $\lambda_{\nu\nu'} = g_{\nu\nu'} \sqrt{N_\nu N_{\nu'}}$ , а величину  $S$ , найденную из уравнений (7) и (9), удобно переписать в виде

$$S = \frac{\chi^{-1/2}}{2\lambda_{12}} \left[ \lambda_{22} - \lambda_{11} + \sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_{11})^2 + 4\lambda_{12}^2} \right]. \quad (34)$$

Флуктуационный сдвиг критической температуры находится на этот раз с помощью уравнения (31). Число Гинзбурга для эффективной Q2D системы дается выражением (27), которое переписывается аналогично уравнению (28) как

$$\begin{aligned} Gi = Gi_1 \frac{1 + S^4 b_2/b_1}{(1 + S^2 a_2'/a_1')} \frac{1}{\sqrt{1 + S^2 \mathcal{K}_2^{(x)}/\mathcal{K}_1^{(x)}}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1 + S^2 \mathcal{K}_2^{(y)}/\mathcal{K}_1^{(y)}}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где, как и в предыдущем параграфе,  $Gi_1$  – число Гинзбурга для глубокой Q2D зоны.

Численные результаты для полученных выражений, сделанные в пределе  $v_2 \gg v_1$  для параметров  $\lambda_{11} = 0.12$ ,  $\lambda_{22} = 0.15$  и  $N_1 = N_2$ , показаны на рис. 6 в виде цветной фазовой диаграммы состояния системы на плоскости  $\lambda_{12} - T$  (температура приведена относительно температуры перехода глубокой зоны  $T_{c0,1}$ , взятой без межзонного взаимодействия). На диаграмме рис. 6 линиями показаны  $T_{c0}$  и  $T_c$  как функции  $\lambda_{12}$ . Последние рассчитаны для нескольких

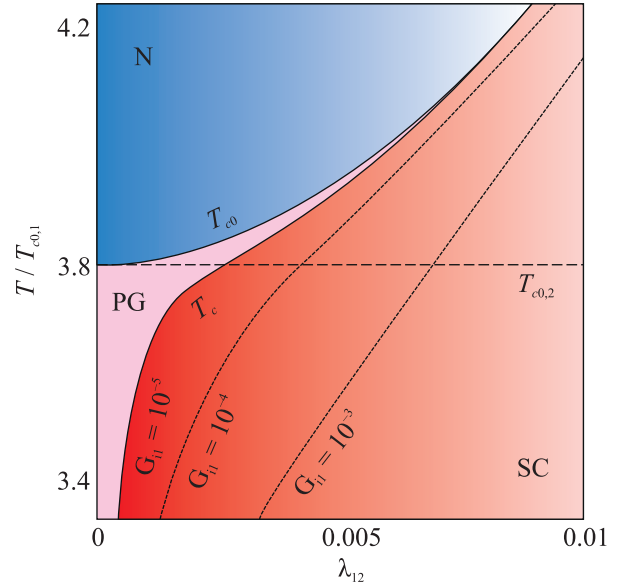


Рис. 6. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма на плоскости  $T - \lambda_{12}$  и критическая температура сверхпроводящего перехода, посчитанная в приближении среднего поля ( $T_{c0}$ ) и с учетом флуктуаций ( $T_c$ ), как функции амплитуды межзонного взаимодействия  $\lambda_{12}$  для сверхпроводника с двумя квазидвумерными зонами. Красная зона SC – сверхпроводящее состояние ( $T < T_c$ ), синяя N – нормальное состояние ( $T > T_{c0}$ ), розовая PG – область флуктуаций пар ( $T_{c0} < T < T_c$ ). Зависимость  $T_c(\lambda_{12})$  показана для различных значений числа Гинзбурга глубокой зоны  $\nu = 1$ . Горизонтальная штриховая линия показывает среднеполевую критическую температуру в мелкой зоне  $\nu = 2$  при отсутствии спаривания. Адаптировано из [36]

значений  $Gi_1$  глубокой зоны. На диаграмме красным показана область сверхпроводящего состояния SC ( $T < T_c$ ), синим – область нормального состояния N ( $T > T_{c0}$ ), розовым – область флуктуаций или псевдощели PG ( $T_{c0} < T < T_c$ ).

Результаты расчета показывают, что и в этом случае флуктуации практически полностью подавляются даже при чрезвычайно малых значениях константы межзонного взаимодействия  $\lambda_{12}$ . Так же, как и раньше, этот эффект выражен тем сильнее, чем слабее амплитуда флуктуаций в глубокой зоне. Например, для глубокой зоны с числом Гинзбурга  $Gi_1 = 10^{-5}$  область существования псевдощели становится пренебрежимо малой при  $\lambda_{12} \gtrsim 0.001$ , и критическая температура  $T_c$  становится практически равной среднеполевой критической температуре мелкой зоны  $T_{c0,2}$ . Заметим, что оценка интервала значений межзонного взаимодействия для многозонных сверхпроводящих материалов дает  $0.005 \lesssim \lambda_{12} \lesssim 0.4$  [45].

3.5. *Флуктуации магнитного поля.* В заключение этого раздела упомянем, что в дополнение к флуктуациям параметра порядка необходимо также учесть флуктуации магнитного поля. Расчет соответствующих вкладов в флуктуационный сдвиг критической температуры был представлен в работе [50]. Результаты вычислений показали, что сдвиг критической температуры (22) для 3D зоны приобретает дополнительный вклад

$$\frac{T_{c0} - T_c}{T_c} = \frac{8}{\pi} \sqrt{Gi} + \frac{4}{\pi \kappa^2} \sqrt{Gi}. \quad (36)$$

Следовательно, учет полевых флуктуаций не приводит к изменению корневой зависимости сдвига от  $Gi$ , меняя только коэффициент при ней.

Для 2D учет флуктуаций поля в рамках анализа методом ренорм-группы приводит к следующему выражению для сдвига критической температуры:

$$\frac{T_{c0} - T_c}{T_c} = 2Gi \ln \frac{1}{4Gi} + \frac{Gi}{2\kappa^2} \ln \frac{1+y}{Gi+y}, \quad (37)$$

где  $Gi$  – параметр Гинзбурга для 2D зоны, величина  $y$  вычисляется как

$$y = \frac{Gi}{\kappa^2} \ln \frac{1}{Gi}, \quad (38)$$

а  $\kappa$  – параметр Гинзбурга–Ландау. Это более сложное выражение, чем уравнение (31). Тем не менее, учитывая тот факт, что для малых значений  $Gi$   $y \ll 1$ , получим, что в этом случае основной вклад в сдвиг критической температуры имеет ту же функциональную зависимость от  $Gi$ , что и выражение (31), только с другим числовым коэффициентом.

Таким образом, учет флуктуаций поля хотя и несколько увеличивает сдвиг критической температуры количественно, но не меняет основной вывод об эффективном механизме подавления флуктуаций за счет межзонного взаимодействия. Заметим, что из выражений (36) и (37) видно, что вклад флуктуаций поля пренебрежимо мал для сверхпроводников II рода с  $\kappa \gg 1$ .

**4. Материалы.** В предыдущих разделах было показано, что наличие в сверхпроводнике двух взаимодействующих одночастичных зон, “мелкой” и “глубокой”, приводит к подавлению флуктуаций и стабилизации режима БКШ–БЭК кроссовера в мелкой зоне, с возможным значительным увеличением критической температуры. Последнее происходит, если при этом мелкая зона имеет повышенную плотность состояний, например, из-за сингулярности ван Хофа в квази-одномерной зоне. Сингулярность одночастичных состояний ведет к резкому повышению средне-полевой критической температуры, соответствующей

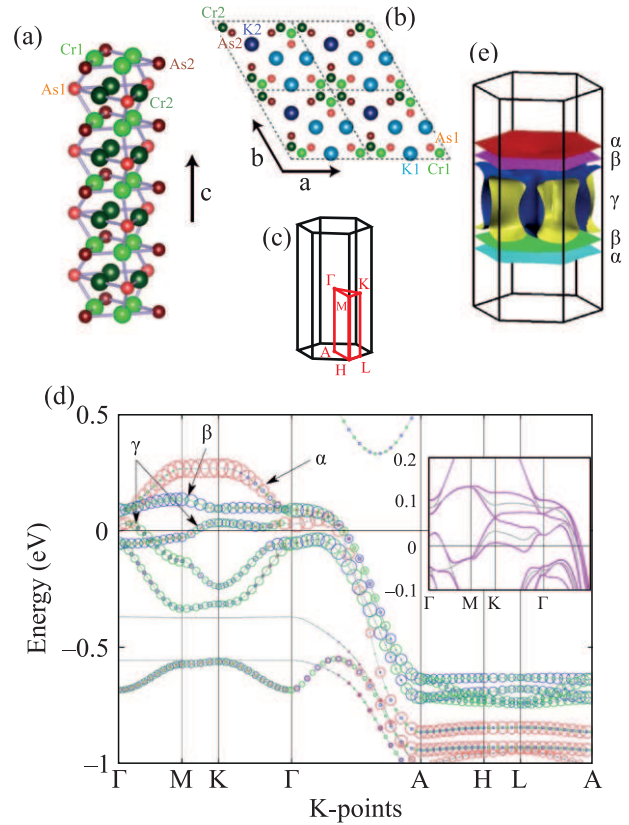


Рис. 7. (Цветной онлайн) Кристаллическая и зонная структура квазиодномерного сверхпроводника  $K_2Cr_3As_3$ . (a) – Субнанотрубка с двойными стенками  $[(Cr_3As_3)^{2-}]_{\infty}$ ; (b) – Вид сверху на четыре элементарные ячейки. Взято из [51]. (c) – Первая зона Бриллюэна. (d) – Зонная структура. На вставке показано сравнение релятивистских (фиолетовые линии) и нерелятивистских (серые линии) результатов. Размер красных, синих и зеленых кружков пропорционален вкладам орбиталей  $d_{z^2}$ ,  $d_{x^2-y^2}$  и  $d_{xy}$ , соответственно. Орбитали, имеющие состояния вблизи поверхности Ферми, обозначены буквами  $\alpha, \beta, \gamma$ ; (e) – поверхность Ферми, состоящая из двух квазиодномерных ( $\alpha, \beta$ ) и одного трехмерного ( $\gamma$ ) листов. Взято из [52]

образованию куперовских пар в этой зоне, а взаимодействие с глубокой зоной стабилизирует ее, подавляя флуктуации. Существенной деталью такого механизма подавления флуктуаций является то, что он становится эффективен уже при очень малом межзонном взаимодействии. Заметим, что повышение плотности состояний также возможно при наличии в системе плоской зоны.

Предложенный механизм не очень чувствителен к деталям зонной структуры и может быть реализован в различных материалах, коль скоро их зонная структура удовлетворяет условиям, описанным вы-

ше. В настоящее время имеется довольно много соединений, в которых данные требования могут удовлетворяться.

**4.1. Квазиодномерные материалы.** Очевидными кандидатами на реализацию выше указанного механизма являются материалы с выраженной квазиодномерной структурой, и соответственно, с сингулярностью в плотности состояний. Хорошо известно, что в чисто одномерных системах с короткодействующими взаимодействиями тепловые и квантовые флуктуации препятствуют формированию дальнего порядка при конечных температурах, что является препятствием для возникновения сверхпроводимости. Ситуация меняется, если между отдельными одномерными системами имеется поперечное взаимодействие, т.е. вся система в целом является квазиодномерной. Примерами таких квазиодномерных сверхпроводящих систем являются бехгардовские соли  $(\text{TMTSF})_2\text{X}$  [16], структуры на основе селенида молибдена  $M_2\text{Mo}_6\text{Se}_6$  ( $M = \text{Tl}, \text{In}$ ) [53], литий-молибденовая бронза  $\text{Li}_{0.9}\text{Mo}_6\text{O}_{17}$  [54].

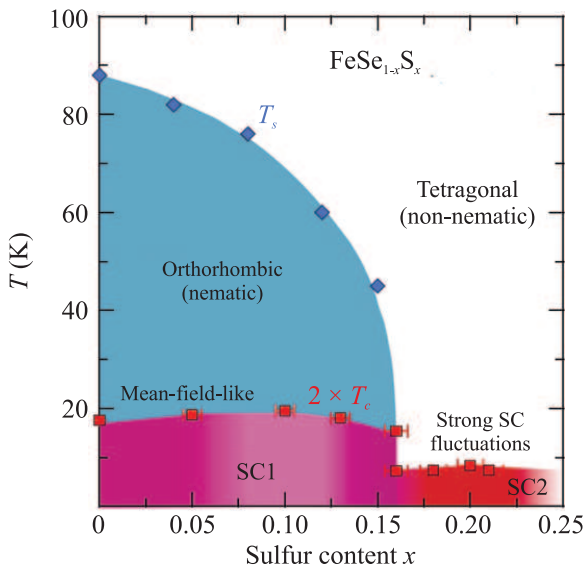


Рис. 8. (Цветной онлайн) Экспериментально полученная фазовая диаграмма для соединения  $\text{FeSe}_{1-x}\text{S}_x$  в координатах “уровень допирования–температура”. Красные квадраты и синие ромбы соответствуют температуре  $T_c$  сверхпроводящего и температуре  $T_s$  нематического фазовых переходов, соответственно. При критическом уровне допирования  $x_c \approx 0.17$  происходит резкий скачок  $T_c$ , свидетельствующий о перестройке основного состояния сверхпроводящей фазы. Взято из [24]

С точки зрения механизма подавления флуктуаций, рассматриваемого в разделе 2, именно наличие поперечного взаимодействия между одномерными

структурами приводит к формированию электронных зон большей размерности, способных подавить флуктуации в квазиодномерных зонах и обеспечить появление сверхпроводимости в системе. По всей видимости, этот механизм в полной мере реализуется в пниктидах хрома  $M_2\text{Cr}_3\text{As}_3$ , ( $M = \text{K}, \text{Rb}, \text{Cs}$ ) – семействе материалов, сверхпроводимость в которых была обнаружена в 2015 г. [55–57].

$\text{K}_2\text{Cr}_3\text{As}_3$  при комнатной температуре имеет гексагональную кристаллическую решетку с постоянными  $a = 9.98 \text{ \AA}$  и  $c = 4.23 \text{ \AA}$  (см. рис. 7а и б). Примечательными структурными единицами этого кристалла являются одномерные отрицательно заряженные “цепи”  $[(\text{Cr}_3\text{As}_3)^{2-}]_\infty$ , которые представляют собой двустенные субнанотрубки с внешним диаметром 0.58 нм. Эти субнанотрубки хорошо отделены друг от друга цепочками противоположно заряженных калия, в связи с чем взаимодействие между отдельными субнанотрубками является существенно более слабым по сравнению с взаимодействиями внутри субнанотрубки; в этом смысле данный материал является действительно квазиодномерным.

Расчеты из первых принципов (рис. 7с–е) показывают, что состояния вблизи энергии Ферми заняты в основном  $3d$ -электронами хрома, и поверхность Ферми состоит из двух Q1D-листов и одного 3D-листа. Подобная зонная структура характерна и для других представителей семейства; кроме того, у  $\text{Cs}_2\text{Cr}_3\text{As}_3$  добавляется еще один Q1D-лист на поверхности Ферми [58].

Температура сверхпроводящего перехода понижается при замене калия в составе соединения на более тяжелые элементы. Если для  $\text{K}_2\text{Cr}_3\text{As}_3$   $T_c = 6.1 \text{ K}$ , то для  $\text{Rb}_2\text{Cr}_3\text{As}_3$  она составляет 4.8 K [56], а для  $\text{Cs}_2\text{Cr}_3\text{As}_3$  – 2.2 K [57]. Такое изменение критической температуры объясняется разным расстоянием между субнанотрубками в этих соединениях. В соединениях на основе рубидия и хрома это расстояние, соответственно, на 3 и 6% больше по сравнению с соединением на основе калия. Это приводит к ослаблению взаимодействия между субнанотрубками и, как следствие, к понижению критической температуры.

Как видно, представляются весьма обещающими дальнейшие эксперименты с выше указанными квазиодномерными многозонными сверхпроводниками в контексте возможной настройки положения химического потенциала для достижения условий значительного повышения критической сверхпроводящей температуры. Такая настройка может достигаться различными способами, например, путем химического инжиниринга, посредством большого дав-

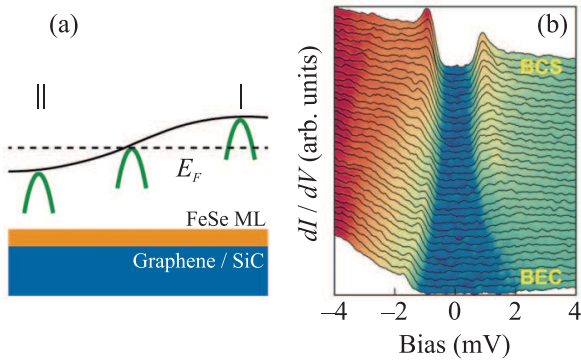


Рис. 9. (Цветной онлайн) Реализация БКШ–БЭК-кроссовера в реальном пространстве в монослое FeSe на подложке из графена. (a) – Смещение зонной структуры относительно уровня Ферми (штриховая линия), обусловленное различным упорядочением слоев графена в подложке. Область I соответствует БКШ, область II – БЭК. (b) – Пространственно разрешенный спектр  $dI/dV$ , измеренный вдоль штриховой линии на панели (a). Адаптировано из [59]

ления или допирования. В этой связи стоит упомянуть недавние весьма интересные результаты расчетов из первых принципов, которые продемонстрировали возможность наблюдения перехода Лифшица в соединении  $KCr_3As_3H_x$  при изменении интеркаляции водорода [60].

4.2. *Сверхпроводники на основе железа.* На наш взгляд, сверхпроводники на основе железа являются на данный момент наиболее перспективными системами для реализации механизма подавления сверхпроводящих флуктуаций. В целом ряде работ предпринимались попытки объяснить нетипичные свойства купратных ВТСП наличием БКШ–БЭК-кроссовера из-за больших запрещенных зон и низкой концентрации носителей заряда в этих соединениях (см., например, [61]), однако, по всей видимости, сверхпроводимость в купратных ВТСП имеет другую природу [62].

4.2.1. *Монослой FeSe.* Как уже было сказано в разделе 2, в режиме бозе-эйнштейновского конденсата (или режиме сильной связи) температура образования пар  $T_{c0}$  и реальная температура сверхпроводящего перехода  $T_c$  четко разделены. В диапазоне между  $T_{c0}$  и  $T_c$  куперовские пары также существуют, создавая большие сверхпроводящие флуктуации и обедняя низкоэнергетическую плотность состояний, что приводит к формированию псевдощели.

Монослой FeSe имеет очень небольшие дырочные и электронные карманы на поверхности Ферми, и отношение величины сверхпроводящей энергетической щели к энергии Ферми достигает значе-

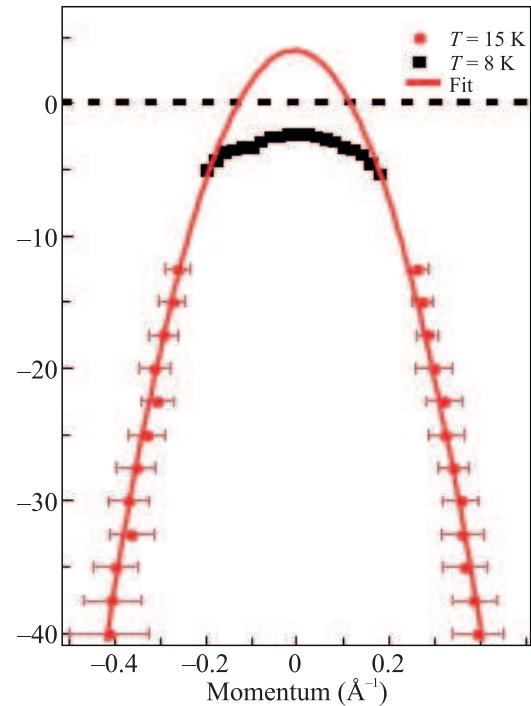


Рис. 10. (Цветной онлайн) Дисперсия квазичастиц в БКШ–БЭК-кроссовере при температуре выше и ниже критической для  $FeSe_xTe_{1-x}$ . Взято из [65]

ний  $\Delta/E_F \approx 0.3 \div 1.0$  [20, 63], что, по всей видимости, соответствует режиму БКШ–БЭК-кроссовера. С другой стороны, измерения сканирующей туннельной спектроскопии не обнаружили образования псевдощели выше  $T_c$  [21].

Эти результаты подразумевают, что сверхпроводимость в FeSe не просто описывается картиной обычного перехода БКШ–БЭК. Важным аспектом является влияние многозонной электронной структуры, которая, помимо отношения  $\Delta/E_F$ , может иметь и другие факторы, влияющие на свойства кроссовера.

В работе [24] при помощи измерения теплоемкости, магнитного крутящего момента и сканирующей туннельной спектроскопии с высоким разрешением была получена фазовая диаграмма монослоя FeSe, легированного серой, в зависимости от уровня допирования (рис. 8). Вид фазовой диаграммы указывает на то, что сверхпроводящий переход реализуется по сценарию, не описываемому теорией среднего поля. Одним из главных результатов эксперимента является отсутствие псевдощели в СТС-спектрах при температурах выше  $T_c$ . Предполагается, что ключевыми факторами, определяющими свойства кроссовера в  $FeSe_{1-x}S_x$ , является многозонный характер поверхности Ферми, а также близость к переходу Лифши-

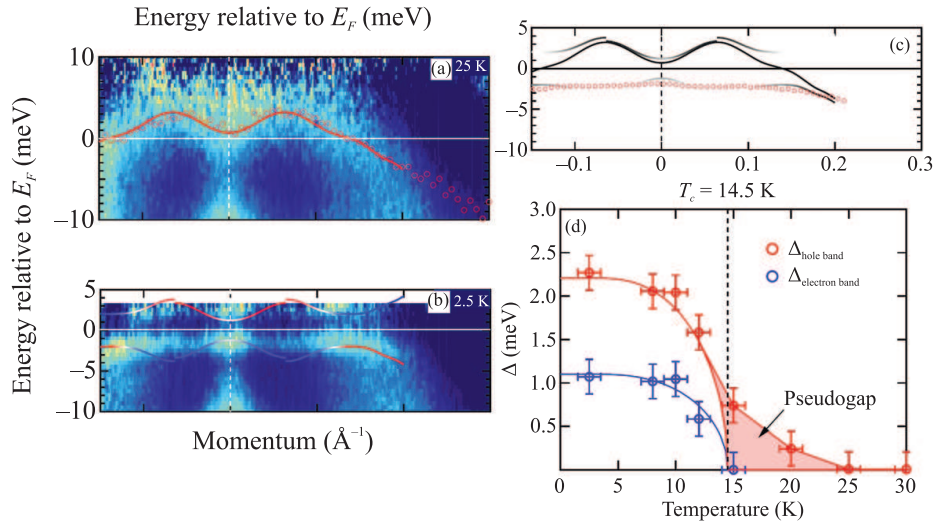


Рис. 11. (Цветной онлайн) Спектры ARPES для  $\text{FeTe}_{0.6}\text{Se}_{0.4}$  выше (а) и ниже (б) критической температуры. Сплошная красная кривая на панели (а) – результат фитирования дисперсионной кривой, отмеченной кругами. Сплошные кривые на панели (б) отвечают дисперсии квазичастиц в нормальном состоянии, а также для сверхпроводящей щели  $\Delta(k) = 2$  мэВ для дырочной зоны и  $\Delta(k) = 1$  мэВ для электронной зоны. (с) – Дисперсионные кривые из панелей (а) и (б) на одном графике. (d) – Температурная зависимость сверхпроводящей щели для электронной и дырочной зон. Красным цветом показана область псевдощели. Взято из [66]

ца, реализующегося при критическом уровне допирования  $x_c \approx 0.17$ .

Монослой  $\text{FeSe}$  является очень перспективным материалом для реализации БКШ–БЭК-кроссовера также ввиду того, что энергия Ферми в этом соединении, составляющая всего несколько мэВ, может точно и относительно легко варьироваться числом слоев подложки из графена [22], а также геометрией их упорядочения. В работе [23] состояние кроссовера было получено в монослое  $\text{FeSe}$ , размещенном на подложке из трехслойного графена, упорядочение слоев в котором было различным в разных местах подложки (АВА и АВС). Это приводило к пространственному изменению работы выхода в графене, что вызывало смещение пика дырочной дисперсионной кривой в  $\text{FeSe}$  (рис. 9а). Плотность состояний, измеренная вдоль штриховой линии при помощи сканирующей туннельной спектроскопии, в области I образца имеет щель, характеризующуюся электрон-дырочной симметрией, свойственной БКШ. При движении из области I в область II электрон-дырочная симметрия нарушается, и плотность состояний принимает вид ступенчатой функции, характерной для кроссовера [64]. Сообщается, что в работе было достигнуто значение  $\Delta/E_F \approx 0.3$ .

4.2.2. Объемные образцы. В работе [17] при помощи фотоэлектронной спектроскопии с угловым разрешением впервые было обнаружено, что соединения

на основе  $\text{FeSe}$ , а именно,  $\text{FeSe}_x\text{Te}_{1-x}$  характеризуются наличием БКШ–БЭК-кроссовера.

На рисунке 10 показана дисперсионная зависимость одной из зон вблизи уровня Ферми  $E_F = 4 \pm 2.5$  мэВ, измеренная при температурах, соответствующих нормальному и сверхпроводящему состояниям образца. Дисперсионная кривая вдали от уровня Ферми была получена из импульсного распределения (отмечена красными точками на рис. 10). Она является идентичной для обеих температур  $T = 8 \text{ K} < T_c$  и  $T = 15 \text{ K} > T_c$  и хорошо аппроксимируется квадратичной зависимостью (показана красной линией). В области малых энергий и низких температур дисперсия была получена из энергетического распределения (черные точки на рис. 10). Минимальная щель была обнаружена в  $\Gamma$ -точке, ее значение  $\Delta = 2.3 \pm 0.3$  мэВ дает  $\Delta/E_F \sim 0.5$ , что свидетельствует о сильном взаимодействии в  $\text{FeSe}_x\text{Te}_{1-x}$  и реализации БКШ–БЭК-кроссовера (в случае, если бы зона находилась в состоянии БЭК, минимум щели был бы расположен в  $k_F$ ).

В работе [18] при помощи лазерной спектроскопии со сверхвысоким лазерным разрешением был исследован сверхпроводник  $\text{FeTe}_{0.6}\text{Se}_{0.4}$ . Из описания результатов эксперимента следует, что эта система фактически реализует механизм, рассмотренный в разделе 2. Было обнаружено, что сверхпроводимость реализуется в виде когерентной смеси куперов-

ских пар в дырочной зоне и БКШ–БЭК-кроссовера в электронной зоне.

Рисунок 11 показывает спектр квазичастиц для температур ниже и выше критической. Количественный анализ спектров позволяет заключить, что электронная зона характеризуется малой щелью, однако находится в режиме сильной связи (БКШ–БЭК-кроссовера). Дырочная зона, напротив, обладает большей щелью и находится в режиме относительно слабой связи (БКШ). На панели (с) рис. 11 показана совмещенная зонная структура для температур, выше и ниже критической. Примечательно, что дырочная и электронная зоны сливаются на этой зонной картине, что является свидетельством взаимодействия зон и электрон-дырочного перемешивания независимо от силы взаимодействия в этих зонах.

На рисунке 11d показана зависимость сверхпроводящей щели для каждой из зон в зависимости от температуры. В эксперименте отчетливо наблюдалась псевдощель для дырочной зоны, которая быстро уменьшалась при появлении щели в электронной зоне. Однако, в сильном противоречии с теорией БКШ–БЭК-кроссовера для однозонных сверхпроводников, псевдощель не удалось обнаружить для электронной зоны. Такое поведение псевдощели находится в согласии с механизмом подавления флуктуаций, рассмотренным выше.

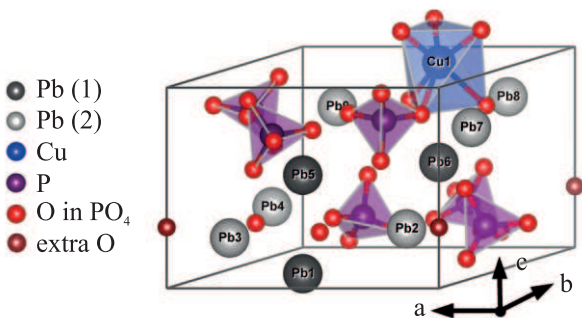


Рис. 12. (Цветной онлайн) Кристаллическая структура LK-99. Атомы меди, замещающие свинец, образуют треугольную подрешетку. Взято из [71]

*4.3. Другие соединения.* В заключение упомянем некоторые другие соединения, наблюдение БЭК–БКШ кроссовера в которых, на наш взгляд, является перспективным для реализации механизма подавления флуктуаций.

В работе [67] путем изменения плотности носителей реализован кроссовер БКШ–БЭК в хлориде нитрида циркония, легированном электронами двумерном сверхпроводнике. Фазовая диаграмма, полученная в результате одновременных измерений удельно-

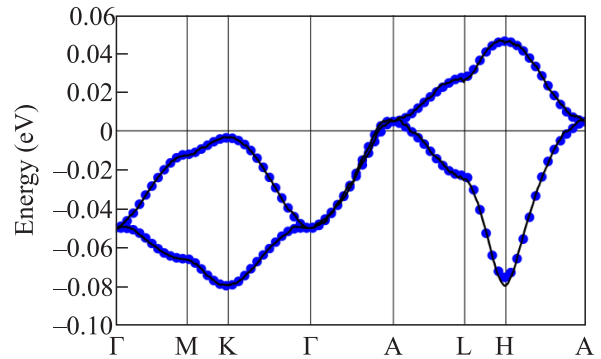


Рис. 13. (Цветной онлайн) Зонная структура LK-99 вблизи уровня Ферми. Взято из [71]

го сопротивления и туннельных спектров при ионном стробировании, демонстрирует псевдощелевую фазу в режиме низкого легирования. Соотношение температуры сверхпроводящего перехода и температуры Ферми в пределе низкой плотности носителей соответствует теоретической верхней границе, ожидаемой в режиме кроссовера. Эта система, таким образом, довольно просто реализует двумерный переход БКШ–БЭК.

В работе [68] кроссовер БКШ–БЭК был реализован на органическом проводнике с треугольной решеткой  $\kappa$  – (BEDT- TTF)<sub>4</sub>Hg<sub>2.89</sub>Vr<sub>8</sub>. Параметром, регулирующим кроссовер, в этом случае являлось внешнее давление, изменяющее кулоновское взаимодействие между носителями.

В июле 2023 г. появились сообщения об открытии нового сверхпроводящего соединения (LK-99), обладающего экстремально высокой температурой сверхпроводящего перехода, превышающей комнатную [69, 70]. LK-99 является апатитом, легированным медью, и имеет химическую формулу Pb<sub>10-x</sub>Cu<sub>x</sub>(PO<sub>4</sub>)<sub>6</sub>O, 0.9 < x < 1.1. Элементарная ячейка этой кристаллической структуры показана на рис. 12. Экспериментальные попытки воспроизвести результаты из [69, 70] привели к неоднозначным результатам, но, в общем и целом, не увенчались успехом. Некоторые экспериментальные группы подтвердили наблюдение левитации [72], в то время как другие сообщили о ее отсутствии [73]. Некоторые эксперименты подтверждают скачок проводимости, о котором сообщается в оригинальных работах, однако при другой температуре [74], тогда как другие обнаруживают, что материал является изолятором и демонстрирует парамагнитное поведение [75]. В настоящий момент научное сообщество относится к сообщению об обнаружении комнатной сверхпроводимости в LK-99 с сильным скептицизмом [76].



Тем не менее, в свете рассмотренного выше механизма подавления флуктуаций соединение LK-99 заслуживает, на наш взгляд, пристального внимания. Действительно, согласно расчетам зонной структуры, в этом материале активными являются две зоны. Одна из этих зон (см. рис. 13) является плоской вблизи своего края, а это приводит к сильному увеличению соответствующей плотности состояний. В результате среднеполевая температура куперовского спаривания может быть существенно повышена, но только если химический потенциал находится вблизи края плоской зоны, делая ее мелкой. При этом неизбежные температурные флуктуации в этой мелкой зоне могут быть подавлены за счет обмена парами с другой зоной. Заметим, что положение химического потенциала существенно зависит от наличия примесей и беспорядка, причем в случае плоской зоны с ее почти сингулярным характером плотности состояний относительно небольшое изменение этих факторов может радикально изменять параметры сверхпроводящего спаривания и, соответственно, температуры сверхпроводящего перехода, вплоть до полного подавления сверхпроводимости.

**5. Заключение.** В настоящем обзоре мы показываем, что сосуществование в сверхпроводящем материале двух взаимодействующих одночастичных зон, одна из которых мелкая, а другая – нет, может привести к подавлению температурных флуктуаций и стабилизации режима БКШ–БЭК кроссовера в мелкой зоне. В случае, если такая мелкая зона имеет большую плотность одночастичных состояний, например, из-за сингулярности ван Хофа в квазиодномерной зоне, или из-за плоского края, можно ожидать, что механизм подавления флуктуаций приведет к значительному повышению критической температуры. Из-за подавленных флуктуаций она приблизится к своему значению, полученному в теории среднего поля. Существенной деталью такого механизма подавления флуктуаций является то, что он становится эффективным уже при очень малом межзонном взаимодействии, когда критическая температура еще определяется мелкой зоной.

Рассмотренный механизм не чувствителен к деталям зонной структуры и может быть реализован в широком классе многозонных материалов. Ожидается, что он будет работать в ситуации, когда в материале сосуществуют больше двух зон, если, по крайней мере, одна из них мелкая, а взаимодействие между ними не очень сильное.

В настоящее время имеется довольно много материалов, в которых подобный механизм стабилизации БКШ–БЭК кроссовера и повышения критиче-

ской температуры может работать. К ним, в частности, относятся материалы с квазиодномерной структурой и материалы на основе железа. Существенный ингредиент таких материалов – наличие зон с плоским дном и положение уровня Ферми рядом с плоской частью зоны, что приводит к значительному повышению плотности состояний и, соответственно, константы куперовского спаривания. Добиться нужного положения химического потенциала в материале возможно различными способами, например, при помощи химического инжиниринга, небольшим изменением структуры посредством прикладывания внешнего давления или легирования [60].

Нужно отметить, что в рамках теории БКШ существует еще один механизм повышения критической температуры – путем уширения энергетического окна для куперовского спаривания, или частоты обрезания  $\omega_c$ . В настоящем обзоре мы не рассматриваем этот механизм повышения критической температуры, только заметим, что он будет действовать параллельно с подавлениями флуктуаций за счет взаимодействия нескольких зон.

**Финансирование работы.** Работа выполнена в рамках программы “Приоритет 2030” НИЯУ МИФИ, а также поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (проект государственного задания # FSWU-2023-0031). Аркадий Шаненко и Алексей Вагов благодарят программу фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, при поддержке которой были проведены расчеты сдвига критической температуры. Василий Столяров благодарит за поддержку Российский Научный Фонд (грант # 21-72-30026 <https://rscf.ru/en/project/21-72-30026>) и Министерство науки и высшего образования РФ (проект государственного задания # FSMG-2023-0014).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов.

1. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev. B* **108**, 1175 (1957).
2. J. G. Bednorz and K. A. Müller, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **64**, 189 (1957).
3. V. J. Emery and S. A. Kivelson, *Nature* **374**, 434 (1995).
4. M. Buchanan, *Nature* **409**, 8 (2001).
5. M. V. Sadovskii, *Phys.-Uspekhi* **44**, 515 (2001).
6. C. Varma, *Nature* **468**, 184 (2010).
7. S. I. Vedenev, *Phys.-Uspekhi* **64**, 890 (2021).
8. S. Borisenko, *Nature Materials* **12**, 600 (2013).
9. I. M. Lifshitz, *JETP* **38**, 1569 (1969).
10. G. E. Volovik, *Low Temp. Phys.* **43**, 47 (2017).
11. A. I. Coldea and M. D. Watson, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **9**, 125 (2018).

12. J. Ketterson and S. Song, *Superconductivity*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (1999).
13. A. Larkin and A. Varlamov, *Theory of Fluctuations in Superconductors*, Oxford University Press, Oxford, USA (2005).
14. K. B. Efetov and A. I. Larkin, Soviet Physics JETP **39**, 1129 (1974).
15. L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii, Soviet Physics JETP **40**, 198 (1975).
16. D. Jérôme, A. Mazaud, M. Ribault, and K. Bechgaard, Journal de Physique Lettres **41**, 95 (1980).
17. Y. Lubashevsky, E. Lahoud, K. Chashka, D. Podolsky, and A. Kanigel, Nature Physics **8**, 309 (2012).
18. K. Okazaki, Y. Ito, Y. Ota, Y. Kotani, T. Shimojima, T. Kiss, S. Watanabe, C.-T. Chen, S. Niitaka, T. Hanaguri, H. Takagi, A. Chainani, and S. Shin, Sci. Rep. **4**, (2014).
19. S. Kasahara, T. Watashige, Y. K. T. Hanaguri, T. Yamashita, Y. Shimoyama, Y. Mizukami, R. Endo, H. Ikeda, A. Kazushi, T. Terashima, S. Uji, T. Wolf, H. von Löhneysen, T. Shibauchi, and Y. Matsuda, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **111**, 16309 (2014).
20. S. Rinott, K. B. Chashka, A. Ribak, E. D. L. Rienks, A. Taleb-Ibrahimi, P. L. Fevre, F. Bertran, M. Randeria, and A. Kanigel, Sci. Adv. **3**, e1602372 (2017).
21. T. Hanaguri, S. Kasahara, J. Böker, I. Eremin, T. Shibauchi, and Y. Matsuda, Phys. Rev. Lett. **122**, 077001 (2019).
22. W. Huang, H. Lin, C. Zheng, Y. Yin, X. Chen, and S.-H. Ji, Phys. Rev. B **103**, 094502 (2021).
23. H. Lin, W. Huang, G. Rai, Y. Yin, L. He, Q.-K. Xue, S. Haas, S. Kettemann, X. Chen, and S.-H. Ji, Phys. Rev. B **107**, 104517 (2023).
24. Y. Mizukami, M. Haze, O. Tanaka, K. Matsuura, D. Sano, J. Böker, I. Eremin, S. Kasahara, Y. Matsuda, and T. Shibauchi, Commun. Phys. **6**, 183 (2023).
25. H. Suhl, B. T. Matthias, and L. R. Walker, Phys. Rev. Lett. **3**, 552 (1959).
26. V. A. Moskalenko, Phys. Met. Metallogr. **8**, 25 (1959).
27. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, Nature **426**, 537 (2003).
28. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
29. L. P. Gor'kov, JETP **36**, 1918 (1959).
30. H. Doh, M. Sigrist, B. K. Cho, and S.-I. Lee, Phys. Rev. Lett. **83**, 5350 (1999).
31. I. Askerzade, A. Gencer, and N. Güçlü, Supercond. Sci. Technol. **15**, L13 (2002).
32. I. Askerzade, A. Gencer, and N. Güçlü, Supercond. Sci. Technol. **15**, L17 (2002).
33. T. T. Saraiva, P. J. F. Cavalcanti, A. Vagov, A. S. Vasenko, A. Perali, L. Dell'Anna, and A. A. Shanenko, Phys. Rev. Lett. **125**, 217003 (2020).
34. A. A. Shanenko, T. T. Saraiva, A. Vagov, A. S. Vasenko, and A. Perali, Phys. Rev. B **105**, 214527 (2022).
35. V. L. Ginzburg and L. D. Landau, JETP **20**(12), 1064 (1950).
36. L. Salasnich, A. A. Shanenko, A. Vagov, J. A. Aguiar, and A. Perali, Phys. Rev. B **100**, 064510 (2019).
37. T. T. Saraiva, L. I. Baturina, and A. A. Shanenko, J. Phys. Chem. Lett. **12**, 11604 (2021).
38. B. T. Geilikman, R. O. Zaitsev, and V. Z. Kresin, Fizika Tverdogo Tela **9**(3), 821 (1967).
39. V. Z. Kresin, Journal of Low Temperature Physics **11**, 519 (1973).
40. J. Geyer, R. M. Fernandes, V. G. Kogan, and J. Schmalian, Phys. Rev. B **82**, 104521 (2010).
41. A. A. Shanenko, M. V. Milošević, F. M. Peeters, and A. V. Vagov, Phys. Rev. Lett. **106**, 047005 (2011).
42. A. Z. Pokrovskii and V. L. Patashinskii, *Fluctuation Theory of Phase Transitions*, Pergamon Press, Oxford, USA (1999).
43. D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
44. A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover Publications, N.Y., USA (2003).
45. A. Vagov, A. A. Shanenko, M. V. Milošević, V. M. Axt, V. M. Vinokur, J. A. Aguiar, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **93**, 174503 (2016).
46. S. Wolf, A. Vagov, A. A. Shanenko, V. M. Axt, A. Perali, and J. A. Aguiar, Phys. Rev. B **95**, 094521 (2017).
47. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Journal of Physics C: Solid State Physics **6**, 1181 (1973).
48. P. G. de Gennes, *Superconductivity Of Metals And Alloys*, CRC Press, N.Y., USA (1999).
49. A. Vagov, A. A. Shanenko, M. V. Milošević, V. M. Axt, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **86**, 144514 (2012).
50. A. Cappellaro and L. Salasnich, Sci. Rep. **10**, 9088 (2020).
51. H. Z. Zhi, T. Imai, F. L. Ning, J.-K. Bao, and G.-H. Cao, arXiv:1501.00713, 2015.
52. C. C. Hao Jiang, Guanghan Cao, arXiv:1412.1309 (2015).
53. R. Brusetti, P. Monceau, M. Potel, P. Gougeon, and M. Sergent, Solid State Commun. **66**(2), 181 (1988).
54. J.-F. Mercure, A. F. Bangura, X. Xu, N. Wakeham, A. Carrington, P. Walmsley, M. Greenblatt, and N. E. Hussey, Phys. Rev. Lett. **108**, 187003 (2012).
55. J.-K. Bao, J.-Y. Liu, C.-W. Ma, Z.-H. Meng, Z.-T. Tang, Y.-L. Sun, H.-F. Zhai, H. Jiang, H. Bai, C.-M. Feng, Z.-A. Xu, and G.-H. Cao, Phys. Rev. X **5**, 011013 (2015).
56. Z.-T. Tang, J.-K. Bao, Y. Liu, Y.-L. Sun, A. Ablimit, H.-F. Zhai, H. Jiang, C.-M. Feng, Z.-A. Xu, and G.-H. Cao, Phys. Rev. B. **91**(2), 020506(R) (2015).

57. Z.-T. Tang, J.-K. Bao, Z. Wang, H. Bai, H. Jiang, Y. Liu, H.-F. Zhai, C.-M. Feng, Z.-A. Xu, and G.-H. Cao, *Science China Materials* **58**(1), 16 (2015).
58. C. Xu, N. Wu, G.-X. Zhi, B.-H. Lei, X. Duan, F. Ning, C. Cao, and Q. Chen, *npj Computational Materials* **6**(1), 30 (2020).
59. H. Lin, W. Huang, G. Rai, Y. Yin, L. He, Q.-K. Xue, S. Haas, S. Kettemann, X. Chen, and S.-H. Ji, [arXiv:2209.00758](https://arxiv.org/abs/2209.00758), 2023.
60. S.-Q. Wu, C. Cao, and G.-H. Cao, *Phys. Rev. B* **100**, 155108 (2019).
61. J. Ranninger and J. M. Robin, *Phys. Rev. B* **53**, R11961 (1996).
62. J. Sous, Y. He, and S. A. Kivelson, *npj Quantum Mater.* **8**, 25 (2023).
63. T. Terashima, N. Kikugawa, A. Kiswandhi et al. (Collaboration), *Phys. Rev. B* **90**, 144517 (2014).
64. Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, *Phys. Rep.* **412**, 1 (2005).
65. Y. Lubashevsky, E. Lahoud, K. Chashka, D. Podolsky, and A. Kanigel, [arXiv:1107.1487](https://arxiv.org/abs/1107.1487) (2012).
66. K. Okazaki, Y. Ito, Y. Ota, Y. Kotani, T. Shimojima, T. Kiss, S. Watanabe, C.-T. Chen, S. Niitaka, T. Hanaguri, H. Takagi, A. Chainani, and S. Shin, [arXiv:1307.7845](https://arxiv.org/abs/1307.7845) (2014).
67. Y. Nakagawa, Y. Kasahara, T. Nomoto, R. Arita, T. Nojima, and Y. Iwasa, *Science* **372**, 190 (2021).
68. Y. Suzuki, K. Wakamatsu, J. Ibuka, H. Oike, T. Fujii, K. Miyagawa, H. Taniguchi, and K. Kanoda, *Phys. Rev. X* **12**, 011016 (2022).
69. S. Lee, J.-H. Kim, and Y.-W. Kwon, [arXiv:2307.12008](https://arxiv.org/abs/2307.12008) (2023).
70. S. Lee, J. Kim, H.-T. Kim, S. Im, S. An, and K. H. Auh, [arXiv:2307.12037](https://arxiv.org/abs/2307.12037) (2023).
71. L. Si, M. Wallerberger, A. Smolyanyuk, S. di Cataldo, J. M. Tomczak, and K. Held, [arXiv:2308.04427](https://arxiv.org/abs/2308.04427) (2023).
72. H. Wu, L. Yang, B. Xiao, and H. Chang, [arXiv:2308.01516](https://arxiv.org/abs/2308.01516) (2023).
73. K. Kumar, N. K. Karn, Y. Kumar, and V. P. S. Awana, [arXiv:2308.03544](https://arxiv.org/abs/2308.03544) (2023).
74. Q. Hou, W. Wei, X. Zhou, Y. Sun, and Z. Shi, [arXiv:2308.01192](https://arxiv.org/abs/2308.01192).
75. Y. Jiang, S. B. Lee, J. Herzog-Arbeitman, J. Yu, X. Feng, H. Hu, D. Călugăru, P. S. Brodale, E. L. Gormley, M. G. Vergniory, C. Felser, S. Blanco-Canosa, C. H. Hendon, L. M. Schoop, and B. A. Bernevig, [arXiv:2308.05143](https://arxiv.org/abs/2308.05143) (2023).
76. D. Garisto, *Nature* **620**, 705 (2023).