МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202304.223-241
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги

О. Е. Галкин[1], С. Ю. Галкина[1], О. А. Муляр[2]

[1] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*
[2] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Работа посвящена изучению одного класса вещественных функций, которые мы называем степенными функциями Такаги. Такие функции имеют один положительный вещественный параметр, являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми, и задаются на числовой прямой с помощью функционального ряда. Эти ряды аналогичны ряду, задающему непрерывную, нигде не дифференцируемую функцию Такаги, описанную в 1903 г. При каждом значении параметра выведено функциональное уравнение для функций, связанных со степенными функциями Такаги. Затем с помощью этого уравнения получена точная двусторонняя оценка для изучаемых функций. Доказано, что при значениях параметра, не превосходящих 1, степенные функции Такаги удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера, и найдено наименьшее значение константы в этом условии. В результате получено обычное условие Гёльдера, которое вытекает из логарифмического условия Гёльдера. Более того, при значениях параметра, лежащих в пределах от 0 до 1, исследовано поведение степенных функций Такаги в окрестности точек их глобального максимума. Доказано, что в двоично-рациональных точках, и только в них, изучаемые функции достигают строгого локального минимума на числовой оси. В завершение описано множество точек, в которых функции достигают строгого локального максимума. Преимущество нашего исследования состоит в развитии ряда методов, применимых к непрерывным, нигде не дифференцируемым функциям. Это может позволить значительно расширить множество изучаемых функций.

Ключевые слова: степенная функция Такаги, функциональное уравнение, локальные экстремумы, логарифмическое условие Гёльдера

Для цитирования: Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Муляр О. А. О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. С. 223–241. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.223-241

Об авторах:

Галкин Олег Евгеньевич, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru

© *О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, О. А. Муляр*

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Галкин Светлана Юрьевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru

Муляр Ольга Александровна, преподаватель кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0009-0008-2263-4203, olga.mulyar@itmm.unn.ru

---

Original article

MSC2020 26A15, 26A16, 26A27

On Logarithmic Hölder Condition and Local Extrema of Power Takagi Functions

O. E. Galkin[1], S. Yu. Galkina[1], O. A. Mulyar[2]

[1] *National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

[2] *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper studies one class of real functions, which we call Takagi power functions. Such functions have one positive real parameter; they are continuous, but nowhere differentiable, and are given on a real line using functional series. These series are similar to the series defining the continuous, nowhere differentiable Takagi function described in 1903. For each parameter value, we derive a functional equation for functions related to Takagi power functions. Then, using this equation, we obtain an accurate two-sides estimate for the functions under study. Next, we prove that for parameter values not exceeding 1, Takagi power functions satisfy the Hölder logarithmic condition, and find the smallest value of the constant in this condition. As a result, we get the usual Hölder condition, which follows from the logarithmic Hölder condition. Moreover, for parameter values ranging from 0 to 1, we investigate the behavior of Takagi power functions in the neighborhood of their global maximum points. Then we show that the functions under study reach a strict local minimum on the real axis at binary-rational points, and only at them. Finally, we describe the set of points at which our functions reach a strict local maximum. The benefit of our research lies in the development of methods applicable to continuous functions that cannot be differentiated anywhere. This can significantly expand the set of functions being studied.

Keywords: power Takagi function, functional equation, local extrema, logarithmic Hölder condition

For citation: *O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, O. A. Mulyar.* On Logarithmic Hölder Condition and Local Extrema of Power Takagi Functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 25:4(2023), 223–241. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202304.223-241

About the authors:
Oleg E. Galkin, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2085-572X, olegegalkin@ya.ru
Svetlana Yu. Galkina, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2476-2275, svetlana.u.galkina@mail.ru
Olga A. Mulyar, Lecturer, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0009-0008-2263-4203, olga.mulyar@itmm.unn.ru

1. Введение

Наша статья посвящена изучению свойств степенных функций Такаги $S_p(x)$. Эти функции имеют один вещественный параметр $p > 0$ и определяются следующим образом.

Определение 1.1. *При каждом* $p > 0$ степенной функцией Такаги с параметром (показателем) p *мы называем функцию* $S_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *задаваемую с помощью равенства*

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{S_0(2^n x)}{2^n}\right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $S_0(x) = |x - [x + 1/2]| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q\in\mathbb{Z}} |x - q|$ *— расстояние между точкой* x *и ближайшей к ней целой точкой;* $[y]$ *— целая часть числа* $y \in \mathbb{R}$*;* $\{y\}$ *— дробная часть числа* y.

При $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. (см., например, [1–2]).

Частичные суммы ряда (1.1) будем обозначать через $S_{p,m}(x)$:

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

Иллюстрация 1. Графики степенных функций Такаги $y = S_p(x)$, изображенные линией синего цвета, можно увидеть далее на двух рисунках: при $p = 0{,}5$ — на Рис. 1.1, вместе с графиками частичных сумм $y = S_{p,n}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, изображенными линиями красного либо зеленого цвета; при $p = 0{,}8$ — на Рис. 2.1, вместе с графиками $y = -x^p \log_2 x$ и $y = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$ (см. теорему 2.1), изображенными линиями, соответственно, красного и зеленого цвета. Вертикальные пунктирные линии на этих рисунках указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$ ([3], теорема 5).

При любом $p > 0$ функции S_p являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ (это показано в теоремах 1 и 3 работы [3]).

Один из первых примеров непрерывных, нигде не дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ был построен Вейерштрассом не позднее 1872 г. Краткие очерки истории развития теории непрерывных нигде не дифференцируемых функций можно найти в работах [4, с.

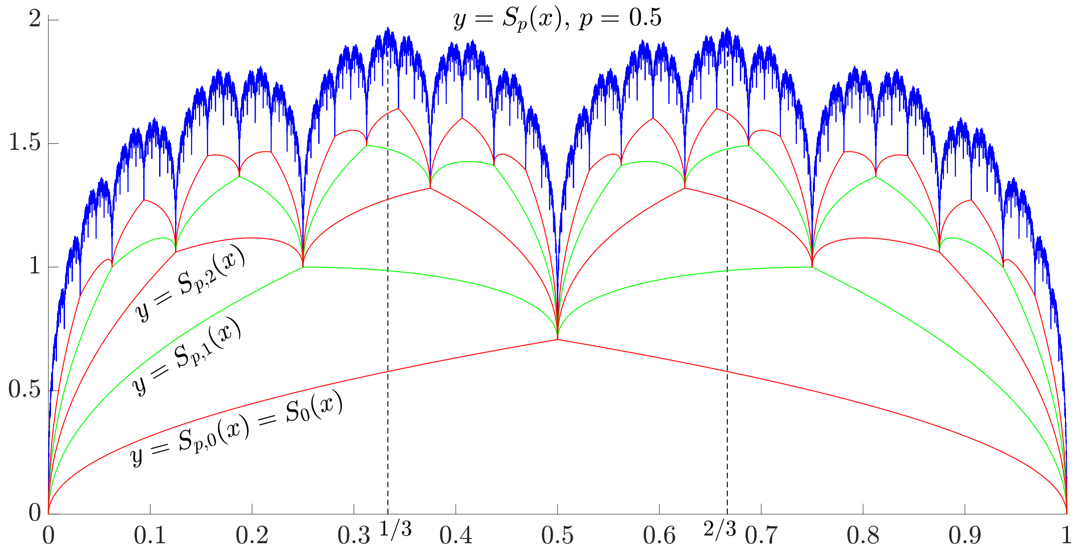

Рис. 1.1. График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$

Fig. 1.1. Graph of the function $y = S_p(x)$ for $p = 0{,}5$

201–222] и [5, с. 73–76]. Обзор некоторых конструкций непрерывных, нигде не дифференцируемых функций имеется в [6]. В последние годы ряд новых способов построения таких функций был предложен, в частности, в работах [7–8]. Примеры непрерывных, нигде не дифференцируемых функций, у которых множества точек локального экстремума удовлетворяют различным требованиям, приводятся в [9].

Обзоры большого числа работ, посвященных функции Такаги $T(x)$ и её обобщениям, можно найти в [1–2]. В 1959 г. Кахан [10, с. 54–55] нашел точки локальных и глобальных экстремумов этой функции.

Известно, что в пространстве всех периодических непрерывных функций на $\mathbb{R}$ множество нигде не дифференцируемых функций имеет вторую категорию, а его дополнение — первую категорию (см., например, [11]). Отсюда можно сделать вывод, что нигде не дифференцируемые функции составляют большинство (в указанном смысле), и их стоит изучать. Непрерывные нигде не дифференцируемые функции используются не только в различных областях математики: математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и др. (см., например, [1, с. 41–48]), но и в физике [5]. Непрерывным нигде не дифференцируемым функциям, связанным с сингулярной функцией Лебега, посвящена работа [12], где авторы, в частности, находят для них функциональные уравнения, показатели Гёльдера и глобальные экстремумы. В работах [13–14] для поиска глобальных экстремумов произвольных (в т. ч. нигде не дифференцируемых) функций был разработан метод крайних подаргументов и надаргументов. Таким образом, несмотря на сложность изучения нигде не дифференцируемых функций, интерес к ним постоянно растет.

Буссенеску приписывается фраза: «вся польза функции состоит в наличии у неё производной» [15, с. 15]. Тем не менее, остается ещё достаточное количество направлений изучения функций, не имеющих производной. Например, исследуются производные и интегралы дробного порядка [16], функциональные уравнения (см. [12, 14]), модуль непрерывности и условие Гёльдера [12], экстремумы [12], множества уровня [17], фрактальная размерность графика [17], крайние подаргументы и надаргументы [14], обобщенные вариации [18] и другие характеристики таких функций.

Степенные функции Такаги S_p, задаваемые формулой (1.1), привлекли наше внимание, в частности, тем, что для них оказалось возможным вывести функциональное уравнение (см. формулы (2.2) и (2.3)), частным случаем которого при $p = 1$ является уравнение, полученное Круппелем в [19]. Некоторые свойства этих функций уже были изучены нами в работе [3], где были получены, частности, следующие результаты:

1) доказано, что при любом $p > 0$ функции S_p на $\mathbb{R}$ непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены (теорема 1), а также что при $p \in (0; 1)$ они нигде не дифференцируемы (теорема 3);
2) в случае $p > 0$ получено функциональное уравнение $S_p(x) = S_{p,m-1}(x)+S_p(2^m x)/2^{mp}$ при $m \in \mathbb{N}$ (теорема 4) и вычислено значение $S_p(1/3) = 2^p/\big(3^p(2^p-1)\big)$ (лемма 1);
3) для любого $p \in (0; 1)$ показано, что глобальный максимум функции S_p равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $q + 1/3$ и $q + 2/3$, где $q \in \mathbb{Z}$, а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках (теорема 5).
4) получены двусторонние оценки $S_{p,n} \leqslant S_p \leqslant S_{p,n}+1/(3^p(2^p-1)2^{np})$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, и доказана их точность (предложение 1).

В настоящей статье мы исследуем другие свойства функций S_p. А именно, при различных значениях параметра p мы изучаем их локальные экстремумы и логарифмическое условие Гёльдера. Приведем краткое описание основных результатов и содержание каждого из пяти параграфов работы. Параграф 1. — это введение. В основной теореме 2.1 *параграфа 2.* мы выводим функциональное уравнение $F_p(2x) = F_p(x)$ для функций $F_p(x) = S_p(x)/x^p+\log_2 x$, а затем с его помощью получаем еще одну точную оценку $-x^p \log_2 x \leqslant S_p(x) \leqslant x^p(2^p/(2^p-1)-\log_2 3-\log_2 x)$ для функций S_p. В параграфе 3. мы доказываем (теорема 3.2), что при $p \in (0; 1]$ степенная функция Такаги S_p удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера $|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant C\cdot|x-y|^p\cdot \log_3(1/|x-y|)$ (см. определение 3.2) с наименьшей константой $C = 2^p/(2^p-1)$. Отсюда вытекает «обычное» условие Гёльдера для S_p (предложение 3.1, следствие 3.1). В параграфе 4. мы, исследуя поведение функций S_p в окрестности точки глобального максимума $x = 1/3$, доказываем оценку $L_p|h|^p \leqslant S_p\Big(\dfrac{1}{3}\Big)-S_p\Big(\dfrac{1}{3}+h\Big) \leqslant R_p|h|^p$ для любых $p \in (0; 1)$ и $h \in (-1/12, 1/12)$ (теорема 4.1). Далее в теореме 4.2 мы показываем, что в двоично-рациональных точках, и только в них, функция S_p достигает строгого локального минимума на $\mathbb{R}$, а в точках вида $q/(3\cdot 2^n)$, где $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, q — целое и не делится на 3, S_p достигает строгого локального максимума. В параграфе 5. описаны возможные направления дальнейших исследований.

2. Функциональное уравнение

В основной теореме 2.1 этого параграфа мы выводим функциональное уравнение для функции $F_p(x) = S_p(x)/x^p + \log_2 x$, а затем применяем его для получения еще одной точной оценки функций S_p, помимо оценки (19) из предложения 1 работы [3].

Для этого рассмотрим три леммы. Первая из них — техническая.

Л е м м а 2.1. *При любом $p > 0$ верно неравенство $p(1-p)\Phi_p+(2p-1)/\ln 2 > 0$, где $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$.*

Доказательство. Подставляя выражение для Φ_p в доказываемое неравенство, после преобразований приходим к равносильному ему неравенству $y(p) = 2^p\big(p^2\ln(3/2) + p(2-\ln(3/2)) - 1\big) - p^2\ln 3 + p(\ln 3 - 2) + 1 > 0$. Имеем $y'(p) = 2^p\big(p^2\ln 2\ln(3/2) + p(2\ln 3 - \ln 2\ln(3/2)) - \ln 3 + 2\big) - 2p\ln 3 + \ln 3 - 2$. Отсюда $y''(p) = 2^p\big(p^2\ln^2 2\ln(3/2) + p\ln 2(2\ln(9/2) - \ln 2\ln(3/2)) + 2\ln 6 - \ln 2\ln(9/2)\big) - 2\ln 3$. Здесь все коэффициенты многочлена положительны, поэтому $y''(p)$ возрастает при $p \geqslant 0$. Таким образом, при $p > 0$ верна оценка $y''(p) > y''(0) = \ln 2(2 - \ln(9/2)) > 0$. Отсюда, т. к. $y'(0) = y(0) = 0$, в силу формулы Тейлора следует, что $y(p) > 0$ при всех $p > 0$.
Доказательство завершено.

Доказательство следующей леммы можно извлечь из первой части доказательства утверждения 2.2 в работе Круппеля [19]. Для полноты изложения приводим эти рассуждения здесь.

Лемма 2.2. *При любых $x \in [1/2, 1]$ выполняется неравенство*

$$\frac{S_0(x)}{x} + \frac{S_0(2x)}{2x} + \log_2 x \geqslant 0,$$

причем равенство в нем достигается только при $x = 1/2$ и $x = 1$.

Доказательство. Положим $y(x) = S_0(x)/x + S_0(2x)/(2x) + \log_2 x$ для любого $x \in [1/2; 1]$.

1) Если $x \in [1/2; 3/4]$, то $S_0(x) = 1 - x$ и $S_0(2x) = 2x - 1$ в силу равенства 4 из [3]. Поэтому $y(x) = (1-x)/x + (2x-1)/(2x) + \log_2 x = 1/(2x) + \log_2 x$.

Имеем: $y(1/2) = 0$, $y'(x) = (2x - \ln 2)/(2x^2\ln 2) \geqslant (1 - \ln 2)/(2x^2\ln 2) > 0$ при всех $x \in [1/2; 3/4]$. Поэтому $y(x) > 0$ при любых $x \in (1/2; 3/4]$.

2) Если $x \in [3/4; 1]$, то $S_0(x) = 1 - x$ и $S_0(2x) = 2 - 2x$ в силу равенства 4 из [3]. Поэтому $y(x) = (1-x)/x + (2-2x)/(2x) + \log_2 x = 2/x - 2 + \log_2 x$.

Имеем: $y(1) = 0$, $y'(x) = (x - 2\ln 2)/(x^2\ln 2) \leqslant (1 - 2\ln 2)/(x^2\ln 2) < 0$ при $x \in [3/4; 1]$. Поэтому $y(x) > 0$ при любых $x \in [3/4; 1)$.

3) Утверждение леммы следует из результатов пунктов 1) и 2).
Доказательство завершено.

Следующая лемма также нужна для доказательства теоремы 2.1.

Лемма 2.3. *При любом $p \in (0; 1]$ функция $\psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$, где $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$, строго вогнута на полуинтервале $(0; 1]$.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что при любом $x \in (0; 1]$ верно неравенство $\psi_p''(x) < 0$. Имеем: $\psi_p'(x) = x^{p-1}\Big(p(\Phi_p - \log_2 x) - 1/\ln 2\Big)$. Отсюда

$$\psi_p''(x) = -x^{p-2}\Big(p(1-p)(\Phi_p - \log_2 x) + \frac{2p-1}{\ln 2}\Big). \tag{2.1}$$

Так как $x \in (0; 1]$, то $\log_2 x \leqslant 0$. Поэтому из равенства (2.1) вытекает следующая оценка: $\psi_p''(x) \leqslant -x^{p-2}\Big(p(1-p)\Phi_p + (2p-1)/\ln 2\Big)$. Правая часть этого неравенства отрицательна в силу леммы 2.1, поэтому $\psi_p''(x) < 0$.
Доказательство завершено.

Теорема 2.1. *Пусть $p > 0$. Зададим функцию $F_p\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ формулой*

$$F_p(x) = \frac{S_p(x)}{x^p} + \log_2 x, \quad x > 0. \tag{2.2}$$

Тогда верны следующие три утверждения.

1. Функция $F_p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_p(2x) = F_p(x) \quad \text{при любом } x \in (0; 1/2]. \tag{2.3}$$

2. Если $0 < p < 1$, то

2а. глобальный минимум функции $F_p(x)$ на полуинтервале $(0; 1]$ равен нулю и достигается только в точках вида

$$t_n = 1/2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

2б. глобальный максимум функции $F_p(x)$ на полуинтервале $(0; 1]$ равен величине $\Phi_p = 2^p/(2^p - 1) - \log_2 3$ и достигается только в точках вида

$$x_n = 1/(3 \cdot 2^n), \quad n = -1, 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

2в. при всех $x \in (0; 1]$ выполняется соотношение

$$x^p \log_2 \frac{1}{x} = -x^p \log_2 x \leqslant S_p(x) \leqslant \psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x), \tag{2.6}$$

в котором левое неравенство превращается в равенство только в точках вида (2.4), а правое — только в точках вида (2.5).

Доказательство.

1. В силу равенства (2.2) имеем:

$$F_p(2x) = \frac{S_p(2x)}{2^p x^p} + 1 + \log_2 x, \quad x > 0. \tag{2.7}$$

Т. к. $S_0(x) = x$ при $x \in (0; 1/2]$, то, подставляя в формулу (2.7) равенство (8) из [3], получаем доказываемое равенство (2.3):

$$F_p(2x) = \frac{2^p\big(S_p(x) - x^p\big)}{2^p x^p} + 1 + \log_2 x = F_p(x).$$

2а. Сначала докажем, что $\min_{x\in(0;1]} F_p(x) = 0$. Так как $F_p(1) = 0$, то достаточно доказать, что $F_p(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (0; 1]$. Сначала докажем это лишь при $x \in [1/2; 1]$. Из равенства (1.1), определяющего функцию S_p, вытекает оценка $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{np} \geqslant S_0^p(x) + S_0^p(2x)/2^p$. Из нее следует соотношение

$$F_p(x) = \frac{S_p(x)}{x^p} + \log_2 x \geqslant \left(\frac{S_0(x)}{x}\right)^p + \left(\frac{S_0(2x)}{2x}\right)^p + \log_2 x. \tag{2.8}$$

Далее, т. к. $0 \leqslant S_0(x) = \rho(x, \mathbb{Z}) \leqslant x$, то $0 \leqslant S_0(x)/x \leqslant 1$. Аналогично имеем: $0 \leqslant S_0(2x)/(2x) \leqslant 1$. С учетом этого при $p \in (0; 1]$ из (2.8) следует оценка

$$F_p(x) \geqslant \frac{S_0(x)}{x} + \frac{S_0(2x)}{2x} + \log_2 x.$$

Отсюда, по лемме 2.2, при всех $x \in [1/2; 1]$ вытекает неравенство $F_p(x) \geqslant 0$, в котором равенство достигается только в точках $x = 1/2$ и $x = 1$.

Поскольку $F_p(x/2) = F_p(x)$ при всех $x \in (0;1]$ в силу (2.3), то неравенство $F_p(x) \geqslant 0$ верно при всех $x \in (0;1]$, причем равенство в нём достигается только в точках вида $x = t_n = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2б. Поскольку $S_p(1/3) = 2^p/\big(3^p(2^p-1)\big)$ в силу леммы 1 из работы [3], то верно равенство $F_p(1/3) = S_p(1/3)/(1/3)^p + \log_2(1/3) = 2^p/(2^p-1) - \log_2 3 = \Phi_p$. Поэтому нам достаточно доказать, что $F_p(x) \leqslant \Phi_p$ при всех $x \in (0;1]$. Сначала докажем это только при $x \in [1/3;2/3]$. Так как $S_p(x) \leqslant S_p(1/3)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ по теореме 5 из [3], то при любом $x \in [1/3;2/3]$ верно соотношение

$$
\begin{aligned}
F_p(x) - \Phi_p = \frac{S_p(x)}{x^p} - (\Phi_p - \log_2 x) \leqslant \frac{S_p(1/3) - x^p(\Phi_p - \log_2 x)}{x^p} = \\
= \frac{S_p(1/3) - \psi_p(x)}{x^p},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

где $\psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$. Проверим, что $\psi_p(1/3) = S_p(1/3) = \psi_p(2/3)$:

$$
\psi_p\Big(\frac{2}{3}\Big) = \Big(\frac{2}{3}\Big)^p \Big(\Phi_p - \log_2 \frac{2}{3}\Big) = \Big(\frac{2}{3}\Big)^p \Big(\Big(\frac{2^p}{2^p-1} - \log_2 3\Big) - 1 + \log_2 3\Big) =
$$

$$
= \frac{2^p}{3^p(2^p-1)} = S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) = \Big(\frac{1}{3}\Big)^p \Big(\Phi_p - \log_2 \frac{1}{3}\Big) = \psi_p\Big(\frac{1}{3}\Big).
$$

Кроме того, согласно лемме 2.3 функция $\psi_p(x)$ строго вогнута на отрезке $[1/3, 2/3]$. Отсюда вытекает соотношение $\psi_p(x) > \psi_p(1/3) = S_p(1/3)$ при всех $x \in (1/3;2/3)$. Тогда из формулы (2.9) при любом $x \in (1/3;2/3)$ следует оценка $F_p(x) - \Phi_p < 0$. Итак, $F_p(x) \leqslant \Phi_p$ при всех $x \in [1/3;2/3]$, причем равенство достигается лишь в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

Поскольку $F_p(x/2) = F_p(x)$ при $x \in (0;1]$ в силу (2.3), то неравенство $F_p(x) \leqslant \Phi_p$ верно при всех $x \in (0;1]$, причем равенство в нем достигается только в точках вида $x = x_n = 1/(3{\cdot}2^n)$, где $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

3. Последнее утверждение данной теоремы, в том числе соотношение (2.6), вытекает из формулы (2.2) и доказанного утверждения пункта 2.

Доказательство завершено.

Иллюстрация 2. В качестве иллюстрации к теореме 2.1 на Рис. 2.1 для случая $p = 0.8$ представлены графики $y = S_p(x)$ (синей линией), а также $y = \varphi_p(x) = -x^p \log_2 x$ (красной линией) и $y = \psi_p(x) = x^p(\Phi_p - \log_2 x)$ (зелёной линией).

Замечание 2.1. *1) Из пункта 2 доказанной теоремы 2.1 следует, что* $\Phi_p = 2^p/(2^p-1) - \log_2 3 > 0$ *при всех* $0 < p < 1$.

2) Вычисления показывают, что функция $\varphi_p(x) = -x^p \log_2 x$ *является вогнутой на всем промежутке* $(0;1]$ *только в случае* $p \in [1/2;1]$.

3. Логарифмическая гёльдеровость степенных функций Такаги

В этом параграфе мы доказываем (теорема 3.2), что любая степенная функция Такаги S_p с параметром $p \in (0;1]$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера (см. определение 3.2), из которого вытекает «обычное» условие Гёльдера (предложение 3.1).

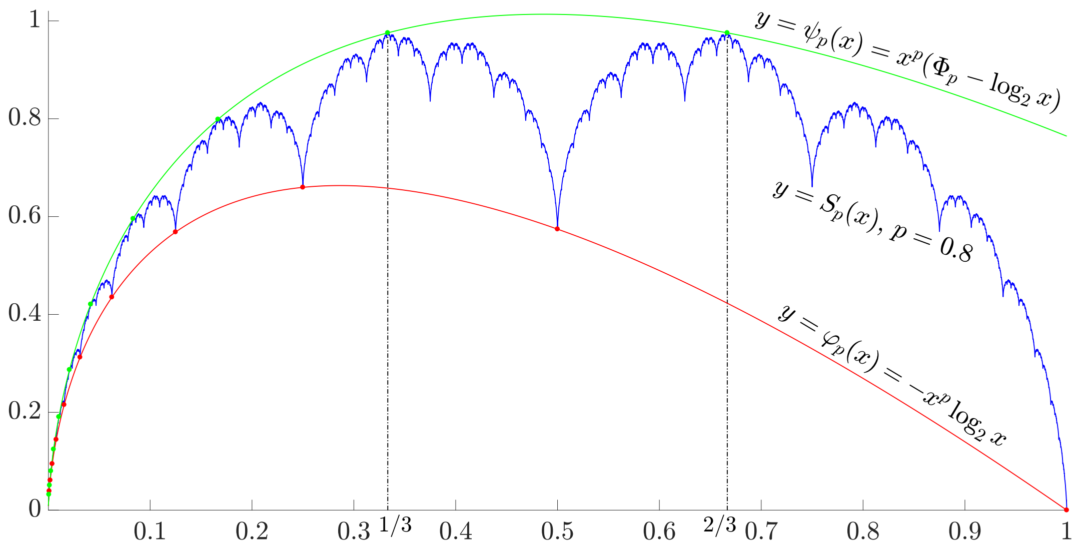

Рис. 2.1. Графики $y = S_p(x)$, $y = \varphi_p(x)$ и $y = \psi_p(x)$ при $p = 0{,}8$

Fig. 2.1. Graphs $y = S_p(x)$, $y = \varphi_p(x)$ and $y = \psi_p(x)$ for $p = 0{,}8$

Определение 3.1. *Говорят, что функция* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет* условию Гёльдера с показателем $p > 0$ и константой $C \geqslant 0$, *если для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^p$.

Определение 3.2. *Будем говорить, что функция* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет* логарифмическому условию Гёльдера с показателем $p > 0$ и константой $C \geqslant 0$, *если для любых различных чисел* $x, y \in \mathbb{R}$, *таких что* $|x - y| \leqslant 1/3$, *выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|}. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. *В формуле* (3.1) *у логарифма взято именно основание* 3 *для того, чтобы упростить формулировку пункта 2 теоремы* (3.2).

Установим связь логарифмического и «обычного» условий Гёльдера.

Предложение 3.1. *Если функция* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ограничена и удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера с показателем* $p > 0$ *и константой* $C \geqslant 0$, *то для любого* $q \in (0; p)$ *функция* f *удовлетворяет условию Гёльдера (в смысле определения 3.1) с показателем* q *и некоторой константой.*

Доказательство. Пусть $q \in (0; p)$ и $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Сначала рассмотрим случай $0 < |x-y| \leqslant 1/3$. Известно, что при некотором $A_q > 0$ для любого $t \geqslant 3$ верна оценка $\log_3 t \leqslant A_q t^{p-q}$. Подставляя в нее $t = 1/|x - y| \geqslant 3$, получим неравенство $\log_3(1/|x-y|) \leqslant A_q/|x-y|^{p-q}$. Из него в рассматриваемом случае получаем условие Гёльдера с показателем q и константой $A_q{\cdot}C$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^p \cdot \log_3 \frac{1}{|x - y|} \leqslant C|x - y|^p \cdot \frac{A_q}{|x - y|^{p-q}} = A_q{\cdot}C \cdot |x - y|^q.$$

2. Теперь рассмотрим случай $|x-y|>1/3$. При этом $3^q|x-y|^q>1$. Поскольку функция f ограничена, то существует такая константа $M\geqslant 0$, что $|f(x)|\leqslant M$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, в этом случае мы приходим к условию Гёльдера с показателем q и константой $2{\cdot}3^q{\cdot}M$:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2M\leqslant 2M\cdot 3^q|x-y|^q=2{\cdot}3^q{\cdot}M{\cdot}|x-y|^q.$$

3. Из пунктов 1 и 2 доказательства вытекает, что f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем q и константой $K_q=\max(A_q{\cdot}C, 2{\cdot}3^q{\cdot}M)$.
Доказательство завершено.

Следующая теорема, нужная для доказательства теоремы 3.2, представляет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

Теорема 3.1. *Для любых чисел $p\in(0;1]$ и $x,y\in\mathbb{R}$ верно неравенство*

$$|S_p(x)-S_p(y)|\leqslant S_p(x-y). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $x,y\in\mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $S_0(x)\geqslant S_0(y)$. Имеем $S_0(t)=\inf_{q\in\mathbb{Z}}|t-q|$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Поскольку $|x-q|\leqslant|x-y|+|y-q|$ для любого $q\in\mathbb{Z}$, то, переходя здесь к инфимуму по q, получим: $S_0(x)=\inf_{q\in\mathbb{Z}}|x-q|\leqslant|x-y|+\inf_{q\in\mathbb{Z}}|y-q|=|x-y|+S_0(y)$. Отсюда, т. к. $S_0(x)\geqslant S_0(y)$, следует неравенство $|S_0(x)-S_0(y)|\leqslant|x-y|$. Тогда в силу периодичности функции S_0 для любого $q\in\mathbb{Z}$ получаем соотношение $|S_0(x)-S_0(y)|=|S_0(x-q)-S_0(y)|\leqslant|(x-y)-q|$. Снова переходя здесь к инфимуму по q, получаем неравенство

$$|S_0(x)-S_0(y)|\leqslant S_0(x-y). \tag{3.3}$$

Далее воспользуемся известным неравенством $|a^p-b^p|\leqslant|a-b|^p$, верным для любых $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и $p\in(0;1]$. Из него, взяв $a=S_0(x)$ $b=S_0(y)$ и учитывая формулу (3.3), находим:

$$|S_0^p(x)-S_0^p(y)|\leqslant|S_0(x)-S_0(y)|^p\leqslant S_0^p(x-y)\leqslant|x-y|^p. \tag{3.4}$$

Отсюда и из равенства (1.1) вытекает оценка (3.2):

$$|S_p(x)-S_p(y)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|S_0^p(2^nx)-S_0^p(2^ny)|}{2^{np}}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_0^p\big(2^n(x-y)\big)}{2^{np}}=S_p(x-y).$$

Доказательство завершено.

Теорема 3.2. *Пусть $p\in(0;1]$. Тогда верны следующие два утверждения.*
1. При любых $x,y\in\mathbb{R}$, таких что $0<|x-y|\leqslant 1$, верно неравенство

$$|S_p(x)-S_p(y)|\leqslant|x-y|^p\Big(\Phi_p+\log_2\frac{1}{|x-y|}\Big),\ \text{где}\ \Phi_p=\frac{2^p}{2^p-1}-\log_2 3. \tag{3.5}$$

2. Функция S_p удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера (3.1) с показателем p и константой $C=2^p/(2^p-1)$, т. е. при всех $x,y\in\mathbb{R}$, таких что $0<|x-y|\leqslant 1/3$, выполняется неравенство

$$|S_p(x)-S_p(y)|\leqslant\frac{2^p}{2^p-1}{\cdot}|x-y|^p{\cdot}\log_3\frac{1}{|x-y|}. \tag{3.6}$$

Доказательство.

1. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$, таких что $0 < |x-y| \leqslant 1$, неравенство (3.5) следует из оценки (3.2) в теореме 3.1 и из неравенства (2.6) в пункте 2в теоремы 2.1.

2. Для доказательства оценки (3.6), перепишем (3.5) в следующем виде:

$$|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant |x-y|^p \Big(\frac{2^p}{2^p - 1} - \log_2 3 + \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{|x-y|} \Big).$$

Отсюда, учитывая, что $1 \leqslant \log_3 \big(1/|x-y|\big)$ при $0 < |x-y| \geqslant 1/3$, получаем неравенство (3.6).

Доказательство завершено.

Замечание 3.2. *1. Из пункта 2в теоремы 2.1 следует, что константу Φ_p в оценке* (3.5) *нельзя заменить на меньшую.*

2. Константу $C = 2^p/(2^p - 1)$ в неравенстве (3.6) *также нельзя уменьшить, поскольку при $x = 1/3$ и $y = 0$ оно превращается в равенство.*

3. Обзор результатов, связанных с теоремой (3.2)*, для случая $p = 1$, можно найти в* [1, с. 10–12].

Из теоремы 3.2 в силу теоремы 1 из работы [3] и предложения 3.1 вытекает следующий факт, доказанный для частного случая $p = 1$ в работе [20].

Следствие 3.1. *При каждом $p \in (0; 1]$ и каждом $q \in (0; p)$ функция S_p удовлетворяет условию Гёльдера с показателем q и некоторой неотрицательной константой.*

4. О локальных экстремумах функций S_p при $p \in (0; 1)$

В данном параграфе мы исследуем поведение функций S_p в окрестности точки глобального максимума $x = 1/3$ (теорема 4.1), а также доказываем наличие бесконечной производной в некоторых точках и исследуем локальные экстремумы этих функций (теорема 4.2).

Напомним, прежде всего, стандартные определения левой и правой производной функции в точке.

Определение 4.1. Правой производной *функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется величина $f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$, в том случае, когда этот предел существует (конечный или бесконечный). Аналогично,* левая производная *функции f в точке x_0 определяется равенством $f'_-(x_0) = \lim_{h \to +0} (f(x_0) - f(x_0 - h))/h$.*

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $p \in (0; 1)$ и функция $f(t) = 2^p + 1 - (2+t)^p - (1-t)^p$ задана на отрезке $[0; 1]$. Тогда для любого $t \in [0; 1]$ верно двойное неравенство*

$$p(1 - 2^{p-1})t \leqslant f(t) \leqslant (2^p + 1 - 3^p)t.$$

Доказательство. Имеем: $f'(t) = p((1-t)^{p-1} - (2+t)^{p-1})$, следовательно $f'(0) = p(1 - 2^{p-1}) > 0$. Кроме того, $f''(t) = p(1-p)\big((2+t)^{p-2} + (1-t)^{p-2}\big)$. Поскольку $f''(t) > 0$ при любом $t \in [0; 1)$, то f выпукла на $[0; 1]$. Поэтому при $t \in [0; 1]$ верны оценки $f(t) \geqslant f(0) + f'(0)t = p(1 - 2^{p-1})t$ и $f(t) \leqslant f(0) + (f(1) - f(0))t = (2^p + 1 - 3^p)t$.

Доказательство завершено.

Лемма 4.2. *Пусть $p \in (0;1)$. Тогда при любых $h \in (0;1/12)$ верна оценка*

$$\frac{p(1-2^{p-1})2^{p-1}}{2^{1-p}+1}h^p \leqslant S_p(1/3) - S_p(1/3+h) \leqslant \left(\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}} + \frac{4^p}{2^p-1}\right)h^p.$$

Доказательство. Пусть $h \in (0;1/6)$. Тогда можно выбрать натуральное число n так, чтобы выполнялись неравенства $4^n h < 2/3$ и $4^{n+1}h \geqslant 2/3$. Поэтому в силу функционального уравнения (6) из теоремы 4 работы [3] при $m = 2n$ получаем:

$$S_p(1/3) - S_p(1/3+h) = \sigma_{p,n}(h) + \frac{S_p(2^{2n}/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h)}{2^{2np}}, \tag{4.1}$$

где $\sigma_{p,n}(h) = \sum_{k=0}^{2n-1}\big(S_0^p(2^k/3) - S_0^p(2^k/3 + 2^k h)\big)/2^{kp}$. Сгруппируем слагаемые в этой сумме попарно:

$$\begin{aligned}\sigma_{p,n}(h) = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(&\frac{S_0^p(2^{2i}/3) - S_0^p(2^{2i}/3 + 2^{2i}h)}{2^{2ip}} + \\ &+\frac{S_0^p(2^{2i+1}/3) - S_0^p(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h)}{2^{(2i+1)p}}\Big).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку функция S_0 периодична с периодом 1, то выполняются следующие два равенства: $S_0(2^{2i}/3 + 2^{2i}h) = S_0(\{2^{2i}/3\} + 2^{2i}h) = S_0(1/3 + 2^{2i}h)$, а также, аналогично, $S_0(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h) = S_0(\{2^{2i+1}/3\} + 2^{2i+1}h) = S_0(2/3 + 2^{2i+1}h)$. Так как $1/3 + 2^{2i}h \in [0;1/2]$ и $2/3 + 2^{2i+1}h \in [1/2;1]$, то в силу равенства (4) из [3] имеем: $S_0(2^{2i}/3 + 2^{2i}h) = 1/3 + 2^{2i}h$ и $S_0(2^{2i+1}/3 + 2^{2i+1}h) = 1/3 - 2^{2i+1}h$. Подставляя эти выражения в формулу (4.2), получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{p,n}(h) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(1/3)^p - (1/3+2^{2i}h)^p}{2^{2ip}} + \frac{(1/3)^p - (1/3-2^{2i+1}h)^p}{2^{(2i+1)p}}\right) = \\ &= \frac{1}{6^p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^p - (2+3{\cdot}2^{2i}h)^p + 1 - (1-3{\cdot}2^{2i+1}h)^p}{2^{2ip}} = \frac{1}{6^p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(3{\cdot}2^{2i+1}h)}{2^{2ip}},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $f(t) = 2^p + 1 - (2+t)^p - (1-t)^p$. Подставляя формулу (4.3) в формулу (4.1) и учитывая, что $S_p(2^{2n}/3) = S_p(1/3)$, придем к равенству

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) = \frac{1}{6^p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(3{\cdot}2^{2i+1}h)}{2^{2ip}} + \frac{S_p(1/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h)}{2^{2np}}. \tag{4.4}$$

Поскольку $3{\cdot}2^{2i+1}h \leqslant 6 \cdot 4^{n-1}h < 1$, то достаточно изучить поведение функции $f(t)$ только на отрезке $[0;1]$.

1. Для получения оценки снизу применим оценку $f(t) \geqslant p(1-2^{p-1})t$ из леммы 4.1. Из неё при любом $i = 0, 1, \ldots, n-1$ следует неравенство $f(3{\cdot}2^{2i+1}h) \geqslant 3p(1-2^{p-1}) \cdot 2^{2i+1}h$. Подставляя эти неравенства в (4.4) и учитывая, что $S_p(1/3) - S_p(2^{2n}/3 + 2^{2n}h) \geqslant 0$ в силу теоремы 5 из [3], получим:

$$\begin{aligned}S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) &\geqslant \frac{1}{6^p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3p(1-2^{p-1})\cdot 2^{2i+1}h}{2^{2ip}} = \\ &= 3^{1-p}p(2^{1-p}-1)h\frac{4^{n(1-p)}-1}{4^{1-p}-1} = \frac{3^{1-p}ph}{2^{1-p}+1}(4^{n(1-p)}-1).\end{aligned}$$

Отсюда, так как $4^n h \geqslant 1/6$, для любого $h \in (0, 1/6)$ находим:

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) \geqslant \frac{3^{1-p}ph}{2^{1-p}+1}\big((6h)^{p-1}-1\big) = \frac{p2^{p-1}h^p}{2^{1-p}+1}\big(1-(6h)^{1-p}\big).$$

Если же $h \in (0; 1/12)$, то $(6h)^{1-p} < 2^{p-1}$, поэтому верно неравенство

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) \geqslant \frac{p{\cdot}2^{p-1}(1-2^{p-1})}{2^{1-p}+1}h^p.$$

2) Для получения оценки сверху применим второе неравенство из леммы 4.1, из которого следует оценка $f(t) \leqslant (2^p+1-3^p)t$ при всех $t \in [0;1]$. Отсюда для любых $i = 0, 1, \ldots, n-1$ вытекает, что $f(3{\cdot}2^{2i+1}h) \leqslant 3(2^p+1-3^p)\cdot 2^{2i+1}h$. Подставляя эти неравенства в (4.4), учитывая неотрицательность S_p и лемму 1 из [3], получаем:

$$\begin{aligned} S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) &\leqslant \frac{1}{6^p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{3(2^p+1-3^p)\cdot 2^{2i+1}h}{2^{2ip}} + \frac{S_p(1/3)}{2^{2np}} = \\ &= 6^{1-p}(2^p+1-3^p)h\frac{4^{n(1-p)}-1}{4^{1-p}-1} + \frac{2^p}{3^p(2^p-1)4^{np}} \leqslant \\ &\leqslant 6^{1-p}(2^p+1-3^p)\frac{4^{n(1-p)}h}{4^{1-p}-1} + \frac{2^p}{3^p(2^p-1)4^{np}}. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $4^n h < 2/3$ и $4^n h \geqslant 1/6$, а значит $4^{n(1-p)}h < (2/3)^{1-p}h^p$ и $1/4^{np} \leqslant (6h)^p$, получаем нужную оценку сверху:

$$\begin{aligned} S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big) &\leqslant \frac{6^{1-p}(2^p+1-3^p)}{4^{1-p}-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{1-p}h^p + \frac{2^p(6h)^p}{3^p(2^p-1)} = \\ &= h^p\left(\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}} + \frac{4^p}{2^p-1}\right). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В следующей лемме аналогичная оценка даётся для приращения слева.

Л е м м а 4.3. *Пусть $p \in (0;1)$. Тогда при любых $h \in (0;1/3)$ верна оценка*

$$\frac{2^{p-1}(1-2^{p-1})p}{2^{1-p}+1}h^p \leqslant S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) \leqslant \Big(\frac{2^p+1-3^p}{(1-4^{p-1})2^p} + \frac{2^{p+1}-1}{2^p-1}\Big)h^p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу функционального уравнения (7) из теоремы 4 работы [3] и наличия у функции S_p свойства симметрии (5) из теоремы 1 той же работы [3], для любых $h \in (0; 1/3)$ имеем:

$$S_p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) = S_0^p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) + \frac{S_p(2/3-2h)}{2^p} = S_0^p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) + \frac{S_p(1/3+2h)}{2^p}.$$

При $h = 0$ это дает нам равенство $S_p(1/3) = S_0^p(1/3) + S_p(1/3)/2^p$. Вычитая из него предыдущее равенство, находим:

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) = S_0^p\Big(\frac{1}{3}\Big) - S_0^p\Big(\frac{1}{3}-h\Big) + \frac{S_p(1/3)-S_p(1/3+2h)}{2^p}. \tag{4.5}$$

Отсюда, пользуясь неотрицательностью функции $S_0^p(1/3)-S_0^p(1/3-h)$ при $h\in(0,1/12)$ и леммой 4.2, получаем оценку снизу:

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big)-S_p\Big(\frac{1}{3}-h\Big)\geqslant\frac{2^{p-1}(1-2^{p-1})p}{(2^{1-p}+1)2^p}(2h)^p=\frac{2^{p-1}(1-2^{p-1})p}{2^{1-p}+1}h^p.$$

С помощью той же формулы (4.5), применяя неравенство (3.4) из теоремы 3.1 и еще раз лемму 4.2, получаем:

$$S_p\Big(\frac{1}{3}\Big)-S_p\Big(\frac{1}{3}-h\Big)\leqslant\Big(\frac{1}{3}-\Big(\frac{1}{3}-h\Big)\Big)^p+\Big(\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}}+\frac{4^p}{2^p-1}\Big)h^p=$$
$$=\Big(\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}}+\frac{4^p+2^p-1}{2^p-1}\Big)h^p.$$

Доказательство завершено.

Результаты лемм 4.2 и 4.3 можно объединить в следующую теорему.

Теорема 4.1. *Для любых $p\in(0;1)$ и $h\in(-1/12,1/12)$ верно неравенство*

$$L_p|h|^p\leqslant S_p\Big(\frac{1}{3}\Big)-S_p\Big(\frac{1}{3}+h\Big)\leqslant R_p|h|^p, \tag{4.6}$$

$$\text{где}\quad L_p=\frac{2^{p-1}(1-2^{p-1})}{2^{1-p}+1}\quad\text{и}\quad R_p=\frac{2^p+1-3^p}{1-4^{p-1}}+\frac{4^p+2^p-1}{2^p-1}.$$

Замечание 4.1. *Как видно из доказанной теоремы 4.1, в окрестности пика в точке глобального максимума $x=1/3$ приращение $S_p(1/3+h)-S_p(1/3)$ ведет себя как $C|h|^p$. Это отличается от его поведения $C|x|^p\log_2(1/|x|)$ в общем случае (см. теорему 3.2 и пункт 2в теоремы 2.1).*

В следующей теореме мы применяем полученные результаты к изучению локальных экстремумов функций S_p.

Теорема 4.2. *Пусть $p\in(0;1)$. Тогда верны следующие два утверждения:*

1. В двоично-рациональных точках, то есть точках вида $x=q/2^n$, где $q\in\mathbb{Z}$ и $n\in\{0,1,2,\dots\}$, функция $S_p(x)$ имеет левую производную $(S_p)'_-(q/2^n)$, равную $-\infty$, и правую производную $(S_p)'_+(q/2^n)$, равную $+\infty$. Любая точка такого вида является точкой строгого локального минимума функции S_p на $\mathbb{R}$, и других точек локального минимума у S_p нет.

2. В точках вида $x=q/(3{\cdot}2^n)$, где q — целое число, не делящееся на 3, и ‘$n\in\{0,1,2,\dots\}$, функция $S_p(x)$ имеет левую производную $(S_p)'_-\big(q/(3{\cdot}2^n)\big)$, равную $+\infty$, и правую производную $(S_p)'_+\big(q/(3{\cdot}2^n)\big)$, равную $-\infty$. Любая такая точка является точкой строгого локального максимума S_p на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

1. а) Сначала докажем, что $(S_p)'_+(0)=+\infty$. Действительно, в силу соотношения (2.6) и равенства $S_p(0)=0$ имеем:

$$(S_p)'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{S_p(x)-S_p(0)}{x}\geqslant\lim_{x\to+0}\frac{x^p\log_2(1/x)}{x}=+\infty.$$

б) Пусть $x\in\mathbb{Z}$. Тогда, в силу периодичности функции S_p и доказанного в предыдущем пункте, имеем: $(S_p)'_+(x)=(S_p)'_+(0)=+\infty$.

в) Пусть число $x = q/2^n$ — нецелое. Тогда, сокращая эту дробь при необходимости, можно считать, что число q нечетно. Докажем индукцией по $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, что $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ для любого нечетного q. При $n = 0$ в силу доказанного в пункте б) имеем: $(S_p)'_+(q/2^n) = (S_p)'_+(q) = +\infty$.

Теперь выполним шаг индукции. Дифференцируя функциональное уравнение (7) из теоремы 4 работы [3] в точке $x = q/2^{n+1}$, получим:

$$(S_p)'_+\Big(\frac{q}{2^{n+1}}\Big) = pS_0^{p-1}\Big(\frac{q}{2^{n+1}}\Big) \cdot (S_0)'_+\Big(\frac{q}{2^{n+1}}\Big) + 2^{1-p}(S_p)'_+\Big(\frac{q}{2^n}\Big). \tag{4.7}$$

Число $q/2^{n+1}$ — нецелое, то величина $(S_0)'_+(q/2^{n+1})$ конечна. В то же время, $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ по предположению индукции. Отсюда и из (4.7) следует, что $(S_p)'_+(q/2^{n+1}) = +\infty$. Шаг индукции выполнен.

г) Тогда, т. к. S_p четна, имеем: $(S_p)'_-(q/2^n) = -(S_p)'_+(-q/2^n) = -\infty$.

д) Все точки вида $q/2^n$ являются точками строгого локального минимума для S_p, поскольку из равенств $(S_p)'_-(q/2^n) = -\infty$ и $(S_p)'_+(q/2^n) = +\infty$ следует, что при некотором $\delta > 0$ для любых $h \in (0, \delta)$ выполнены неравенства $S_p(q/2^n) - S_p(q/2^n - h) < 0$ и $S_p(q/2^n) - S_p(q/2^n + h) < 0$.

е) Докажем, что если точка $x_0 \in \mathbb{R}$ не представима в виде дроби $q/2^n$, где $q \in \mathbb{Z}$ и $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, то она не будет точкой строгого локального минимума функции S_p. Для этого достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $r_0 \in \mathbb{R}$, что $|r_0 - x_0| < \varepsilon$ и $S_p(x_0) > S_p(r_0)$. Сначала по $\varepsilon > 0$ подберём $m \in \mathbb{N}$ так, что $1/2^m < \varepsilon$. Затем найдем такое целое k, чтобы выполнялось неравенство $k/2^m < x_0 < (k+1)/2^m$. Далее положим $\alpha = 2^m x_0 - k$. Тогда $0 < \alpha < 1$, причем $x_0 = (1-\alpha)\cdot k/2^m + \alpha\cdot(k+1)/2^m$. Поскольку при любом $0 < p < 1$ функция $S_0^p(x)$ строго вогнута на отрезках длины 1 с целыми концами, то при любых $i = 0, 1, \ldots, m-1$ будет выполняться неравенство $S_0^p(2^i x_0) > (1-\alpha)\cdot S_0^p(2^i k/2^m) + \alpha \cdot S_0^p(2^i(k+1)/2^m)$. Из него следует оценка

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}} > (1-\alpha)\sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}} + \alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}}. \tag{4.8}$$

Далее, т. к. $S_0(2^i x_0) > 0$ и $S_0(2^i k/2^m) = S_0(2^i(k+1)/2^m) = 0$ при любом значении $i = m, m+1, \ldots$, то верны следующие три соотношения:

$$S_p(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}} > \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i x_0)}{2^{ip}},$$

$$S_p\Big(\frac{k}{2^m}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i k/2^m)}{2^{ip}},$$

$$S_p\Big(\frac{k+1}{2^m}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^i(k+1)/2^m)}{2^{ip}}.$$

Эти три формулы с учетом (4.8) позволяют получить оценку

$$S_p(x_0) > (1-\alpha)S_p\Big(\frac{k}{2^m}\Big) + \alpha S_p\Big(\frac{k+1}{2^m}\Big) \geqslant \min(S_p\Big(\frac{k}{2^m}\Big), S_p\Big(\frac{k+1}{2^m}\Big).$$

Следовательно, можно выбрать одно из чисел $k/2^m$, $(k+1)/2^m$ в качестве r_0 так, чтобы выполнялось неравенство $S_p(x_0) > S_p(r_0)$. При этом будем иметь: $|r_0 - x_0| < 1/2^m < \varepsilon$. Таким образом, получен требуемый результат.

2. Доказательство пункта 2) теоремы аналогично доказательству пункта 1). Поэтому ограничимся здесь лишь кратким описанием его этапов.

а) Сначала, применяя неравенство (4.6) из теоремы 4.1, показываем, что $(S_p)'_-(1/3) = +\infty$ и $(S_p)'_+(1/3) = -\infty$.

б) Затем в силу периодичности и свойства симметрии (5) из теоремы 1 работы [3] функции S_p, получаем равенство $(S_p)'_\pm(q+1/3) = (S_p)'_\pm(q+2/3) = \mp\infty$ для всех $q \in \mathbb{Z}$.

в) С помощью функционального уравнения $S_p(x) = S_0^p(x) + S_p(2x)/2^p$ далее по индукции показываем, что $(S_p)'_\pm\big(q/(3{\cdot}2^n)\big) = \mp\infty$ для любого целого q, не делящегося на 3.

г) Отсюда делаем вывод, что при указанных q точки вида $q/(3{\cdot}2^n)$ являются точками строгого локального максимума функции $S_p(x)$.

Доказательство завершено.

Замечание 4.2. *1. Из только что доказанной теоремы вытекает, что как множество всех точек строгого локального минимума, так и множество всех точек строгого локального максимума функции S_p являются всюду плотным в $\mathbb{R}$.*

2. В частном случае $p = 1$ Круппель нашёл множество точек локального минимума функции S_p на $\mathbb{R}$ в [21, с. 48] *и исследовал её локальные максимумы в* [21, с. 50].

5. Направления дальнейших исследований

1. Было бы интересно выяснить, имеют ли функции $S_p(x)$ при $p \in (0;1)$ другие точки локального максимума на $\mathbb{R}$, кроме точек вида $x = q/(3{\cdot}2^n)$, где q — целое число, не делящееся на 3, и n — целое неотрицательное (см. выше теорему 4.2).

2. В одной из следующих работ авторы планируют также исследовать множество крайних подабсцисс функций $S_p(x)$ (см. [13–14]).

3. В дальнейшем авторы предполагают, кроме того, провести исследование, аналогичное проведенному в настоящей работе, как для функций Хази–Палеса [22], задаваемых на $\mathbb{R}$ равенством $H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^n$, так и для более широкого класса функций вида $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{nq}$, где $p > 0$ и $q > 0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России, соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

1. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Anal. Exchange. 2011/12. Vol. 37, No. 1. pp. 1–54. DOI: https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001

2. Lagarias J.C. The Takagi function and its properties // RIMS Kokyuroku bessatsu B34: Functions and Number Theory and Their Probabilistic Aspects. Kyoto. 2012. Vol. 34. pp. 153–189.

3. Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А. О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 22–36. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36

4. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975. 248 с.

5. Окороков В. А., Сандракова Е. В. Фракталы в фундаментальной физике. Фрактальные свойства множественного образования частиц и топология выборки. М.: МИФИ, 2009. 460 с.

6. Thim J. Continuous nowhere differentiable functions : Master's thesis. Luleå, Sweden: Luleå University of Technology, 2003. 98 p.

7. Heurteaux Y. Weierstrass functions in Zygmund's class // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 133. pp. 2711–2720.

8. Fujita Y., Hamamuki N., Siconolfi A., Yamaguchi N. A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate // Acta Mathematica Hungarica. 2020. Vol. 160. pp. 343–359. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3

9. Posey E. E., Vaughan J. E. Extrema and nowhere differentiable functions // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1986. Vol. 16. pp. 661–668. DOI: https://doi.org/10.1216/RMJ-1986-16-4-661

10. Kahane J.-P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // Enseignement Math. 1959. Vol. 5. pp. 53–57. DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35474

11. Banach S. Uber die Baire'sche kategorie gewisser funktionenmengen // Studia Math. 1931. Vol. 3, No 3. Pp. 174–179. DOI: https://doi.org/10.4064/sm-3-1-174-179

12. Allaart P. C., Kawamura K. Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 2006. Vol. 140, No 2. pp. 269–295. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004105008984

13. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 483–500. DOI: https://doi.org/10.20537/vm190402

14. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Деланжа, оценки цифровых сумм и вогнутые функции // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 3. С. 32–70. DOI: https://doi.org/10.4213/sm9143

15. Denjoy A., Felix L., Montel P. Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme // Enseignement Math. 1957. Vol. 3. pp. 1–18.

16. Makogin V., Mishura Yu. Fractional integrals, derivatives and integral equations with weighted Takagi–Landsberg functions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2020. Vol. 25, no. 6. pp. 1079–1106. DOI: https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.20566

17. Yu H. Weak tangent and level sets of Takagi functions // Monatshefte für Mathematik. 2020. Vol. 192. pp. 249–264. DOI: https://doi.org/10.1007/s00605-020-01377-9

18. Han X., Schied A., Zhang Z. A limit theorem for Bernoulli convolutions and the Φ-variation of functions in the Takagi class // J. Theor. Probab. 2022. Vol. 35. pp. 2853–2878. DOI: https://doi.org/10.1007/s10959-022-01157-1

19. Krüppel M. Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums // Rostock. Math. Kolloq. 2008. Vol. 63. pp. 37–54.

20. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the continuity of van der Waerden's function in the Hölder sense // Amer. Math. Monthly. 1986. Vol. 93, No 5. pp. 375–376.

21. Krüppel M. On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function // Rostock. Math. Kolloq. 2007. Vol. 62. pp. 41–59.

22. Házy A., Páles Zs. On approximately t-convex functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 66, No 3–4. pp. 489–501.

Поступила 01.10.2023; доработана после рецензирования 07.11.2023; принята к публикации 24.11.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. P. C. Allaart, K. Kawamura, "The Takagi function: a survey", *Real Anal. Exchange.*, **37**:1 (2011/12), 1–54. DOI: https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001

2. J. C. Lagarias, "The Takagi function and its properties", *RIMS Kokyuroku bessatsu B34: Functions and number theory and their probabilistic aspects*, **34** (2012), 153–189.

3. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov, "On global extrema of power Takagi functions", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **25**:2 (2023), 22–36 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36

4. F. A. Medvedev, *Essays on the history of the theory of functions of a real variable*, M. Nauka, 1975 (In Russ.), 248 p.

5. V.A. Okorokov, E.V. Sandrakova, *Fractals in fundamental physics. Fractal properties of multiple particle formation and sampling topology*, M. MEPhI, 2009 (In Russ.), 460 p.

6. J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions. Master's thesis*, Luleå, 2003, 98 p.

7. Y. Heurteaux, "Weierstrass functions in Zygmund's class", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2005), 2711–2720.

8. Y. Fujita, N. Hamamuki, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, "A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate", *Acta Mathematica Hungarica.*, **160** (2020), 343–359. DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3

9. E. E. Posey, J. E. Vaughan, “Extrema and nowhere differentiable functions”, *Rocky Mountain Journal of mathematics.*, **16** (1986), 661–668. DOI: https://doi.org/10.1216/RMJ-1986-16-4-661

10. J.-P. Kahane, “Sur l’exemple, donné par M. de Rham, d’une fonction continue sans dérivée”, *Enseignement Math.*, **5** (1959), 53–57.

11. S. Banach, “Uber die Baire’sche Kategorie gewisser Funktionenmengen”, *Studia Math.*, **3**:3 (1931), 174–179. DOI: https://doi.org/10.4064/sm-3-1-174-179

12. P. C. Allaart, K. Kawamura, “Extreme values of some continuous nowhere differentiable functions”, *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, **140**:2 (2006), 269–295. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004105008984

13. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 483–500 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.20537/vm190402

14. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Global extrema of the Delange function, bounds for digital sums and concave functions”, *Sbornik: Mathematics*, **211**:3 (2020), 336–372. DOI: https://doi.org/10.1070/SM9143

15. A. Denjoy, L. Felix, P. Montel, “Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l’homme”, *Enseignement Math.*, **3** (1957), 1–18. DOI: https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001%3A1957%3A3#102

16. V. Makogin, Yu. Mishura, “Fractional integrals, derivatives and integral equations with weighted Takagi–Landsberg functions”, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **25**:6 (2020), 1079–1106. DOI: https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.20566

17. H. Yu, “Weak tangent and level sets of Takagi functions”, *Monatshefte für Mathematik*, **1192**:6 (2020), 249–264. DOI: https://doi.org/10.1007/s00605-020-01377-9

18. X. Han, A. Schied, Z. Zhang, “A limit theorem for Bernoulli convolutions and the Φ-variation of functions in the Takagi class”, *J. Theor. Probab.*, **35** (2022), 2853–2878. DOI: https://doi.org/10.1007/s10959-022-01157-1

19. M. Krüppel, “Takagi’s continuous nowhere differentiable function and binary digital sums”, *Rostock. Math. Kolloq.*, **63** (2008), 37–54.

20. A. Shidfar, K. Sabetfakhri, “On the continuity of van der Waerden’s function in the Hölder sense”, *Amer. Math. Monthly*, **93**:5 (1986), 375–376.

21. M. Krüppel, “On the extrema and the improper derivatives of Takagi’s continuous nowhere differentiable function”, *Rostock. Math. Kolloq.*, **62** (2007), 41–59.

22. A. Házy, Zs. Páles, “On approximately t-convex functions”, *Publ. Math. Debrecen.*, **66**:3–4 (2005), 489–501.

Submitted 01.10.2023; Revised 07.11.2023; Accepted 24.11.2023

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.