

VI International Conference  
**Topological Methods  
in Dynamics and Related  
Topics**

dedicated to the memory of Vyacheslav Zigmundovich Grines

**Book of abstracts**

Nizhny Novgorod, December 13–15, 2023



# Organization

*National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod*

## Organizing Committee

- Marina Barinova
- Vladislav Galkin
- Elena Nozdrinova
- Danila Shubin

## Programme committee

- Olga Pochinka
- Elena Gurevich
- Evgeny Zhuzhoma
- Nina Zhukova
- Lev Lerman
- Dmitry Turaev

**Acknowledgment.** The conference is supported by the Grant of the Russian Science Foundation No. 23-71-30008 “Dissipative dynamics of infinite-dimensional and finite-dimensional systems, development of mathematical models of mechanical, hydrodynamic processes”.

CONTENTS

<b>Invariants of magnetic lines for Yang-Milles solutions</b> <i>P. M. Akhmet'ev, M. S. Dvornikov</i>	<b>8</b>
<b>Нехаусдорфовы многообразия и их применение</b> <i>A. A. Акимов</i>	<b>10</b>
<b>Аналитико-численные методы прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в математических моделях экономики</b> <i>T. A. Алексеева</i>	<b>12</b>
<b>Bounded solutions of impulsive systems</b> <i>O. V. Anashkin, O. V. Yusupova</i>	<b>16</b>
<b>Infinite transitivity for automorphisms and endomorphisms of affine algebraic varieties</b> <i>I. Arzhantsev</i>	<b>18</b>
<b>The attractor and the Mandelbrot set for a pair of plane opposite similitudes</b> <i>A. V. Bagaev</i>	<b>19</b>
<b>A stable reverse mathematical pendulum with a solid weightless rod is subject to the action of a vertical sinusoidal force</b> <i>S. Belyakin, A. Stepanov</i>	<b>21</b>
<b>Lorentzian 2-orbifolds of constant non-zero curvature</b> <i>E. V. Bogolepova, N. I. Zhukova</i>	<b>23</b>
<b>Комбинаторные и эргодические свойства некоторых отображений сдвигов отрезков</b> <i>B. B. Черный</i>	<b>25</b>
<b>Normal forms for pair of involution of real line with common fixed point and thermo-haline oscillations in Welander model</b> <i>A. A. Davydov, S. O. Zosimov</i>	<b>27</b>
<b>Poisson stable and unpredictable points for general monoid actions</b>	

<i>S. A. Dovbysh</i>	<b>29</b>
<b>Hyperbolic polycycles. Criterion for appearing of multiple limit cycles</b>	
<i>A. V. Dukov</i>	<b>31</b>
<b>On the smooth conjugacy of smooth skew products and mappings obtained from them by small smooth perturbations</b>	
<i>L. S. Efremova</i>	<b>32</b>
<b>Solitary wave collisions in non-integrable systems</b>	
<i>M. V. Flamarion, E. Pelinovsky, E. Didenkulova</i>	<b>33</b>
<b>Manifolds Admitting Polar Flows with Two Saddles of Type (2, 2)</b>	
<i>D. O. Fomin</i>	<b>35</b>
<b>Применение функций Чернова</b>	
<b>для аппроксимации ограниченных решений</b>	
<b>обыкновенных линейных дифференциальных уравнений</b>	
<i>O. E. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Д. Ремизов, А. В. Веденин, К. А. Драгунова, А. Т. Иванова, Д. А. Минеев, П. Ю. Пантелеева</i>	<b>37</b>
<b>Nonlocal oscillations in a gene network model</b>	
<i>A. V. Glubokikh, V. P. Golubyatnikov</i>	<b>39</b>
<b>Mixed dynamics as a new type of chaos</b>	
<i>S. V. Gonchenko, D. V. Turaev</i>	<b>40</b>
<b>Multi-dimensional chaos in two-dimensional endomorphisms</b>	
<i>G. A.S., S. N.V.</i>	<b>41</b>
<b>О бифуркациях обратимого двойного отображения Эно</b>	
<i>C. B. Гонченко, Н. Г. Зеленцов, К. А. Сафонов</i>	<b>42</b>
<b>On two-dimensional diffeomorphisms with transverse homoclinic orbits to nonhyperbolic fixed points.</b>	
<i>O. V. Gordeeva, S. V. Gonchenko</i>	<b>44</b>
<b>Черновские аппроксимации решения параболического уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от</b>	

времени	
<i>A. T. Иванова</i>	46
On Lorenz type attractors in a three-dimensional maps with Lorenz symmetry	
<i>A. Kazakov, A. Murillo, K. Zaichikov</i>	48
Topological invariants of Pseudo-Euclidean analogs of inte- grable systems	
<i>V. A. Kibkalo</i>	50
Хаусдорфова размерность мер нестрого эргодических пере- кладываний отрезков	
<i>A. H. Кобзев</i>	51
Инвариантность стандартной фильтрации неальтернирую- щей гамильтоновой алгебры Ли	
<i>A. B. Кондратъева</i>	52
On topological obstructions to the existence of non-periodic Wannier bases	
<i>Y. A. Kordyukov</i>	53
Scenario of mildly stable transition from a structurally stable 3-diffeomorphism with a two-dimensional expanding attrac- tor to a hyperbolic automorphism	
<i>E. V. Kruglov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka</i>	54
Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли	
<i>M. И. Кузнецов</i>	56
Gradient-like diffeomorphisms and periodic vector fields	
<i>V. Z. Grines, L. M. Lerman</i>	58
О гомоклинических точках непрерывных отображений на одномерных разветвленных континуумах	
<i>E. H. Махрова</i>	60
Two-sided estimates of the critical radii of linear compact ir-	

<b>reducible Lie groups</b>	
<i>M. V. Meshcherykov</i>	<b>62</b>
<b>Динамика сильно нелинейных (виброударных) систем со</b>	
<b>случайно изменяющимися параметрами</b>	
<i>T. M. Митрякова, B. C. Метрикин</i>	<b>64</b>
<b>Remark on double-sided bounds for Gauss hypergeometric</b>	
<b>function</b>	
<i>M. A. Pisarev, A. E. Rassadin</i>	<b>67</b>
<b>On the restricted SIS-model with migration</b>	
<i>D. A. Podolin, A. E. Rassadin</i>	<b>69</b>
<b>Exact solutions of the KPZ equation and the Burgers vector</b>	
<b>equation on the quarter-plane</b>	
<i>A. E. Rassadin</i>	<b>71</b>
<b>On the property of monotonicity of solutions of systems with</b>	
<b>respect to initial conditions</b>	
<i>L. I. Rodina, M. S. Woldeab</i>	<b>73</b>
<b>Algebraic curve and its singularities of the integrable case</b>	
<b>of Kowalevski-Chaplygin-Goryachev-Yehia in rigid body dy-</b>	
<b>namics</b>	
<i>P. E. Ryabov</i>	<b>75</b>
<b>О гладкости одномерного фактор-отображения в системах</b>	
<b>с аттракторами Лоренца и Ровеллы</b>	
<i>K. A. Сафонов, M. И. Малкин</i>	<b>77</b>
<b>Конечнозонные операторы Шредингера</b>	
<i>A. H. Сахаров</i>	<b>79</b>
<b>Псевдогиперболические аттракторы трёхмерных отображе-</b>	
<b>ний</b>	
<i>E. A. Самылина</i>	<b>82</b>
<b>On Gradient-like Flows with one Saddle Equilibrium of Type</b>	
<b>(2, 2)</b>	
<i>I. A. Saraev, E. Y. Gurevich</i>	<b>84</b>

<b>Chaotic complete Cartan foliations</b>	
<i>K. I. Sheina, N. I. Zhukova</i>	<b>85</b>
<b>On hyperbolicity of perturbed diffeomorphisms of the two-dimensional torus and birth of the DA-attractor</b>	
<i>O. M. Shilov</i>	<b>87</b>
<b>Statistics in the dense state of KdV solitons</b>	
<i>A. V. Slunyaev, T. V. Tarasova, E. G. Didenkulova, E. N. Pelinovsky</i>	<b>88</b>
<b>Multistability in the networks of Hodgkin-Huxley-type models</b>	
<i>N. V. Stankevich, E. R. Bagautdinova, N. A. Shchegoleva</i>	<b>90</b>
<b>Full symmetric Toda system: integrability, quantization, QR algorithm and geometry of flag varieties.</b>	
<i>D. V. Talalaev</i>	<b>91</b>
<b>Квази-энергетические функции градиентно-подобных 3-диффеоморфизмов</b>	
<i>E. Таланова, О. Почкина</i>	<b>92</b>
<b>On Topological Conjugacy of Chaotic Homeomorphism Groups of Manifolds</b>	
<i>N. S. Tonysheva</i>	<b>94</b>
<b>Черновские аппроксимации на основе оператора сдвига, быстро сходящиеся к решению параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами</b>	
<i>A. B. Веденин</i>	<b>96</b>
<b>Liouville foliation of billiard books near the focal singular fiber</b>	
<i>V. V. Vedyushkina</i>	<b>98</b>
<b>Ленточные поверхности слоений с особенностями. Новый алгоритм перечисления</b>	
<i>A. Ю. Жиров, А. А. Медведев</i>	<b>100</b>

# Invariants of magnetic lines for Yang-Milles solutions

P. M. Akhmet'ev, M. S. Dvornikov

*IZMIRAN, Troitsk, Moscow*

Anzatz for Yang-Milles fields on the standard 3-dimensional sphere  $S^3$  was proposed in [1]. Using this anzatz, Hornig and Mayer clarify a geometrical meaning of Chern-Simons integral.

We replace the standard quaternion structure on  $S^3$  into its conjugated (the right polarisation is transformed into the left). Based on this trick, a stationary solution for Yang-Milles equation is presented. By this construction the sphere  $S^3$  is presented as the universal covering over  $SO(3)$ , and this covering is described as the Spin-cover over the units tangent vectors manifold to the standard 2-dimensional sphere  $S^2$ . The constructios and the solution is also well-presented for manifolds with negative section curvature, using calculations from the textbook [2]. The Chern-Simons integral is geometrically defined as the  $l^1$ -norm of triangles for the Gauss dyagramme for Yang-Milles field. This description is possible for a single component of the Yang-Milles field, which is a Maxwellian field, called the Chern-Simons magnetic wave. The  $l^2$ -norm of the triangles for the Gauss dyagramme of the Chern-Simons magnetic wave is a result of the calculation of a higher asymptotic ergodic invariant.

This geometrical reformulation of Chern-Simons integral is useful for physics. One may assume that the Chern-Simons wave is a large-scale MHD solution. With this assumption the main result by the authors is following: the  $\alpha$ -parameter of the mean field dynamo is related with a sectional curvature (a small negative parameter) of the domain. The prove is based on the following fact: a gauge of a scale determines a denominator for the corresponding gauge of the magnetic energy by the two different ways: geometrical and phisical. A phisical scale (for the large-scale magnetic flow, produced by a small-scale magnetic field) is based on Kolmogorov principle in MHD. A geometrical scale is defined using higher analog of the Hopf asymptotic ergodic invariant (the  $M$ -invariant of magnetic lines). It is remarkable fact that the two scales coincide [3].

The geometrical scale, evidently, gives a relationsheep between geodesic laminations with the linking number for closed magnetic lines. Because the  $M$ -invariant is ergodic, the contribution of the extra linking numbers into

its density is calculated from the sectional curvature parameter. With the assumption that the phisical scale coinsids with the geometrical scale, an estimation of the  $\alpha$ -effect by means of the curvature parameter is proposed.

#### REFERENCES

- [1] Gunnar Hornig and Christoph Mayer, Towards a third-order topological invariant for magnetic fields (2002) <http://arxiv.org/abs/physics/0203048v1>
- [2] Arnol'd V. I. and Khesin B. A., Topological Methods in Hydrodynamics Applied Mathematical Sciences vol 125 (1998) (New York: Springer-Verlag)
- [3] P.M.Akhmet'ev, Topological meaning of the slope of the Kolmogorov spectrum of magnetic turbulence:  $M_5$ -invariant of magnetic lines and its combinatorial formula, Journal of Geometry and Physics 178(2022)104583.

# Нехаусдорфовы многообразия и их применение

А. А. Акимов

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа  
экономики»*

Исследуются  $n$ -мерные многообразия, топологические пространства которых не хаусдорфовы. Доказано следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Пусть  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие и  $\rho$  — отношение эквивалентности в  $M$ , обладающее следующими двумя свойствами:*

- (1) *для любой точки  $x \in M$  существует открытая окрестность  $U$ , в которой никакие две точки не являются  $\rho$ -эквивалентными;*
- (2) *проекция  $f : M \rightarrow M/\rho$  на фактор-пространство  $M/\rho$  является открытым отображением.*

*Тогда фактор-пространство  $M/\rho$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие, вообще говоря, не хаусдорфово, а проекция  $f : M \rightarrow M/\rho$  — локальный гомеоморфизм.*

Заметим, что в [1, Proposition 1] утверждение Предложения 1 приведено без выполнения условия (2). Нами построен пример, показывающий что условие (2) является необходимым для того, чтобы фактор-пространство  $M/\rho$  было топологическим многообразием.

Пусть  $(M, F)$  — топологическое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном топологическом многообразии  $M$ , где  $F = \{L_\alpha \mid \alpha \in J\}$ ,  $L_\alpha$  — слои этого слоения. Пара  $(U, \varphi)$  называется расслоенной картой относительно слоения  $(M, F)$ , если  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гомеоморфизм открытого подмножества  $U \subset M$ , отображающей компоненты связности пересечения  $L_\alpha \cap U$  на слои стандартного слоения коразмерности  $q$  в  $\mathbb{R}^n$ , образованного  $q$ -мерными параллельными плоскостями. Компоненты связности пересечения  $L_\alpha \cap U$  называются локальными слоями.

Напомним понятие регулярного слоения в смысле Пале [2]. Расслоенная карта  $(U, \varphi)$  называется регулярной, если любой слой слоения  $L_\alpha$  либо не пересекает  $U$ , либо пересечение  $L_\alpha \cap U$  состоит из одного локального слоя. Слой  $L_\alpha$  называется регулярным, если он пересекает окрестность  $U$  некоторой регулярной карты  $(U, \varphi)$ . Слоение называется регулярным, если регулярны все его слои.

Нами доказано следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Если  $(M, F)$  — регулярное топологическое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном топологическом многообразии  $M$ , то пространство слоев  $M/F$ , наделенное фактор-топологией, является  $q$ -мерным топологическим многообразием, которое, вообще говоря, не хаусдорфово, а проекция  $\pi : M \rightarrow M/F$  на пространство слоев является непрерывным и открытым отображением.*

Аналогичное утверждение доказано в [2] для гладких слоений.

Для любого натурального числа  $n$  нами построены новые примеры  $n$ -мерных нехаусдорфовых многообразий. Построены также регулярные топологические слоения произвольной коразмерности  $n$ , пространства слоев которых являются  $n$ -мерными нехаусдорфовыми многообразиями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Haefliger et G. Reeb. Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. L'enseignement mathématique, t. III, 1957, 107–125. (A. Haefliger, G. Reeb. One dimensional non-Hausdorff manifolds and foliations on the plane. Translated into English by Gangotryi Sorcar. ArXive: 11193v1 [math. GT] 23 Aug. 2022).
- [2] R.S. Palais. A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Memoirs of Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 22.

# **Аналитико-численные методы прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в математических моделях экономики**

Т. А. Алексеева

*Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Санкт-Петербургская школа  
физико-математических и компьютерных наук*

Во второй половине прошлого века сформировалось широкое направление исследований экономических колебаний, в рамках которого для моделирования и прогнозирования долгосрочного поведения экономики рассматривались динамические системы и классические методы нелинейной детерминированной динамики (см., например, [1]). Интенсивное развитие за последние годы вычислительных средств, искусственного интеллекта и отдельных направлений теории динамических систем (теория скрытых колебаний и глобальной устойчивости, теория размерности, теория управления хаосом, интервальный анализ и др.) делают актуальной задачу пересмотра подхода к анализу предельной динамики математических моделей экономики для улучшения ее прогнозирования и расширения класса исследуемых моделей с учетом экономических ограничений на переменные и необходимости проверки выполнения этих ограничений для всех допустимых множеств параметров и состояний модели.

Изучение предельной динамики с помощью математических моделей связано с решением актуальных задач выявления аттракторов и бассейнов их притяжения в фазовом пространстве динамической системы, а также разбиения пространства параметров системы на области, для которых существуют определенные конфигурации аттракторов. В случаях отсутствия в системе аттракторов с регулярным поведением или выявления аттракторов с нерегулярным поведением ставится задача введения в математическую модель дополнительного управления (с учетом возможности его соответствующей реализации в экономической модели) для формирования в системе регулярного аттрактора.

Применение классических методов теории динамических систем и численных методов для прогнозирования предельной динамики в экономике в основном направлено на теоретический анализ конкретных примеров низкоразмерных (преимущественно двумерных) моделей и классический численный анализ многомерных моделей и временных рядов

(см. например, [2, 3, 4]). Вместе с тем основные трудности применения вычислительных методов связаны с необходимостью численного интегрирования и анализа отдельных траекторий на длинных интервалах времени, необходимостью нелокального анализа всего фазового пространства и пространства параметров. Разработанные в рамках теории глобальной устойчивости аналитические методы позволяют выделять области глобальной устойчивости динамической системы, но дают, как правило, только консервативные (внутренние) оценки этой области в пространстве параметров. В случае потери устойчивости стационарного множества, в том числе связанной с нелокальными бифуркациями, для анализа сценариев рождения в фазовом пространстве системы нетривиальных колебаний используются методы теории бифуркаций и теории скрытых колебаний. При этом для анализа самовозбуждения колебаний и рождения самовозбуждающихся аттракторов эффективно использование классических аналитических и численных методов, а анализ рождения скрытых колебаний и аттракторов требует разработки и применения специальных аналитико-численных подходов [5, 6].

В данной работе показано, что соединение классических и развитых за последние годы теоретических методов с численными алгоритмами с использованием искусственного интеллекта для синтеза эффективных аналитико-численных процедур делает перспективным такой комплексный подход к прогнозированию и управлению нерегулярной динамикой в математических моделях экономики. На примере ряда экономических моделей продемонстрирована эффективность применения этого подхода: вывод условий глобальной устойчивости; аналитическая и численная локализация глобального аттрактора; количественная оценка нерегулярной динамики с помощью ляпуновских показателей; вывод модификаций ряда актуальных экономических моделей (в том числе модели перекрывающихся поколений с переменной управления в виде государственных расходов, новокейнсианской модели с управляющими правилами монетарной и фискальной политики) как решений оптимизационных динамических задач, а также пространственно-временной модели ценообразования на сетевом глобальном рынке товаров и др.; выявление и стабилизация неустойчивых периодических траекторий для подавления хаотического поведения в моделях, а также максимизация областей притяжения стабилизованных траекторий с помощью аналитико-численных процедур, основанных на методе управления Пирагаса, эволюционных алгоритмах и обучении с подкреплением; прогнозирование динамики в областях управляющих параметров с различными режимами экономической политики [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Medio, Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics, Cambridge University Press, 1992.
- [2] G. Sugihara, R. May, Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series, *Nature* 344 (6268) (1990) 734–741.
- [3] C. Hommes, Handbook of Computational Economics, Vol. 2, Elsevier, 2006, Ch. 23, pp. 1109–1186.
- [4] W. Zhang, Chaos, Complexity, and Nonlinear Economic Theory, World Scientific Publishing, 2023.
- [5] Кузнецов Н.В., Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления, *Известия РАН. Теория и системы управления* (5) (2020) 5–27.
- [6] N. Kuznetsov, V. Reitmann, Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation, Springer, Cham, 2021.
- [7] T. Alexeeva, W. Barnett, N. Kuznetsov, T. Mokaev, Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model, *Chaos, Solitons & Fractals* 140 (2020) art. num. 110239.
- [8] T. Alexeeva, N. Kuznetsov, T. Mokaev, Study of irregular dynamics in an economic model: attractor localization and Lyapunov exponents, *Chaos, Solitons & Fractals* 152 (2021) art. num. 111365.
- [9] T. Alexeeva, W. Barnett, N. Kuznetsov, T. Mokaev, Time delay control for stabilization of the Shapovalov mid-size firm model, *IFAC-PapersOnLine* 53 (2) (2020) 16971–16976.
- [10] T. Alexeeva, Q.-B. Diep, N. Kuznetsov, I. Zelinka, Forecasting and stabilizing chaotic regimes in two macroeconomic models via artificial intelligence technologies and control methods, *Chaos, Solitons & Fractals* 170 (2023) art. num. 113377 .
- [11] T. Alexeeva, T. Mokaev, I. Polshchikova, Dynamics of monetary and fiscal policy in a New Keynesian model in continuous time, *Differential Equations and Control Processes* (4) (2020) 88–114.

- [12] T. Alexeeva, N. Kuznetsov, T. Mokaev, I. Polshchikova, Macroeconomic model with monetary and fiscal policy and externality: Nonlinear dynamics, optimization and control, IFAC-PapersOnLine 54 (17) (2021) 26–31.
- [13] T. Alexeeva, N. Kuznetsov, T. Mokaev, I. Polshchikova, Optimal control in the New Keynesian model with monetary and fiscal policy interactions, Journal of Physics: Conference Series 1864 (2021) art. num. 012040.
- [14] T. Alexeeva, N. Kuznetsov, M. Lobachev, R. Mokaev, T. Mokaev, A. Petrova, I. Polshchikova, Complex dynamics and optimal control of monetary policy in a New Keynesian model with government debt, IFAC-PapersOnLine 55 (40) (2022) 157–162.

# Bounded solutions of impulsive systems

O. V. Anashkin, O. V. Yusupova

*Crimean Federal University, Simferopol*

Many evolutionary processes in the real world are characterized by sudden changes at certain times. These changes are called to be impulsive phenomena [1,3], which are widespread in modeling in mechanics, electronics, biology, neural networks, medicine, and social sciences. An impulsive differential system is one of the basic instruments to understand the role of discontinuity better for the real world problems.

If the impulses occur at fixed times, the mathematical model of this process will be given by the following impulsive system [1]

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq t_k, \quad x(t_k^+) = h_k(x(t_k)), \quad (1)$$

where  $\{t_k\}$  is a strictly increasing real sequence of impulse times that is unbounded as  $k \rightarrow \infty$ ,  $x(t^+) = \lim_{s \rightarrow t+0} x(s)$ . It is assumed that the right side of the impulsive system satisfies the conditions that ensure the uniqueness of the solution to the initial problem. We take the typical convention that piecewise smooth solutions of the impulsive system are continuous from the left. Introduce a sequence of positive numbers  $\{\theta_k = t_{k+1} - t_k\}$ . The behavior of solutions of the impulsive system significantly depends on the properties of this sequence.

If system (1) is periodic, i.e.  $\theta_{k+p} = \theta_k$ ,  $h_{k+p} = h_k$ ,  $f(t+T, x) = f(t, x)$  and  $t_{k+p} = t_k + T$  (or  $\theta_1 + \dots + \theta_p = T$ ) then the problem can be reduced to a problem in discrete time (see, for instance, [2, 3]).

Indeed, without loss of generality we can put  $t_0 = 0$ . Let  $\varphi(t; t_0, x^0)$  be a solution to the differential equation of the impulsive system (1) satisfying the initial condition  $x(t_0^+) = x^0$ . Restricting ourselves to the case  $p = 2$  and  $T = \theta_0 + \theta_1$ , we obtain for the periodic impulsive system (1) the following relation

$$x(t_{k+p}) = F(x(t_k)),$$

where  $F(x) = \varphi(T; \theta_0, h_1(\varphi(\theta_0; 0, h_0(x))))$ .

Since the exact solution for nonlinear differential equation is usually not known, various approximations are used, for example, representing the solution as a series of initial values [2].

The problem becomes fundamentally more complicated if system (1) is not periodic. It should be noted that almost periodic solutions of impulsive systems are discontinuous, which requires a certain modification of the definition. The same applies to the conditions of almost periodicity of the sequence  $\{\theta_k\}$ . These issues are discussed in detail in the monograph [1].

This report discusses the conditions for the existence of bounded solutions of periodic and non-periodic impulsive system (1) (more precisely, stationary, periodic or almost periodic solutions) and local bifurcations of bounded solutions.

#### REFERENCES

- [1] Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1995) Impulsive differential equations, World Scientific, River Edge (1995).
- [2] Anashkin O. V., Yusupova O. V. (2021) Stability in the Critical Case and Bifurcations in Impulsive Systems, Lobachevskii J Math, **42**, No. 16, 3574–3583 (2021).
- [3] Church K. E. M., Liu X. Bifurcation theory of impulsive dynamical systems, Springer Nature Switzerland AG, Cham (2021).

# Infinite transitivity for automorphisms and endomorphisms of affine algebraic varieties

Ivan Arzhantsev

*Faculty of Computer Science, HSE University, Moscow*

Let  $X$  be an affine algebraic variety over an algebraically closed field of characteristic zero. We survey recent results on infinite transitivity of the action of the automorphism group  $\text{Aut}(X)$  on the smooth locus  $X^{\text{reg}}$  and of the endomorphism monoid  $\text{End}(X)$  on  $X$ .

Supported by the Russian Science Foundation grant RSF-DST 22-41-02019.

## REFERENCES

- [1] Ivan Arzhantsev, Hubert Flenner, Shulim Kaliman, Frank Kutzschebauch, and Mikhail Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. *Duke Math. J.* 162 (2013), no. 4, 767-823
- [2] Ivan Arzhantsev, Karine Kuyumzhiyan, and Mikhail Zaidenberg. Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots. *Adv. Math.* 351 (2019), 1-32
- [3] Ivan Arzhantsev, Shulim Kaliman, and Mikhail Zaidenberg. Varieties covered by affine spaces, uniformly rational varieties and their cones. *Adv. Math.*, to appear; <https://arxiv.org/abs/2304.08608>, 13 pages

# The attractor and the Mandelbrot set for a pair of plane opposite similitudes

A. V. Bagaev

*Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev  
(Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

A finite set  $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  of contraction maps on a complete metric space  $(X, d)$  is called an iterated function system (IFS). According to Hutchinson's theorem [1], for any IFS  $S$  on a complete metric space  $(X, d)$ , there exists a unique nonempty compact subset  $A \subset X$ , invariant with respect to  $S$ :

$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = A.$$

The set  $A$  is called the attractor of IFS  $S$ . Emphasise that attractors can be either "good" sets (segment, square, cube) or fractals. The main goal of the theory of iterated function systems is to describe the topological properties of attractors.

We consider the IFS  $S = \{f_1, f_2\}$  on the complex plane  $\mathbf{C}$ , given by

$$f_1(z) = \alpha \bar{z}, \quad f_2(z) = \alpha(\bar{z} - 1) + 1, \quad z \in \mathbf{C}, \quad (1)$$

where  $\alpha = \lambda e^{i\varphi} \in \mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ . Remark that the maps  $f_1$  and  $f_2$  are opposite similitudes with centers at points 0 and 1, respectively. Denote by  $A$  the attractor of IFS  $S$ . Let  $\dim_M A$  and  $\dim_H A$  be the Minkowski and Hausdorff dimensions of the attractor  $A$ .

We proved the following theorem.

**Theorem.** 1. Let  $\varphi = 0$ . If  $\lambda \in (0, 0.5)$ , then  $A$  is a Cantor set in the segment  $[0, 1]$ ; if  $\lambda \in [0.5, 1)$ , then  $A = [0, 1]$ .

2. Let  $\varphi = \pi$ . If  $\lambda \in (0, 0.5)$ , then  $A$  is a Cantor set in the segment  $I_\lambda = \left[-\frac{\lambda}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}\right]$ ; if  $\lambda \in [0.5, 1)$ , then  $A = I_\lambda$ .

If  $\varphi \in \{0, \pi\}$ , then

$$\dim_M A = \dim_H A = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}, & \lambda \in (0, 0.5), \\ 1, & \lambda \in [0.5, 1). \end{cases}$$

3. Let  $\varphi \notin \{0, \pi\}$ ,  $P_\alpha$  be a parallelogram with vertices at points  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \frac{1-\alpha}{1-\lambda^2}$ ,  $z_3 = 1$ ,  $z_4 = \frac{\alpha-\lambda^2}{1-\lambda^2}$ . If  $\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$ , then  $A$  is a Cantor set in  $P_\alpha$ ; if  $\lambda \in [1/\sqrt{2}, 1)$ , then  $A = P_\alpha$ .

If  $\varphi \notin \{0, \pi\}$ , then

$$\dim_M A = \dim_H A = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}, & \lambda \in (0, 1/\sqrt{2}), \\ 2, & \lambda \in [1/\sqrt{2}, 1]. \end{cases}$$

Let  $A_\alpha$  be the attractor of IFS  $S_\alpha = \{h_1, h_2\}$  consisting from two direct similitudes  $h_1(z) = \alpha z$ ,  $h_2(z) = \alpha(z-1)+1$ ,  $z \in \mathbf{C}$ ,  $\alpha \in \mathbf{D}$ . In contrast to the IFS (1), the attractors  $A_\alpha$  of the IFS  $S_\alpha$  have a greater variety. Barnsley and Harrington [2] called a set  $\mathcal{M} = \{\alpha \in \mathbf{D} \mid A_\alpha \text{ is connected}\}$  the "Mandelbrot set for the pair of linear maps," by analogy with the classical Mandelbrot set in complex dynamics. The set  $\mathcal{M}$  has a very complex fractal structure and has been studied by Bandt, Solomyak, Hu, Hung and others. Some of the basic questions on the geometry and topology of  $\mathcal{M}$  remain open.

According to our Theorem, for a pair of plane opposite similitudes (1) the Mandelbrot set  $\mathcal{M}$  has a simple form:

$$\mathcal{M} = \{\alpha \in \mathbf{D} \mid 1/\sqrt{2} \leq |\alpha| < 1\} \bigcup \{\alpha \in \mathbf{D} \mid 1/2 \leq |\alpha| < 1/\sqrt{2}, \operatorname{Im} \alpha = 0\}.$$

#### REFERENCES

- [1] Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. Vol. 30. pp. 713–747.
- [2] Barnsley M. F., Harrington A. N. A Mandelbrot set for pairs of linear maps // Phisica 15D. 1985. pp. 421–432.

# A stable reverse mathematical pendulum with a solid weightless rod is subject to the action of a vertical sinusoidal force

Sergey Belyakin<sup>1,3</sup>, Alexander Stepanov<sup>2,3</sup>

1. Department of General Physics, Physics Faculty

2. Department of Oscillation Physics, Physics Faculty

3. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

This paper presents an inverse unstable mathematical pendulum hinged at the lower point of suspension with a solid weightless rod. The stability of the pendulum is realized by compensation of the gravitational force and the sinusoidal force acting in a given direction. A large number of works consider stability by vibration at the lowest point [1].

## MATHEMATICAL MODEL OF AN INVERSE MATHEMATICAL PENDULUM WITH A SOLID WEIGHTLESS ROD

### UNDER THE ACTION OF A VERTICAL SINUSOIDAL FORCE

This model was considered in the work [2]:

$$\ddot{\Theta} + \beta\dot{\Theta} - f \sin \Theta \sin \omega t = 0.$$

The analytical solution was the following equation:

$$\delta = \gamma \operatorname{sech} \gamma.$$

Here:  $\delta = \beta\sqrt{2}$ ,  $\gamma = \frac{\pi\omega}{2\sqrt{2}f}$ .

Analysis of this equation showed that it determines all areas of stability of any dynamic systems [3].

## REFERENCES

- [1] E.M. Bogatov, R.R. Mukhin. THE AVERAGING METHOD, A PENDULUM WITH A VIBRATING SUSPENSION: N. N. BOGOLYUBOV, A. STEPHENSON, P. L. KAPITZA AND OTHERS. Applied Nonlinear Dynamics, 25, 2017, No5, Pp.69-87.

- [2] D.V. Grachikov, G.N. Lebedev. STABILIZATION, DESYNCHRONIZATION AND OPTIMAL CONTROL OF THE BACK PENDULUM WITH HYSTERESIS PROPERTIES. VESTNIK VSU, SERIES: SYSTEM ANALYSIS AND INFORMATION TECHNOLOGIES, 2013, No1, Pp.29-37.
- [3] S.T. Belyakin, S.A. Shuteev. Classical soliton theory for studying the dynamics and evolution of cylindrical shock waves in passive dispersed and active relaxation media. PAST KNOWLEDGE PEOPLE, Journal of Applied Material Science & Engineering Research, 4, 2020, No4, Pp.157-159.

## Lorentzian 2-orbifolds of constant non-zero curvature

E. V. Bogolepova<sup>1,3</sup>, N. I. Zhukova<sup>2,3</sup>

1. *ebogolepova@hse.ru*
2. *nina.i.zhukova@yandex.ru*
3. *HSE University, Russian Federation*

It is known that every smooth orbifold admits a Riemannian metric which is not true for Lorentzian metrics. Lorentzian orbifolds form the category  $\mathcal{L}or$ .

An  $n$ -dimensional orbifold is a connected Hausdorff topological space that can be represented locally as a quotient space  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  of the arithmetic space  $\mathbb{R}^n$  over a finite group of diffeomorphisms  $\Gamma$ ; moreover, the group  $\Gamma$  is not fixed and can change when moving from one point to another. Smooth orbifolds naturally form the category  $\mathcal{O}rb$ .

The isometry group of a Lorentz orbifold  $(\mathcal{N}, g)$  is called inessential if there exists a Riemannian metric  $h$  such that the isometry group of the Lorentzian orbifold  $(\mathcal{N}, g)$  is an isometry group of the Riemannian orbifold  $(\mathcal{N}, h)$ , otherwise the group of isometries of a Lorentzian orbifold is called *essential*. Lorentzian orbifolds with inessential full isometry group are referred to be inessential. Emphasize that an essential Lorentzian orbifold  $(\mathcal{N}, g)$  is characterized by an improper action of its full isometry group. A compact Lorentzian orbifold is essential if and only if its full isometry Lie group is not compact.

In [1] proved that there is a single (up to isomorphisms in the category  $\mathcal{O}rb$ ) proper smooth orbifold called the "Pillow", covered by the torus, admitting flat Lorentz metrics with an essential group of isometries. Among non-compact orbifolds only  $\mathbb{Z}_2$ -cone admits a complete essential Lorentzian metric of zero curvature [2].

In this work we investigate the structure of complete two-dimensional Lorentz orbifolds of constant non-zero curvature with the essential isometry group. At first we prove that every such orbifold may be represented in the form  $M = M/\Psi$  where  $M$  is a Lorentz manifold, and  $\Psi$  is an isometry group isomorphic either to  $\mathbb{Z}_2$  or to  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

The application of this fact allowed us to obtain a classification of two-dimensional complete Lorentzian orbifolds of constant curvature with the essential group of isometries both in the category of Lorentzian orbifolds and in the category of smooth orbifolds. All such Lorentzian metrics exist

only non-compact orbifolds. Using the geometry of De Sitter space, it is proved, in particular, that the indicated Lorentzian geometries of non-zero curvature  $K$  exist on exactly six non-compact smooth orbifolds. For any fixed  $K$  other than zero, all classes of isomorphic Lorentzian metrics with an essential isometry group and complete isometry groups are found on each of these six orbifolds.

In particular, we have proved the existence of three smooth orbifolds with finite fundamental groups admitting essential Lorentzian metrics, while in the case of zero curvature there is only one such orbifold.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 23-71-30008).

#### REFERENCES

- [1] N.I. Zhukova, E.A. Rogozhina, "Classification of compact Lorentzian 2-orbifolds with noncompact full isometry groups", *Siberian Math. J.*, **53**, no. 6, 1037-1050 (2012).
- [2] E.V. Bogolepova, N.I. Zhukova, "Anosov Actions of Isometry Groups on Lorentzian 2-Orbifolds", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**, no.14, 3324-3335 (2021).

# **Комбинаторные и эргодические свойства некоторых отображений сдвигов отрезков**

B. B. Черный

*НИУ Высшая школа экономики, факультет математики*

Отображения сдвигов отрезков - это класс кусочно-линейных отображений интервала, естественным образом обобщающий перекладывания отрезков. Эти отображения были введены в [3], где было показано, что динамическая система, порождаемая таким отображением, сопряжена либо перекладыванию отрезков, либо минимальной динамической системе на канторовском множестве, называемом аттрактором системы.

Одним из основных инструментов исследования свойств динамических систем, порождаемых отображениями сдвигов отрезков второго типа, является символическая динамика, которая позволяет сводить задачу к комбинаторике слов. В частности, если удается построить символическую динамическую систему, сопряженную исходной, то ее комбинаторная сложность дает оценку сверху на число инвариантных мер исходной системы.

Разработанная в [2] комбинаторная техника для оценки сложности символьических динамических систем была в этой же работе успешно применена для оценки сложности подкласса отображений сдвигов отрезков, рассмотренного в [4]. Эта же техника была применена в [5] для оценки сложности другого класса отображений сдвигов отрезков, возникающих при рассмотрении биллиардов в многоугольниках.

В [1] был рассмотрен подкласс отображений сдвигов отрезков, обобщающий изучавшийся в [4]. В докладе будет дана оценка комбинаторной сложности для отображений сдвигов отрезков из этого класса, полученная с помощью той же комбинаторной техники.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Bruin, Henk. (2007). Renormalisation in a class of interval translation maps of d branches. *Papers from the Department of Mathematics*. 22. 10.1080/14689360601028084.
- [2] Cassaigne J, Nicolas F. Factor complexity. In: Berthé V, Rigo M, eds. *Combinatorics, Automata and Number Theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press; 2010:163-247. doi:10.1017/CBO9780511777653.005

- [3] Boshernitzan M, Kornfeld I. Interval translation mappings. Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1995;15(5):821-832. doi:10.1017/S0143385700009652
- [4] Bruin, Henk and Serge Eugene Troubetzkoy. "The gauss map on a class of interval translation mappings." Israel Journal of Mathematics 137 (2002): 125-148.
- [5] Skripchenko, Alexandra and Serge Eugene Troubetzkoy. "Polygonal billiards with one side scattering." arXiv: Dynamical Systems (2013): n. pag.

# Normal forms for pair of involution of real line with common fixed point and thermo-haline oscillations in Welander model

A. A. Davydov<sup>1,2</sup>, S. O. Zosimov<sup>1</sup>

*1. Lomonosov Moscow State University*

*2. NUST MISIS*

In the Welander model a homogeneous surface water layer of constant thickness is influenced by the atmosphere above it and the underlying deep water layer with constant temperature and salinity  $T_A, S_A$  and  $T_0, S_0$ , respectively, [1]. The interaction between the layers is described by Newton's law, while for interaction with the atmosphere the exchange coefficients  $q_S$  and  $q_T$  for salinity and temperature are constant and satisfy the relation  $0 < q_S < q_T$ , and for turbulent exchange between two water layers, this coefficient is a function  $q_0$  of the differences in the densities  $\rho$  and  $\rho_0$  of the surface and deep layers, respectively. We will call this function *transfer function*; it is nondecreasing, having values being close to zero at significant negative values of this difference, and rapidly growing near zero.

After choosing the temperature, salinity and density of the deep water layer as zero for these indicators, the Wilander model takes the form

$$\begin{cases} \dot{T} = q_T(T_A - T) - q_0(\rho)T \\ \dot{S} = q_S(S_A - S) - q_0(\rho)S \end{cases} \quad (1)$$

where  $T$  and  $S$  are the temperature and salinity of the surface water layer. We take the dependence of the density of the surface layer of water on its temperature and salinity as a linear function

$$\rho = -\alpha T + \beta S \quad (2)$$

with  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  (as in many other works with similar models, for example, which provides a linear approximation near zero to any differentiable function  $\rho = \rho(T, S)$  with zero value at zero and negative and positive derivatives at zero with respect to temperature and salinity, respectively. Also as usually we assume that in the state of equilibrium of the surface water layer with the atmosphere, its temperature and density are higher than the temperature and density of the deep water layer, respectively, i.e.  $T_A > 0$  and  $-\alpha T_A + \beta S_A > 0$  (see, for example, [2])

It is shown that for typical smooth finite-parametric families of transfer functions with a jump at zero, which are zero for negative values and smooth positive on the non-negative semi-axis, the analysis of the occurrence of thermohaline self-oscillations in the model under study is reduced to the study of the appearance of non-trivial fixed points of the composition of typical finite-parametric smooth families pairs of involutions of a real line with a common fixed point [3]. We also discuss the formal normal form of such a typical pair of involutions.

The study was financially supported by the Russian Science Foundation, project no. 19-11-00223

#### REFERENCES

- [1] P.A.Welander, A simple heatsalt oscillator//*Dyn. Atmos. and Oceans.* 1982. V. 6, N 4. P. 233 – 242.
- [2] A.A.Davydov, N.B.Melnikov, Soft Loss of Stability in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes // *Analysis and singularities. Part 2, Collected papers. Dedicated to academician Vladimir Igorevich Arnold on the occasion of his 70th birthday*, Trudy Mat. Inst. Steklova, 259, Nauka, MAIK «Nauka/Inteperiodika», M., 2007, 1019; Proc. Steklov Inst. Math., 259 (2007), 6 – 15.
- [3] A.A.Davydov, S.O.Zosimov, Typical Occurrence of Self-oscillations in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes//*Optimal Control and Dynamical Systems, Collected papers. On the occasion of the 95th birthday of Academician Revaz Valerianovich Gamkrelidze*, Trudy Mat. Inst. Steklova, 321, Steklov Math. Inst., Moscow, 2023, 118127; Proc. Steklov Inst. Math., 321 (2023), 107 – 116.

# Poisson stable and unpredictable points for general monoid actions

S. A. Dovbysh

*Moscow State University and Bauman Moscow State Technical University*

Let  $f \mapsto \pi(f, \cdot)$  be a left action of a noncompact topological monoid  $G$  with unit  $e$  on a metric space  $(X, d)$ , i.e.,  $\pi : G \times X \rightarrow X$  is continuous,  $(gh)(x) = g(h(x))$  and  $e(x) = x$  where  $\pi(f, x)$  is denoted by  $f(x)$  for every  $x \in X$  and  $f \in G$ . This  $G$ -action on  $X$  is called a  *$G$ -semiflow* or simply *semiflow*, and  $G(x) = \{f(x) : f \in G\}$  is an *orbit* of the point  $x \in X$ . In a usual way, if  $A \subset G$  and  $f \in G$  then let  $Af = \{gf : g \in A\}$  and  $fA = \{fg : g \in A\}$ , and also  $f^{-1}A = \{g \in G : fg = e\}$  and  $Af^{-1} = \{g \in G : gf = e\}$ .

A net  $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$  in  $G$  indexed by a partially ordered set  $(\Delta, \preccurlyeq)$ , converges to infinity if for every compact  $K \subset G$  there exists  $\delta_0 \in \Delta$  such that  $f_\delta \notin K$  for all  $\delta \succcurlyeq \delta_0$ . Denote by  $\mathfrak{U}$  a collection of complements to all compact subsets in  $G$ . A point  $x \in X$  is said to be *Poisson stable* (or briefly, *stable*  $P$ ) if there is a net  $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$  such that  $f_\delta \rightarrow \infty$  and  $f_\delta(x) \rightarrow x$ . If

$$f^n \rightarrow \infty, n \rightarrow +\infty \text{ for every } f \in G, f \neq e, \quad (*)$$

then condition  $f_\delta \rightarrow \infty$  can be weakened to that unit  $e$  is not a limit point of  $f_\delta$ . In a standard way, a limit set  $\Omega_x$  of a point  $x \in X$  is defined as the set of all limit point of  $f(x)$  as  $f \rightarrow \infty$  (and  $\Omega_x$  is the usual  $\omega$ -limit set when  $G = \mathbb{R}_+$ ). Then  $\Omega_x \subset \overline{G(x)}$  and, moreover,  $\Omega_x = \overline{G(x)}$  iff  $x$  is stable  $P$ . If  $x$  is stable  $P$  and  $\Omega_x = \overline{G(x)}$  is compact when  $\Theta = \Omega_x$  is called a *quasi-minimal set* and the point  $x$  is said to generate  $\Theta$ .

A point  $x \in X$  is said to be *unpredictable* with *unpredictability* constant  $\varepsilon > 0$  if there are two nets  $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$  and  $(g_\delta)_{\delta \in \Delta}$  such that  $f_\delta \rightarrow \infty$ ,  $x_\delta = f_\delta(x) \rightarrow x$  while  $d(g_\delta(x), g_\delta(x_\delta)) > \varepsilon$ . Then  $g_\delta \rightarrow \infty$ , as well.

We will utilize various conditions on  $G$ :

$$\forall f \in G \ \exists U \in \mathfrak{U} : \ U \subset Gf \quad (1)$$

$$\forall g \in G, U \in \mathfrak{U} \ \exists V \in \mathfrak{U} : \ gV \subset U \quad (2)$$

$$g^{-1}V \cap U = \emptyset \text{ for some vicinity } V \text{ of } e \text{ and } U \in \mathfrak{U}, \text{ and } (*) \text{ is valid} \quad (3)$$

In subsequent, conditions (1) and either (2) or (3) are assumed to be valid. Note that (1) and (2) are always satisfied if  $G$  is a topological group.

**Proposition 1.** For any  $x \in X$  one has  $\Omega_x = \Omega_y$  for every point  $y \in G(x)$ . If point  $x \in X$  is stable  $P$  then every  $y \in G(x)$  is also stable  $P$ .

**Proposition 2.** Let  $G$  be  $\sigma$ -compact. In a quasi-minimal set  $\Theta$ , points  $x$  stable  $P$  and such that  $\overline{G(x)} = \Theta$  will constitute a set of second category of type  $G_\delta$ . In particular, these point are dense in  $\Theta$ .

**Proposition 3.** If point  $x \in X$  is unpredictable then every point in its orbit is also unpredictable with the same unpredictability constant.

**Theorem.** Let  $G$  be  $\sigma$ -compact. In a quasi-minimal set  $\Theta = \overline{G(x)}$  generated by an unpredictable point  $x$  with some unpredictability constant, all unpredictable points  $y$  with the same unpredictability constant and such that  $\overline{G(y)} = \Theta$  will constitute a set of second category of type  $G_\delta$ .

For classical cases of  $\mathbb{R}_+$  and  $\mathbb{N}_0$ -semiflows, Proposition 1 is well-known, complicated Proposition 2 is due to H. Hilmy (see [1]) and Proposition 3 is due to M. Akhmet and M.O. Fen [2] who have introduced the concept of unpredictable points. A. Miller [3] introduced this concept and established Proposition 3 for general case of abelian monoid  $G$ . To prove Proposition 2 for general case one has to adapt H. Hilmy's arguments (see [1]) given for invertible  $\mathbb{R}_+$ -semiflows. The proof of Theorem is based on arguments for unpredictable points similar to that given for points stable  $P$ .

## REFERENCES

- [1] V.V. Nemytskii, V.V. Stepanov. Qualitative Theory of Differential Equations. *Princeton University Press, Princeton, N.J.* 1960.
- [2] M. Akhmet, M.O. Fen. Unpredictable points and chaos // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **40** (2016), 1–5.
- [3] A. Miller. Unpredictable points and stronger versions of Ruelle-Takens and Auslander-Yorke chaos // Topology and its Applications. **253** (2019), 7–16.

# **Hyperbolic polycycles. Criterion for appearing of multiple limit cycles**

A. V. Dukov

*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences*

Consider a smooth vector field on a smooth two-dimensional manifold. Let the vector field have a hyperbolic polycycle i.e. a directed Eulerian graph such that its vertexes are hyperbolic saddles and its edges are separatrix connections. Then after a small perturbation the multiplicity of any appearing limit cycle is not greater than  $n$ , where  $n$  is the number of edges. Moreover, there exists a criterion of appearing for limit cycles of multiplicity  $2 \leq m \leq n$ . Every appearing multiple limit cycle splits into several hyperbolic limit cycles. Thus, we obtain a non-trivial lower bound for cyclicity of any hyperbolic polycycle.

# On the smooth conjugacy of smooth skew products and mappings obtained from them by small smooth perturbations

L. S. Efremova<sup>1,2</sup>

1. *Nizhny Novgorod State University*  
2. *Moscow Institute of Physics and Technology*

$C^1$ -smooth mappings close in the  $C^1$ -norm to  $C^1$ -smooth skew products on a compact cylinder are considered. It is proved that these mappings are  $C^1$ -smoothly conjugate to skew products.

The above result is applied to the study of the maximal attractor of the cylinder mapping obtained by small  $C^1$ -smooth perturbation of some skew product (see [1]).

## REFERENCES

- [1] L.S.Efremova, Ramified continua as global attractors of  $C^1$ -smooth self-maps of a cylinder close to skew products. JDEA (2023), v. 29, 9-12, 1244 - 1274.

# Solitary wave collisions in non-integrable systems

Marcelo V. Flamarion<sup>1</sup>, Efim Pelinovsky<sup>2,3</sup>, Ekaterina Didenkulova<sup>2,3</sup>

1. *UFRPE/Rural Federal University of Pernambuco, UACSA/Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, BR 101 Sul, 5225, 54503-900, Ponte dos Carvalhos, Cabo de Santo Agostinho, Pernambuco, Brazil*
2. *Institute of Applied Physics, 46 Uljanov Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia*
3. *Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, HSE University, Nizhny Novgorod 603155, Russia*

Solitary waves find diverse applications across various fields, including water wave dynamics, optical fiber communications, superconductive electronics, elementary particle physics, quantum physics, and more recent endeavors in biology and cosmology [1]. The Korteweg-de Vries equation (KdV) is a well-known model employed to describe the propagation and interaction of solitary waves. Notably, Zabusky and Kruskal [3] were pioneers in observing that solitary waves undergo interactions during collisions and then return to their initial shapes. They coined the term “solitons” to describe these remarkable waves. While this discovery kindled significant interest in exploring soliton interactions within integrable systems, relatively little has been explored within the context of non-integrable systems.

In this talk, we are going to discuss solitary wave collisions in non-integrable systems such as the Schamel and Whitham equations, as previously studied in references [4, 4]. We will demonstrate that, although these systems are non-integrable, they function as nearly integrable systems. This is evident when two solitary waves collide, as they almost retain their incident shapes. This fact allows for the geometric Lax-categorization initially proposed by Lax (1968) for the KdV equation [2]. However, we will show that an algebraic Lax-categorization based on the ratio between two incident solitary waves is not possible. With these ideas in mind, we will discuss the soliton gas theory in the Schamel equation framework.

## REFERENCES

- [1] Joseph A. Investigating seafloors and oceans. Elsevier, New York, 2016.
- [2] Lax PD. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1968, 21, 467:490.

- [3] Zabusky M, Kruskal N. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 1965, 15, 240:243.
- [4] Flamarion MV, Pelinovsky E. Didenkulova E. Investigating overtaking collisions of solitary waves in the Schamel equation. *Chaos Soliton & Fractals*, 2023, 174, 113870.
- [5] Flamarion MV. Solitary wave collisions for the Whitham equation. *Computational and Applied Mathematics*, 2022, 41, 356.

# Manifolds Admitting Polar Flows with Two Saddles of Type (2, 2)

D. O. Fomin

*HSE University, Nizhny Novgorod, Russia*

We recall that a smooth flow  $f^t: M^n \rightarrow M^n$  defined on a closed smooth manifold  $M^n$  of dimension  $n$  is called a *polar flow* if

1. a non-wandering set  $\Omega_{f^t}$  of  $f^t$  consists exactly of one sink, one source, and a finite number of saddle hyperbolic equilibrium states;
2. invariant manifolds of equilibrium states intersect each other transversely.

The *Morse index* of a hyperbolic equilibrium state  $p$  is a number equal to the dimension of its unstable manifold  $W_p^u$ .

Let  $f^t$  be a polar flow on a manifold  $M^4$  and the set  $\Omega_{f^t}$  consists of exactly a sink, a source, and two saddles  $\sigma_1, \sigma_2$  of Morse index 2. Then  $M^4$  is simply connected, and its homology group  $H_2(M^4, \mathbb{Z})$  is isomorphic to  $\mathbb{Z}^2$ . According to Freedman's classification of simply connected four-dimensional manifolds (see [1]), the topology of  $M^4$  is determined by a class of equivalence of intersection form, which is an unimodular symmetrical quadratic form  $Q : H_2(M^4, \mathbb{Z}) \times H_2(M^4, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  that put in a correspondence to each elements  $x, y \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$  their intersection number. For fixed basic of  $H_2(M^4)$  the form  $Q$  is represented by a symmetric matrices  $2 \times 2$  with integer elements. That is why topology of  $M^4$  is determined (up to homeomorphisms), by a classes of congruent (under the integers) unimodular symmetrical matrices. Classification of such matrices was given by Gauss in [2], see also [3]. We find all representatives of congruence classes of determinant matrices by elementary methods and use the result of [4] to find the representatives in the indeterminate case. As a conclusion, we arrive at the following outcome.

**Proposition.** Any binary unimodular integer matrix is congruent to one of the following matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

We find manifolds that have the intersection forms that can be described in some canonical basis by matrices above, take in attention that matrices  $A_1$  and  $A_2 = -A_1$  determine the same manifolds with opposite orientation, and obtain the following result.

**Theorem.** Let  $M^4$  admit a polar flow  $f^t$ , non-wandering set of which consists of exactly a sink, a source, and two saddles  $\sigma_1, \sigma_2$  of Morse index 2. Then  $M^4$  is homeomorphic to one of the following manifolds:

1. a connected sum of two complex projective planes  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  with a canonical orientation induced by a complex structure;
2. a connected sum  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  of two copies complex projective planes with opposite orientations;
3. a direct product  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  of two copies of two-dimensional spheres.

ACKNOWLEDGEMENTS. The author is grateful to E. Gurevich for setting the problem. The research is supported by the Program "Scientific Foundation of the National Research University Higher School of Economics" in 2023 (project No 23-00-028).

#### REFERENCES

- [1] M. Freedman. The Topology of Four-Dimensional Manifolds // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 357–453.
- [2] C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, Fleischer, Leipzig, 1801; English translation, Yale University Press, 1966.
- [3] H. M. Edwards. Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, 1977.
- [4] J. H. Conway, N. J. Sloane. Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, London Paris Tokyo.

# Применение функций Чернова для аппроксимации ограниченных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, И. Д. Ремизов, А. В. Веденин,  
К. А. Драгунова, А. Т. Иванова., Д. А. Минеев, П. Ю. Пантелеева

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа  
экономики»*

**Предисловие.** Доклад посвящён изложению результатов, полученных за 2023 год в рамках научно-учебной группы „Эволюционные полугруппы и их новые приложения“ Научного фонда НИУ ВШЭ. Все соавторы доклада входили в состав этой группы. Основным объектом исследования являются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, имеющие вид

$$a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x) = -g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $g$  принадлежат классу  $UC_b(\mathbb{R})$  всех вещественнозначных равномерно непрерывных ограниченных функций на  $\mathbb{R}$ . Нас интересуют решения  $f$  уравнения (1), лежащие в пространстве  $UC_b^2(\mathbb{R}) = \{h \in UC_b(\mathbb{R}) \mid h', h'' \in UC_b(\mathbb{R})\}$ .

**Теоретические основы.** В работе Ивана Ремизова [1] (см. в ней теорему 6) было доказано, что если  $S(t)$  — функция Чернова для дифференциального оператора

$$A: f(x) \mapsto (Af)(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + (c(x) - \lambda)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

на пространстве  $UC_b(\mathbb{R})$  с областью определения  $UC_b^2(\mathbb{R})$ , то при определенных условиях, наложенных на  $S(t)$ , на число  $\lambda$  и на коэффициентные функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , единственное ограниченное решение уравнения (1) можно представить в виде равномерного предела черновских аппроксимаций:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left( [S(t/n)]^n g \right)(x) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Более того, в [1, Теорема 6] было получена оценка на скорость сходимости этих аппроксимаций.

**Численные эксперименты.** Для изучения зависимости скорости сходимости в (2) от гладкости коэффициентных функций  $a, b, c, g$  нами был проведён ряд численных экспериментов. В них использовались следующие две функции Чернова  $S_6(t)$  и  $S_8(t)$ , найденные, соответственно, Александром Ведениным и Иваном Ремизовым:

$$(S_6(t)f)(x) = \frac{1}{2}(1 + t \cdot c(x)) \cdot \\ \cdot \left( f\left(x + \sqrt{2t \cdot a(x)} + 2t \cdot b(x)\right) + f\left(x - \sqrt{2t \cdot a(x)}\right) \right);$$

$$(S_8(t)f)(x) = \frac{1}{4} \left( f\left(x + \sqrt{2t \cdot a(x)}\right) + f\left(x - \sqrt{2t \cdot a(x)}\right) \right) + \\ + \frac{1}{2} f\left(x + 2t \cdot b(x)\right) + t \cdot c(x) f(x).$$

**Благодарности.** Доклад подготовлен в результате проведения исследования (проект № 23-00-031 “Эволюционные полугруппы и их новые приложения”) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ivan D. Remizov. *Chernoff approximations as a way of finding the resolvent operator with applications to finding the solution of linear ODE with variable coefficients* // Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2023. arXiv:2301.06765v2 [math.FA]. P. 1–11. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.06765>

# Nonlocal oscillations in a gene network model

A. V. Glubokikh<sup>1</sup>, V. P. Golubyatnikov<sup>2</sup>

*Novosibirsk state university*

1. a.glubokikh@g.nsu.ru  
2. vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Consider 3D dynamical system as a model of a gene network regulated by negative feedbacks:

$$\frac{dx}{dt} = L(z) - x; \quad \frac{dy}{dt} = L(x) - y; \quad \frac{dz}{dt} = L(y) - z. \quad (1)$$

Non-negative variables denote concentrations of the components, monotonically decreasing two-step function  $L$  is defined here by

$$L(w) = 2a \text{ if } 0 \leq w < a - \varepsilon; \quad L(w) = a \text{ if } a - \varepsilon \leq w < a + \varepsilon; \\ L(w) = 0 \text{ if } a + \varepsilon \leq w < \infty; \quad a > 1 > \varepsilon > 0.$$

Let  $Q_1$  be a cube  $\{a - \varepsilon \leq x, y, z \leq a + \varepsilon\}$ , and  $Q_2$  be non-convex union of 6 blocks  $[a + \varepsilon \leq x \leq 2a] \times [0 \leq y \leq 2a] \times [0 \leq z \leq a - \varepsilon]$ , respectively,  $[a + \varepsilon; 2a] \times [0; a - \varepsilon] \times [0; 2a]$ ,  $[0; 2a] \times [0; a - \varepsilon] \times [a + \varepsilon; 2a]$ ,  $[0; a - \varepsilon] \times [0; 2a] \times [a + \varepsilon; 2a]$ ,  $[0; a - \varepsilon] \times [a + \varepsilon; 2a] \times [0; 2a]$ , and  $[0; 2a] \times [a + \varepsilon; 2a] \times [0; a - \varepsilon]$ .

Following [1], we study nonlocal oscillations in the case (1).

**Theorem.** *The cube  $Q_1$  contains a stable equilibrium of the system (1). If  $3\varepsilon \leq a$  then the domain  $Q_2$  contains nonlocal cycle of this system.*

Previously, analogous nonlocal oscillations in modeling of molecular repressilators were observed in higher-dimensional cases only, cf.[2].

The study was supported by a grant of Russian Science Foundation №23-21-00019, <https://rscf.ru/project/23-21-00019/>

## REFERENCES

- [1] V.A.Pliss. (1966). Nonlocal problems of the theory of oscillations. Academic Press, NY, (1966).
- [2] V.P. Golubyatnikov, V.S. Grakov (2021). Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks. Siberian Advances in Mathematics. V. 31, 1–12 (2021).

# Mixed dynamics as a new type of chaos

S. V. Gonchenko<sup>1</sup>, D. V. Turaev<sup>2</sup>

1. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia;  
*sergey.gonchenko@mail.ru*

2. Imperial College, London, UK; *d.turaev@imperial.ac.uk*

When it comes to dynamical chaos, one usually refers to one of its two quite different forms, conservative and dissipative chaos. The aim of this talk is to draw attention to yet another, third, form of chaos, the so-called “mixed dynamics”. This type of chaos is characterized by principal inseparability from each other in the phase space of attractors, repellers and conservative elements of dynamics. The fact that, in the case of mixed dynamics, attractors can intersect with repellers seems, at first glance, very strange and contrary to the usual idea of dynamics. Nevertheless, in the recent work with D. Turaev [1], we made some attempt to resolve this contradiction by changing the concept of attractor, however, keeping its property of “being closed invariant and stable set”. As a result, we found that if we consider the stability under constantly acting perturbations (which is also called total stability), then the attractor of the system can intersect with its repeller. Moreover, the closed invariant set along which they intersect, the so-called a reversible core, itself neither attracts nor repels anything. It should be noted that mixed dynamics are often observed in applications, relevant examples will also be considered.

The work was supported by the RSciF-grant 19-11-00280.

## REFERENCES

- [1] Gonchenko S.V., Turaev D.V. // On three types of dynamics and the notion of attractor // Proc. Steklov Inst. Math., 2017, v.297, 1, 116-137.

# Multi-dimensional chaos in two-dimensional endomorphisms

A. S. Gonchenko, N. V. Stankevich

*HSE University, Nizhny Novgorod*

We study chaotic behavior in two-dimensional endomorphisms [1]. In this case chaotic attractor can have two positive Lyapunov exponents (so called hyperchaos). Formation of hyperchaos in this case is associated with appearance of snap-back repellers [2] and singular Shilnikov attractor [3]. In the work we present several examples of such attractors and discuss the reflection of singular Shilnikov attractors occurrence with the spectrum of Lyapunov exponents.

*The work is supported by the Russian Science Foundation (Project No. 23-71-30008).*

## REFERENCES

- [1] Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.-C. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps (Vol. 20). World Scientific. 1996.
- [2] Gardini L., Tramontana F. Snap-back repellers in non-smooth functions. Regular and Chaotic Dynamics 2010; 15(2-3): 237-245.
- [3] Stankevich N.V., Gonchenko A.S., Popova E.S., Gonchenko S.V. Complex dynamics of the simplest neuron model: Singular chaotic Shilnikov attractor as specific oscillatory neuron activity. Chaos, Solitons & Fractals 2023; 172: 113565.

# О бифуркациях обратимого двойного отображении Эно

С. В. Гонченко<sup>1,2</sup>, Н. Г. Зеленцов<sup>1</sup>, К. А. Сафонов<sup>1,2</sup>

1. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В докладе рассматривается отображение  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  заданное уравнениями

$$T : \bar{x} = \frac{M - x - y^2}{b - \alpha y}, \quad y = \frac{M - \bar{y} - \bar{x}^2}{b - \alpha \bar{x}}, \quad (1)$$

где  $M, b$  и  $\alpha$  — параметры, при этом  $\alpha$  принимает малые значения по сравнению с  $M$  и  $b$ . При  $b \neq 0$  и достаточно малом  $\alpha$  якобиан отображения  $T$  равен

$$JT = \frac{b - \alpha \bar{x}}{b - \alpha y} = 1 + \alpha \cdot \frac{y - \bar{x}}{b - \alpha y}.$$

и отличен от 0 в достаточно большой области.

Отметим, что отображение  $T$  является обратимым (удовлетворяет соотношению  $h \circ T \circ h = T^{-1}$ ) относительно инволюции

$$h : x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x.$$

Более того, отображение  $T$  можно представить в виде композиции  $T = H \circ h \circ H^{-1} \circ h$ , где  $H$  является обобщенным отображением Эно вида

$$H : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = M - bx - y^2 + \alpha xy.$$

Согласно работе [1], отображение  $T$  возникает в качестве отображения первого возвращения в окрестности квадратичного гомоклинического касания в симметричных обратимых диффеоморфизмах.

При  $\alpha = 0$  отображение  $T$  является консервативным (якобиан отображения тождественно равен 1). В работе [2] для консервативного случая были изучены бифуркации неподвижных точек и точек периода два, а также сингулярные бифуркации при переходе через  $b = 0$ . Данная работа является продолжением работы [2]. Мы изучим бифуркации неподвижных точек и точек периода для отображения  $T$  при  $\alpha \neq 0$ , а также изучим изменения динамики отображения  $T$  при переходе через сингулярные значения параметров.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-11-00280.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Delshams A., Gonchenko M. S., Gonchenko S. V. and Lazaro J. T. Mixed dynamics of 2-dimensional reversible maps with a symmetric couple of quadratic homoclinic tangencies. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2018, 38(9), p. 4483-4507.
- [2] Gonchenko S. V., Safonov K. A., Zelentsov N. G. Antisymmetric Diffeomorphisms and Bifurcations of a Double Conservative Hénon Map //Regular and Chaotic Dynamics. — 2022. — Т. 27. — №. 6. — С. 647-667.

# On two-dimensional diffeomorphisms with transverse homoclinic orbits to nonhyperbolic fixed points.

O. V. Gordeeva<sup>1</sup>, S. V. Gonchenko<sup>1,2</sup>

1. *Mathematical Center of Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod,  
Russia*
2. *National Research University Higher School of Economics, Nizhny  
Novgorod, Russia*

Consider a  $C^r$ -diffeomorphism  $f_0$  satisfying conditions (A)–(C) below.

**A)**  $f_0$  has a fixed point  $O$  with multipliers  $\nu_1 = 1, \nu_2 = \lambda$ , where  $|\lambda| < 1$ .

It is well known that the restriction of  $f_0$  onto the local (one-dimensional) center manifold of  $O$  can be written either in the form

$$\bar{y} = y + L_n y^{n+1} + o(y^{n+1}),$$

where  $L_n \neq 0$ , or in the form

$$\bar{y} = y + o(y^r).$$

Then, as is usually defined, the non-hyperbolic point  $O$  has the degeneracy of order  $n$  in the first case (and  $L_n \neq 0$  is called the Lyapunov value), and it has the degeneracy of indefinite or infinite order in the second case.

**B)** The fixed point  $O$  has the degeneracy of order  $n \geq 1$  and  $L_n > 0$ .

Conditions A)–B) mean that the point  $O$  has a saddle-node type for odd  $n$  or a weak saddle type for even  $n$  (it is a nondegenerate saddle-node for  $n = 1$  and a nondegenerate weak saddle for  $n = 2$ ). It is well known that two local  $C^r$ -smooth one-dimensional invariant manifolds, unstable and strong stable, pass through the point  $O$ . We assume that these manifolds can be extended to the global ones and

**C)** The global unstable  $W^u$  and strong stable  $W^{ss}$  manifolds of  $O$  intersect transversally at the points of a homoclinic orbit  $\Gamma_0$ .

Take a sufficiently small neighbourhood  $U$  of the contour  $O \cup \Gamma_0$  that can be viewed as a union of a neighbourhood  $U_0$  of the point  $O$  and a finite number of small neighbourhoods (disks) of those points of  $\Gamma_0$  that do not belong to  $U_0$ , see Fig. 1.

Denote by  $N$  the set of all orbits of the diffeomorphism  $f_0$  that lie entirely in  $U$ . Let  $\mathcal{B}_2^k$  be a subsystem of the topological Bernoulli scheme (shift) of

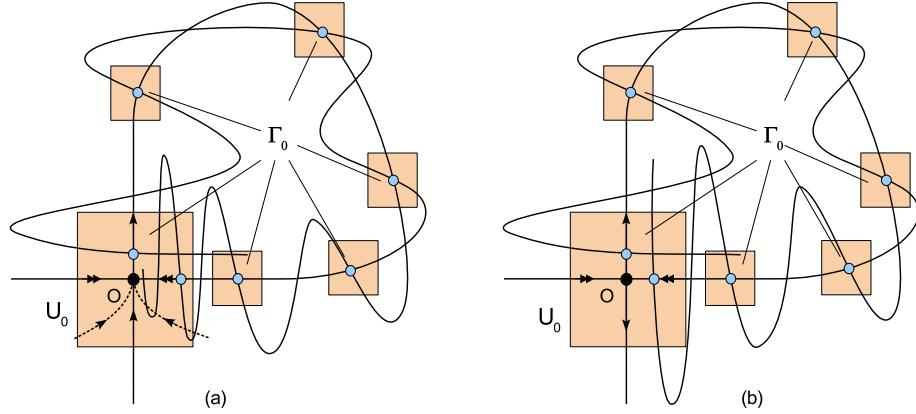


Figure 1: A neighbourhood  $U$  of  $O \cup \Gamma_0$  in the case of transverse homoclinic orbit  $\Gamma_0$  to a nonhyperbolic fixed point  $O$  of type (a) saddle-node and (b) weak saddle.

two symbols such that (i)  $\mathcal{B}_2^{\bar{k}}$  does not contain sequences in which there are two adjacent symbols “1” and (ii) for any sequences from  $\mathcal{B}_2^{\bar{k}}$ , the length of any full segment of symbols “0” is not less than  $\bar{k}$ .

**Theorem 1** *Let  $f_0$  be a two-dimensional diffeomorphism satisfying conditions A)–C). Then there exists such  $\bar{k}$  that the dynamical system  $f|_N$  (restriction of  $f$  to  $N$ ) is topologically conjugate to  $\mathcal{B}_2^{\bar{k}}$ .*

This work was carried out in the framework of the grant 19-11-00280 of the RSciF.

# Черновские аппроксимации решения параболического уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от времени

А. Т. Иванова

*Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»*

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = a(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + c(t, x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

где ограниченные и равномерно непрерывные функции  $a: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  считаются известными параметрами задачи, а функция  $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  считается неизвестной. Цель работы состоит в том, чтобы выразить через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $u_0$  сколь угодно точные аппроксимации к  $u$ . При построении этих аппроксимаций будет использована обобщённая теорема Чернова–Пляшечника об аппроксимации эволюционных семейств, поэтому такие аппроксимации называются черновскими аппроксимациями.

Черновские аппроксимации к решению несколько более общей задачи Коши, чем (1), были построены в 2013 году в диссертации А.С. Пляшечника [1]. При этом А.С. Пляшечник использовал функции Чернова на основе интегрального оператора с несобственным интегралом. Это делало аппроксимации А.С. Пляшечника трудно вычислимыми на практике, так как они содержали кратные несобственные интегралы при стремящейся к бесконечности кратности. В диссертации И.Д. Ремизова [2] в 2018 году были предложены черновские аппроксимации на основе оператора сдвига, не содержащие несобственных интегралов. Однако рассмотренная И.Д. Ремизовым задача Коши не содержала зависящих от времени коэффициентов.

В настоящей работе мы строим черновские аппроксимации к решению задачи (1), совмещающая идеи А.С. Пляшечника (позволяющие учесть зависимость коэффициентов от времени) и идеи И.Д. Ремизова (позволяющие обойтись без интегральных операторов).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.С. Пляшечник. *Формулы Фейнмана для эволюционных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.* // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, механико-математический факультет МГУ, Москва, 2013.
- [2] И.Д. Ремизов. *Формулы Фейнмана для параболических дифференциальных уравнений и исчисление функций Чернова.* // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, механико-математический факультет МГУ, Москва, 2017.

# On Lorenz type attractors in a three-dimensional maps with Lorenz symmetry

A. Kazakov<sup>1</sup>, A. Murillo<sup>2</sup>, A. Vieiro<sup>2</sup>, K. Zaichikov<sup>1</sup>

1. National Research University Higher School of Economics

1. kazakovdz@yandex.ru  
1. zaychikovkirill3@gmail.com  
2. amurillo@ub.edu  
2. vieiro@ub.edu

The Lorenz attractor is a strange attractor first found by E. Lorenz in a system of three differential equations [1]. The theory of the Lorenz attractor was laid down in the works of Afraimovich-Bykov-Shilnikov [2], [3]. According to this theory, Lorenz attractors can be pseudohyperbolic (each trajectory on the attractor is unstable and this property persists under small perturbations of the system). For the Lorenz system this was proved in [4]. The Lorenz attractor has a discrete analog, which was first found and investigated in [5]. In the work it was also suggested that such an attractor is pseudohyperbolic, but numerical studies were carried out later. Note that this attractor has zero second Lyapunov exponent, which makes it similar to the flow case in some sense. In this talk we present new example of discrete attractors of Lorenz type.

In this paper we obtain a discrete map by integrated the Lorenz system by the implicit Euler method. With an increase in the integration step, a new discrete Lorenz attractor was found, the second Lyapunov exponent of which is clearly distinguished from zero. Thus, such an attractor has no flow analogue. In addition, we show that this attractor is pseudohyperbolic.

In the same map we found an non-orientable discrete Lorenz attractor, similar to the flow attractor in the Shimizu-Morioka system. The new attractor is also pseudohyperbolic. A similar non-orientable discrete attractor was also found in a new class of maps proposed by S. V. Gonchenko.

The work was supported by the RSF grant No. 19-71-10048.

- [1] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of atmospheric sciences. — 1963. — T. 20. — №. 2. — C. 130-141.
- [2] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. On the origin and structure of the Lorenz attractor //Akademiiia Nauk SSSR Doklady. — 1977. — T. 234. — C. 336–339.

- [3] Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type //Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. — 1982. — T. 44. — C. 150-212.
- [4] Tucker, W., 1999. The Lorenz attractor exists. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 328(12), pp.1197-1202.
- [5] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I, Simo C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2005. — T. 15. — №. 11. — C. 3493-3508.

# Topological invariants of Pseudo-Euclidean analogs of integrable systems

V. A. Kibkalo<sup>1,2</sup>

1. Lomonosov Moscow State University

2. Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics

A.Borisov and I.Mamaev suggested [1] the following procedure to construct another real integrable systems on Lie algebras starting from well-known mechanical systems and their analogs on Lie algebras  $so(3, 1)$ ,  $so(4)$ .

Integrable system with polynomial integrals of even degree on  $x_1, x_2, J_1, J_2$  is determined on phase space  $R^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ . The following linear transformation preserve it to be real and integrable:

$$x_1 \rightarrow i \cdot x_1, \quad x_2 \rightarrow i \cdot x_2, \quad J_1 \rightarrow i \cdot J_1, \quad J_2 \rightarrow i \cdot J_2.$$

Such Poisson bracket corresponds to the one in a pseudo-Euclidean space. Topology of Liouville foliation of obtained systems differs from the one of initial systems. In our talk we will discuss singularities of this such foliations of several well-known integrable systems (including Euler top, its analogs on  $so(4)$  and  $so(3, 1)$  and Kovalevskaya top)

The work is supported by Russian Science Foundation, N 22-71-00111.

- [1] A. V. Borisov and I. S. Mamaev, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, Russ. J. Math. Phys. 23:4 (2016), 431–454.
- [2] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification, Izhevsk 1999.
- [3] V. A. Kibkalo, “First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system” // Chebyshevskii Sbornik, 24:1 (2023), 69-88.

# **Хаусдорфова размерность мер нестрого эргодичных перекладываний отрезков**

А. Н. Кобзев

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Одним из возможных обобщений поворота является перекладывание отрезков. Перекладывания отрезков возникают как отображения первого возвращения на трансверсаль в случае ориентируемого измеримого слоения на ориентируемой поверхности или, например, как отображение первого возвращения на трансверсаль для биллярдного потока в рациональном многоугольнике.

М. Кин сформулировал гипотезу, которая в дальнейшем была независимо доказана Х. Мазуром и В. Вичем, что почти все перекладывания отрезков являются строго эргодичными.

Следующим шагом по изучению перекладываний отрезков стало построение нестрого эргодичных примеров. Один из первых примеров перекладываний отрезков, допускающий более одной меры, был построен М. Кином. В дальнейшем Д. Чайка получил оценки хаусдорфовой размерности инвариантных мер из примера М. Кина.

В своём докладе я расскажу о нестрого эргодичных примерах перекладываний отрезков и о методах получения оценки хаусдорфовой размерности мер таких перекладываний.

- [1] M. Keane, "Interval exchange transformations Math. Z. 141 (1975).
- [2] J. Chaika, "Hausdorff dimension for ergodic measures of interval exchange transformations". (2008).

# Инвариантность стандартной фильтрации неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли

А. В. Кондратьева

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

Пусть  $\mathcal{L}$  – фильтрованная алгебра, её ассоциированная градуированная алгебра Ли является неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли, соответствующей форме  $\omega_0$  с постоянными коэффициентами,  $\mathcal{F}$  – флаг пространства  $E$ ,  $\mathcal{F}: E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_r \supset E_{r+1} = 0$ ,  $E^0$  – пространство изотропных векторов относительно формы  $\overline{\omega_0}$  на  $E$  двойственной форме  $\omega_0$ . При этом предполагаем, что

$$n > 4, \text{ или}$$

$$n = 4 \text{ и } E_1 \not\subset E^0, \text{ или}$$

$$n = 3, 2 \text{ и } E = E_1$$

Введём множество

$$\mathfrak{N}(\mathcal{L}) = \{D \in \mathcal{L} \mid (\text{ad } D)(\text{ad } D') \text{ нильпотентен для любого } D' \in \mathcal{L}\}.$$

**Теорема.** Пусть выполнены указанные условия. Тогда  $\mathcal{L}_0$  является единственной подалгеброй наименьшей коразмерности среди всех подалгебр алгебры Ли  $\mathcal{L}$ , содержащих  $\mathfrak{N}(\mathcal{L})$ , но не содержащих ненулевых идеалов алгебры  $\mathcal{L}$ . В частности,  $\mathcal{L}_0$  – инвариантная подалгебра в  $\mathcal{L}$ .

Для альтернирующих форм аналогичная теорема доказана Скрябины [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2023-0034.

- [1] Скрябин С. М. (2015). Формы алгебр Ли картановского типа. Lambert Academic Publishing. ISBN-13: 978-3-659-76486-8, ISBN-10: 3659764868.

# On topological obstructions to the existence of non-periodic Wannier bases

Yu. A. Kordyukov

*Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, 112 Chernyshevsky str., 450008 Ufa, Russia*

Let  $X$  be a proper metric measure space, that is,  $X$  is a set, which is equipped with a metric  $d$  and a measure  $m$  defined on the Borel  $\sigma$ -algebra defined by the topology on  $X$  induced by the metric, and all balls are compact. We say that a discrete subspace  $D \subset X$  is uniformly discrete, if  $\inf_{g,h \in D, g \neq h} d(g, h) > 0$ , and has bounded geometry, if, for any  $R > 0$ , the number of points of  $D$  in each ball of radius  $R$  is uniformly bounded.

We will discuss the following question:

**Question.** Given a subspace  $H \subset L^2(X)$ , does it admit a *D-compactly supported Wannier basis*, that is, an *orthonormal* basis  $\{\phi_x : x \in D\}$  in  $H$  such that  $\text{supp } \phi_x \subset B_R(x)$  for any  $x \in D$ , where  $R > 0$  is independent of  $x$  and  $B_R(x)$  denotes the ball of radius  $R$  centered at  $x$ ?

The answer is, in general, negative. If  $X$  has *bounded geometry*, then the obstruction is given by the class  $[p_H] \in K_0(C^*(X))$  of the orthogonal projection  $p_H$  of  $L^2(X)$  onto  $H$  in the  $K$ -theory of the Roe  $C^*$ -algebra  $C^*(X)$ . Here a metric space  $X$  has *bounded geometry* if there exists  $r > 0$  such that for any  $R > 0$  there exists a natural  $N$  such that any ball of radius  $R$  can be covered by not more than  $N$  balls of radius  $r$ .

Under the assumption of polynomial growth of  $X$ , the case of Wannier functions of rapid decay can be reduced to the case of compactly supported ones.

This is joint work with V. Manuilov

# Scenario of mildly stable transition from a structurally stable 3-diffeomorphism with a two-dimensional expanding attractor to a hyperbolic automorphism

E. V. Kruglov<sup>2</sup>, V. Z. Grines<sup>1</sup>, O. V. Pochinka<sup>1</sup>

*1. National Research University Higher School of Economics,  
B.Pecherskaya street, 25/12, Nizhny Novgorod 603150, Russia*

*2. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Gagarin Avenue, 23,  
Nizhny Novgorod 603950, Russia*

We consider A-diffeomorphisms  $f$  defined on the closed 3-dimensional manifold  $M^3$ . By virtue of the Smale spectral theorem the non-wandering set of this diffeomorphism consists of finite many of basic sets.

Let  $f_*: \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(T^3)$  is the isomorphism induced by the diffeomorphism  $f$ . If the dimension of the basic set equals 3 ( $\dim \Lambda = 3$ ) then from the results of Franks (1970) and Newhouse (1970)  $\Lambda = M^3 = T^3$  and  $f_*$  is

defined by the unimodular matrix  $A_f \in GL(3, \mathbb{Z})$   $A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

and  $f$  is topologically conjugate to the algebraic automorphism  $\widehat{A}_f: T^3 \rightarrow T^3$ ,

$$\widehat{A}_f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{12}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \pmod{1}.$$

Let  $\dim \Lambda = 2$ . Then it follows from Plykin's results (1971) that  $\Lambda$  is the attractor (or repeller). It means that  $\Lambda$  has closed neighbourhood  $U_\Lambda \subset M^3$  and  $f(U_\Lambda) \subset \text{int } U_\Lambda$ ,  $\bigcap_{k \in N} f^k(U_\Lambda) = \Lambda$  ( $f^{-1}(U_\Lambda) \subset \text{int } U_\Lambda$ ,  $\bigcap_{k \in N} f^{-k}(U_\Lambda) = \Lambda$ ).  $\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$  ( $\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x)$ ) in this case and

- if  $\dim W^u(x) = 2$  ( $\dim W^s(x) = 2$ ) then the attractor (repeller)  $\Lambda$  is named expanding (contracting) and has the structure the direct product of the Cantor set to the 2-disc;
- if  $\dim W^u(x) = 1$  ( $\dim W^s(x) = 1$ ) then it follows from results of Grines, Medvedev, Zhuzhoma (2005) and Brown (2010) that every connectivity component of the the attractor (repeller)  $\Lambda$  is homeomorphic to 2-torus.

We consider the class  $G$  of the structurally sable 3-diffeomorphisms such that their non-wandering set contains 2-dimensional expanding attractor  $\Lambda$ . It follows from results of Grines and Zhuzhoma (2002, 2005) that another basic sets of any diffeomorphism  $f \in G$  are trivial and the manifold  $M^3$  is diffeomorphic to 3-torus  $T^3$ . In 1979 Grines and Zhuzhoma proved that for any  $f \in G$  the induced isomorphism  $f_*: \pi_1(T^3) \rightarrow \pi_1(T^3)$  is defined by the unimodular matrix  $A_f$ .

We discuss next result in this report.

**Theorem.** *For any diffeomorphism  $f \in G$  there is a mildly stable arc  $\xi_t: T^3 \rightarrow T^3$ ,  $t \in [0, 1]$  which connects  $\xi_0 = f$  with the hyperbolic automorphism  $\xi_1 = \hat{A}_f$ .*

**Acknowledgments.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-71-30008)

# Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли

М. И. Кузнецов

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

Неклассические простые алгебры Ли над полями характеристики  $p > 3$  имеют геометрическое происхождение, как аналоги алгебр Ли векторных полей, соответствующих псевдогруппам Картана (общая алгебра Ли, специальная, гамильтонова, контактная алгебры Ли). Простые исключительные алгебры Ли характеристики 5, – алгебры Меликяна, – также описываются в геометрических терминах. Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли характеристики 2 являются аналогом гамильтоновых супералгебр Ли. Простейший класс неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, соответствующий симметрической скобке Пуассона  $\{f, g\} = \sum \partial_i f \partial_i g$  на алгебре разделённых степеней (аналог алгебры функций от нечётных переменных в терминологии супералгебр, т.е. внешней алгебры) был построен L. Lin [1]. Группа Д. Лейтеса исследовала несколько более широкий класс градуированных неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, аналогичных гамильтоновым супералгебрам Ли, когда есть чётные и нечётные переменные ([2, 3]). План исследования общих неальтернирующих алгебр Ли был опубликован в 2016 году группой математиков (М.И. Кузнецов, А.В. Кондратьева, Н.Г. Чебочко [4]). Предварительный вариант первых результатов изложен в [5].

К настоящему времени в общем случае получена классификация неальтернирующих гамильтоновых форм относительно замен переменных, согласованных с некоторым флагом (Кондратьева [6], Кондратьева, Кузнецов [7]), найдены все простые неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли и их размерности (результат А.В. Кондратьевой, см. [7]). С помощью теорем вложения найдены фильтрованные деформации градуированных неальтернирующих алгебр Ли, их автоморфизмы и дифференцирования (А.В. Кондратьева, М.И. Кузнецов). Здесь ключевую роль играет теорема Кондратьевой об инвариантности стандартной максимальной подалгебры. Доклад будет посвящён изложению этих результатов.

Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр получена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2023-0034.

- [1] Lin Lei (1993). Non-alternating hamiltonian algebra  $P(n,m)$  of characteristic two. Communications in Algebra. V.21(2). P.399-411.

- [2] Lebedev A. (2010). Analog of orthogonal, Hamiltonian, Poisson and contact Lie superalgebras in characteristic 2. Nonlin. Math. Phys. V.17(1). P.399-411.
- [3] Bouarrouj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D. (2010). Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan matrix. Homology, Homotopy Appl. V.12(1). P.237-248.
- [4] Кузнецов М. И., Кондратьева А. В., Чебочко Н. Г. (2016). О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2. Матем. журнал. Т.16(2). С.54-65.
- [5] Kuznetsov M.I., Kondrateva A.V., Chebochko N.G. (2018) Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic 2. I. URL: <http://arxiv.org/abs/1812.11213> (архив).
- [6] Kondrateva A. V. (2021). Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables. Lobachevskii Journal of Mathematics. V.42(12). P.2841-2853.
- [7] Кондратьева А. В., Кузнецов М. И. (2023). Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2. Изв. вузов. Матем. Т.6. С.95-100.

# Gradient-like diffeomorphisms and periodic vector fields

V. Z. Grines, L. M. Lerman

*HSE University*

This is our last paper with Slava. It has just been published [1]. We have never written joint papers earlier 2022, though were going several times. It was my initiative to collaborate, it was inspired when I have heard several Slava's talks on different conferences, where he discussed complications with Morse-Smale diffeomorphisms, when they are three-dimensional ones. This was connected with his understanding that in 3-dimensional diffeomorphisms wild embeddings of separatrices, both one-dimensional and two-dimensional, are possible. Then I have thought: is it possible to find such phenomena in non-autonomous vector fields? I decided to return to my old research on non-autonomous dynamics since I had old debts there, not completed in the beginning of my scientific carrier. New questions are a good opportunity to begin.

In this paper we discussed the interrelations between gradient-like non-autonomous vector fields and gradient-like diffeomorphisms. The main questions are as follows. Consider a class of gradient-like non-autonomous vector fields (NVFs) on a smooth closed manifold  $M$ , then the following problems are arisen: 1) can a gradient-like NVF be constructed by means of the non-autonomous suspension over a diffeomorphism of this manifold, and if so, then under what conditions on the diffeomorphism? 2) let a diffeomorphism  $f : M \rightarrow M$  be gradient-like (the definition will be given in the talk) and diffeotopic to the identity map  $id_M$ , when the NVF obtained by means of the non-autonomous suspension over  $f$  be gradient-like itself? We have found necessary and sufficient conditions for this. All these questions arise, when studying NVFs on  $M$  admitting the uniform classification and a description via combinatorial type invariants.

The construction of the non-autonomous suspension over a diffeomorphism of a smooth closed manifold  $M$  was invented by Lerman and Vainstein in seventies of the last century to construct non-autonomous vector fields on  $M$ . It appears that it is not always lead to an non-autonomous vector field, this depends on the diffeomorphism.

**Theorem 1.** Suppose for some  $n \in \mathbf{N}$  diffeomorphism  $f^n : M \rightarrow M$  is diffeotopic to  $id_M$ . Then

1. the manifold  $M_{f^n}$  is leaf-wise diffeomorphic to  $M \times S^1$ ;
2. there exists a periodic vector field  $v$  on  $M$  which reproduces the structure of  $f$ .

Now suppose  $f : M \rightarrow M$  be some diffeomorphism being gradient-like. Such diffeomorphism have, as the non-wandering set, finitely many hyperbolic periodic points of different indices (dimensions of its unstable manifold) and these manifolds for different periodic points intersect each other transversely. A connected component of such intersection is a submanifold which can be compact or noncompact.

**Theorem 2.** Let  $f : M \rightarrow M$  be a diffeotopic to the identity gradient-like diffeomorphism  $f$  of a smooth three-dimensional closed manifold  $M$ . Then a gradient-like NVF on  $M$ , reproducing the structure of  $f$ , exists if and only if the intersection of any stable and unstable manifolds of different periodic points for  $f$  has no compact connected components.

This work was supported by the grant 22-11-00027 of the Russian Science Foundation.

- [1] V.Z. Grines, L.M. Lerman, Gradient-like diffeomorphisms and periodic vector fields, Moscow Math. Journal, v.23 (2023), No.4, 533-544.

# О гомоклинических точках непрерывных отображений на одномерных разветвленных континуумах

Е. Н. Махрова

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие теории динамических систем на одномерных разветвленных континуумах. Это связано с тем, что одномерные разветвленные континуумы появляются, например, как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [1], как  $\omega$ -предельные множества в динамических системах размерности  $> 1$  [2], [3], как глобальный аттрактор косого произведения [4], [5], в задачах математической физики [6], [7] и др.

Пусть  $X$  – одномерный континуум,  $f : X \rightarrow X$  – непрерывное отображение, а  $p$  – периодическая точка отображения  $f$  в  $X$ , и пусть существует гомоклиническая точка  $x$  в  $X$  к периодической точке  $p$ . В докладе изучаются свойства гомоклинической точки  $x$  и неустойчивого многообразия периодической точки  $p$ . Исследуется локальная структура одномерного континуума, при которой определения гомоклинической точки по А. Пуанкаре [8] и по Л. Блоку [9] эквивалентны. В работе также приводятся различия в свойствах гомоклинических точек и неустойчивого многообразия периодических точек для непрерывных отображений, заданных на дендроидах, дендритах и конечных деревьях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00242, <https://rscf.ru/project/24-21-00242/>

- [1] H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals : Images of complex dynamical systems*, Berlin : Springer, Cop. 1986. - XII, 199 p.
- [2] S. J. Agronsky, J. G. Ceder. *What sets can be  $\omega$ -limit sets in  $E^n$*  // Real Anal. Exchange. **17**, 97–109 (1991/1992).
- [3] F. Balibrea, Juan L. G. Guirao. *Continua with empty interior as  $\omega$ -limit sets* // Appl. Gen. Topol. **6**:2, 195–205 (2005).
- [4] L. S. Efremova. *Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor* // European conference on iteration theory, ESAIM Proc., **36** (2012), EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2010).

- [5] L. S. Efremova. *Ramified continua as global attractors of  $C^1$ -smooth self-maps of a cylinder close to skew products* // Journal of Difference Equations and Applications. **28**, 1–33 (2023).
- [6] V. Chernyshev, A. Tolchennikov, A. Shafarevich. *Behavior of Quasi-particles on Hybrid Spaces. Relations to the Geometry of Geodesics and to the Problems of Analytic Number Theory* // Regular and Chaotic Dynamics, **21**:5, 531–537 (2016).
- [7] В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов. *Диффузия и квантовая динамика на графах* // Доклады РАН, **451**:2, 141–144 (2013).
- [8] А. Пуанкаре, *Новые методы небесной механики. III*, М.: Наука. 1972. Т.П., 961 с.
- [9] L. Block. *Homoclinic points of mappings of the interval* // Proceedings of the AMS. **72**, 576–580 (1978).

# Two-sided estimates of the critical radii of linear compact irreducible Lie groups

M. V. Meshcherykov

*HSE University*

According to H. Federer [1], the critical radius of a subset  $X$  of the metric space  $(M, d)$  is the largest positive number  $\tau(X)$  having the property that every point  $x \in M$  with  $d(x, X) < \tau(X)$  has a unique point  $a \in X$  closest to it. The number  $\tau(X)$  is a metric invariant of a subset  $X$ , characterizing the external geometry of the arrangement of parts of  $X$  in the ambient space  $M$ . The purpose of our communication is to present a number of results on lower and upper estimates for the critical radii of a special class of submanifolds of the space of matrices  $Mat(n, F)$  over the field  $F$  either real numbers or complex numbers.  $Mat(n, F)$  is assumed to be equipped with a Euclidean metric given by the following scalar product  $\langle A, B \rangle = TrAB^*$ , where  $A, B \in Mat(n, F)$ ,  $B^*$  is the conjugate matrix and  $Tr$  is the trace function on  $Mat(n, F)$ . In addition, as a set  $X$  we will consider linear compact irreducible subgroups  $G \subset Mat(n, F)$ . Due to compactness, these subgroups turn out to be embedded submanifolds of the matrix space.

**Theorem 1.** *The critical radii of the classical compact matrix groups  $O(n)$  and  $U(n)$  standard embedded in the space  $Mat(n, F)$ , endowed with an Euclidean metric that is invariant with respect to left and right multiplications by elements of these groups are equal to 1.*

For a linear connected compact irreducible subgroups  $G \subset Mat(n, F)$  the exact values of their critical radii  $\tau(G)$  are apparently unknown. Nevertheless, it is possible to estimate the value of  $\tau(G)$  from above and below. Since  $G \subset O(n)$  or  $G \subset U(n)$ , then by Theorem 1 it is clear that  $\tau(G) \geq 1$ . Upper bounds for the critical radii  $\tau(G)$  can be obtained based on upper bounds for the sectional curvature  $K_\sigma$  biinvariant Riemannian metric on group  $G$ , induced from the Euclidean metric  $\langle A, B \rangle = TrAB^*$  of the ambient matrix space  $Mat(n, F)$ .

**Theorem 2.** *Let  $G$  be a connected compact simple group and  $\rho_\lambda : G \rightarrow Mat(n, F)$  its linear irreducible representation of real or complex type, given by the highest vector  $\lambda$ . Then the following inequality is true*

$$\tau(\rho_\lambda(G)) \leq 1/\sqrt{K_\sigma(x, y)},$$

where  $K_\sigma(x, y)$  is the curvature along the two-dimensional subspace generated by a pair of unit orthogonal elements  $x, y$  of the algebra Lie  $\mathfrak{g}$  group  $G$  belonging to the some main three-dimensional simple subalgebra  $su_2$  algebras  $\mathfrak{g}$ . Moreover,  $K_\sigma(x, y)$  is calculated explicitly through the Dynkin index of the representation  $\rho_\lambda$  and dual Coxeter number of group  $G$ .

Note that the proof of Theorem 1 is based on the theory of invariants of linear action of groups  $O(n)$  or  $U(n)$  by left and right shifts on the corresponding matrix space. On the other hand proof of Theorem 2 is based on the following inequality  $\max K\sigma \leq 1/(\tau(X))^2$  between the critical radius  $\tau(X)$  of the submanifold  $X \subset N$  and the maximum of its sectional curvature  $K\sigma(x, y)$ , which is a consequence of the Gauss equation of the submanifold  $X$  known in Riemannian geometry and the estimate norm of the second quadratic from [2]. In addition, we use the results of [3] or [4] on the explicit calculation of the critical values of the sectional curvature function of a biinvariant Riemannian metric on the group  $G$ .

The work was supported by RSF, grant No. 22-11-00027.

- [1] Federer H. Curvatures measures, Transaction Amer. Math.Soc., **93** (1959), 418–491.
- [2] Niyogi P., Smale S., Weinberger S. Finding homology of submanifolds with high from random samples, Discr. Comput. Geometry, **39** (2008), 449–461.
- [3] Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces M.: Publishing house "Factorial Press", 2005, 608 p.
- [4] Meshcheryakov M.V. Estimates for sectional curvatures of Riemannian symmetric spaces, Uspekhi Mat. Nauk, **51**:1 (1996), 157–158.

# **Динамика сильно нелинейных (виброударных) систем со случайно изменяющимися параметрами**

Т. М. Митрякова, В. С. Метрикин

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Исследованию динамики сильно нелинейных (виброударных) систем посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Приложения таких систем находят непосредственное применение как во многих отраслях промышленности и народном хозяйстве (строительство различных объектов гражданского назначения, медицина, военное строительство), так и в современных направлениях науки и техники (капсульная медицина, нанотехнологии). В подавляющем большинстве задач для описания непосредственно ударного взаимодействия используется концепция Ньютона о пропорциональной зависимости между относительными доударными и послеударными скоростями поступательно движущихся тел. Принимается, что коэффициент пропорциональности  $R$ , называемый коэффициентом восстановления, зависит от свойств ударяющихся тел и не зависит от скорости соударения и является постоянной величиной, изменяющейся в пределах  $0 < R < 1$ . Другими словами, большинство результатов исследования сильно нелинейных систем содержат детерминированную постановку.

В настоящей работе исследуется динамика виброударного механизма состоящего из массы  $M$ , на которую действует внешняя периодическая сила  $F \sin \omega t$  и сила линейного трения  $-h\dot{x}$ . Сама масса совершает колебательные движения по стойкам, прикрепленным к основанию обрабатываемого материала. В дальнейшем будем предполагать: 1) диссипация энергии происходит через удары и при учете сил трения; 2) удар происходит мгновенно с коэффициентом восстановления скорости  $R$ , изменяющимся в пределах  $0 \leq R \leq 1$ ; 3) смещение ограничителя не принимается во внимание. В математической модели динамики рассматриваемого механизма предполагается, что коэффициент восстановления изменяется от удара к удару случайным образом с нулевым средним значением и дисперсией отличной от нуля. Случайные отклонения параметров могут быть как дельта-, так и недельта-коррелированы.

При сделанных предположениях дифференциальное уравнение системы в промежутке между ударами ( $x > 0$ ) запишется в виде:  $M\ddot{x} +$

$h\dot{x} = P + F \sin \omega t$ , где  $x$  — координата массы  $M$ ,  $P$  — постоянная сила, действующая на ударную массу  $M$ , причем, вообще говоря,  $P \neq mg$ ,  $h$  — коэффициент трения,  $F$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота вынуждающей силы.

При  $x = 0$ ,  $\dot{x} < 0$  происходит неупругий удар с коэффициентом восстановления скорости  $R$ , описывающийся с использованием гипотезы Ньютона  $\dot{x}^+ = -R\dot{x}^-$ , где  $\dot{x}^-$ ,  $\dot{x}^+$  — доударная и послеударная скорости механизма.

Вводя безразмерное время  $\tau = \omega t$  и координату  $\xi = \frac{M\omega^2 x}{F}$ , уравнение системы перепишется в виде:  $\ddot{\xi} + \frac{h}{M\omega} \dot{\xi} = \frac{P}{F} + \sin \tau$ ,  $\xi > 0$ ,  $\dot{\xi}^+ = -R\dot{\xi}^-$ ,  $\xi = 0$ ,  $\dot{\xi}^- < 0$ .

В настоящей работе разработана численно-аналитическая технология на основе метода точечных отображений поверхностей Пуанкаре нахождения статистических характеристик послеударной скорости и времени ударов. Введено понятие стохастической устойчивости и проведен численный эксперимент вычисления среднеквадратичных отклонений скорости и времен ударов. Заметим, что фазовое пространство рассматриваемой системы В координатах  $\xi, \dot{\xi}, \tau$  трехмерно. Исследование динамики данной системы можно провести с помощью точечного отображения плоскости  $\xi = 0$  в себя, которое в окрестности устойчивого периодического движения можно линеаризовать. Результатом линеаризации является система уравнений в конечных разностях относительно отклонений послеударной скорости, времени удара и коэффициента восстановления скорости. В работе приведены точные соотношения решений разностных уравнений в зависимости от выбора формы случайных изменений коэффициента восстановления скорости при ударе. В предположении, что случайные изменения  $R$  дельта-коррелированы, получены выражения для среднеквадратичных отклонений. Более того, приводится уточненный вид стохастической устойчивости виброударных систем, с помощью которого возможно определить, в частности, аналог опасных и безопасных границ стохастической устойчивости. Приведены расчетные данные поведения максимальных скоростей при ударе в процессе обработки материала.

- [1] Беспалова Л.В. К теории виброударного механизма // Известия АН СССР, ОТН, №5, 1957.
- [2] Брусин В.А., Тай М.Л. Абсолютная стохастическая устойчивость // Известия высших учебных заведений, Радиофизика, Т. 10, №. 7, 1967.

- [3] Рытов О.М. К теории флуктуаций в автоколебательных системах с кусочно-линейными характеристиками // Известия высших учебных заведений, Радиофизика, Т. 2, №. 1, 1959.
- [4] Садеков Р.Х. К вопросу о флуктуациях в кусочно-линейных автоколебательных системах // Известия высших учебных заведений, Радиофизика, Т. 3, №. 5, 1960.

## Remark on double-sided bounds for Gauss hypergeometric function

M. A. Pisarev, A. E. Rassadin

*HSE University*

The Gauss hypergeometric function  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  is often found in various branches of mathematics and its applications (see [1] and references therein).

This non-elementary function is known to be defined for  $|z| < 1$  by the following power series [1]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (1)$$

where  $a, b, c$  are parameters of this function and  $(a)_n, (b)_n, (c)_n$  denote the Pochhammer symbols corresponding to these parameters.

As it turned out, it is not always convenient to work with this function using power series (1), that is why for  $\Re(c) > \Re(b) > 0$  and  $z \in \mathbf{C} \setminus [1, +\infty)$  the next integral representation was established [1]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \quad (2)$$

where  $B(\zeta, w)$  is the beta function [1].

Using direct and reverse Hölder inequalities [2] it is easy to prove the following statement.

**Theorem.** *Let one choose two real numbers  $p_+$  and  $p_-$  as follows:  $0 < p_- < 1 < p_+$  and let  $q_{\pm} = 1 - 1/p_{\pm}$  then for  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b > 1/q_+$  and  $c > b+1/q_+$  for the Gauss hypergeometric function  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  under  $z \in (0, 1)$  the next double-sided bound is valid:*

$$F^-(a, b; c; z) \leq {}_2F_1(a, b; c; z) \leq F^+(a, b; c; z), \quad (3)$$

where

$$F^+(a, b; c; z) = \begin{cases} \frac{B^{1/p_+}(1+p_+(b-1), 1+p_+(c-b-1))}{B(b, c-b)} \left( \frac{1-(1-z)^{1-aq_+}}{(1-aq_+)z} \right)^{\frac{1}{q_+}}; & aq_+ \neq 1 \\ \frac{1}{B(b, c-b)} B^{1-a} \left( \frac{b-a}{1-a}, \frac{c-b-a}{1-a} \right) \left( -\frac{\ln(1-z)}{z} \right)^a; & aq_+ = 1 \end{cases} \quad (4)$$

and

$$F^-(a, b; c; z) = \begin{cases} \frac{B^{1/p_-(1+p_-(b-1), 1+p_-(c-b-1))}(\frac{1-(1-z)^{1-aq_-}}{(1-aq_-)z})^{\frac{1}{q_-}}}{B(b, c-b)}; & aq_- \neq 1 \\ \frac{1}{B(b, c-b)} B^{1-a}(\frac{b-a}{1-a}, \frac{c-b-a}{1-a})(-\frac{\ln(1-z)}{z})^a; & aq_- = 1 \end{cases} \quad (5)$$

In the work the double-sided bound (3) is numerically checked under  $a = 1/2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5/2$ ,  $p_+ = 2$  and  $p_- = 1/2$ .

In this case the Gauss hypergeometric function is expressed via elementary functions:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2z} \left(1 - \frac{1-z}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right), \quad (6)$$

upper bound (4) and lower one (5) being reduced to

$$F^+ \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{2} \sqrt{-\frac{\ln(1-z)}{2z}} \quad (7)$$

and

$$F^- \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{36}{25} \frac{z}{1-(1-z)^{3/2}} \quad (8)$$

respectively.

Also in the report graphs of relative errors for functions (6), (7) and (8) are presented.

- [1] Bateman G. (1953). Higher transcendental functions. Volume I. McGraw-Hill Book Company, New York – Toronto – London.
- [2] Sobolev S.L. (1988). Some applications of functional analysis in mathematical physics. Nauka Publisher, Moscow.

# On the restricted SIS-model with migration

D. A. Podolin, A. E. Rassadin

*HSE University*

Suppose there is a fairly large group of people, and some of these people have an infectious disease that is transmitted through contact between healthy and sick people at a  $\beta$  rate. This situation is described by a restricted SIS-model [1].

Next, let this group of people, at  $t = 0$ , begin to migrate along the  $x$ -axis at a constant velocity  $V$ , then this situation will be described by the following quasi-linear system of first-order partial differential equations:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial x} = -\beta S I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + V \frac{\partial I}{\partial x} = \beta S I, \quad (1)$$

where  $S(x, t)$  is linear density of susceptible to this disease individuals and  $I(x, t)$  is linear density of infectious ones.

System (1) ought to be provided by the next initial conditions:

$$S(x, 0) = S_0(x) \geq 0, \quad I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2)$$

To solve the Cauchy problem (1)-(2) let one introduce total linear density  $N(x, t)$  of this group of people:

$$N(x, t) = S(x, t) + I(x, t). \quad (3)$$

Using system (1) it is not difficult to find that linear density of migrants obeys to the following Cauchy problem:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + V \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad N(x, 0) = N_0(x) \equiv S_0(x) + I_0(x). \quad (4)$$

It is well known that exact solution of the Cauchy problem (4) is equal to:

$$N(x, t) = N_0(x - V t). \quad (5)$$

Combining formulas (3) and (5) one can reduce system (1) to one quasi-linear partial differential equation of the first order:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V \frac{\partial I}{\partial x} = \beta I [N_0(x - V t) - I], \quad I(x, 0) = I_0(x). \quad (6)$$

In the framework of the method of characteristics [2] one can easily obtain exact solution of the Cauchy problem (6):

$$I(x, t) = \frac{I_0(x - V t) N_0(x - V t)}{I_0(x - V t) + S_0(x - V t) \exp[-\beta t N_0(x - V t)]}, \quad (7)$$

which corresponds to linear density of infectious individuals, and, after that, using formula (3), one can derive linear density of susceptible ones:

$$S(x, t) = \frac{S_0(x - V t) N_0(x - V t) \exp[-\beta t N_0(x - V t)]}{I_0(x - V t) + S_0(x - V t) \exp[-\beta t N_0(x - V t)]}. \quad (8)$$

These expressions completely solve the input Cauchy problem (1)-(2).

The report provides graphs of functions (7) and (8) for various moments of time for epidemiologically realistic initial conditions (2).

In conclusion, it should be noted that formula (5) implies that the total number of migrants remains unchanged:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x) dx.$$

It means that within the framework of the considered model, none of them die from this disease. However, it follows directly from formula (7) that after a sufficiently long time interval, almost all migrants will be ill.

- [1] Brauer F., Driessche P., Wu J., eds. (2008). Mathematical epidemiology. Springer Berlin, Heidelberg.
- [2] Evans L.C. (1998). Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence.

# Exact solutions of the KPZ equation and the Burgers vector equation on the quarter-plane

A. E. Rassadin

*HSE University*

The Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation is known to be the following nonlinear parabolic partial differential equation [1]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla h)^2 + \nabla^2 h, \quad (1)$$

where  $h = h(x, y, t)$  and  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  is the two-dimensional nabla symbol.

The next system of partial differential equations is closely related to the KPZ equation:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla^2 \vec{u}, \quad \vec{u} \equiv (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t)). \quad (2)$$

This system is called the Burgers vector equation and is obtained from equation (1) by differentiating by coordinates and then replacing [2]:

$$\vec{u} = -\nabla h. \quad (3)$$

The KPZ equation is often applied to describe the process of vapor deposition of a substance onto a substrate, that is why an unknown function  $h(x, y, t)$  may be interpreted as a dimensionless height of growing crystal surface under the point of the substrate with coordinates  $(x, y)$ . In this situation function (3) ought to be considered as dimensionless flow of sputtering substance along the growing interface, system (2) being interpreted as vector equation for this flow. As a rule, the Cauchy problem on the entire plane  $\mathbf{R}^2$  for both equation (1) and system (2) is solved [1, 2], but in the micro-electronic industry it is important to assess the influence of edge effects on surface quality.

In the report presented for the KPZ equation the following mixed problem is solved exactly on the quarter-plane  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ :

$$h|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad \frac{\partial h}{\partial n}|_{\partial D} = 2g, \quad (4)$$

where  $\vec{n}$  is external normal to the domain  $D$  and  $g$  is a constant value, namely, this exact solution is equal to:

$$h(x, y, t) = H(x, t) + H(y, t), \quad (5)$$

auxiliary function  $H(x, t)$  being expressed via the well-known error function:

$$H(x, t) = 2 \ln \left[ \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} + \exp(-gx + g^2 t) \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x - 2gt}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (6)$$

Combining formulas (3), (5) and (6), one can easily find exact solution on the quarter-plane  $D$  of the next mixed problem for system (2):

$$\vec{u}|_{t=0} = 0, \quad u_x(0, y, t) = u_y(x, 0, t) = 2g. \quad (7)$$

Also in the report graphs of exact solutions both mixed problem (1) and (4) and mixed problem (2) and (7) are presented.

In conclusion it is necessary to underline that all obtained results can be generalized on arbitrary open orthant in  $\mathbf{R}^n$ .

- [1] Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C. Dynamical scaling of growing interfaces // Physical Review Letters. 1986. V. 56. P. 889 - 892.
- [2] Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. (2011). Waves and structures in nonlinear nondispersive media. General theory and applications to nonlinear acoustics. Springer Berlin, Heidelberg.

# On the property of monotonicity of solutions of systems with respect to initial conditions

L. I. Rodina<sup>1,2</sup>, M. S. Woldeab<sup>1</sup>

1. *Vladimir State University*

Consider an autonomous system of differential equations

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

assuming that the vector-function  $f(x)$  and its derivatives  $\partial f_i / \partial x_j$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) are continuous. Denote by  $\varphi(t, x)$  the solution of this system satisfying the initial condition  $\varphi(0, x) = x$ . For solving many applied problems, it is desirable that the solutions of system (1) have the following property of monotonicity with respect to the initial conditions:

**Property 1.** *Let  $x(0) \in R^n$ ,  $y(0) \in R^n$  be such that  $x(0) \leq y(0)$ . Then*

$$\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0)), \quad t \geq 0.$$

Here and further, the inequality  $x \leq y$ , written for vectors  $x \in R^n$ ,  $y \in R^n$ , will be understood as inequalities  $x_i \leq y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Let's first consider a linear system of differential equations

$$\dot{x} = Ax,$$

where  $A$  is a constant matrix of sizes  $n \times n$ . It is known that the solution of this system can be written as  $\varphi(t, x) = e^{At}x$ , where  $e^{At}$  is a matrix exponent. A matrix  $A$  is called *exponentially non-negative* if  $e^{At} \geq 0$  for all  $t \geq 0$ . A matrix  $A$  is called *Metzler matrix* if its elements satisfy the inequalities  $a_{ij} \geq 0$  for  $i \neq j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , [1].

**Lemma 1** ([1, 2]). *A matrix  $A$  is exponentially non-negative if and only if it is a Metzler matrix.*

It obviously follows from Lemma 1 that if  $A$  is the Metzler matrix and  $x \leq y$ , then  $\varphi(t, x) = e^{At}x \leq e^{At}y = \varphi(t, y)$  for any  $t \geq 0$ .

Let's return to the consideration of the nonlinear system (1). The functions  $f_i$  in the right part of this system may not depend on all variables, in particular, they may be constant.

**Condition 1.** *Let the set  $D \subseteq R^n$  be positively invariant with respect to the system (1). Each of the functions  $f_i$  is increasing on the set  $D$  with*

*respect to all variables on which it explicitly depends, with the exception of the variable  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

It is proved that property 1 holds for any differential equation  $\dot{x} = f(x)$ . The following statement holds.

**Theorem 1 ([3]).** *Let the condition 1 be fulfilled. Then if for  $x(0) \in D$ ,  $y(0) \in D$  there is an inequality  $x(0) \leq y(0)$ , then  $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$  for all  $t \geq 0$ .*

Note that if system (1) is linear and condition 1 is met, then the matrix  $A$  of this system is a Metzler matrix.

We also consider one of the problems for the study of which Theorem 1 is applied — this is the problem of estimating the average time benefit for systems with random parameters, which is performed with a probability one.

- [1] Noutsos D., Tsatsomeros M. J. Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2008. Vol. 30. No. 2, pp. 700–712.
- [2] Wazewski T. Systemes des equations et des inegalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. 1950. Vol. 23, pp. 112–166.
- [3] Rodina L.I., Woldeab M.S. On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions // Differential equations. 2023. Vol. 59. No. 8, pp. 1025–1031.

# Algebraic curve and its singularities of the integrable case of Kowalevski-Chaplygin-Goryachev-Yehia in rigid body dynamics

P. E. Ryabov

*Blagonravov Institute for Machines Science Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia*

The report considers a completely integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom, which describes the dynamics of the Kowalevski-Chaplygin-Goryachev-Yehia top ([1], [2]). The Hamiltonian of the system is given by the following expression ([1], [2])

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 - b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{4} (b_1^2 - b_2^2) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}.$$

Here  $\mathbf{p} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda, c\}$  is a vector of parameters,  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  – phase variables.

Function

$$\begin{aligned} F = & \left[ M_1^2 - M_2^2 - a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 - \frac{1}{4} (b_1^2 - b_2^2) \alpha_3^2 - c \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} \right]^2 + \\ & + \left[ 2M_1 M_2 - a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1 - \frac{1}{2} b_1 b_2 \alpha_3^2 - 2c \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} \right]^2 \\ & - 4\lambda(M_3 + \lambda) \left[ M_1^2 + M_2^2 + c \left( 1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2} \right) \right] \\ & + \lambda \alpha_3 \left\{ M_1 [4a_1 - 2b_1 b_2 \alpha_2 - (b_1^2 - b_2^2) \alpha_1] + M_2 [4a_2 - 2b_1 b_2 \alpha_1 + (b_1^2 - b_2^2) \alpha_2] \right\} \end{aligned}$$

is an additional integral on the symplectic sheet defined by the conditions  $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \boldsymbol{\alpha}^2 = 1$  ([1], [2]). In addition, in [2], the problems of constructing separation variables for arbitrary values of the parameters of the vector  $\mathbf{p}$  were considered.

The spectral curve  $\mathcal{E}(z, \zeta)$ , whose coefficients are the functions  $H, F$  and  $\boldsymbol{\alpha}^2$ , has the following explicit form [2]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \text{where } \mathcal{E}(z, \zeta) = \zeta^2 + d_1 \zeta + d_0, \quad & d_1 = z^6 - 2(h + \lambda^2)z^4 + \\ & + [f + 2(c + \lambda^2)(h + \lambda^2) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)\boldsymbol{\alpha}^2 - (c - \lambda^2)^2]z^2 + \\ & + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)(c - \lambda^2)\boldsymbol{\alpha}^2, \\ & d_0 = \frac{1}{16}[(a_1 - b_1 z)^2 + (a_2 - b_2 z)^2][(a_1 + b_1 z)^2 + (a_2 + b_2 z)^2] \times \\ & \times [(z - \lambda)^2 - c][(z + \lambda)^2 - c]\boldsymbol{\alpha}^4. \end{aligned} \tag{1}$$

The curve (1) can be considered as the zero level of the mapping  $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Let  $\tilde{\Sigma}$  denote the set of values of integral constants for which 0 is a critical value of the mapping  $\mathcal{E}$ . The set  $\tilde{\Sigma}$  at the end points  $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$  is determined by the system of equations

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \quad (2)$$

In the report, based on the singularities of the spectral curve, separated Abel–Jacobi equations are presented for the following parameter values  $a_1 = -1, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, c = 0, \alpha^2 = 1$ , which corresponds to the Kowalevski–Yehia integrable case in rigid body dynamics. The set (2) contains the bifurcation diagram of the integrable Kowalevski–Yehia case with zero area constant [3].

- [1] Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Commun. **23**, (5), 1996, pp. 423–427.
- [2] Tsiganov A. V. On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // Journal of Physics A: Mathematical and General, **35**, (22), 2002, pp. L309–L318.
- [3] Kharlamov M. P., Ryabov P. E. Bifurcations of first integrals in the case of Kowalewski–Yehia // Regular and Chaotic Dynamics, **2**, (2), 1997, pp. 25–40.

# О гладкости одномерного фактор-отображения в системах с аттракторами Лоренца и Ровеллы

К. А. Сафонов<sup>1,2</sup>, М. И. Малкин<sup>1,2</sup>

2. Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского

В докладе рассматривается двухпараметрическое семейство  $X_\mu$  гладких  $(n+1)$ -мерных векторных полей, симметричных относительно некоторой инволюции. Предположим, что при  $\mu = 0$  векторное поле  $X_0$  претерпевает гомоклиническую бифуркацию с нейтральным седлом, точнее, выполняются следующие условия

- (A1)  $X_0$  имеет седловое состояние равновесия  $O$  со следующим набором собственных значений

$$\gamma > 0 > \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_i, \quad i = 2, \dots, n;$$

- (A2) одномерные сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  состояния равновесия  $O$  стремятся к  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  вдоль ведущего направления, при этом касаясь друг друга;

(A3)  $\nu = -\frac{\lambda_1}{\gamma} = 1.$

Из работ Л.П. Шильникова [1] (см. также [2]) следует, что возмущения векторного поля  $X_0$  ведут в возникновению аттрактора Лоренца. Эффективным методом при изучении данной бифуркации и возникающих аттракторов является построение некоторого устойчивого инвариантного слояния и рассмотрение одномерного-фактор отображения над этим слоением. Однако, в общем случае неизвестна гладкость выше  $C^{1+\varepsilon}$  у полученного фактор-отображения. В докладе мы обсудим условия на векторное поле  $X_\mu$ , при которых существует фактор-отображение более высокой гладкости. Основной результат доклада приведен в следующей теореме.

**Теорема.** *Рассмотрим семейство симметричных векторных полей  $X_\mu$ , претерпевающих при  $\mu = 0$  гомоклиническую бифуркацию с нейтральным седлом. Обозначим*

$$m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid (n-1)\gamma < \lambda_1 - \max(\operatorname{Re} \lambda_2, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n)\}.$$

*Тогда при достаточно малом  $\mu$*

- 1) в окрестности состояния равновесия существует секущая  $\Pi$ , трансверсальная к устойчивому многообразию  $W^s(O)$ , на которой определено отображение Пуанкаре  $P : \Pi \setminus W^s(O) \rightarrow \Pi$  вдоль траекторий векторного поля  $X_\mu$ ;
- 2) на секущей  $\Pi$  существует  $C^{m+\varepsilon}$ -гладкое устойчивое инвариантное слоение  $F_{ss}$ ;
- 3)  $C^{m+\varepsilon}$ -гладкое фактор-отображение над устойчивым слоением  $F_{ss}$  задается уравнением

$$T : \bar{y} = (-1 + c(\alpha) \cdot |y|^\nu + \phi(y; \alpha)) \cdot sign(y),$$

где функция  $\phi(y; \alpha)$  обозначает малые члены по сравнению с  $|y|^\nu$ .

Также в докладе мы обсудим применение полученных результатов при изучении аттракторов Лоренца и Ровеллы.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-11-00280.

- [1] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // Избранные научные труды. — 1981. — С. 413.
- [2] Kazakov A. On bifurcations of Lorenz attractors in the Lyubimov-Zaks model // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31. — №. 9.

# Конечнозонные операторы Шредингера

А. Н. Сахаров

*Нижегородский государственный аграрно-технологический университет (Нижний Новгород, Россия)*

1. ansakharov2008@yandex.ru

Дифференциальный оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \quad (1)$$

в литературе по математической физике носит название оператора Шредингера с вещественным потенциалом  $u(x)$ . Обычно рассматривается задача о спектре этого оператора в каком-либо функциональном пространстве

$$L\varphi(x) = \lambda\varphi(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – спектральный параметр,  $\varphi(x)$  – элемент соответствующего пространства.

Как правило, рассматривают два типа потенциалов: быстроубывающие и периодические (почти периодические). Напомним определение спектра оператора  $L$ . Множество  $\lambda \in \mathbb{C}$  таких, что оператор  $L - \lambda$  имеет ограниченный обратный, образует *резольвентное множество*  $\rho(L)$  оператора  $L$ . Из определения следует, что  $\rho(L)$  открытое множество. Дополнение  $\sigma(L)$  к резольвентному множеству называется спектром  $L$ . Очевидно,  $\sigma(L)$  – замкнутое множество.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора Шредингера с периодическим потенциалом с точки зрения динамических систем. Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно линейной системе

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad (3)$$

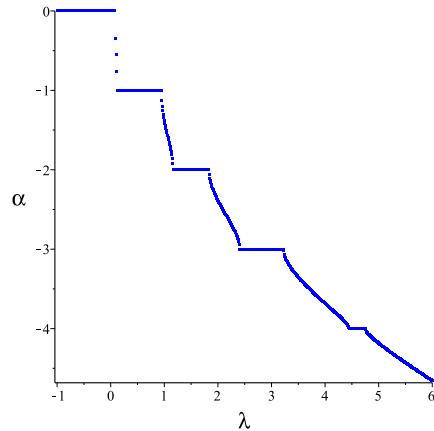


Рис. 1: Лакуны в спектре оператора Шредингера с потенциалом  $\sin t + \sin 3t + \cos^2 3t$ .

где символ ' обозначает дифференцирование по  $x$ . При  $\lambda \in \mathbb{C}$  фазовое пространство системы (3) –  $S^1 \times \mathbb{C}^2$ . Проективизация системы дает комплексное уравнение Риккати

$$z' + z^2 = u(x) - \lambda, \quad (4)$$

которое имеет инвариантную прямую  $\Im(z) = 0$ . Следовательно, динамика (4) сводится к описанию динамики уравнения на торе

$$\theta' = u(x) - \lambda - 1 + (u(x) - \lambda + 1) \cos \theta. \quad (5)$$

Кривая зависимости числа вращения  $\alpha(\lambda)$  этого уравнения от параметра  $\lambda$  имеет степеньки (интервалы, постоянства числа вращения) (рис. 1),

**Теорема 1** Пусть  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда резольвентное множество  $\rho(L)$  есть объединение интервалов постоянства числа вращения уравнения (5).

*Доказательство.* Действительно, в интервалах постоянства числа вращения уравнение (5) имеет две гиперболические замкнутые траектории, а система (3) равномерно гиперболическая [1]. Как известно, это свойство эквивалентно ограниченности оператора  $(L - \lambda)^{-1}$  в соответствующем функциональном пространстве [2].

Аналогичное утверждение (“gap labeling theorem”) доказано в [3] методами функционального анализа.

Когда число лакун конечно потенциал  $u(x)$  называется *конечнозонным*. Это означает, что спектр оператора Шредингера (1) является объединением конечного числа интервалов  $[\lambda_1, \lambda_2] \cup [\lambda_3, \lambda_4] \cup \dots \cup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$ . Таким образом,  $\lambda \in \sigma(L)$  при вещественном  $\lambda$ , если отображение монодромии уравнения (4) эллиптическое. Если  $\lambda$  комплексное, то отображение монодромии необходимо становится локсадромическим, что следует из теоремы М.Г. Крейна о правилах движения мультипликаторов<sup>1</sup> системы (3).

Более общее определение таких потенциалов выглядит так.

**Определение 1** Почти-периодический (вещественный или комплексный) потенциал  $u(x)$  называется *конечнозонным*, если оператор монодромии системы (3) при всех  $\lambda$  обладает собственной функцией  $\varphi(x, \lambda)$ , мероморфной на гиперэллиптической поверхности  $\Gamma$ , где  $\frac{d \ln \varphi(x)}{dx}$  является почти-периодической функцией с той же группой периодов, что и  $u(x)$ .

---

<sup>1</sup>Мультипликаторы имеют, очевидно, вид  $e^{2\pi\gamma(\lambda)}$ . Величина  $2\pi\gamma(\lambda)$  в физической литературе носит название “квазимпульс”.

Известные утверждения о гиперэллиптических поверхностях позволяют доказать следующее утверждение.

**Теорема 2** *Динамика конечнозонного потенциала  $u(x)$  (периодическая или почти-периодическая) полностью определяется границами разрезенных зон.*

Подобное утверждение без доказательств сформулировано в [4].

- [1] Мамаева Н. А., Сахаров А. Н. Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений // Сборник материалов IX международной научной молодежной школы–семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского. Саранск. 2020. С. 225–235.
- [2] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М. Наука. 1970.
- [3] Johnson R., Moser J. The Rotation Number for Almost Periodic Potentials, Commun. Math. Phys. Vol. 84. P. 403–438
- [4] Е.Д. Белоколос, В. З. Энольский, М. Салерно Функции Ванные для квазипериодических конечнозонных потенциалов // ТМФ. 2005. Т. 144, №2. С. 234–256.

# Псевдогиперболические аттракторы трёхмерных отображений

Е. А. Самылина

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород*

Согласно работе Тураева-Шильникова [1] псевдогиперболичность аттрактора сохраняется при малых периодических по времени возмущениях системы. На примере периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 + \varepsilon z \sin t. \end{cases} \quad (1)$$

показано, что псевдогиперболичность аттрактора Лоренца сохраняется и при немалых возмущениях. Результаты численных исследований показывают, что псевдогиперболичность аттрактора разрушается примерно при  $\varepsilon \approx 0.045$ . При этом установлено, что соответствующий дискретный аттрактор является диким, т.е. допускает существование гомоклинических касаний.

Также показано, что ранее обнаруженные в работах [2, 3] неориентируемые дискретные аттракторы лоренцевского типа не являются псевдогиперболическими, кроме одного типа аттрактора, содержащего точку периода 2.

**Благодарности.** Автор благодарит А. О. Казакова за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российской научного Фонда (проект 19-11-00280)

- [1] Тураев Д.В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа //Доклады Академии наук. — Федеральное государственное бюджетное учреждение «Российская академия наук», 2008. — Т. 418. — №. 1. — С. 23–27.
- [2] Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylyina E. On discrete Lorenz-like attractors //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31. — №. 2.

- [3] Gonchenko A. S., Gonchenko M. S., Kozlov A.D., Samylina E.A. On scenarios of the onset of homoclinic attractors in three-dimensional non-orientable maps // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31. — №. 4.

# On Gradient-like Flows with one Saddle Equilibrium of Type (2, 2)

I. A. Saraev, E. Y. Gurevich

*HSE University*

We will say that a hyperbolic equilibrium state  $p$  is of type  $(i, n - i)$ , if dimension of its unstable and stable manifolds equals  $i$  and  $(n - i)$ , respectively. Let  $G_{g,1}(M^4)$  be a class of gradient-like flows on a connected closed orientable closed manifold  $M^4$  such that for any flow  $f^t \in G_{g,1}(M^4)$  invariant manifolds of different saddle equilibria do not intersect each other and a non-wandering set  $\Omega_{f^t}$  contains only one equilibrium  $p$  of type  $(2, 2)$ . It follows from [1, Theorem 1], [2] that manifold  $M^4$  is homeomorphic to connected sum of the complex projective plane  $CP^2$  and  $g \geq 0$  copies of direct product  $S^3 \times S^1$ , where  $g = (\mu - \nu + 2)/2$ ,  $\mu$  is a number of saddles of types  $(1, 3), (3, 1)$  and  $\nu$  is a number of nodes.

Similarly to [2], [3], we put in a correspondence to any flow  $f^t \in G_{g,1}(M^4)$  a bicolor graph  $\Gamma_{f^t}$  describing a mutual arrangement of invariant manifolds of saddle points.

**Theorem 1.** Flows  $f^t, f'^t \in G_{g,1}(M^4)$  are topologically conjugated if and only if graphs  $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f'^t}$  are isomorphic.

The key point of a proof of the Theorem 1 is the following lemma.

**Lemma 1.** Let  $p \in \Omega_{f^t}$  and  $\dim W_p^u = 2$ . Then the closure  $\text{cl } W_{\sigma_2}^u$  of unstable manifold of  $p$  is a locally flat sphere.

*Acknowledgements:* This work was supported by the Russian Science Foundation (Project 23-71-30008) and partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE.

- [1] Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., *On the structure of the ambient manifold for Morse-Smale systems without heteroclinic intersections*, Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova RAN, 2017, V. 297, p. 201–210.
- [2] Grines V. Z., Gurevich E. Y., *On classification of Morse-Smale flows on projective-like manifolds*, Izvestia RAN, Seriya matematicheskaya, 2022, V. 86 (5), p. 43–72.
- [3] Grines V. Z., Gurevich E. Y., *Topological classification of flows without heteroclinic trajectories on a connected sum of manifolds  $S^{n-1} \times S^1$* , UMN, 2022, V. 77, No. 4, 201–202.

# Chaotic complete Cartan foliations

K. I. Sheina<sup>1,3</sup>, N. I. Zhukova<sup>2,3</sup>

1. *kse51091@mail.ru*  
2. *nina.i.zhukova@yandex.ru*  
3. *HSE University, Russian Federation*

The study of Cartan foliations is motivated by the fact that they include such wide classes of foliations with transversal differential geometric structures such as: parabolic, projective, conformal, transversally homogeneous, transversally similar, pseudo-Riemannian and Lorentzian foliations, as well as foliations with transversally projectable linear connection.

Follow to [1], a foliation  $(M, F)$  is called *chaotic* if:

- (1) there exists a dense leaf;
- (2) the closed leaves of  $(M, F)$  are dense in  $M$ .

Using the foliated bundle construction commonly used in the theory of foliations with transversal geometries, N.I. Zhukova previously introduced an algebraic invariant  $g_0 = g_0(M, F)$  for a complete Cartan foliation  $(M, F)$ , called the Lie structure algebra of this foliation [2]. We prove the following structure theorem for chaotic Cartan foliations.

**Theorem 1.** *Let  $(M, F)$  be a Cartan foliation of type  $(G, H)$  with an Ehresmann connection, and let  $(P, K)$  be its associated lifted e-foliation. If the foliation  $(M, F)$  is chaotic, then:*

- 1) *the structure Lie algebra  $g_0$  of the foliation  $(M, F)$  is equal to zero;*
- 2) *the fibers of the foliation  $(P, K)$  form a locally trivial bundle over a smooth parallelizable manifold  $W$ ;*
- 3) *a locally free action of the Lie group  $H$  on  $W$  is induced, and the space of leaves  $M/F$  of the foliation  $(M, F)$  and the orbit space  $W/H$  of the group  $H$  is naturally homeomorphic.*

As an application of Theorem 1, we obtain the following criterion, which reduces the study of chaotic Cartan foliations with Ehresmann connection to the study of the chaotic nature of the associated action of a Lie group.

**Theorem 2.** *A complete Cartan foliation of type  $(G, H)$  is chaotic if and only if the associated action of the Lie group  $H$  on  $W$  is locally free and chaotic.*

Cartan foliations form a category  $\mathfrak{CF}$  where any morphism preserves both a foliation and their transversal Cartan geometry. Let  $\mathcal{A}(M, F)$  be the group

of all automorphisms of a Cartan foliation  $(M, F)$ . The quotient group  $\mathcal{A}_b(M, F) := \mathcal{A}(M, F)/\mathcal{A}_L(M, F)$  over the normal subgroup

$$\mathcal{A}_L(M, F) := \{f \in \mathcal{A}(M, F) \mid f(L_\alpha) = L_\alpha \ \forall L_\alpha \in F\}$$

is called the *basic automorphism group* of  $(M, F)$  [3].

Applying Theorem 1 we have proven the following theorem.

**Theorem 3.** *Let  $(M, F)$  be a chaotic complete Cartan foliation. Then it's the group of basic automorphisms  $\mathcal{A}_b(M, F)$  is a Lie group.*

*Moreover, if the set of closed fibers is countable, then the group of basic automorphisms  $\mathcal{A}_b(M, F)$  of this foliation is countable (finite or infinite).*

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 21-22-000304).

- [1] Y.V. Bazaikin, A.S. Galaev, N.I. Zhukova, "Chaos in Cartan foliations", *Chaos*, 30, no 4, 1–9 (2020).
- [2] N.I. Zhukova, "Minimal sets of Cartan foliations", *Proc. Steklov Inst. Math.*, 256, 105–135 (2007).
- [3] K.I. Sheina and N.I. Zhukova, "The groups of basic automorphisms of complete Cartan foliations", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 39, no.2, 271–280 (2018).

# On hyperbolicity of perturbed diffeomorphisms of the two-dimensional torus and birth of the DA-attractor

O. M. Shilov

*National Research University Higher School of Economics, 25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, Nizhny Novgorod, Russia*

This talk is devoted to the study of hyperbolic dynamics of two-dimensional diffeomorphisms obtained as a result of perturbation of the two-dimensional Anosov map using the Möbius map [1]. In one family of the diffeomorphisms, when the dissipation parameter changes, a bifurcation occurs, after which the fixed point becomes a source and a pair of saddle fixed points are born from it. The unstable separatrices of this two points form the boundary of the DA-attractor. Numerical verification of hyperbolicity is carried out using the method described in [2].

In this report, we describe different types of perturbations of the two-dimensional Anosov map and numerically verify these maps on hyperbolicity. For another family of the diffeomorphisms we consider a perturbation depending on two parameters. On the corresponding plane of parameters, using methods for calculating Lyapunov exponents and angles between the tangent subspaces, we identify regions corresponding to the existence of hyperbolic chaos in forward and backward time, DA attractor, DA repeller, and also the coexistence of a stable and completely unstable fixed points.

The report presents the results of joint work with A. Kazakov. Some of the results were included in the work [3].

- [1] Vladimir Chigarev, Alexey Kazakov, Arkady Pikovsky; Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller. *Chaos* 1 July 2020; 30 (7): 073114.
- [2] Gonchenko S.V., Kainov M.N., Kazakov A.O., Turaev D.V. On methods for checking the pseudohyperbolicity of strange attractors // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. AND.* 2021. T. 29, issue. 1. pp. 160-185.
- [3] Grines V.Z., Kazakov A.O., Mints D.I., Petrova Yu.E., Shilov O.M. On nontrivial hyperbolic sets in families of torus diffeomorphisms. (preprint).

# Statistics in the dense state of KdV solitons

A. V. Slunyaev<sup>1,2</sup>, T. V. Tarasova<sup>2</sup>, E. G. Didenkulova<sup>1,2</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>1,2</sup>

1. *HSE University, Laboratory of Dynamical Systems and Applications,  
Russia, N. Novgorod*

2. *Institute of Applied Physics RAS, Group for modeling of extreme wave  
phenomena in the ocean, Russia, N. Novgorod*

We further develop the idea proposed in [1] to consider deterministic collisions of solitons as “elementary acts” of the soliton turbulence. This approach is used to obtain a quantitative description of the wave field statistics under the conditions when soliton interactions cannot be disregarded. Such information cannot be extracted from the kinetic theory for soliton gas and deserves elaboration of new mathematical approaches.

In this work we provide estimates of statistical moments which are realized in the course of simultaneous interaction of many solitons within the framework of the Korteweg–de Vries (KdV) equation. The presented results are based on the observation that such a collision leads to the occurrence of the small-dispersion limit, and then a small parameter characterizing the integral contribution of dispersion versus nonlinearity (inverse integral Ursell number) may be used to grade the terms in the infinite set of conserved integrals of the KdV equation. This approach formally allows evaluation of statistical moments  $\int_{-\infty}^{\infty} u^n dx$ , where  $u(x, t)$  is the solution of the KdV equation, of any order  $n \in \mathbb{N}$ . According to the comparison with results of the numerical solution of many-soliton interactions, the obtained estimates are very accurate and explain the dependence of statistical moments on time (namely, reduction of their values when solitons interact) observed earlier in the numerical solutions [1, 2].

The employed approach is applicable to a great number of integrable nonlinear PDEs with soliton solutions. The formula quantifying the decrease of statistical moments is surprisingly simple, and turns out to be universal for a set of considered equations (KdV equation, modified KdV equation, complex KdV equation, and their higher order integrable hierarchies) [3].

The study was supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of Science and Higher Education of the RF grant Ag. No. 075-15-2022-1101 and by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS", grant No. 22-1-2-42 (AVS).

- [1] E.N. Pelinovsky, E.G. Shurgalina (Didenkulova), A.V. Sergeeva, T.G. Talipova, G.A. El, R.H.J. Grimshaw (2013) Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems. Physics Letters A, Vol. 377, P. 272–275.
- [2] T.V. Tarasova, A.V. Slunyaev (2023) Properties of synchronous collisions of solitons in the Korteweg - de Vries equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 118, P. 107048.
- [3] A.V. Slunyaev, T.V. Tarasova (2022) Statistical properties of extreme soliton collisions. Chaos, Vol. 32, P. 101102.

# Multistability in the networks of Hodgkin-Huxley-type models

N. V. Stankevich, E. R. Bagautdinova, N. A. Shchegoleva

*HSE University, Nizhny Novgorod*

Hodgkin-Huxley-type models are generic for describing behavior of different type of cells like neurons, cardiomyocytes, pancreatic beta-cells, which take into account voltage-gated ion channels [1, 2]. Multistability is coexistence of several dynamical regimes, which also can be manifested in different biophysical processes, including Hodgkin-Huxley-type models [2, 3]. In papers [4, 5] a family of Hodgkin-Huxley-type of models was proposed where different types of multistability can be observed. In the present work we consider low-dimensional networks of such oscillators with different attractors, and analyze multistability. Additional multistable attractors appear in ensemble as a result of interaction.

*The work is supported by the Russian Science Foundation (Project No. 20-71-10048).*

- [1] Izhikevich E. M. *Dynamical systems in neuroscience*. — MIT press, 2007.
- [2] Encyclopedia of Computational Neuroscience.- Springer New York, NY, 2022.
- [3] Malashchenko T., Shilnikov A., Cymbalyuk G. Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current //PLoS One. — 2011. — V. 6. — No. 7. — P. e21782.
- [4] Stankevich N., Mosekilde E. Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2017. — V. 27. — No. 12. - P. 123101.
- [5] Stankevich N., Bagautdinova E. The simplest neuron models with bistaility occurring as a result of accounting new ion channels //2022 6th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). — IEEE, 2022. — P. 266-269.

# **Full symmetric Toda system: integrability, quantization, QR algorithm and geometry of flag varieties.**

D. V. Talalaev

*P.G. Demidov Yaroslavl State University*

The full symmetric Toda system is a generalization of the open Toda chain, one of the archetypal examples of integrable systems, illustrating the main structural features of integrable systems in general: connection with the theory of Lie groups and algebras, Lax representation, bi-hamiltonian (even tri-hamiltonian) description, solution using an adapted decomposition problem - QR method, r-matrix approach in Hamiltonian mechanics. The full symmetric system is defined on the full space of symmetric matrices and has all the listed properties. Its flows are described by rational Hamiltonians and can be solved using an analogue of the QR decomposition method. This system admits a quantization. A remarkable fact is the connection of the full Toda system with the geometry of the flag variety, in particular, its flows can be defined on the space of complete flags and preserve double Bruhat cells. Thanks to this, we were able to prove the theorem on the dimension of intersections of real Bruhat cells. The content of the report is based on several joint works with A. Sorin, Y. Chernyakov and G. Sharygin [1], [2], [3].

- [1] D. V. Talalaev, *The Quantum Gaudin System*, Functional Analysis and Its Applications, 2006, Volume 40, Issue 1, Pages 73-77
- [2] Yuri B. Chernyakov, Georgy I. Sharygin, Alexander S. Sorin, Dmitry V. Talalaev, em The Full Symmetric Toda Flow and Intersections of Bruhat Cells, SIGMA, 16 (2020), 115, 8 pp.
- [3] D. V. Talalaev, Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, em Full symmetric Toda system: solution via QR-decomposition, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 57:4 (2023), 100-122

# Квази-энергетические функции градиентно-подобных 3-диффеоморфизмов

Е.А. Таланова<sup>1,2</sup>, О.В. Починка<sup>1</sup>

*1. Национальный исследовательский университет – Высшая школа  
экономики в Нижнем Новгороде, Нижний Новгород, Россия.*

*E-mail:opochinka@hse.ru*

*2. Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: eltalanova@rambler.ru*

В докладе рассматривается класс  $G$  градиентно-подобных диффеоморфизмов  $f$  с единственной гетероклинической кривой, заданных на ориентируемом замкнутом связном 3-многообразии и имеющих неблуждающие точки попарно различных индексов Морса. Решается вопрос о числе критических точек квази-энергетической функции для таких диффеоморфизмов.

Из определения класса следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма  $f \in G$  состоит в точности из четырех точек. Известно также, что при наличии единственной некомпактной гетероклинической кривой, несущим многообразием рассматриваемых диффеоморфизмов является 3-сфера, а класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма  $f$  полностью определяется классом эквивалентности (которых бесконечно много) хопфовского узла  $L_f$  – узла в образующем классе фундаментальной группы многообразия  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Более того, любой хопфовский узел реализуется некоторым диффеоморфизмом рассмотренного класса.

Из результатов В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О.В. Починки [2], [3], [5], [6] известно, что для любого  $f \in G$  существует функция Морса–Ляпунова – функция Ляпунова  $\varphi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , являющаяся непрерывной функцией Морса. Если при этом функция  $\varphi$  не имеет критических точек вне неблуждающего множества диффеоморфизма  $f$ , то, следуя [7], мы называем ее энергетической функцией для диффеоморфизма  $f$ . Известно, что седловые сепаратрисы диффеоморфизмов  $f \in G$  могут быть дико вложены, что, согласно работе [6], является препятствием к существованию энергетической функции у диффеоморфизма из рассматриваемого класса. В связи с этим в работе [4] было введено понятие квази-энергетической функции для диффеоморфизма  $f$  (функции

Морса-Ляпунова с минимальным числом критических точек). Заметим, что число критических точек квази-энергетической функции является топологическим инвариантом диффеоморфизма  $f$ . Обозначим его  $\rho_f$ .

В работе [1] построено счетное семейство попарно неэквивалентных нетривиальных хопфовских узлов  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , называемых обобщенными узлами Мазура. В настоящем докладе для диффеоморфизмов, определенных такими узлами, объясняется построение квази-энергетической функции и формула для расчета количества её критических точек.

**Theorem 1** Для диффеоморфизма  $f \in G$ , построенного по обобщенному узлу Мазура  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , число  $\rho_f$  критических точек квази-энергетической функции диффеоморфизма  $f$  вычисляется по формуле

$$\rho_f = 4 + 2n.$$

- [1] Р. М. Ахметьев, Т. В. Медведев, О. В. Почкинка, *On the Number of the Classes of Topological Conjugacy of Pixton Diffeomorphisms*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Springer, 20:3, (2021), 76.
- [2] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Энергетическая функция для градиентно-подобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях, ДАН, 422:3, (2008), 299–301.
- [3] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, Moscow Math. Journal, 4, (2009), 801–821.
- [4] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Квазиэнергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами, Математические заметки, 86:1-2, (2009), 163–170.
- [5] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях, ДАН, 440:1, (2011), 7–10.
- [6] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях, Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 278:5, (2012), 34–48.
- [7] D. Pixton, *Wild unstable manifolds*, Topology, 16:2, (1977), 167–172.

# On Topological Conjugacy of Chaotic Homeomorphism Groups of Manifolds

N. S. Tonysheva

*HSE University*

1. [ntonysheva@hse.ru](mailto:ntonysheva@hse.ru)

Chaotic homeomorphism groups of compact topological surfaces are studied. Following to [1], a homeomorphism group  $G$  of topological manifold  $M$  is called *chaotic* if there exists a dense orbit and the union of finite orbits is dense in  $M$ .

Applying the results of E. Kontorovich and M. Megrelishvili [2] we get that chaotic homeomorphism groups are sensitive to initial conditions. Therefore, the given definition of chaotic homeomorphism group could be considered as an analogue of the notion of a chaotic dynamical system in the sense of Devaney [3].

We develop the method suggested in [1] to construct chaotic homeomorphism groups of compact topological surfaces. Using the invariance of the set of isolated fixed points of homeomorphism group under the topological conjugacy, we prove the following theorem.

**Theorem 1.** *On every compact surface (with or without boundary) there exists a countable set of pairwise topologically non conjugate chaotic homeomorphism groups isomorphic to  $\mathbb{Z}$ .*

The finite products of chaotic homeomorphism groups acting canonically on the product of an arbitrary finite set of closed surfaces are investigated. With using the previously constructed chaotic homeomorphism groups of surfaces, the following theorem is proved.

**Theorem 2.** *Let  $M$  be a product of  $k$ ,  $k \geq 2$ , arbitrary closed surfaces  $M_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Then there exists a countable family of pairwise topologically non conjugate chaotic actions of free group of rank  $k$  on  $M$ .*

In further the chaotic homeomorphism groups are applied for the constructing of multidimensional chaotic foliations by the method of suspension, introduced by Haefliger as a generalization of the Smale suspension which is well-known in the theory of dynamical systems.

The category of topological foliations  $\mathfrak{Fol}$  is considered. The isomorphism of two foliations in  $\mathfrak{Fol}$  is a homeomorphism of ambient manifolds that transfers leaves to leaves. In [4] we introduce the invariants of the foliations in

some complete subcategory of  $\mathfrak{Fol}$ . Applying these invariants and the chaotic homeomorphism groups obtained in Theorems 1 and 2, the countable families of pairwise non isomorphic in  $\mathfrak{Fol}$  chaotic suspended foliations of arbitrary even codimension are constructed.

**Acknowledgments.** The author expresses the gratitude to the scientific supervisor N.I. Zhukova.

- [1] G. Cairns, G. Davis, D. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi, “Chaotic Group Actions,” *Enseignement Mathematique* **41**, 123–133 (1995).
- [2] E. Kontorovich and M. Megrelishvili, “A note on sensitivity of semigroup action,” *Semigroup Forum* **76**, no. 1, 133–141 (2008).
- [3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 3rd edition*, Chapman and Hall/CRC, NY (2021).
- [4] N.I. Zhukova, N.S. Tonysheva. “Chaotic Suspended Foliations of Topological Manifolds,” *Journal of Mathematical Sciences*, **276**, no. 1, 74–97.

# **Черновские аппроксимации на основе оператора сдвига, быстро сходящиеся к решению параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами**

А. В. Веденин

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Автор доклада предлагает новый метод аппроксимации решения параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, основанный на теории  $C_0$ -полугрупп [2], теореме Чернова [1, р. 241] и теореме Галкина-Ремизова [3, теорема 3.1].

Точное решение параболического дифференциального уравнения при определенных условиях можно построить при помощи однопараметрической сильно непрерывной полугруппы операторов ( $C_0$ -полугруппы) [2]. В 1968 году Пол Чернов доказал теорему об аппроксимации  $C_0$ -полугруппы с помощью операторнозначной функции, которую мы сейчас называем функцией Чернова [1]. Приближения, которые мы строим на основе этой функции, называются черновскими аппроксимациями.

В 2017 году И.Д. Ремизов предложил метод построения черновских аппроксимаций к решению параболического дифференциального уравнения на основе оператора сдвига аргумента [4]. В 2022 году И.Д. Ремизов и О.Е. Галкин оценили скорость сходимости черновских аппроксимаций, а также выдвинули условия, при которых эту скорость можно увеличить [3]. Согласно теореме Галкина-Ремизова погрешность аппроксимаций, основанных на методе, предложенном И.Д. Ремизовым [4], оценивалась через  $C/n$ , где  $n$  — номер аппроксимации, а  $C$  — некоторая константа. Автор доклада предлагает значительное усиление этого метода. А именно, для каждого сколь угодно большого натурального  $t$  построены аппроксимации Чернова, оценка погрешности которых улучшена до  $C/n^m$ . Алгоритм построения таких аппроксимаций основан на решении некоторой системы линейных уравнений.

В более точной формулировке мы можем представить результат следующим образом.

Рассмотрим задачу Коши для параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = a(x)u''_{xx}(t, x) + b(x)u'_x(t, x) + c(x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , и функции  $a, b, c, u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ограничены и равномерно непрерывны. Мы строим семейство операторов  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , для которого выполняются следующие условия:

1.  $u_n(t, x) = (S(t/n)^n u_0)(x)$
2.  $\|u_n(t, x) - u(t, x)\| \leq C/n^m$ ,
3. для каждого  $T > 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|u_n(t, x) - u(t, x)\| = 0$ ,

где  $u(t, x)$  — точное решение,  $u_n(t, x)$  для каждого натурального  $n$  — черновские аппроксимации к точному решению,  $m$  — некоторое фиксированное натуральное число.

- [1] P.R. Chernoff. *Note on product formulas for operator semigroups*. // J. Functional Analysis. 2:2 (1968), 238–242.
- [2] K.-J. Engel, R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. — Springer-Verlag. New York. 2000. 609 p.
- [3] O.E. Galkin, I.D. Remizov. *Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators*, 2022, 33 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.01249>
- [4] И.Д. Ремизов. *Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений*. // Доклады Академии наук. 476:1 (2017), 17–21.

# Liouville foliation of billiard books near the focal singular fiber

V. V. Vedyushkina

*Lomonosov Moscow State University*

A.T. Fomenko and H. Zieschang developed an effective topological approach to the study of integrable Hamiltonian systems [1]. Instead of studying systems up to trajectory equivalence, it was proposed to study them up to the so-called Liouville equivalence - a fiberwise diffeomorphism of the closures of almost all solutions. This approach turned out to be very effective for describing Liouville foliations of integrable billiards bounded by arcs of confocal quadrics [2], as well as billiard books (cell complexes whose two-dimensional cells are flat billiards, and whose one-dimensional cells are assigned cyclic permutations). The links of the trajectories of such billiards lie on straight lines tangent to some quadric, belonging to the same family as the quadrics whose arcs form the boundary of the billiard. Of greatest interest in the study of foliations of such billiards are the bifurcations of Liouville tori that arise on a special focal layer, i.e. on the layer where the trajectories (or their extensions) pass through the foci of the family of quadrics. If we consider billiard books whose sheets do not contain focuses, then the resulting class of bifurcations coincides with the entire class of bifurcations possible in non-degenerate integrable Hamiltonian systems. However, if you require the presence of focuses in the sheets of a billiard book, the picture changes significantly. The report will present a new result, namely, a description of the class of emerging bifurcations for billiard books glued together from regions  $A_1$ , which is a convex part of the plane bounded by a hyperbola arc and an ellipse arc. It turned out that in this case the bifurcations of Liouville tori are fiberwise homeomorphic to maximally symmetric atoms.

**Theorem** Let  $\mathbb{B}(A_1)$  be a connected billiard book glued together from convex domains  $A_1$ , each of which is bounded by one ellipse arc and one hyperbola arc. The spines of the book are assigned commuting permutations  $\rho$  (elliptic boundary) and  $\sigma$  (hyperbolic).

Consider the permutation  $\omega = \sigma \circ \rho$  and decompose it into a product of independent cycles. Let us renumber the sheets of the billiard book so that

$$\omega = (1 \dots k)(k+1 \dots 2k) \dots (n-k+1 \dots n).$$

Then the number  $m = \frac{n}{k}$  (the number of independent cycles in the expansion of the permutation  $\omega$ ) is equal to the number of critical circles of the 3-atom

describing the bifurcation at the focal level  $\Lambda = b$ . The atom itself has the following form depending on the permutations  $\sigma$  and  $\rho$ .

1. If  $k$  is odd, then the atom on the focal layer is an atom  $A^{*m}$ .
2. If the numbers  $k$  and  $l$  are even (where  $l = \rho^m(1)$ ), then the atom belongs to the series of maximally symmetric atoms  $Y_m$  (see Fig. 1).
3. If the number  $k$  is even and the number  $l$  is odd, then the atom belongs to the series of maximally symmetric atoms  $X_m$  (see Fig. 1).

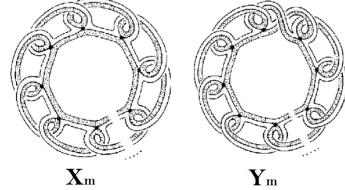


Figure 1: Bases of the Seifert bundle of maximally symmetric atoms of the  $X_m$  and  $Y_m$  series

The work was supported by a grant from the RSF <sup>1</sup> 22-71-10106.

- [1] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730.
- [2] V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts, Transl. Math. Monogr., 89, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171.

# **Ленточные поверхности слоений с особенностями. Новый алгоритм перечисления**

А. Ю. Жиров<sup>1,2</sup>, А. А. Медведев<sup>1</sup>

*1. МГТУ им. Баумана, Москва*

*2. МАИ, Москва*

Для решения задач классификации и перечисления обобщенных псевдоаносовских (grA) гомеоморфизмов первый автор ввел в рассмотрение конструкцию ленточной поверхности [1]. Она определяется растягивающимся и сжимающимся слоениями grA-гомеоморфизма, которые суть слоения с седловыми особенностями. Недавно второй автор предложил новый способ комбинаторного описания ленточных поверхностей в терминах теории графов и соответствующий новый алгоритм их перечисления. В некоторых случаях он более эффективен, чем прежний. В докладе будет дано сравнительное описание старой и новой конструкций и обсуждены соответствующие алгоритмы.

- [1] А.Ю. Жиров, Топологическая сопряженность псевдоаносовских гомеоморфизмов, М, Изд. МЦНМО, 2013.