Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов

ГАЙФУЛЛИН С.А., ЧУНАЕВ Д.А.

Аннотация. В данной работе получены достаточные условия конечности числа орбит группы регулярных автоморфизмов на аффинных многообразиях с действием тора сложности 1.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Рассмотрим алгебраическое многообразие X над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу регулярных автоморфизмов многообразия X. Многообразие X распадается в объединение $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для естественного действия $\mathrm{Aut}(X)$ на X. Для некоторых естественных классов многообразий количество $\mathrm{Aut}(X)$-орбит конечно. Примерами классов многообразий с конечным числом $\mathrm{Aut}(X)$-орбит служат, например, следующие

- алгебраические группы;
- однородные пространства алгебраических групп;
- торические многообразия;
- сферические многообразия (этот класс многообразий строго содержит класс торических многообразий), см. [20] и [21];
- гибкие нормальные аффинные поверхности, см. определение гибкого многообразия в [7], там же доказано, что группа автоморфизмов гибкого многообразия действует транзитивно на множестве гладких точек.
- однородные многообразия, то есть многообразия с одной $\mathrm{Aut}(X)$-орбитой. Примеры однородных многообразий, не являющихся однородными пространствами алгебраических групп, можно найти в [10]. Также однородными многообразиями являются гладкие аффинные многообразия с действием редуктивной группы с открытой орбитой, доказательство можно найти в [17].

Класс торических многообразий характеризуется тем, что на данных существует действие алгебраического тора сложности ноль, то есть с открытой орбитой. В этой работе мы рассматриваем класс аффинных неприводимых алгебраических многообразий с действием тора сложности 1. Это многообразия с эффективным действием тора размерности на единицу меньше, чем размерность многообразия. Мы доказываем, что многообразие X с действием тора сложности 1, удовлетворяющее некоторым техническим условиям, а именно рациональное без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов, имеет конечное число $\mathrm{Aut}(X)$-орбит при условии, оно допускает однородное локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа, то есть такое, что оно нетривиально действует на рациональных инвариантах тора. Напомним, что локально нильпотентным дифференцированиям соответствуют алгебраических подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфные аддитивной группе

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2023 году.

поля. Такие подгруппы мы будем называть $\mathbb{G}_a$-подгруппами. Если переговорить условия на локально нильпотентное дифференцирование в терминах этой подгруппы, то получится, что данная $\mathbb{G}_a$-подгруппа должна быть нормализуема действием тора и нетривиально действовать на рациональных инвариантах этого тора.

Частным случаем многообразий с действием тора сложности 1 являются аффинные триномиальные гиперповерхности, задаваемые уравнениями

$$T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0, \qquad n_0 \geq 0,\ n_1, n_2 > 0.$$

Если $n_0 = 0$, то первый моном считаем равным единице. Орбиты группы автоморфизмов нежёстких (то есть допускающих нетривиальне. $\mathbb{G}_a$-подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$) триномиальных гиперповерхностей были изучены в работе [12]. В частности в этой работе доказано, что орбит конечное число. Заметим, что в случае жёсткой триномиальной гиперповерхности число орбит бесконечно. Описанию группы автоморфизмов жёстких триномиальных гиперповерхностей посвящена работа [8]. В данной работе мы обобщаем результат работы [12] и доказываем достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для аффинных триномиальных многообразий, см. теорему 3.7 и следствие 3.13, то есть аффинных многообразий заданных согласованной системой триномиальных уравнений, строгое определение дано в конструкции 3.1. Любое триномиальное многообразие X в силу конструкции есть прямое произведение некоторого триномиального многообразия Y и m-мерного аффинного пространства. Если $m = 0$, то $Y = X$. Достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит состоит в том, что многообразие Y не является жёстким, то есть допускает нетривиальную $\mathbb{G}_a$-подгруппу в $\mathrm{Aut}(Y)$. У этого условия есть явная интерпретация в терминах степеней переменных, входящий в уравнения, то есть в терминах данных, по которым строится триномиальное многообразие. Триномиальные многообразия изучались в цикле работ [19, 18, 9, 13, 5, 14, 11, 15] и др. Они являются примерами многообразий с действием тора сложности 1. Критерий жёсткости для триномиальных многообразий получен в работе [15], см. также работы [4] и [11], в которых получены более ранние частичные результаты. Этот критерий играет ключевую роль в доказательстве достаточного условия конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит.

Произвольное рациональное неприводимое аффинное многообразие без непостоянных обратимых функций с конечно порождённой группой классов допускающее действие тора сложности один сводится к случаю триномиального многообразия с помощью конструкции Кокса, см. например [6]. Напомним, что конструкция Кокса позволяет сопоставить любому нормальному многообразию X без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров так называемое кольцо Кокса. Если это кольцо конечно порождено, у него можно рассмотреть спектр $\overline{X}$, называемый тотальным координатным пространством многообразия X. Само же многообразие X реализуется каноническим образом как категорный фактор $\overline{X}$ по действию квазитора (то есть произведения алгебраического тора на конечную абелеву группу). В работе [13] доказано, что тотальное координатное пространство для (рационального неприводимого аффинного без непостоянных обратимых функций) многообразия с действием тора сложности 1 является триномиальным многообразием. Используя стандартную технику при работе с автоморфизмами кольца Кокса, однородное относительно группы характеров максимального тора локально нильпотентное дифференцирование горизонтального типа можно поднять на тотальное координатное пространство. Поэтому на тотальном координатном пространстве будет лишь конечное число орбит группы автоморфизмов. Связи групп автоморфизмов многообразия и его тотального пространства посвящена работа [1]. Используя результаты этой работы мы показываем, что и на исходном многообразии было лишь конечное число орбит группы автоморфизмов. Таким образом, мы получаем, что достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит для произвольного (рационального неприводимого аффинного без непостоянных обратимых функций) многообразия с действием тора сложности 1 состоит в наличии однородного относительно группы характеров максимального тора локально нильпотентного дифференцирования горизонтального типа.

Авторы благодарны И.В. Аржанцеву за ценные обсуждения. Первый автор является победителем конкурса "Молодая математика России"и хотел бы поблагодарить жури и спонсоров этого конкурса.

2. Локально нильпотентные дифференцирования

В этом разделе собраны необходимые сведения о локально нильпотентных дифференцированиях. Подробные сведения в этой области можно найти, например, в книге [16].

Пусть A – коммутативная ассоциативная алгебра без делителей нуля над полем $\mathbb{K}$. Будем считать, что алгебра A конечно порождена, то есть это алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ на некотором неприводимом аффинном многообразии X.

Определение 2.1. *Дифференцированием* алгебры A называется линейный оператор $\delta\colon A \to A$, удовлетворяющий тождеству Лейбница: $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$.

Определение 2.2. Дифференцирование $\delta\colon A \to A$ называется *локально нильпотентным* (ЛНД), если для любого $a \in A$ найдётся натуральное число n такое, что $\delta^n(a) = 0$.

Пусть на алгебре A задана градуировка каммутативной группой G

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g.$$

Дифференцирование δ называется однородным, если оно переводит однородные элементы в однородные. Несложно показать, что для любого однородного ЛНД δ существует $g_0 \in G$ такой, что δ переводит A_g в A_{g+g_0}. Элемент g_0 называется *степенью* дифференцирования δ. Несложно доказать, что любое дифференцирование может быть разложено в конечную сумму однородных, которые мы будем называть *однородными компонентами* данного дифференцирования.

Пусть задана градуировка группой $\mathbb{Z}$. И пусть δ – ЛНД на A. Тогда $\delta = \sum\limits_{i=l}^{k} \delta_i$. В работе [22] доказано, что крайние компоненты δ_l и δ_k также будут локально нильпотентны. Отсюда следует, что $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра допускает ненулевое ЛНД тогда и только тогда она допускает ненулевое $\mathbb{Z}$-однородное ЛНД. Данное утверждение легко переносится на случай $\mathbb{Z}^n$-градуировки.

Локально нильпотентные дифференцирования тесно связаны с автоморфизмами алгебры (многообразия). А именно, можно рассмотреть *экспоненту* данного ЛНД δ

$$\exp(\delta) = \mathrm{id} + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \dots$$

Так как δ локально нильпотентно, при применении к каждому элементу $a \in A$ сумма будет конечной. Экспонента любого ЛНД является автоморфизмом. Более того по каждому ЛНД δ можно построить подгруппу в группе автоморфизмов

$$\mathscr{H}_\delta = \{\exp(s\delta) \mid s \in \mathbb{K}\}.$$

Это будет $\mathbb{G}_a$-подгруппа, то есть алгебраическая подгруппа в группе автоморфизмов (сама группа автоморфизмов алгебраической обычно не является), изоморфная аддитивной группе поля $\mathbb{K}$.

Градуировки на $A = \mathbb{K}[X]$ свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^n$ находятся в естественной биекции с алгебраическими действиями алгебраического тора $T = (\mathbb{K}^\times)^n$ на X. (При этом $\mathbb{Z}^n$ отождествляется с группой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T.) При этом то, что некоторое ЛНД δ является $\mathbb{Z}^n$-однородным равносильно тому, что тор T лежит в нормализаторе соответствующей $\mathbb{G}_a$-подгруппы $\mathscr{H}_\delta$. Зачастую мы будем говорить, что дифференцирование T-однородно вместо того, чтобы говорить, что оно $\mathfrak{X}(T)$-однородно.

Любое дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$ однозначно продолжается до дифференцирования поля рациональных функций $\mathbb{K}(X)$.

Определение 2.3. Пусть на многообразии X задано действие тора T. Будем говорить, что T-однородное ЛНД δ имеет *вертикальный тип*, если его продолжение на $\mathbb{K}(X)$ тождественно равно нулю на поле T-инвариантных функций $\mathbb{K}(X)^T$. Если же δ на $\mathbb{K}(X)^T$ не равно нулю, то данное дифференцирование *горизонтального типа*.

Определение 2.4. Многообразие X называется *жёстким*, если на алгебре $\mathbb{K}[X]$ нет ненулевых ЛНД.

3. Триномиальные многообразия

В этом разделе мы изучим орбиты группы автоморфизмов триномиального многообразия. Прежде всего дадим строгое определение триномиального многообразия согласно работе [13].

Конструкция 3.1. [13, Construction 1.1]. Пусть даны натуральные числа r и n, целое неотрицательное число m и число $q \in \{0, 1\}$, а также разбиение $n = n_q + \ldots + n_r$ числа n на натуральные слагаемые. Рассмотрим алгебру B многочленов от $m+n$ переменных, которые мы обозначим T_{ij} и S_k:

$$B = \mathbb{K}\left[T_{ij}, S_k \,|\, q \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i,\ 1 \leq k \leq m\right].$$

Для каждого $i = q, \ldots, r$ фиксируем вектор натуральных чисел $l_i = (l_{i1}, \ldots, l_{in_i})$ и определим моном:

$$T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \ldots T_{in_i}^{l_{in_i}} \in B.$$

Теперь определим *триномиальную алгебру* $R(A)$, которая будет строиться по некоторым данным A. Эти данные различные для двух типов триномиальных алгебр.

Тип 1. $q = 1$, $A = (a_1, \ldots, a_r)$, $a_j \in \mathbb{K}$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Положим $I = \{1, \ldots, r-1\}$ и

$$g_i = T_i^{l_i} - T_{i+1}^{l_{i+1}} - (a_{i+1} - a_i) \in B,\ i \in I.$$

Тип 2. $q = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{10}\ a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1r} \\ a_{20}\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2r} \end{pmatrix}$$

матрица с элементами из $\mathbb{K}$, любые два столбца которой линейно независимы. Положим $I = \{0, \dots, r-2\}$ и

$$g_i = \det \begin{pmatrix} T_i^{l_i} & T_{i+1}^{l_{i+1}} & T_{i+2}^{l_{i+2}} \\ a_{1i} & a_{1i+1} & a_{1i+2} \\ a_{2i} & a_{2i+1} & a_{2i+2} \end{pmatrix} \in B, \ i \in I.$$

Для обоих типов $R(A) = B/(g_i \,|\, i \in I)$.

Определение 3.2. Многообразие $X(A) = \operatorname{Spec}(R(A))$ назывется *триномиальным.* Типом триномиального многообразия будем называть тип соответствующей триномиальной алгебры.

Замечание 3.3. Несложно видеть, что размерность $X(A)$ равна $m + n - r + 1$.

Замечание 3.4. Как видно из конструкции триномиальных многообразий, любое триномиальное многообразие изоморфно произведению другого триномиального многообразия и m-мерного аффинного пространства $X(A) \cong Y(A) \times \mathbb{A}^m$. Для того, чтобы получить алгебру регулярных функций на $Y(A)$, нужно убрать порождающие S_k из алгебры регулярных функций на $X(A)$. Тип многообразия $Y(A)$ совпадает с типом многообразия $X(A)$.

На триномиальном многообразии $X(A)$ можно определить действие алгебраического тора $\mathbb{T} \cong (\mathbb{K}^\times)^{n+m-r}$, которое и будет действием тора сложности 1 на $X(A)$. Как известно, группа характеров алгебраического тора – это свободная абелева группа и задание действие алгебраического тора размерности k эквивалентно заданию градуировки алгебры регулярных функций группой $\mathbb{Z}^k$. Нам удобнее определить действие $\mathbb{T}$ на $X(A)$ в таких терминах, то есть $\mathbb{Z}^{m+n-r}$-градуировку на $R(A)$. Мы введём эту градуировку следующим образом: припишем степени w_{ij} переменным T_{ij} и степени v_k переменным S_k. Эти веса с соотношениями коммутативности и $\deg T_i^{l_i} = \deg T_j^{l_j}$ задают группу $\mathbb{Z}^{m+n-r}$, см. подробнее в [13]. Нам понадобятся следующие одномерные подторы в торе $\mathbb{T}$. Подтор $\Lambda_{s,u,v} \cong \mathbb{K}^\times$, где $1 \le u, v \le n_s$ действет следующим образом:

$$t \cdot T_{su} = t^{l_{sv}} T_{su}, \qquad t \cdot T_{sv} = t^{-l_{su}} T_{sv},$$

$$t \cdot T_{pq} = T_{pq} \text{ для всех } (p,q), \text{ кроме } (s,u) \text{ и } (s,v).$$

Для многообразий типа 2 определим ещё один одномерный подтор Ω в $\mathbb{T}$. Элемент $t \in \Omega$ умножает T_{i1} на $t^{\prod_{j \neq i} l_{j1}}$, а функции T_{is} при $s \ge 2$ не меняет.

В работе [15, Theorem 4] получен следующий критерий того, что триномиальное многообразие не является жестким:

Предложение 3.5. *Триномиальное многообразие $X(A)$ не является жестким тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $m \neq 0$,
2) Многообразие $X(A)$ имеет тип 1 и существует такое $a \in \{1, \dots, r\}$, что для любого $i \in \{1, \dots, r\} \setminus \{a\}$ существует $j(i) \in \{1, \dots, n_i\}$, такое что $l_{ij(i)} = 1$,
3) Многообразие $X(A)$ имеет тип 2 и выполнено одно из следующих условий:
  а) Существует два таких числа $a, b \in \{0, \dots, r\}$, что для любого $i \in \{0, \dots, r\} \setminus \{a, b\}$ существует $j(i) \in \{1, \dots, n_i\}$, такое что $l_{ij(i)} = 1$,
  б) Существует три таких числа $a, b, c \in \{0, \dots, r\}$, что для любого

$$k \in \{0, \dots, r\} \setminus \{a, b, c\}$$

существует $j(k) \in \{1, \dots, n_k\}$, такое что $l_{kj(k)} = 1$, а также для любого $i \in \{a, b\}$ существует $v(i) \in \{1, \dots, n_i\}$, такое что $l_{iv(i)} = 2$ и для любого $w \in \{1, \dots, n_i\}$ числа l_{iw} четны.

Замечание 3.6. Для многообразия $Y(A)$ первый случай никогда не реализуется. Поэтому нежёсткость многообразия $Y(A)$ равносильна тому, что выполняется одно из условий 2 или 3.

Первым основным результатом работы является следующее достаточное условие того, что триномиальное многообразие имеет конечное число орбит группы автоморфизмов.

Теорема 3.7. *Если многообразие $Y(A)$ не является жестким, то на многообразии $X(A)$ конечное число $\mathrm{Aut}(X(A))$-орбит.*

Доказательство. Пусть многообразие $Y(A)$ не жёсткое. Фиксируем подмножество J в множестве переменных T_{ij}. Это можно сделать 2^n способами. Докажем, что множество

$$L(J) = \{x \in X(A) \mid T_{ij}(x) = 0 \Leftrightarrow T_{ij} \in J\}$$

лежит в объединении конечного числа $\mathrm{Aut}(X)$-орбит. Из этого конечно же будет следовать конечность числа орбит. Начнём со случая, когда множество J не пусто. Обозначим через $L_Y(J)$ аналогичное подмножество, но в многообазии Y:

$$L_Y(J) = \{y \in Y(A) \mid T_{ij}(y) = 0 \Leftrightarrow T_{ij} \in J\}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.8. *Пусть $J \neq \varnothing$. Тогда для любых двух точек α и β из $L_Y(J)$ можно перевести α в β, подействовав элементом из $\mathbb{T}$.*

Доказательство. Пусть $T_{is} \in J$. Действуя на α одномерными торами $\Lambda_{i,s,v}$, мы можем сделать значения переменных T_{iv}, не лежащих в J, любыми ненулевыми, в чатности, такими же, как в β.

Дальнейшее доказательство проведём отдельно для разных типов $Y(A)$. Пусть $Y(A)$ имеет тип 1. Рассматривая линейные комбинации уравнений, задающих $Y(A)$, легко видеть, что выполняются уравнения $T_i^{l_i} - T_j^{l_j} = a_j - a_i$. Так как $T_i^{l_i}(\alpha) = 0$, получаем $T_j^{l_j}(\alpha) = a_i - a_j \neq 0$. Аналогично $T_j^{l_j}(\beta) = a_i - a_j$. Отсюда все переменные T_{ju} принимают в точках α и β ненулевые значения. Легко видеть, что с помощью подторов $\Lambda_{j,u,v}$ можно перевести точку α в точку имеющие такие же значения T_{ju}, что и в точке β. Итак, последовательным применением элементов из $\mathbb{T}$ мы можем привести α в точку, в которой значения всех координат совпадают со значениями в β, то есть в саму точку β.

Пусть теперь $Y(A)$ имеет тип 2. Снова рассматривая линейные комбинации уравнений, задающих $Y(A)$, легко видеть, что выполняются уравнения

$$\det \begin{pmatrix} T_p^{l_p} & T_q^{l_q} & T_u^{l_u} \\ a_{1p} & a_{1q} & a_{1u} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2u} \end{pmatrix} = 0$$

для всех троек (p, q, u). Подставляя $u = i$ и точки α и β мы получаем, что $\lambda T_p^{l_p}(\alpha) + \mu T_q^{l_q}(\alpha) = 0$ для некоторых ненулевых λ и μ и $\lambda T_p^{l_p}(\beta) + \mu T_q^{l_q}(\beta) = 0$. Если для всех $j \neq i$ выполнено $T_j^{l_j}(\alpha) = 0$, то для всех j имеем $T_j^{l_j}(\alpha) = T_j^{l_j}(\beta)$. Иначе выберем $j \neq i$ такой, что $T_j^{l_j}(\alpha) \neq 0$. С помощью элемента из Ω мы можем перевести α в

α' такое, что $T_j^{l_j}(\alpha') = T_j^{l_j}(\beta)$. Но тогда из полученных уравнений следует, что для любого k выполнено $T_k^{l_k}(\alpha') = T_k^{l_k}(\beta)$. Далее, используя $\Lambda_{k,u,v}$, можно перевести α' в β аналогично случаю с типом 1.

Лемма доказана. $\square$

Из только что доказанной леммы следует, что если J непусто, то для любых точек α и β из $L(J)$ с помощью действия элемента t тора $\mathbb{T}$ на α можно сделать координаты T_{ij} одинаковыми на $\alpha' = t \cdot \alpha$ и β. С другой стороны на аффинном пространстве $\mathbb{A}^m$ транзитивно действует группа параллельных переносов, элементом этой группы можно перевести α' в β.

Замечание 3.9. При непустом J даже не использовалось условие нежёсткости $Y(A)$.

Осталось доказать, что $L(\varnothing)$ лежит в объединении конечного числа $\mathrm{Aut}(X(A))$-орбит. Так как многообразие $Y(A)$ не жёсткое, существует ЛНД δ на $R(A)$ такое, что $\delta(T_{ij}) \neq 0$ для некоторой пары (i,j). При этом по [16, Principle 5] $\delta(T_{ij})$ не делится на T_{ij} в $R(A)$. Следовательно, найдётся такая точка $x \in L(\{T_{ij}\})$, что $\delta(T_{ij})(x) \neq 0$. Рассмотрим группу G, порождённую $\mathbb{T}$ и $\mathbb{G}_a$-подгруппой $\{\exp(s\delta) \mid s \in \mathbb{K}\}$. Подгруппа G в $\mathrm{Aut}(X(A))$ является алгебраически порождённой, то есть порождена алгебраическими подгруппами. По [7, Proposition 1.3] любая G-орбита открыта в своём замыкании в топологии Зарисского. В частности, этой орбите можно корректно приписать размерность. Так как орбита Gx содержит $L(\{T_{ij}\})$, но не содержится в нём, получается, что орбита Gx имеет большую размерность, чем $\dim L(\{T_{ij}\}) = \dim \mathbb{T} = \dim X(A) - 1$. Следовательно Gx открыта в $X(A)$. Дополнение к этой открытой орбите – возможно приводимое многообразие размерности не более $\dim \mathbb{T}$. Однако размерность $\mathbb{T}$-орбиты любой точки из $L(\varnothing)$ равна $\dim \mathbb{T}$. Следовательно, размерность G-орбиты любой точки из $L(\varnothing)$ не менее $\dim \mathbb{T}$. Значит, $L(\varnothing)$ покрывается конечным числом G-орбит. (Эти орбиты могут выходить за пределы $L(\varnothing)$.) Так как G-орбиты содержатся в $\mathrm{Aut}(X(A))$-орбитах, из этого следует утверждение теоремы.

$\square$

Замечание 3.10. Используя дифференцирования из раздела 4 работы [11] а также лемму 10 из той же работы можно явно построить ЛНД на нежёстких триномиальных многообразиях и проследить явно за тем, что $L(\varnothing)$ лежит в одной $\mathrm{Aut}(X(A))$-орбите в условиях теоремы 3.7.

Замечание 3.11. Из доказательства теоремы 3.7 видно, что каждое подмножество $L(J)$, где $J \neq \varnothing$, составляет одну $\mathbb{T}$-орбиту, а подмножество $L(\varnothing)$ покрывается конечным числом орбит группы, порождённой $\mathbb{T}$ и одной любой $\mathbb{G}_a$-подгруппой, нетривиально действующей на $Y(A)$.

То, что $\mathbb{T}$-нормализуемая подгруппа $\mathbb{G}_a$-подгруппа нетривиально действует на $Y(A)$ можно сформулировать в терминах соответствующих ЛНД.

Лемма 3.12. *Однородное относительно $\mathbb{T}$ ЛНД δ на $R(A)$ имеет вертикальный тип тогда и только тогда, когда $\delta(T_{ij}) = 0$ для всех пар (i,j).*

Доказательство. Несложно доказать, что поле $\mathbb{T}$-инвариантов лежит в поле порождённом мономами $T_i^{l_i}$. А именно, в случае типа 1 эти два поля совпадают, а в случае типа 2 поле $\mathbb{T}$-инвариантов порождается отношениями таких мономов. В любом случае, если $\delta(T_{ij}) = 0$ для всех пар (i,j), то дифференцирование имеет вертикальный тип.

Напротив, если δ не равно нулю на каком-то T_{ij}, то по замечанию 3.11 группа G, порождённая $\mathbb{T}$ и $\mathscr{H}_\delta$, действует на $X(A)$ с конечным числом орбит, а следовательно, одна из этих орбит является открытой. Это означает, что поле G-инвариантов совпадает с $\mathbb{K}$. С другой стороны

$$\mathbb{K}(X(A))^G = \mathbb{K}(X(A))^{\mathbb{T}} \cap \operatorname{Ker}\delta.$$

При этом $\mathbb{K}(X(A))^{\mathbb{T}} \neq \mathbb{K}$. Следовательно, δ имеет горизонтальный тип. □

Мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.13. *Если на $R(A)$ есть $\mathbb{T}$-однородное ЛНД δ горизонтального типа, то на многообразии $X(A)$ конечное число $\operatorname{Aut}(X(A))$-орбит. Более того, в этом случае на $X(A)$ конечное число G-орбит, где G – подгруппа в $\operatorname{Aut}(X(A))$, порождённая $\mathbb{T}$ и $\mathbb{G}_a$-подгруппой, соответствующей δ.*

Доказательство. То, что при наличии $\mathbb{T}$-однородного ЛНД горизонтального типа число $\operatorname{Aut}(X(A))$-орбит конечно, следует из леммы 3.12 и теоремы 3.7. Конечность числа G-орбит при выполнении этих условий следует из замечания 3.11. □

4. Многообразия с действием тора сложности 1

Как доказано в [13, Corollary 1.9], любое нормальное рациональное неприводимое аффинное многообразие Z без непостоянных обратимых функций, допускающее действие тора сложности 1, может быть канонически получено как категорный фактор некоторого триномиального многообразия $\overline{Z}$ по действию некоторого квазитора $H \subseteq \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – квазитор, являющийся централизатором $\mathbb{T}$ в $\operatorname{Aut}(X(A))$. Эта представление многообразия Z в виде категорного фактора является реализацией Кокса данного многообразимя, см. [6]. В работе [1] доказано, что имеет место следующая точная последовательность:

$$1 \to H \to \widetilde{\operatorname{Aut}(\overline{Z})} \to \operatorname{Aut}(Z) \to 1,$$

где $\widetilde{\operatorname{Aut}(\overline{Z})}$ – группа автоморфизмов $\overline{Z}$, лежащих в нормализаторе H. Здесь гомоморфизм $\widetilde{\operatorname{Aut}(\overline{Z})} \to \operatorname{Aut}(Z)$ – это гомоморфизм ограничения автоморфизма с алгебры функций $\mathbb{K}[\overline{Z}]$ на H-инварианты.

Лемма 4.1. *Если число $\widetilde{\operatorname{Aut}(\overline{Z})}$-орбит на $\overline{Z}$ конечно, то и число $\operatorname{Aut}(Z)$-орбит на Z конечно.*

Доказательство. Морфизм факторизации

$$\pi\colon \overline{Z} \to \overline{Z}/\!/H = Z$$

является сюръективным и образ каждой $\widetilde{\operatorname{Aut}(\overline{Z})}$-орбиты совпадает с $\operatorname{Aut}(Z)$-орбитой. □

Предложение 4.2. *Пусть реализация Кокса неприводимого аффинного алгебраического многообразия Z с действием тора сложности 1 имеет вид*

$$Z = X(A)/\!/H.$$

Тогда если существует ЛНД на $R(A)$, которое является H-однородным степени ноль и хотя бы одна образующая $T_{ij} \in R(A)$ не лежит в его ядре, то количество $\operatorname{Aut}(Z)$-орбит конечно.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{G}_a$-подгруппу, которая соответствует ЛНД из условия. Обозначим через G подгруппу, порождённую $\mathbb{T}$ и этой $\mathbb{G}_a$-подгруппой. Так как T_{ij} не входило в ядро этого ЛНД, из замечания 3.11 следует, что количество G-орбит на $X(A)$ конечно. С другой стороны поскольку данное ЛНД по условию было H-однородным степени ноль, соответствующая $\mathbb{G}_a$-подгруппа лежит в $\widetilde{\mathrm{Aut}(X(A))}$, то есть нормализует (а на самом деле даже коммутирует с) H. Следовательно, $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}(X(A))}$. По лемме 4.1, количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит конечно. $\square$

Предложение 4.2 даёт достаточное условие конечности числа $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит в терминах реализации Кокса данного многообразия. Однако было бы полезно иметь такое условие во внутренних терминах многообразия Z. Его даёт следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть Z – аффинное неприводимое рациональное многообразие без непостоянных обратимых функций и с действием тора $\widehat{T}$ сложности 1. Допустим, что на Z, существует $\widehat{T}$-однородное ЛНД горизонтального типа. Тогда количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит конечно.*

Доказательство. Пусть на Z есть $\widehat{T}$-однородное ЛНД горизонтального типа. Ему соответствует $\mathbb{G}_a$-подгруппа Ω в $\mathrm{Aut}(Z)$, которая нетривиально действует на $\mathbb{K}(Z)^{\widehat{T}}$. По [6, Theorem 4.2.3.2] существует $\mathbb{G}_a$-подгруппа $\overline{\Omega}$ в $\widetilde{\mathrm{Aut}(\overline{Z})}$ такая, что она переходит при гомоморфизме ограничения на $\mathbb{K}[Z]$ в Ω. Тогда $\overline{\Omega}$ – это $\mathbb{T}$-однородная $\mathbb{G}_a$-подгруппа, которая нетривиально действует на $\mathbb{K}(\overline{Z})^{\mathbb{T}} = \mathbb{K}(Z)^{\widehat{T}}$. Таким образом $\overline{\Omega}$ соответствует ЛНД горизонтального типа на $\overline{Z}$. По следствию 3.13, на $\overline{Z}$ конечное число G-орбит, где G – группа, порождённая $\mathbb{T}$ и $\overline{\Omega}$. Так как $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Aut}(\overline{Z})}$, на $\overline{Z}$ конечное число $\widetilde{\mathrm{Aut}(\overline{Z})}$-орбит. По лемме 4.1, количество $\mathrm{Aut}(Z)$-орбит на Z конечно. $\square$

Пример 4.4. Рассмотрим гиперповерхность

$$X = \{x_1 \dots x_k(y_1^{b_1} \dots y_m^{b_m} + z_1^{c_1} \dots z_l^{c_l}) = uv_1^{r_1} \dots v_p^{r_p}\} \subseteq \mathbb{K}^{k+l+m+p+1}.$$

На этой гиперповерхности множно ввести действие тора размерности $k+l+m+p-1$ аналогично тому, как вводится такое действие для триномиальных гиперповерхностей. А именно, каждой переменной соответствует степень и на эти степени будет ровно 2 линейных соотношения. При этом можно рассмотреть однородное ЛНД горизонтального типа:

$$\delta(u) = b_1 x_1 \dots x_k y_1^{b_1-1} \dots y_m^{b_m}, \qquad \delta(y_1) = v_1^{r_1} \dots v_p^{r_p},$$

на остальных образующих δ равно нулю. Легко проверить, что даннное дифференцирование действительно локально нильпотентно. То, что оно горизонтального типа, следует из того, что оно не равно нулю на рациональном инварианте тора

$$\frac{uv_1^{r_1} \dots v_p^{r_p}}{x_1 \dots x_k z_1^{c_1} \dots z_l^{c_l}}.$$

То, что многообразие X рационально следует из того, что открытое подмножество $\{v_1^{r_1} \dots v_p^{r_p} \neq 0\} \subseteq X$ изоморфно открытому подмножеству в аффинном пространстве. На X нет непостоянных обратимых функций, так как нет непостоянных однородных обратимых функций. Последнее верно так как нет ненулевых противоположных друг другу $\mathfrak{X}(T)$-степеней. Наконец, нормальность многообразия X следует из критерия нормальности Серра, так как множество особых точек в X имеет коразмерность 2. По теореме 4.3, на X конечное число $\mathrm{Aut}(X)$-орбит.

Список литературы

[1] И. В. Аржанцев, С. А. Гайфуллин. *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*, Матем. сб., **201**:1 (2010), 3–24.

[2] И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян. *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Матем. сб., **203**:7 (2012), 3–30

[3] И. А. Болдырев, С. А. Гайфуллин. *Автоморфизмы ненормальных торических многообразий*, Матем. заметки, **110**:6 (2021), 837–855.

[4] I. Arzhantsev. *On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces*, International Journal of Algebra and Computation, **26**:5 (2016), 1061-1070.

[5] I. Arzhantsev, L. Braun, J. Hausen and M. Wrobel, *Log terminal singularities, platonic tuples and iteration of Cox rings*, European Journal of Mathematics, **4**:1 (2018), 242-312.

[6] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen and A. Laface. Cox rings, 144: Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2015.

[7] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg. *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J. **162**:4 (2013), 767-823.

[8] I. Arzhantsev and S. Gaifullin. *The automorphism group of a rigid affine variety*, Math. Nachr. **290:5-6** (2017), 662-671.

[9] I. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich and A. Liendo. *The automorphism group of a variety with torus action of complexity one*. Moscow Mathematical Journal. 2014. Vol. 14. No. 3. P. 429-471.

[10] I. Arzhantsev and Y. Zaitseva. *Affine homogeneous varieties and suspensions*, arXiv:2309.06170, (2023).

[11] S. Gaifullin. *On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties*, arXiv:1902.06136, (2019).

[12] S. Gaifullin. and G. Shirinkin *Orbits of automorphism group of trinomial hypersurfaces* arXiv:2205.02513, (2022).

[13] J. Hausen and M. Wrobel. *Non-complete rational T-varieties of complexity one*, Math. Nachr. 290 (2017), no. 5-6, 815-826.

[14] J. Hausen and M. Wrobel. *On iteration of Cox rings*, J. of Pure and Applied Algebra, **222**:9 (2018), 2737-2745.

[15] P. Evdokimova, S. Gaifullin and A. Shafarevich. *Rigid trinomial varieties*, arXiv:2307.06672, (2023).

[16] G. Freudenburg. Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2017.

[17] S. Gayfullin and A. Shafarevich. *Flexibility of normal affine horospherical varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 3317-3330.

[18] J. Hausen, E. Herppich. *Factorially graded rings of complexity one*. Torsors, Étale Homotopy and Applications to Rational Points (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 414-428). Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[19] J. Hausen, H. Suess. *The Cox ring of an algebraic variety with torus action*. Advances Math. **225** (2010), 977–1012.

[20] F. Knop. *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, in: Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, India, 1989), Manoj Prakashan, Madras, 1991, 225–249.

[21] D.A. Timashev. *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encycl. Math. Sci., 138, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[22] R. Rentschler. *Operations du groupe additif sur le plane affine*, C. R. Acad. Sci. **267** (1968) 384-387.

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Факультет компьютерных наук, Покровский бульвар, д.11, Москва, 109028, Россия.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д.1, Москва, 119991, Россия.
Московский центр фундаментальной математики, Москва, Россия.

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Факультет компьютерных наук, Покровский бульвар, д.11, Москва, 109028, Россия.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д.1, москва, 119991, Россия.