В. М. Бухштабер, С. Терзич

Пространства орбит $G_{n,2}/T^n$ и факторы Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ многообразий Грассмана $G_{n,2}$

Комплексные многообразия Грассмана $G_{n,k}$ являются фундаментальными объектами в развитии взаимосвязей алгебраической геометрии и алгебраической топологии. Случай $k=2$ выделяется особо, так как многообразия $G_{n,2}$ обладают несколькими замечательными свойствами, отличающими их от многообразий с $k>2$.

Эта статья посвящена результатам, существенно использующим специфику многообразий $G_{n,2}$. Они относятся к известным задачам о каноническом действии алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на $G_{n,2}$ и индуцированном действии компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$.

М. Капранов доказал, что компактификацию Делиня–Мамфорда–Гротендика–Кнутсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ пространства рациональных кривых с n пронумерованными отмеченными точками можно отождествить с фактором Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$. В наших недавних работах было дано конструктивное описание пространства орбит $G_{n,2}/T^n$. В этом результате важную роль играют понятия CW-комплекса допустимых многогранников P_σ, пространств параметров F_σ и универсального пространства $\mathcal{F}_n$ параметров T^n-действия на $G_{n,2}$.

В настоящей статье получена явная конструкция пространства $\mathcal{F}_n$ методом замечательной компактификации. На основе этой конструкции и описания пространства $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ из работы Киля мы получили явный диффеоморфизм между $\mathcal{F}_n$ и $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$. Таким образом, получена реализация фактора Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ в виде пространства $\mathcal{F}_n$ со структурой, в описании которой участвуют допустимые многогранники P_σ и пространства F_σ.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: универсальное пространство параметров, замечательная компактификация, пространство модулей стабильных кривых, фактор Чжоу, пространство параметров кортежей допустимых многогранников.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9964

§ 1. Введение

Вопросы, связанные с каноническим действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ (а также индуцированного действия компактного тора T^n) на комплексных многообразиях Грассмана $G_{n,k}$ естественно возникают во многих областях математики, см. [14]–[17], [19]. В настоящей работе речь идет о задачах на стыке

Исследование В. М. Бухштабера выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Исследование С. Терзич выполнено при финансовой поддержке Montenegrin Academy of Sciences and Arts – MASA.

торической геометрии (раздела алгебраической геометрии) и торической топологии (раздела алгебраической топологии). Центральным объектом торической геометрии являются алгебраические многообразия с действием алгебраического тора. Торическое многообразие определяется как замыкание орбиты такого действия. Эквивариантная структура неособого торического многообразия эффективно описывается в терминах комбинаторной структуры многогранника, образа отображения моментов. Важным примером торического многообразия является комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n = G_{n+1,1}$.

Естественно возникла задача описания эквивариантной структуры алгебраического многообразия с таким действием алгебраического тора, что семейства орбит образуют хорошую в определенном смысле стратификацию этого многообразия. Первым нетривиальным примером в этом направлении явились комплексные многообразия Грассмана $G_{n,2}$, которые можно рассматривать как многообразия всех проективных прямых в $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Используя результаты работы И. М. Гельфанда и В. В. Сергановой (см. [15]), в случае многообразий $G_{n,2}$ можно описать в явном виде условия примыкания стратов, образованных семействами орбит действия алгебраического тора. Но как показывает пример из работы [15], см. также [3], в случае многообразий $G_{n,k}$, где $n \geqslant 7$, $k \geqslant 3$, такое описание уже не работает. Отметим, что в работе [3] на основе условий примыкания стратов в случае многообразий $G_{n,2}$ мы ввели понятие CW-комплекса допустимых многогранников.

В настоящей работе мы установили связь между хорошо известной конструкцией из алгебраической геометрии, основанной на понятии замечательной компактификации, с результатами об эквивариантной алгебраической топологии многообразий $G_{n,2}$. Эта связь была открыта при решении задачи описания универсального пространства параметров $\mathcal{F}_n$ канонического T^n-действия на многообразии $G_{n,2}$. Общее понятие универсального пространства параметров было введено в нашей теории $(2m,k)$-многообразий, см. [3]. В этой теории рассматриваются гладкие $2m$-мерные многообразия с гладкими эффективными действиями k-мерных компактных торов, удовлетворяющими некоторому множеству аксиом. Важный класс $(2m,k)$-многообразий дают многообразия, на которых действие тора T^k индуцировано действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^k$. Среди таких многообразий замечательную роль играют многообразия $G_{n,2}$, которые являются $(2m,k)$-многообразиями с $m = 2(n-2)$ и $k = n-1$. Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}$ некоторого $(2m,k)$-многообразия M^{2m} с эффективным действием компактного тора T^k, $k \leqslant m$, является специальной компактификацией пространства параметров F главного страта. Детальное определение универсального пространства параметров дано в [3].

В случае многообразия $G_{5,2}$ с каноническим действием тора T^5 это пространство описано явно в работе [2]. А именно, доказано, что в этом случае универсальное пространство параметров получается в результате сигма-процесса в точке, лежащей на кубической поверхности $c_1c_2'c_3 = c_1'c_2c_3'$ в $(\mathbb{C}P^1)^3$, или, эквивалентно, в результате сигма-процесса в четырех точках, лежащих в общем положении на $\mathbb{C}P^2$. Таким образом, в случае многообразия $G_{5,2}$ универсальное пространство параметров оказалось хорошо известной в алгебраической геометрии поверхностью дель-Пеццо степени 5 (см. также [30]).

В работе Н. Клемятина [25] дана конструкция компактификации пространства параметров F_n, которая использует, с одной стороны, соответствие Гельфанда–МакФерсона (см. [14]) между пространством F_n и пространством всех конфигураций из n попарно различных точек в $(\mathbb{C}P^1)^n$ с точностью до действия группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ на $\mathbb{C}P^1$, а с другой стороны, следуя работе Макдафф–Саломона [29], описание компактификации Гротендика–Кнутсена пространства модулей $\mathcal{M}(0,n)$ в терминах двойного отношения точек (ангармонического отношения). К сожалению, в доказательстве того, что эта конструкция дает универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$, содержится пробел, см. замечание 22.

В работе [19] М. М. Капранов ввел фактор Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ и доказал, что это многообразие можно отождествить с компактификацией Гротендика–Кнутсена пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$. Многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,5)$ оказалось поверхностью дель-Пеццо степени 5. Кольца когомологий многообразий $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ описаны в [22] (см. также [21]). Классы комплексных кобордизмов многообразий $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ играют важную роль в приложениях характера Черна в теории комплексных кобордизмов, см. [6] и [4].

В настоящей работе дана явная конструкция универсального пространства параметров $\mathcal{F}_n$ для $G_{n,2}$. Используя только эквивариантную топологию многообразия $G_{n,2}$, мы построили компактное гладкое многообразие $\mathcal{F}_n$ и доказали, что оно диффеоморфно многообразию $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ и, тем самым, фактору Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$.

Мы предложили следующую постановку задачи компактификации алгебраического многообразия: пусть дано некоторое алгебраическое подмногообразие $X \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, которое является открытым в его замыкании $\overline{X} \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, где $\overline{X}$ – гладкое компактное подмногообразие в $(\mathbb{C}P^1)^N$. И пусть дана некоторая подгруппа $\mathcal{A}(X)$ группы автоморфизмов многообразия X.

Задача 1. Найти компактификацию $\mathcal{X}$ многообразия X, для которой существует проекция $p\colon \mathcal{X} \to \overline{X}$, ограничение которой на X является тождественным отображением, и любой автоморфизм $f \in \mathcal{A}(X)$ продолжается до автоморфизма многообразия $\mathcal{X}$.

В нашем случае роль многообразия X играет пространство параметров F_n главного страта W_n, записанное в координатах фиксированной стандартной карты многообразия $G_{n,2}$, которая явно определена в терминах координат Плюккера. Напомним, что пространство W_n лежит в пересечении всех стандартных карт многообразия $G_{n,2}$. В качестве группы $\mathcal{A}(X)$ мы берем группу автоморфизмов многообразия X, которые явно определены переходами из выбранной карты во все остальные.

Наша конструкция требуемой компактификации $\mathcal{X}$ многообразия F_n использует известную в алгебраической геометрии конструкцию замечательной компактификации (wonderful compactification). Свойства этой конструкции позволили проверить, что описанные выше автоморфизмы пространства F_n продолжаются до автоморфизмов пространства $\mathcal{X}$. В результате мы доказали, что пространство $\mathcal{X}$ совпадает с нашим пространством $\mathcal{F}_n$, которое диффеоморфно фактору Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ и, следовательно, компактификации Гротендика–Кнудсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ пространства $\mathcal{M}(0,n)$.

Замечательной компактификацией комплексного многообразия M называется комплексное гладкое многообразие $\widetilde{X}$ такое, что $D = \widetilde{X} \setminus M$ является дивизором с нормальными пересечениями в $\widetilde{X}$, неприводимые компоненты которых являются гладкими многообразиями, и любой набор связных компонент дивизора D пересекается трансверсально. Такие сильные условия на компактификацию оказываются существенно важными во многих алгебраических и геометрических задачах, например, в задачах перечислительной алгебраической геометрии, в шубертовских перечислительных задачах, в описании рационального гомотопического типа многообразия M, в описании смешанной структуры Ходжа и кольца Чжоу многообразия M и т.д.

Понятие замечательной компактификации впервые появилось в работе де Кончини–Прочези [8] в контексте эквивариантной компактификации симметрических пространств G/H, см. также обстоятельные обзоры на эту тему [28] и [31]. Идея замечательной компактификации получила дальнейшее развитие и приложения во многих направлениях, таких как компактификация Фултона–МакФерсона в [13], замечательные модели де Кончини–Прочези (см. [8], [9]), замечательная компактификация Ли (см. [27]) и совсем недавно в проективных замечательных моделях торических конфигураций де Кончини–Гайфи и в других работах, см. [10]–[12].

В настоящей работе мы показываем достоинства понятия замечательной компактификации в задаче об эквивариантной топологии многообразий Грассмана $G_{n,2}$ с каноническим T^n-действием. А именно, показываем, что замечательная компактификация из [27], связанная с конфигурацией подмногообразий, позволяет успешно решить задачу о правильной компактификации пространства параметров F_n главного страта $W_n \subset G_{n,2}$. На этом пути мы получили гладкое многообразие $\mathcal{F}_n$ и построили модель $U_n = \mathcal{F}_n \times \Delta_{n,2}$ пространства орбит $G_{n,2}/T^n$, которая описывает структуру пространства $G_{n,2}/T^n$ в терминах непрерывной проекции $p_n \colon U_n \to G_{n,2}/T^n$, см. [5].

Фактор Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ является компактификацией пространства орбит $W_n/(\mathbb{C}^*)^n$ главного страта $W_n \subset G_{n,2}$ и описывается в терминах многообразия Чжоу многообразия $G_{n,2}$, см. [19], [16]. Фактор Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ можно отождествить с компактификацией Гротендика–Кнудсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ пространства $\mathcal{M}(0,n)$ рациональных кривых с n отмеченными точками. Пространство $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ имеет ряд важных реализаций: 1) оно является пространством модулей стабильных рациональных кривых с n различными отмеченными точками; 2) является log-канонической компактификацией, см. [24]; 3) является каноническим описанием пределов однопараметрических компактификаций, см. [20].

В [23] первые две реализации распространены на случай комплексных многообразий Грассмана $G_{n,k}$ для $k \geqslant 2$. В то же время показано, что третья реализация, которая верна для $G_{n,2}$, не верна для $k > 2$ за гипотетическим исключением в некоторых специальных случаях. Отметим также, что согласно Капранову фактор Чжоу $X/\!/\,G$ доминирует все факторы геометрической теории инвариантов (GIT).

В работе [18] для фактора Чжоу $X/\!/\,G$ проективного многообразия X по редуктивной алгебраической группе G приведены различные интерпретации с точки зрения алгебраической геометрии, симплектической геометрии и топологии. Приведем топологическую интерпретацию фактора Чжоу $X/\!/\,G$, следуя работе [18]. Рассмотрим полярное разложение $G = K \cdot A$ связной группы G, где $K \subset G$ – максимальная компактная подгруппа и $A \subset G$ – вполне разрешимая подгруппа. Например, группа $(\mathbb{C}^*)^n$ имеет однозначное полярное разложение вида $(\mathbb{C}^*)^n = T^n \cdot \mathbb{R}^n_{>0}$. Замыкания A-орбит точек многообразия X называются многообразиями действия, и отображение моментов $\mu\colon X \to \mathbb{R}^{\dim K}$ задает взаимно однозначное соответствие между замыканиями $\overline{A \cdot x}$ и их образами $\mu(\overline{A \cdot x})$; многообразия действия для точек общего положения называются общими многообразиями действия. Вводится пространство модулей общих многообразий действия относительно действия группы K. Доказано, что компактификацию этого пространства модулей можно отождествить с фактором Чжоу $X/\!/\,G$. Точки нароста этой компактификации названы стабильными многообразиями действий. Стабильные многообразия действий задаются как объединения замыканий A-орбит максимальной размерности. Объединение многогранников моментов для орбит, соответствующих стабильным многообразиям действий, задает многогранник моментов многообразия X. Фактически описанная конструкция является обобщением результата Капранова (см. [19]) построения алгебраических циклов, дающих наросты при компактификации пространства параметров $W/(\mathbb{C}^*)^n$ в факторе Чжоу $G_{n,k}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ для главного страта $W \subset G_{n,k}$.

Как уже упомянуто выше, в центре внимания настоящей статьи находится универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ канонического T^n-действия на $G_{n,2}$. Мы даем явное описание этого пространства и доказываем, что его можно отождествить с фактором Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$. Таким образом, мы получаем описание фактора Чжоу в терминах комбинаторных и топологических понятий, которые мы ввели ранее для описания пространства орбит $G_{n,2}/T^n$. В конструкции Капранова (см. [19]) точки нароста при компактификации в терминах фактора Чжоу задаются максимальными алгебраическими циклами в $G_{n,2}$. В нашей статье мы идем дальше и показываем, что компоненты нароста в $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ можно явно описать в терминах нашего CW-комплекса допустимых многогранников и пространств параметров над ними. В нашем подходе ключевую роль играют кортежи $(n-1)$-мерных допустимых многогранников, которые задают полиэдральное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$. Мы детально сопоставляем полученное описание наростов с нашим описанием пространства $\mathcal{F}_n$ в случае фактора Чжоу $G_{5,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^5$. Центральным результатом нашей статьи является теорема 30, которая описывает компоненты нароста в факторе Чжоу в терминах камер в гиперсимплексе $\Delta_{n,2}$ и пространств параметров над ними.

§ 2. Пространство параметров F_n главного страта многообразия $G_{n,2}$

2.1. Вложение пространства F_n в $(\mathbb{C}P^1)^N$. Напомним понятия главного страта W_n в $G_{n,2}$ и его пространства параметров F_n из [2] и [3], которые понадобятся нам для дальнейшего изложения.

Главный страт $W_n \subset G_{n,2}$ характеризуется тем, что все его точки имеют ненулевые координаты Плюккера, из чего следует, что W_n принадлежит любой стандартной карте $M_{ij} = \{L \in G_{n,2} \mid P^{ij}(L) \neq 0\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, многообразия Грассмана $G_{n,2}$. Главный страт W_n инвариантен относительно канонического действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ и пространство орбит $F_n = W_n/(\mathbb{C}^*)^n$ называется пространством параметров страта W_n.

Без ограничения общности рассмотрим W_n как подпространство в M_{12}. Любую точку $L \in M_{12}$ можно представить в виде $(n \times 2)$-матрицы

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_3 & w_3 \\ \vdots & \vdots \\ z_n & w_n \end{pmatrix},$$

где $z_3, \ldots, z_n, w_3, \ldots, w_n$ – локальные координаты точки L в карте M_{12}. Точки $(\mathbb{C}^*)^n$-орбиты точки $L^0 = (z_3^0, \ldots, z_n^0, w_3^0, \ldots, w_n^0) \in W_n$ удовлетворяют уравнениям

$$c'_{ij} z_i w_j = c_{ij} z_j w_i, \qquad 3 \leqslant i < j \leqslant n, \tag{1}$$

где $c_{ij} = z_j^0 w_i^0$, $c'_{ij} = z_i^0 w_j^0$. Заметим, что $(c_{ij} : c'_{ij}) \in \mathbb{C}P^1$, причем $c_{ij}, c'_{ij} \neq 0$ и $c_{ij} \neq c'_{ij}$ для всех $3 \leqslant i < j \leqslant n$. Следовательно, главный страт W_n в карте M_{12} описывается системой уравнений (1) с параметрами $(c_{ij} : c'_{ij}) \in \mathbb{C}P^1$, где $c_{ij}, c'_{ij} \neq 0$ и $c_{ij} \neq c'_{ij}$ для всех $3 \leqslant i < j \leqslant n$.

Число параметров $(c_{ij} : c'_{ij})$ равно $N = \binom{n-2}{2}$, и из (1) следует, что эти параметры удовлетворяют $\binom{n-2}{3}$ уравнениям

$$c'_{ij} c_{ik} c'_{jk} = c_{ij} c'_{ik} c_{jk}, \qquad 3 \leqslant i < j < k \leqslant n. \tag{2}$$

Из (2) очевидно, что параметры $(c_{ij} : c'_{ij})$ удовлетворяют $M = \binom{n-3}{2}$ соотношениям

$$(c_{ij} : c'_{ij}) = (c'_{3i} c_{3j} : c_{3i} c'_{3j}), \qquad 4 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{3}$$

$$(c_{3i} : c'_{3i}) \neq (c_{3j} : c'_{3j}), \qquad 4 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем, что пространство F_n гомеоморфно пространству

$$F_n \cong (\mathbb{C}P^1_A)^{n-3} \setminus \Delta, \tag{5}$$

где $A = \{(0:1), (1:1), (1:0)\}$, $\mathbb{C}P^1_A = \mathbb{C}P^1 \setminus A$ и $\Delta = \bigcup_{3 \leqslant i < j \leqslant n} \Delta_{ij}$ – объединение диагоналей $\Delta_{ij} = \{((c_{34} : c'_{34}), \ldots, (c_{n-1,n} : c'_{n-1,n})) \in (\mathbb{C}P^1_A)^{n-3} \mid (c_{3i} : c'_{3i}) = (c_{3j} : c'_{3j})\}$. Уравнения (2) задают вложение пространства F_n в $(\mathbb{C}P^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$. Таким образом, получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пространство параметров F_n главного страта W_n задается уравнениями (2) как подпространство в $(\mathbb{C}P^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$.*

Более того, мы получаем, что F_n является открытым алгебраическим многообразием в $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$ и является пересечением кубических гиперповерхностей (2) при условии, что $(c'_{ij} : c_{ij}) \in \mathbb{C}P^1_A$. Заметим, что размерность многообразия F_n равна $2(n-3)$, т.е. равна в точности $2(N - M)$.

Предложение 3. *Компактификация $\overline{F}_n$ многообразия F_n в $(\mathbb{C}P^1)^N$ является гладким алгебраическим многообразием, заданным уравнениями*

$$\big\{((c_{ij}:c'_{ij}))_{3\leqslant i<j\leqslant n}\in(\mathbb{C}P^1)^N \mid c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}=c_{ij}c'_{ik}c_{jk},\ 3\leqslant i<j<k\leqslant n\big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим градиенты функций $f_{ijk}=c_{ij}c'_{ik}c_{jk}-c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$, которые задают многообразие $\overline{F}_n$. Можно непосредственно проверить, что в каждой точке этого многообразия существует $M=\binom{n-3}{2}$ линейно независимых векторов во множестве значений градиентов функций f_{ijk}. Отсюда следует, что $\overline{F}_n$ является гладким алгебраическим многообразием вещественной размерности $2(N-M)$, где $N=\binom{n-2}{2}$ и $M=\binom{n-3}{2}$. Предложение доказано.

2.2. Проблема компактификации пространства F_n. Наш подход к построению правильной компактификации пространства параметров F_n главного страта $W_n\subset G_{n,2}$ опирается на результаты наших работ [2] и [3], в которых получено описание топологии пространства орбит $G_{n,2}/T^n$. Используя координаты Плюккера, введем стратификацию многообразия Грассмана $G_{n,2}$ такую, что $G_{n,2}=\bigcup_\sigma W_\sigma$, где $\sigma\subset\{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\},\ i\neq j\}$ и

$$W_\sigma=\{L\in G_{n,2}\mid P^{ij}(L)\neq 0 \text{ только для } \{i,j\}\in\sigma\}\neq\varnothing.$$

Страты W_σ попарно не пересекаются, каждый из них $(\mathbb{C}^*)^n$-инвариантен и, следовательно, T^n-инвариантен. Таким образом, определена индуцированная стратификация пространства орбит

$$G_{n,2}/T^n=\bigcup_\sigma(W_\sigma/T^n).$$

Главный страт W_n является открытым всюду плотным множеством в $G_{n,2}$ и тор $T^{n-1}=T^n/S^1$ действует свободно на нем. В [2] мы доказали, что

$$W_n/T^n\cong\mathring{\Delta}_{n,2}\times F_n,$$

где $\Delta_{n,2}$ – гиперсимплекс.

Определение 4. Многогранник $P_\sigma\subset\Delta_{n,2}$, где

$$P_\sigma=\operatorname{convhull}\{\Lambda_{ij}=e_i+e_j\in\mathbb{R}^n,\ \{i,j\}\in\sigma\},$$

называется *допустимым* многогранником страта W_σ.

Для каждого страта W_σ определен гомеоморфизм

$$W_\sigma/T^n\cong\mathring{P}_\sigma\times F_\sigma,$$

где $F_\sigma=W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$. Так как главный страт W_n является открытым всюду плотным в $G_{n,2}$, то используя задающие его уравнения (1), получаем, что любому страту W_σ можно сопоставить подпространство $\widetilde{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_n$ для любой компактификации $\mathcal{F}_n$ пространства F_n. Наша конструкция пространства орбит $G_{n,2}/T^n$ требует найти компактификацию $\widehat{\mathcal{F}}_n$ для пространства F_n такую, что $\widehat{\mathcal{F}}_n = \bigcup_\sigma \widetilde{F}_\sigma$, где пространства $\widetilde{F}_\sigma$ обладают проекциями $p_\sigma\colon \widetilde{F}_\sigma \to F_\sigma$ для каждого страта W_σ. Для этого была использована следующая идея. Пусть страт W_σ лежит в карте M_{ij}, тогда для данной компактификации $\widehat{\mathcal{F}}_n$ ему можно сопоставить пространство $\widetilde{F}_{\sigma,ij} \subset \widehat{\mathcal{F}}_n$, используя тот факт, что W_σ/T^n лежит на границе пространства обит W_n/T^n. Компактификация $\widehat{\mathcal{F}}_n$ является искомой, если пространство $\widetilde{F}_{\sigma,ij}$ не зависит от выбора карты M_{ij} такой, что $W_\sigma \subset M_{ij}$.

В результате мы начали с рассмотрения описанного выше компактного гладкого многообразия $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, получили все соответствующие ему подпространства $\widetilde{F}_{\sigma,ij} \subset \overline{F}_n$ и нашли модификации $\widetilde{F}_\sigma$ этих пространств $\widetilde{F}_{\sigma,ij}$, не зависящие от выбора карты M_{ij}.

2.3. Автоморфизмы пространства F_n, индуцированные заменами координат. Главный страт W_n лежит в пересечении стандартных карт и в каждой карте получает описание в терминах координат Плюккера. Уравнения (1) и (2) дают это описание в координатах карты M_{12}. Отождествляя пространство W_n с его описаниями в картах M_{ij}, $i < j$, мы получаем, что отображения перехода из одной карты в другую индуцируют автоморфизмы пространства параметров F_n главного страта W_n.

Приведем явное описание автоморфизмов пространства F_n, индуцированных отображениями перехода из карты M_{12} в карту M_{ij}, $i<j$, $\{1,2\} \neq \{i,j\}$. Обозначим локальные координаты точки в карте M_{12} через

$$z_3, \dots, z_n, w_3, \dots, w_n$$

и через

$$z'_1, \dots, z'_{i-1}, z'_{i+1}, \dots, z'_{j-1}, z'_{j+1}, \dots, z'_n,$$
$$w'_1, \dots, w'_{i-1}, w'_{i+1}, \dots, w'_{j-1}, w'_{j+1}, \dots, w'_n$$

локальные координаты точки в карте M_{ij}.

Далее, пусть $(c_{pq} : c'_{pq})$, $3 \leqslant p < q \leqslant n$, – координаты точки пространства F_n в карте M_{12} и $(d_{kl} : d'_{kl})$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $k,l \neq i,j$, – координаты этой же точки в карте M_{ij}.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $i = 1$ и $3 \leqslant j \leqslant n$, т.е. рассмотрим карту M_{1j}. Тогда мы имеем

$$z'_2 = -\frac{z_j}{w_j}, \qquad z'_k = \frac{z_k w_j - z_j w_k}{w_j}, \quad k \geqslant 3, \tag{6}$$
$$w'_2 = \frac{1}{w_j}, \qquad w'_k = \frac{w_k}{w_j}, \quad k \geqslant 3.$$

Лемма 5. *Координаты $(c_{pq} : c'_{pq})$ и $(d_{kl} : d'_{kl})$ точки пространства параметров F_n в картах M_{12} и M_{1j}, $3 \leqslant j \leqslant n$, соответственно связаны соотношениями*

$$(d_{2l} : d'_{2l}) = (c_{jl}; c_{jl} - c'_{jl}), \qquad 3 \leqslant l \leqslant n, \quad l \neq j,$$
$$(d_{kl} : d'_{kl}) = (c_{jl}(c_{jk} - c'_{jk}) : c_{jk}(c_{jl} - c'_{jl})), \qquad 3 \leqslant k < l \leqslant n, \quad k,l \neq j.$$

Втрое соотношение можно переписать в виде

$$(d_{kl} : d'_{kl}) = (c_{kl}c'_{jl}(c_{jk} - c'_{jk}) : c'_{kl}c'_{jk}(c_{jl} - c'_{jl})).$$

Доказательство. В карте M_{1j} главный страт записывается уравнениями

$$d'_{kl}z'_k w'_l = d_{kl}z_l w_k, \qquad 2 \leqslant k < l \leqslant n, \quad k, l \neq j.$$

Подставляя соотношения (6) в эти уравнения, получаем

$$-d'_{2l}\frac{z_j}{w_j}\,\frac{w_l}{w_j} = d_{2l}\frac{z_l w_j - z_j w_l}{w_j}\,\frac{1}{w_j}.$$

Следовательно,

$$d'_{2l} = -d_{2l}\left(\frac{z_l w_j}{z_j w_l} - 1\right) = d_{2l}\left(1 - \frac{c'_{jl}}{c_{jl}}\right).$$

Таким образом,

$$(d_{2l} : d'_{2l}) = (c_{jl} : c_{jl} - c'_{jl}).$$

Для $k \geqslant 3$ аналогичным образом получаем

$$d'_{kl}w_l(z_k w_j - z_j w_k) = d_{kl}w_k(z_l w_j - z_j w_l).$$

Следовательно,

$$d'_{kl} = d_{kl}\frac{w_k}{w_l}\,\frac{z_j w_l(c'_{jl}/c_{jl} - 1)}{z_j w_k(c'_{jk}/c_{jk} - 1)}.$$

Таким образом,

$$(d_{kl} : d'_{kl}) = (c_{jl}(c'_{jk} - c_{jk}) : c_{jk}(c'_{jl} - c_{jl})).$$

Лемма доказана.

2) $i = 2$ и $3 \leqslant j \leqslant n$, т.е. рассмотрим карту M_{2j}. Тогда мы имеем

$$z'_1 = -\frac{w_j}{z_j}, \qquad z'_k = \frac{z_j w_k - z_k w_j}{z_j}, \quad k \geqslant 3,$$
$$w'_1 = \frac{1}{z_j}, \qquad w'_k = \frac{z_k}{z_j}, \quad k \geqslant 3.$$

Подставляя эти уравнения в уравнения главного страта в координатах карты M_{2j}, мы получаем следующую лемму.

Лемма 6. *Координаты* $(c_{pq} : c'_{pq})$ *и* $(d_{kl} : d'_{kl})$ *точки пространства параметров* F_n *в картах* M_{12} *и* M_{2j}, $3 \leqslant j \leqslant n$, *соответственно связаны соотношениями*

$$\begin{aligned}
(d_{1l} : d'_{1l}) &= (c'_{jl}; c'_{jl} - c_{jl}), \qquad 3 \leqslant l \leqslant n, \quad l \neq j,\\
(d_{kl} : d'_{kl}) &= (c'_{jl}(c_{jk} - c'_{jk}) : c'_{jk}(c_{jl} - c'_{jl}))\\
&= (c_{jl}c'_{kl}(c_{jk} - c'_{jk}) : c_{jk}c_{kl}(c_{jl} - c'_{jl})), \qquad 3 \leqslant k < l \leqslant n, \quad k, l \neq j.
\end{aligned}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.

3) $3 \leqslant i < j \leqslant n$, т.е. рассмотрим карту M_{ij}. Тогда мы имеем

$$z'_1 = \frac{w_j}{z_i w_j - z_j w_i}, \qquad z'_2 = -\frac{z_j}{z_i w_j - z_j w_i}, \qquad z'_k = \frac{z_k w_j - z_j w_k}{z_i w_j - z_j w_i}, \quad k \geqslant 3.$$
$$w'_1 = \frac{w_i}{z_j w_i - z_i w_j}, \qquad w'_2 = -\frac{z_i}{z_j w_i - z_i w_j}, \qquad w'_k = \frac{z_k w_i - z_i w_k}{z_j w_i - z_i w_j}, \quad k \geqslant 3.$$

Для координат точек пространства параметров F_n в этой карте мы получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Координаты $(c_{kl} : c'_{kl})$ и $(d_{kl} : d'_{kl})$ точки пространства параметров F_n в картах M_{12} и M_{ij}, $3 \leqslant i < j \leqslant n$, соответственно связаны соотношениями*

$$\begin{gathered}
(d_{12} : d'_{12}) = (c_{ij} : c'_{ij}), \\
(d_{1l} : d'_{1l}) = (c'_{jl}(c_{il} - c'_{il}) : c'_{il}(c_{jl} - c'_{jl})), \qquad 3 \leqslant l \leqslant n, \quad l \neq i, j, \\
(d_{2l} : d'_{2l}) = (c_{jl}(c_{il} - c'_{il}) : c_{il}(c_{jl} - c'_{jl})), \qquad 3 \leqslant l \leqslant n, \quad l \neq i, j, \\
\begin{aligned}
(d_{kl} : d'_{kl}) &= ((c'_{jk} - c_{jk})(c_{il} - c'_{il})c'_{ik}c'_{jl} : (c_{ik} - c'_{ik})(c_{jl} - c'_{jl})c'_{jk}c'_{il}) \\
&= ((c_{jk} - c'_{jk})(c_{il} - c'_{il})c_{ik}c'_{jl}c_{kl} : (c_{ik} - c'_{ik})(c_{jl} - c'_{jl})c'_{jk}c_{il}c'_{kl}),
\end{aligned} \\
3 \leqslant k < l \leqslant n, \quad k, l \neq i, j.
\end{gathered}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.

Замечание 8. Таким образом, мы получили семейство $\{f_{12,ij}\}$, где $i = 1$, $j \geqslant 3$ или $2 \leqslant i < j \leqslant n$, гомеоморфизмов пространства F_n, заданных переходом из карты M_{12} в карту M_{ij}. Любой гомеоморфизм $f_{kl,pq}$ пространства F_n, индуцированный отображением перехода из карты M_{kl} в карту M_{pq}, можно представить в виде $f_{kl,pq} = f_{12,pq} \circ f^{-1}_{12,kl}$.

§ 3. Конструкция пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$ методом замечательной компактификации

Мы хотим найти компактификацию $\widehat{\mathcal{F}}_n$ пространства F_n такую, чтобы гомеоморфизмы $\{f_{12,ij}\}$ пространства F_n, индуцированные отображениями перехода из карты M_{12} в карты M_{ij}, продолжались до гомеоморфизмов пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$. Согласно замечанию 8 достаточно рассмотреть только семейство $\{f_{12,ij}\}$, так как тогда любой гомеоморфизм $f_{kl,pq}$ пространства F_n, индуцированный отображением перехода из карты M_{kl} в карту M_{pq}, может быть канонически продолжен до гомеоморфизма пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$.

3.1. Компактификация $\overline{F}_n$ пространства F_n в $(\mathbb{C}P^1)^N$. Рассмотрим пространство $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$, заданное уравнениями

$$\overline{F}_n = \{((c_{ij} : c'_{ij})),\ 3 \leqslant i < j \leqslant n,\ c_{ik}c'_{il}c_{kl} = c'_{ik}c_{il}c'_{kl},\ 3 \leqslant i < k < l \leqslant n\},$$

которое согласно утверждению 3 является гладким алгебраическим многообразием и представляет собой компактификацию пространства F_n в $(\mathbb{C}P^1)^N$.

Компактификация $\overline{F}_n$ не удовлетворяет нашим требованиям, так как очевидно, что гомеоморфизмы пространства F_n, описанные в предыдущих леммах, для $n > 4$ не могут быть непрерывно продолжены на пространство $\overline{F}_n$. Заметим, что для $n = 4$ эти гомеоморфизмы продолжаются до гомеоморфизмов пространства $\overline{F}_4 = \mathbb{C}P^1$.

Более детально, границей пространства F_n в $\overline{F}_n$ является пространство $\overline{F}_n \setminus F_n$, которое состоит из точек $(c_{ij} : c'_{ij}) \in \overline{F}_n$ таких, что либо $c_{ij} = 0$, либо $c'_{ij} = 0$, либо $c_{ij} = c'_{ij}$ для некоторых $3 \leqslant i < j \leqslant n$. Гомеоморфизмы, описанные в предыдущих леммах, нельзя непрерывно продолжить на граничные точки пространства F_n такие, что $c_{jk} = c'_{jk}$ и $c_{jl} = c'_{jl}$ для некоторых $3 \leqslant j < k < l \leqslant n$. Более того, даже в том случае, когда эти гомеоморфизмы можно продолжить на некоторое подмножество границы $\overline{F}_n \setminus F_n$, то эти продолжения не являются гомеоморфизмами. Например, подмногообразие в $\overline{F}_n \setminus F_n$, заданное уравнениями $c'_{34} = c'_{35} = 0$, отображается при непрерывном продолжении гомеоморфизма $f_{12,13}$, описанного в лемме 5 для $j = 3$, в подмногообразие, заданное уравнениями $d_{24} = d'_{24}$, $d_{25} = d'_{25}$ и $d_{45} = d'_{45}$. В частности, при $n = 5$ это означает, что подмногообразие $((1 : 0), (1 : 0), (c_{45} : c'_{45}))$ отображается в точку $((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1))$, см. также [2]. Таким образом, это расширение не является гомеоморфизмом.

Подмногообразие в $\overline{F}_n$, состоящее из всех точек, на которые не продолжаются гомеоморфизмами отображения $\{f_{12,ij}\}$, назовем *особым* для $\{f_{12,ij}\}$. Наш подход для преодоления описанных выше трудностей заключается в применении раздутия (сигма-процесса) гладкого компактного многообразия $\overline{F}_n$ вдоль подмногообразия, особого для $\{f_{12,ij}\}$. Мы реализуем этот подход, используя технику, известную в алгебраической геометрии как замечательная компактификация вдоль конфигурации подмногообразий.

3.2. Основные факты о замечательной компактификации. Пусть дано гладкое комплексное многообразие X и его подмногообразие, которое в определенном смысле считается особым. *Замечательной компактификацией* многообразия X называется гладкое компактное многообразие $\widetilde{X}$, которое разрешает особенности многообразия X вдоль этого особого подмногообразия. Более точно, гладкая компактификация $\widetilde{X}$ комплексного многообразия X называется замечательной, когда $D = \widetilde{X} \setminus X$ является дивизором с нормальными пересечениями в $\widetilde{X}$, неприводимые компоненты которого гладкие, и любое число неприводимых компонент связности дивизора D пересекаются трансверсально.

В литературе встречается несколько примеров замечательных компактификаций. Прежде всего упомянем компактификацию симметрических пространств, данную де Кончини и Прочези в [7], в которой X – симметрическое пространство G/H присоединенной полупростой группы Ли, а $\widetilde{X}$ – гладкое компактное многообразие с G-действием такое, что $\widetilde{X}$ имеет открытую орбиту, изоморфную пространству G/H, имеет всего конечное число G-орбит, при этом все замыкания орбит гладкие и в любом наборе замыкания орбит пересекаются трансверсально. Другим примером является компактификация конфигурационных пространств, данная Фултоном и Макферсоном в [13], в которой X – открытое подмножество декартова произведения M^n данного неособого многообразия M (т.е. X определяется как дополнение к множеству всех диагоналей), а $\widetilde{X}$ определяется последовательностью раздутий произведения M^n вдоль неособых подмногообразий, представляющих все диагонали. Примером замечательной компактификации является также компактификация конфигурации дополнений линейных подпространств, полученная также де Кончини и Прочези в [8], в которой X – конечномерное векторное пространство, а $\widetilde{X}$ получается заменой любого данного семейства его подпространств дивизором с нормальными пересечениями. В недавней статье Ли [27] описана замечательная компактификация, определенная данной конфигурации подмногообразий, и в этом случае X является неособым многообразием, а $\widetilde{X}$ получается заменой конфигурации любого набора из данных подмногообразий на дивизор с нормальными пересечениями. Доказано, что любая из перечисленных выше компактификаций может быть построена последовательным применением операций раздутия вдоль соответствующих подмногообразий и преобразованиями результатов этих раздутий.

Напомним основные факты о замечательной компактификации, необходимые для изложения наших результатов, следуя статье Ли [27]. Пусть Y – неособое многообразие. Говорят, что подмногообразия $S_1, \ldots, S_k$ в Y пересекаются трансверсально, если $k = 1$, а в случае $k > 1$ для любой точки $p \in \bigcap_{i=1}^{k} S_i$ выполняется равенство

$$T_pS_1 + \cdots + T_pS_k = T_pY.$$

В этом случае

$$\operatorname{codim}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} T(S_i), T(Y)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{codim}(S_i, Y).$$

Определение 9. Конфигурацией подмногообразий в Y называется конечное множество $\mathcal{S} = \{S_i\}$ неособых собственных замкнутых подмногообразий $S_i \subset Y$, удовлетворяющих следующим условиям.

(1) Пересечение $S_i \cap S_j$ либо равно некоторому S_k, либо пусто.

(2) Каждое непустое пересечение многообразий S_i и S_j является *чистым*, т.е. неособым, и для касательных расслоений выполняется соотношение

$$T(S_i \cap S_j) = T(S_i)|_{S_i\cap S_j} \cap T(S_j)|_{S_i\cap S_j}.$$

Определение 10. Пусть $\mathcal{S}$ – некоторая конфигурация подмногообразий в Y. Подмножество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ называется *производящим множеством* для $\mathcal{S}$, если для любого $S \in \mathcal{S}$ множество минимальных элементов в $\{G \in \mathcal{G} \colon S \subseteq G\}$ пересекаются трансверсально, и их пересечением является S. Такие минимальные элементы называются $\mathcal{G}$-факторами множества S.

Конечное множество $\mathcal{G}$ неособых подмногообразий в Y называется *производящим множеством*, если множество всех возможных пересечений наборов подмногообразий из $\mathcal{G}$ образует конфигурацию $\mathcal{S}$ и если $\mathcal{G}$ является производящим множеством для $\mathcal{S}$. Такая конфигурация $\mathcal{S}$ называется индуцированной множеством $\mathcal{G}$.

Определение 11. Подмножество $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$ называется *$\mathcal{G}$-гнездом* ($\mathcal{G}$-nest), если существует флаг элементов в конфигурации $\mathcal{S}\colon S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_\ell$ такой, что выполняется одно из следующих эквивалентных условий.

(1) Выполнено равенство

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{A\colon A \text{ пробегает } \mathcal{G}\text{-факторы множества } S_i\}.$$

Такое множество $\mathcal{T}$ называется *индуцированным флагом* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_\ell$.

(2) Пусть $A_1, \dots, A_k$ – элементы, минимальные в $\mathcal{T}$, тогда все они являются $\mathcal{G}$-факторами некоторого элемента из $\mathcal{S}$. Для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ множество $\{A \in \mathcal{T}\colon A \supsetneq A_i\}$ также является $\mathcal{G}$-гнездом, которое определяется по индукции.

Отметим, что условие (2) требует, чтобы каждое множество $\mathcal{T} \setminus A_i$ было $\mathcal{G}$-гнездом, согласно последовательному применению данного определения.

Определение 12. Пусть Y – неособое многообразие, $\mathcal{G}$ – непустое производящее множество и $Y^\circ = Y \setminus \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$. Замыкание образа замкнутого диагонального вложения

$$Y^\circ \hookrightarrow \prod_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{Bl}_G Y$$

называется *замечательной компактификацией* с производящим множеством $\mathcal{G}$ и обозначается $Y_\mathcal{G}$.

Сформулируем две ключевые теоремы из [27]: первая утверждает, что замечательная компактификация $Y_\mathcal{G}$ является неособым многообразием, а вторая описывает компактификацию $Y_\mathcal{G}$ как результат серии раздутий, определенных производящим множеством $\mathcal{G}$.

Теорема 13. *Пусть Y – неособое многообразие, а $\mathcal{G}$ – непустое производящее множество подмногообразий в Y. Тогда замечательная компактификация $Y_\mathcal{G}$ является неособым многообразием. Более того, для любого $G \in \mathcal{G}$ существует неособый дивизор $D_G \subset Y_\mathcal{G}$ такой, что*:

(1) *объединением дивизоров D_G является $Y_\mathcal{G} \setminus Y^\circ$*;

(2) *любой набор дивизоров D_G пересекается трансверсально*; *пересечение дивизоров $D_{G_1} \cap \dots \cap D_{G_r}$ непусто тогда и только тогда*, *когда $\{G_1, \dots, G_r\}$ образуют $\mathcal{G}$-гнездо.*

Напомним понятие, связанное с операцией раздутия, необходимое для формулировки следующей теоремы.

Определение 14. Пусть Z – неособое подмногообразие неособого многообразия Y и $\mathrm{Bl}_Z Y$ – раздутие многообразия Y вдоль Z. Обозначим через $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z Y \to Y$ каноническую проекцию. Для любого неприводимого подмногообразия $V \subset Y$ его *доминантное преобразование* $\widetilde{V}$ описывается следующим образом:

– пусть $V \not\subseteq Z$, тогда $\widetilde{V}$ определяется как замыкание множества $\pi^{-1}(V \setminus (V \cap Z))$ в $\mathrm{Bl}_Z Y$ и называется строгим преобразованием многообразия V;

– пусть $V \subseteq Z$, тогда $\widetilde{V}$ определяется как $\pi^{-1}(V)$ в смысле теории схем.

Основанием для введения данного понятия доминантного преобразования послужил тот факт, что собственный прообраз подмногообразия, содержащегося в центре раздутия, пуст. В наших приложениях всегда будет выполняться условие $V \not\subset Z$, поэтому $\widetilde{V}$ всегда будет строгим преобразованием.

Теорема 15. *Пусть Y – неособое многообразие и $\mathcal{G}$ – непустое производящее множество подмногообразий в Y. Пусть производящее множество $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_Q\}$ упорядочено так, что множества подмногообразий $\{G_1, \dots, G_i\}$ образуют производящее множество для любого $1 \leqslant i \leqslant Q$. Тогда последовательное применение раздутий дает гладкое многообразие*

$$X_{\mathcal{G}} = \mathrm{Bl}_{\widetilde{G}_Q} \cdots \mathrm{Bl}_{\widetilde{G}_2} \mathrm{Bl}_{G_1} Y,$$

где $\widetilde{G}_i$ – неособое многообразие, полученное в результате итерации доминантных преобразований многообразия G_i в $\mathrm{Bl}_{\widetilde{G}_{i-1}} \cdots \mathrm{Bl}_{\widetilde{G}_2} \mathrm{Bl}_{G_1} Y$, $2 \leqslant i \leqslant Q$. Гладкое многообразие $X_{\mathcal{G}}$ совпадает с замечательной компактификацией $Y_{\mathcal{G}}$.

Обратим внимание на следующий факт, который понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 16. *Пусть конечное множество неособых подмногообразий $\mathcal{G}$ неособого многообразия Y удовлетворяет следующим условиям:*

- *$\mathcal{G}$ содержит все пересечения своих элементов;*
- *любые два элемента из $\mathcal{G}$ пересекаются чисто.*

Тогда $\mathcal{G}$ является производящим множеством.

Доказательство. В условиях леммы множество $\mathcal{G}$ является конфигурацией с производящим множеством $\mathcal{G}$, так как любое множество $S \in \mathcal{G}$ является наименьшим элементом множества $\{G \in \mathcal{G} \mid S \subseteq G\}$. Лемма доказана.

Дадим теперь краткий комментарий к доказательству теоремы 15, см. [27], которое существенно опирается на следующий результат, доказанный также в [27].

Пусть Y – неособое многообразие и F – минимальный элемент в производящем множестве $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_N\}$, индуцированном конфигурацией $\mathcal{S}$, и E – исключительный дивизор в раздутии $\mathrm{Bl}_F Y$. Тогда набор подмногообразий $\widetilde{\mathcal{S}}$ в $\mathrm{Bl}_F Y$ такой, что

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \{\widetilde{S}\}_{S \in \mathcal{S}} \cup \{\widetilde{S} \cap E\}_{\varnothing \neq S \cap F \subsetneq S},$$

является конфидурацией подмногообразий в $\mathrm{Bl}_F Y$ и $\widetilde{\mathcal{G}} = \{\widetilde{G}\}_{G \in \mathcal{G}}$ является производящим множеством в $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Приведем план доказательства теоремы 15. Используя частичный порядок по вложению подмногообразий из множества $\mathcal{G}$, найдем минимальное подмногообразие $F \subset Y$ и проведем раздутие многообразия Y вдоль F. Затем, опираясь на сформулированный выше результат, последовательно повторим процедуру раздутия с доминантным преобразованием $\widetilde{\mathcal{G}}$ множества $\mathcal{G}$ в $\mathrm{Bl}_F Y$.

3.3. Пространство $\widehat{\mathcal{F}}_n$ как замечательная компактификация, основанная на $\overline{F}_n$. Рассмотрим многообразие $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, описанное в предложении 3. Положим

$$\widehat{F}_I = \overline{F}_n \cap \{(c_{ik} : c'_{ik}) = (c_{il} : c'_{il}) = (c_{kl} : c'_{kl}) = (1:1)\} \tag{7}$$

для $I = \{i,k,l\} \in \{I \subset \{1,\dots,n\},\ |I| = 3\}$ и $n \geqslant 5$.

Возьмем $Y = \overline{F}_n$ и рассмотрим множества $\mathcal{G}_n$:

• $\mathcal{G}_n = \varnothing$ для $n = 4$;

• $\mathcal{G}_n = \{G = \bigcap_I \widehat{F}_I \subset \overline{F}_n\}$ содержит все возможные непустые пересечения многообразий $\widehat{F}_I$.

Обозначим через $\widehat{F}_{I_1,\dots,I_k}$ элемент $G \in \mathcal{G}_n$ вида $G = \widehat{F}_{I_1} \cap \dots \cap \widehat{F}_{I_k}$.

Лемма 17. *Множества $\mathcal{G}_n$ являются производящими.*

Доказательство. Любое пересечение элементов из $\mathcal{G}_n$ принадлежит множеству $\mathcal{G}_n$. Множество $\mathcal{G}_n$ является конфигурацией, так как очевидно, что пересечение двух элементов множества $\mathcal{G}_n$ либо пусто, либо принадлежит множеству $\mathcal{G}_n$, и любые два элемента пересекаются чисто. Это вытекает из описания подмногообразий $F_{I_1,\dots,I_k} \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, заданных уравнениями (2), и из того факта, что для $S_1 = \widehat{F}_{I_{i_1},\dots I_{i_k}}$, $S_2 = \widehat{F}_{I_{j_1},\dots I_{j_l}} \in \mathcal{S}$ верно равенство

$$S_1 \cap S_2 = \widehat{F}_{I_{i_1},\dots,I_{i_k},I_{j_1},\dots,I_{j_l}}.$$

Используя теперь лемму 16, получаем, что $\mathcal{G}_n$ является производящим множеством. Лемма доказана.

Далее докажем, что производящие множества $\mathcal{G}_n$ удовлетворяют условию теоремы 15.

Лемма 18. *Каждое введенное выше производящее множество $\mathcal{G}_n$ может быть упорядочено в виде $\mathcal{G}_n = \{G_1,\dots,G_Q\}$ таким образом, что наборы подмногообразий $\{G_1,\dots,G_i\}$ образуют производящие множества для любого $1 \leqslant i \leqslant Q$.*

Доказательство. Элементу $G = \widehat{F}_{I_1,\dots,I_k} \in \mathcal{G}_n$ поставим в соответствие число $\mathfrak{o}(G)$, равное количеству координат точек многообразия $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, которые определяются множеством $I_1 \cup \dots \cup I_k$. Другими словами, $\mathfrak{o}(G)$ – это число координат вида $(1:1)$, общих для всех точек из G.

Используя уравнения (2) и формулу (7), получаем, например, что если $k = 2$ и $I_1 = \{3,4,5\}$, $I_2 = \{3,4,6\}$, то $\mathfrak{o}(G) = 6$, а для $I_1 = \{3,4,5\}$, $I_2 = \{3,6,7\}$ мы имеем, что $\mathfrak{o}(G) = 10$. Отметим, что в случае $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ всегда имеем $\mathfrak{o}(G) = 6$.

Определим отношение эквивалентности на $\mathcal{G}_n$ следующим образом: G_1 и G_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{o}(G_1) = \mathfrak{o}(G_2)$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{G}}_1,\dots,\widetilde{\mathcal{G}}_m$ соответствующие классы эквивалентности. Упорядочим эти классы эквивалентности в обратном порядке относительно значений чисел $\mathfrak{o}(\widetilde{\mathcal{G}}_i)$, т.е. $\widetilde{\mathcal{G}}_i < \widetilde{\mathcal{G}}_j$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{o}(\widetilde{\mathcal{G}}_i) > \mathfrak{o}(\widetilde{\mathcal{G}}_j)$. Отсюда вытекает, что класс $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ содержит только точку $(1:1)^N$, тогда как $\widetilde{\mathcal{G}}_m$ состоит из всех множеств $\widehat{F}_I$.

Далее упорядочим элементы исходного множества $\mathcal{G}_n$ следующим образом: сначала ставим $G_1 = (1:1)^N$, затем ставим элементы из $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ в произвольном порядке, после этого ставим элементы из $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ в произвольном порядке и так далее, в конце ставим элементы из $\widetilde{\mathcal{G}}_m$, т.е. множества $\widehat{F}_I$ в произвольном порядке. Таким образом, мы получаем упорядоченное множество $\mathcal{G}_n = \{G_1, \dots, G_Q\}$. Элементы этого множества пересекаются чисто, поэтому множества $\{G_1, \dots, G_i\}$ являются производящими для любого $1 \leqslant i \leqslant Q$. Лемма доказана.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}_n$ гладкое компактное многообразие $Y_{\mathcal{G}}$, которое является замечательной компактификацией с производящим множеством $\mathcal{G} = \mathcal{G}_n$ и $Y = \overline{F}_n$.

Замечание 19. При $n = 5$ производящее множество $\mathcal{G}_5$ состоит из одной точки $P = ((1:1),(1:1),(1:1))$, и, следовательно, $\widehat{\mathcal{F}}_5 = \mathrm{Bl}_P\, \overline{F}_5$, ср. с описанием в [3]. При $n = 6$ описание многообразия $\widehat{\mathcal{F}}_6$ более сложное и его получение позволило нам продемонстрировать общий подход, см. пример 4.18 из [5] и п. 4.2 настоящей работы.

Итак, для каждого n мы построили гладкое многообразие $F_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, которое является открытым подмножеством в $\overline{F}_n \subset (\mathbb{C}P^1)^N$, и выбрали группу автоморфизмов $\mathcal{A} = \{f_{ij,kl}\}$ пространства параметров F_n главного страта W_n, которые индуцированы отображениями перехода из карт M_{ij} в карты M_{kl} многообразия $G_{n,2}$. Покажем, что эта компактификация $\widehat{\mathcal{F}}_n$ многообразия F_n обладает требуемым свойством, о котором написано во введении.

Теорема 20. *Гомеоморфизмы многообразия F_n из множества $\mathcal{A}$ продолжаются до гомеоморфизмов многообразия $\widehat{\mathcal{F}}_n$.*

Доказательство. Так как $f_{ij,kl} = f_{12,kl} \circ f_{12,ij}^{-1}$, то достаточно доказать теорему только для гомеоморфизмов $f_{12,ij}$. Проведем доказательство для гомеоморфизмов $f_{12,1j}$, описанных в лемме 5. В остальных случаях доказательство аналогично.

Обсудим сначала задачу продолжения гомеоморфизмов $f_{12,ij}$ на границу $\overline{F}_n \backslash F_n$. Эта граница задается условиями или $(c_{kl} : c'_{kl}) = (1:0)$, или $(0:1)$, или $(1:1)$ для некоторых $3 \leqslant k < l \leqslant n$. Проведем анализ каждого из этих случаев, используя уравнения $c_{kl}c'_{kp}c_{lp} = c'_{kl}c_{kp}c'_{lp}$, определяющие многообразия $\overline{F}_n$, и выражения для гомеоморфизмов $f_{12,1j}$, полученные в лемме 5.

• Пусть $k \neq j$. Для $c'_{kl} = 0$ мы имеем, что либо $c'_{kp} = 0$, либо $c_{lp} = 0$, откуда следует, что $d'_{kl} = 0$ и либо $d'_{kp} = 0$, либо $d_{lp} = 0$. Для $c_{kl} = 0$ мы имеем, что либо $c_{kp} = 0$, либо $c'_{lp} = 0$, и, следовательно, $d_{kl} = 0$ и либо $d_{kp} = 0$, либо $d'_{lp} = 0$. Для $c_{kl} = c'_{kl}$ мы имеем $(c_{lp} : c'_{lp}) = (c_{kp} : c'_{kp})$, откуда следует, что $d_{kl} = d'_{kl}$ и$(d_{lp} : d'_{lp}) = (d_{kp} : d'_{kp})$.

• Пусть $k = j$. Если $c_{jl} = c_{jp} = 0$, то $d_{2l} = d_{2p} = 0$, а если $c_{jl} = c'_{lp} = 0$, то $d_{2l} = d'_{lp} = 0$. Если $c'_{jl} = c'_{jp} = 0$, то в качестве точки $(c_{lp} : c'_{lp})$ можно взять произвольную точку многообразия $\mathbb{C}P^1$, так как мы имеем, что $(d_{2l} : d'_{2l}) = (d_{2p} : d'_{2p}) = (d_{lp} : d'_{lp}) = (1:1)$.

Заметим, что в этом случае гомеоморфизм $f_{12,1j}$ продолжается на такие точки границы, но это продолжение уже не будет гомеоморфизмом. Если $c'_{jl} = c_{lp} = 0$, то $d_{2l} = d'_{2l}$ и $d_{lp} = 0$. В случае $c_{jl} = c'_{jl}$ мы имеем, что $(c_{lp} : c'_{lp}) = (c_{jp} : c'_{jp})$, откуда следует, что $d'_{2l} = 0$ и $(d_{lp} : d'_{lp}) = (d_{jp} : d'_{jp})$.

Суммируя вышесказанное, мы приходим к выводу, что гомеоморфизм $f_{12,1j}$ нельзя непрерывно продолжить на подмногообразия $\widehat{F}_I \subset \overline{F}_n \setminus F_n$, $I = \{j, l, p\}$, заданные уравнениями $(c_{jl} : c'_{jl}) = (c_{jp} : c'_{jp}) = (c_{lp} : c'_{lp}) = (1 : 1)$, и что гомеоморфизм $f_{12,1j}$ может быть непрерывно, но не в качестве гомеоморфизма, продолжен на подмногообразия $\breve{F}_I \subset \overline{F}_n \setminus F_n$, $I = \{j, l, p\}$, т.е. на семейство подмногообразий, состоящее из всех возможных непустых пересечений подмногообразий, заданных уравнениями $(c_{jl}; c'_{jl}) = (c_{jp} : c'_{jp}) = (1 : 0)$. Обозначим через $\mathcal{G}(j)$ семейство подмногообразий, состоящее из всех возможных непустых пересечений подмногообразий $\widehat{F}_I$, и через $\mathcal{H}(j)$ семейство подмногообразий, состоящее из всех возможных непустых пересечений подмногообразий $\breve{F}_I$. Из предыдущего описания мы видим, что отображение $f_{12,1j}$ непрерывно гомеоморфно продолжается на дополнение в $\overline{F}_n$ объединения подмногообразий из семейств $\mathcal{G}(j)$ и $\mathcal{H}(j)$, т.е. на $\overline{F}_n \setminus (\mathcal{G}(j) \cup \mathcal{H}(j))$.

Более того, заметим, что прообразом каждого подмногообразия $\widehat{F}_I$ при этих продолжениях гомеоморфизма $f_{12,1j}$ является подмногообразие $\breve{F}_I$.

Продолжим теперь гомеоморфизм $f_{12,1j}$ до гомеоморфизма $\widetilde{f}_{12,1j} \colon \widehat{\mathcal{F}}_n \to \widehat{\mathcal{F}}_n$ следующим образом.

• На дополнении к объединению подмногообразий из $\mathcal{G}(j)$ и $\mathcal{H}(j)$ отображение $\widetilde{f}_{12,1j}$ задается описанным выше гомеоморфным расширением гомеоморфизма $f_{12,1j}$.

• Пусть $\widetilde{S} \in \mathcal{H}(j)$, тогда $\widetilde{S} = \widetilde{F}_{I_1} \cap \dots \cap \widetilde{F}_{I_k}$ для некоторых $I_1, \dots, I_k \subset \{I \subset \{1, \dots, n\},\ |I| = 3,\ j \in I\}$. Пусть $\widehat{S} \in \mathcal{G}(j)$ имеет вид $\widehat{S} = \widehat{F}_{I_1} \cap \dots \cap \widehat{F}_{I_k}$. Тогда определим $\widetilde{f}_{12,1j}$ как отображение, которое гомеоморфно переводит $\widetilde{S}$ в исключительный дивизор $E(\widehat{S}) \subset \widehat{\mathcal{F}}_n$ для $\widehat{S}$. Ясно, как построить это отображение, используя предыдущее описание продолжения отображения $f_{12,1j}$ на подмногообразия $\breve{F}_{(j,l,p)}$.

• Пусть $E(\widehat{S}) \subset \widehat{\mathcal{F}}_n$ – исключительный дивизор для $\widehat{S} \in \mathcal{G}(j)$, где $\widehat{S} = \widehat{F}_{I_1} \cap \dots \cap \widehat{F}_{I_k}$, $I_1, \dots, I_k \in \{I \subset \{1, \dots, n\},\ |I| = 3,\ j \in I\}$. Определим $\widetilde{f}_{12,1j}$ как гомеоморфизм из $E(\widehat{S})$ в $\widetilde{S} = \widetilde{F}_{I_1} \cap \dots \cap \widetilde{F}_{I_k}$, обратный к построенному выше гомеоморфизму $\widetilde{f}_{12,1j} : \widetilde{S} \to E(\widehat{S})$.

Теорема доказана.

3.4. Пространство $\widehat{\mathcal{F}}_n$ как универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$. Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}$ для $(2n, k)$-многообразия с эффективным T^k-действием введено и аксиоматизировано в [3]. Детальное изложение аксиом и комментарии к ним см. в [3]. Приведем краткую формулировку аксиомы, определяющей пространство $\mathcal{F}$.

1. Пространство $\mathcal{F}$ является гладким многообразием и компактифицирует пространство параметров F главного страта W.

2. Пространство $\mathcal{F}$ совпадает с объединением виртуальных пространств параметров $\widetilde{F}_\sigma$ всех страт W_σ.

3. Существуют непрерывные проекции $p_\sigma \colon \widetilde{F}_\sigma \to F_\sigma$.

4. Существует непрерывная проекция $G\colon \bigcup_\sigma \mathring{P}_\sigma \times \widetilde{F}_\sigma \to M^{2n}/T^k$, где топология на несвязном объединении $\bigcup_\sigma \mathring{P}_\sigma \times \widetilde{F}_\sigma$ определяется вложением

$$\bigcup_\sigma \mathring{P}_\sigma \times \widetilde{F}_\sigma \to \mathrm{CQ}(M^{2n}, P^k) \times \mathcal{F}$$

и $\mathrm{CQ}(M^{2n}, P^k)$ – комплекс допустимых многогранников с соответствующей топологией, введенной в [3].

Теорема 21. *Пространство $\widehat{\mathcal{F}}_n$ является универсальным пространством параметров T^n-действия на $G_{n,2}$, т.е. удовлетворяет условиям* 1–4.

Явное построение виртуальных пространств параметров для всех n согласно нашему описанию пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$ дано в [5]. Наиболее трудным в доказательстве этой теоремы является построение непрерывной проекции $G_n\colon \bigcup_\sigma \mathring{P}_\sigma \times \widetilde{F}_\sigma \to G_{n,2}/T^n$ для $n > 4$. В работе [2] дано детальное доказательство существования такой проекции случае $n = 5$. В [5] отмечено, что построение непрерывной проекции G_n в общем случае полностью аналогично построению в случае $n = 5$.

Замечание 22. Во введении мы отметили работу Н. Клемятина [25], в которой дано построение пространства, удовлетворяющего условиям 1–3. Но эта работа не содержит доказательства того, что выполняется условие 4. Поэтому основная теорема работы [25] не доказана.

В работе [5], используя специфику многообразия $G_{n,2}$, мы показали, что условие 4 в нашем случае можно заменить следующим условием.

4*. Существует непрерывная проекция $H_n\colon \Delta_{n,2} \times \mathcal{F}_n \to G_{n,2}/T^n$ такая, что композиция $\widehat{\mu} \circ H_n = \mathrm{pr}_1$ является проекцией на первый сомножитель.

Конструкция пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$ методом замечательной компактификации позволила в явном виде предъявить требуемое отображение H_n. При этом мы существенно использовали, что допустимые многогранники P_σ определяют камерное несвязное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, и доказали в [5], что для каждой камеры $C_\omega \subset \mathring{\Delta}_{n,2}$ определено разложение пространства $\widehat{\mathcal{F}}_n$ в несвязное объединение виртуальных пространств параметров допустимых многогранников, которые образуют данную камеру C_ω.

§ 4. Пространство параметров $\mathcal{F}_n$ и пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}(0, n)$

4.1. Главный результат. Мы обозначаем через $\mathcal{M}(0, n)$, как обычно, пространство модулей рациональных кривых с n отмеченными различными точками. Пространство $\mathcal{M}(0, n)$ параметризует наборы из n различных точек на римановой сфере $\mathbb{C}P^1$, рассматриваемых с точностью до биголоморфизмов сферы, т.е.

$$\mathcal{M}(0, n) = ((\mathbb{C}P^1)^n \setminus \Delta)/PGL_2(\mathbb{C}),$$

где $\Delta = \bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}P^1)^n \mid x_i = x_j\}$. Любые три точки пространства $\mathbb{C}P^1$ можно перевести в множество $A = \{(0:1), (1:1), (1:0)\}$ единственным проективным преобразованием. Следовательно, пространство $\mathcal{M}(0, n)$ можно отождествить с пространством

$$(\mathbb{C}P^1_A)^{n-3} \setminus \Delta = \{(x_1, \dots, x_{n-3}) \in \mathbb{C}^{n-3} \mid x_i \neq 0, 1;\ x_i \neq x_j,\ \text{если } i \neq j\}, \qquad (8)$$

где $\mathbb{C}P^1_A = \mathbb{C}P^1 \setminus A = \{x \in \mathbb{C} \mid x \neq 0, 1\}$.

Например, $\mathcal{M}(0, 3)$ – это точка, а $\mathcal{M}(0, 4) = \mathbb{C}P^1_A$. Таким образом, пространство модулей $\mathcal{M}(0, n)$ совпадает с нашим пространством параметров F_n главного страта W_n, ср. с (5).

Мы обозначаем через $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$, как обычно, пространство классов биголоморфизма стабильных рациональных кривых с n пронумерованными отмеченными различными точками. Пространство $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ является компактным комплексным гладким многообразием размерности $n-3$, в котором $\mathcal{M}(0,n)$ лежит как открытое по Зарисскому подмногообразие. Пространство $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ известно как компактификация Гротендика–Кнутсена многообразия $\mathcal{M}(0,n)$. Напомним, что компактификация Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}(g,n)$ пространства модулей $\mathcal{M}(g,n)$ в случае $g=0$ совпадает с компактификацией Гротендика–Кнутсена.

В работе [22] Киль дал конструкцию гладкого многообразия $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$, отличную от конструкции Гротендика–Кнутсена. В работе Ли [27] было показано, что если применить теорему 15 к конструкции Киля, то непосредственно получится, что многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ является замечательной компактификацией $Y_{\mathcal{G}}$, где $Y=(\mathbb{C}P^1)^{n-3}$, а производящее множество $\mathcal{G}$ состоит из множества всех диагоналей и множества аугментированных диагоналей. Более детально, $\mathcal{G}$ состоит из

$$\Delta_I=\{(c_4,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\mid c_i=c_j \text{ для всех } i,j\in I\},$$
$$\Delta_{I,a}=\{(c_4,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\mid c_i=a \text{ для всех } i\in I\},$$

где $I\subseteq\{4,\dots,n\}$, $|I|\geqslant 2$ и $a\in A=\{(0:1),(1:1),(1:0)\}$. Соответствующая конфигурация образована множеством всех пересечений элементов из $\mathcal{G}$.

Используя эти результаты, мы доказываем, что наша компактификация $\mathcal{F}_n$ пространства F_n, которая получена в виде замечательной компактификации с производящим множеством $\mathcal{G}_n$, состоящим из всех неособых собственных подмногообразий многообразия $\overline{F}_n$ (см. п. 3.3), совпадает с компактификацией Гротендика–Кнутсена многообразия $\mathcal{M}(0,n)=F_n$.

Теорема 23. *Многообразие $\mathcal{F}_n$ диффеоморфно многообразию $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$, $n\geqslant 4$.*

Замечание 24. Напомним, что при $n=4$ уже было известно, что $\mathcal{F}_4=\mathbb{C}P^1=\overline{\mathcal{M}}(0,4)$. В случае $n=5$ диффеоморфизм многообразий $\mathcal{F}_5$ и $\overline{\mathcal{M}}(0,5)$ уже был отмечен в [2], замечание 7.13.

Замечание 25. Разложение пространства $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$, $n\geqslant 4$, в несвязное объединение подпространств, задаваемое данной камерой, получило важное приложение в задаче об алгебраической топологии пространства $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$, см. [21] и [22]. Этот вопрос будет рассмотрен в нашей следующей статье.

4.2. Пространства $\mathcal{F}_6$ и $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$. Приведем детальное доказательство теоремы 20 и докажем теорему 23 в случае комплексного многообразия $G_{6,2}$. Отметим, что это многообразие представляет особый интерес с точки зрения алгебраической геометрии как одно из четырех многообразий Севери, см. [32] и [26]. Начнем с рассмотрения многообразия

$$\begin{aligned}\overline{F}_6=\{((c_{34}:c'_{34}),&(c_{35}:c'_{35}),(c_{36}:c'_{36}),(c_{45}:c'_{45}),(c_{46}:c'_{46}),(c_{56}:c'_{56}))\in(\mathbb{C}P^1)^6,\\ &c'_{34}c_{35}c'_{45}=c_{34}c'_{35}c_{45},\ c'_{34}c_{36}c'_{46}=c_{34}c'_{36}c_{46},\\ &c'_{35}c_{36}c'_{56}=c_{35}c'_{36}c_{56},\ c'_{45}c_{46}c'_{56}=c_{45}c'_{46}c_{56}\}.\end{aligned}$$

Будем использовать производящее множество, состоящее из следующих подмногообразий в $\overline{F}_6$:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_{345} = \{&((1:1),(1:1),(c_{36}:c_{36}'),(1:1),(c_{46}:c_{46}'),(c_{56}:c_{56}')),\\
&c_{36}c_{46}' = c_{36}'c_{46},\ c_{36}c_{56}' = c_{36}'c_{56},\ c_{46}c_{56}' = c_{46}'c_{56}\}\\
\widehat{F}_{346} = \{&((1:1),(c_{35}:c_{35}'),(1:1),(c_{45}:c_{45}'),(1:1),(c_{56}:c_{56}')),\\
&c_{35}c_{45}' = c_{35}'c_{45},\ c_{35}c_{56}' = c_{35}'c_{56},\ c_{45}c_{56}' = c_{45}'c_{56}\}\\
\widehat{F}_{356} = \{&((c_{34}:c_{34}'),(1:1),(1:1),(c_{45}:c_{45}'),(c_{46}:c_{46}'),(1:1)),\\
&c_{34}c_{45}' = c_{34}'c_{45},\ c_{34}c_{46}' = c_{34}'c_{46},\ c_{45}c_{46}' = c_{45}'c_{46}\}\\
\widehat{F}_{456} = \{&((c_{34}:c_{34}'),(c_{35}:c_{35}'),(c_{36}:c_{36}'),(1:1),(1:1),(1:1))\},\\
&c_{34}c_{35}' = c_{34}'c_{35},\ c_{34}c_{36}' = c_{34}'c_{36},\ c_{35}'c_{36} = c_{35}c_{36}'\}
\end{aligned}$$

вместе с точкой $S=(1:1)^6$. В этой точке пересекается каждая пара из описанных выше многообразий $\widehat{F}_{ijk}$.

Гладкое компактное многообразие $\mathcal{F}_6$ является замечательной компактификацией с производящим множеством $\mathcal{G}_6 = \{S, \widehat{F}_{345}, \widehat{F}_{346}, \widehat{F}_{356}, \widehat{F}_{456}\}$. Таким образом,

$$\mathcal{F}_6 = \mathrm{Bl}_{\widetilde{F}_{456}} \mathrm{Bl}_{\widetilde{F}_{356}} \mathrm{Bl}_{\widetilde{F}_{346}} \mathrm{Bl}_{\widetilde{F}_{345}} \mathrm{Bl}_S \overline{F}_6. \tag{9}$$

Заметим, что доминантное преобразование $\widetilde{F}_{ijk}$ в $\mathrm{Bl}_S \overline{F}_6$ любого из подмногообразий $\widehat{F}_{ijk}$, $3 \leqslant i < j < k \leqslant 6$, пересекает исключитильный дивизор $\mathbb{C}P^2$ в одной точке. Более того, полученные таким образом четыре точки различны. Следовательно, замечательная компактификация вида (9) не зависит от порядка раздутий вдоль подмногообразий $\widetilde{F}_{ijk}$.

Покажем теперь, что многообразие $\mathcal{F}_6$ совпадает с пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$. Как уже отмечено выше, конструкция из работы [22] описывает многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$ в виде последовательности раздутий. А работа Ли [27], использующая этот результат Киля, позволяет описать многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$ в виде замечательной компактификации $Y_{\mathcal{G}}$, где $Y=(\mathbb{C}P^1)^3$ и производящее множество $\mathcal{G}$ состоит из множества всех диагоналей

$$\Delta_I = \{(p_1,p_2,p_3) \in (\mathbb{C}P^1)^3 \mid p_i = p_j \text{ для } i,j \in I\}$$

и аугментированных диагоналей

$$\Delta_{I,a} = \{(p_1,p_2,p_3) \in (\mathbb{C}P^1)^3 \mid p_i = a \text{ для всех } i \in I\},$$

где $I \subset \{1,2,3\}$, $|I| \geqslant 2$ и $a \in A = \{(0:1),(1:1),(1:0)\}$.

Заметим, что Δ_I является комплексным двумерным подмногообразием в $(\mathbb{C}P^1)^3$ для $|I|=2$. Следовательно, раздутие многообразия $(\mathbb{C}P^1)^3$ вдоль диагоналей Δ_I, $|I|=2$, не меняет $(\mathbb{C}P^1)^3$. Таким образом, для получения замечательной компактификации, которая описывает многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$, достаточно в качестве производящего множества взять полную диагональ $\Delta_{\{1,2,3\}}$ и все аугментированные диагонали $\Delta_{I,a}$.

Теорема 26. *Многообразие $\mathcal{F}_6$ диффеоморфно многообразию $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$.*

Доказательство. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon (\mathbb{C}P^1)^3 \to (\mathbb{C}P^1)^6$ такое, что

$$\begin{aligned} f((c_{34}:c'_{34}),(c_{35}:c'_{35}),(c_{36}:c'_{36})) = ((c_{34}:c'_{34}),(c_{35}:c'_{35}),(c_{36}:c'_{36}),\\ (c'_{34}c_{35}:c_{34}c'_{35}),(c'_{34}c_{36}:c_{34}c'_{36}),(c'_{35}c_{36}:c_{35}c'_{36})). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $0=(0:1)$ и $\infty=(1:0)$. Отображение f не определено в точках следующих подмногообразий многообразия $(\mathbb{C}P^1)^3$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\{1,2\},\infty} &= \{((1:0),(1:0),(c_{36}:c'_{36}))\}, & \Delta_{\{1,2\},0} &= \{((0:1),(0:1),(c_{36}:c'_{36}))\},\\ \Delta_{\{1,3\},\infty} &= \{((1:0),(c_{35}:c'_{35}),(1:0))\}, & \Delta_{\{1,3\},0} &= \{((0:1),(c_{35}:c'_{35}),(0:1))\},\\ \Delta_{\{2,3\},\infty} &= \{((c_{34}:c'_{34}),(1:0),(1:0))\}, & \Delta_{\{2,3\},0} &= \{((c_{34}:c'_{34}),(0:1),(0:1))\}. \end{aligned}$$

Для $P=((1:0),(1:0),(1:0))$ и $Q=((0:1),(0:1),(0:1))$ множество

$$\mathcal{G}' = \{\Delta_{\{i,j\},a}, a=0,\infty\} \cup \{P,Q\}$$

является производящим множеством в $(\mathbb{C}P^1)^3$. Рассмотрим замечательную компактификацию $Z=(\mathbb{C}P^1)^3_{\mathcal{G}'}$. Отображение f продолжается до диффеоморфизма $\overline{f}\colon Z \to \overline{F}_6$. Например, для точек исключительного дивизора $\mathbb{C}P^1$ вдоль подмногообразия $\Delta_{\{1,2\},0}$ отображение $\overline{f}$ задается формулой

$$\begin{aligned} &\overline{f}((1:0),(1:0),(c_{36}:c'_{36}),(x_1:x_2))\\ &\qquad = ((1:0),(1:0),(c_{36}:c'_{36}),(x_1:x_2),(0:1),(0:1)), \end{aligned}$$

а для точек $(x_1:x_2:x_3)$ дивизора $\mathbb{C}P^2$ раздутия в точке P отображение $\overline{f}$ задается формулой

$$\overline{f}(P,(x_1:x_2:x_3)) = ((1:0),(1:0),(1:0),(x_1:x_2),(x_1:x_3),(x_2:x_3)).$$

Так как в окрестности $((1:c'_{34}),(1:c'_{35}),(1:c'_{36}))$ точки $P=((1:0),(1:0),(1:0))$ выполняются соотношения

$$c'_{34}x_2 = c'_{35}x_1, \qquad c'_{34}x_3 = c'_{36}x_1, \qquad c'_{35}x_3 = c'_{36}x_2,$$

то точки $((1:0),(1:0),(1:0),(x_1:x_2),(x_1:x_3),(x_2:x_3))$ принадлежат многообразию $\overline{F}_6$.

Для завершения доказательста осталось заметить, что замечательная компактификация для $\overline{F}_6$ с производящим множеством, состоящим из $\overline{F}_{ijk}$ и S, соответствует замечательной компактификации для Z с производящим множеством

$$\{\Delta_{\{1,2\},1}, \Delta_{\{1,3\},1}, \Delta_{\{2,3\},1}, \Delta_{\{1,2,3\}}, R\},$$

где $1=(1:1)$ и $R=((1:1),(1:1),(1:1))$. Следовательно, многообразия $\mathcal{F}_6$ и $\overline{\mathcal{M}}(0,6)$ диффеоморфны. Теорема доказана.

4.3. Доказательство главного результата.

Доказательство теоремы 23. Приведем доказательство, аналогичное доказательству для $n=6$. Согласно формулам (3), (4) и замечанию (5), начнем с гладкого отображения $f\colon(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\to(\mathbb{C}P^1)^N$, $N=\dbinom{n-2}{2}$, заданного формулой

$$\begin{aligned} &f((c_{34}:c'_{34}),\dots,(c_{3n}:c'_{3n}))\\ &\qquad=((c_{34}:c'_{34}),\dots,(c_{3n}:c'_{3n}),(c'_{34}c_{35}:c_{34}c'_{35}),\dots,(c'_{3n-1}c_{3n}:c_{3n-1}c'_{3n})). \end{aligned}$$

Отображение f не определено в точках подмногообразий $G_{pq},G'_{pg}\subset(\mathbb{C}P^1)^{n-3}$, $4\leqslant p<q\leqslant n$, где

$$\begin{aligned} G_{pq}&=\{((c_{3i}:c_{3j}))\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\mid(c_{3p}:c'_{3p})=(c_{3q}:c'_{3q})=(1:0)\},\\ G'_{pq}&=\{((c_{3i}:c_{3j}))\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\mid(c_{3p}:c'_{3p})=(c_{3q}:c'_{3q})=(0:1)\}. \end{aligned}$$

Из формул (3) и (4) непосредственно следует, что отображение f задает диффеоморфизм $f\colon(\mathbb{C}P^1_A)^{n-3}\setminus\Delta\to F_n$.

Легко проверить, что множество $\mathcal{G}'$ всех возможных пересечений подмногообразий G_{pq}, G'_{pq} образует производящее множество. Введем гладкое многообразие Z как замечательную компактификацию для многообразия $(\mathbb{C}P^1)^{n-3}$ с производящим множеством $\mathcal{G}'$, т.е. положим $Z=(\mathbb{C}P^1)^{n-3}_{\mathcal{G}'}$. Тогда, как и в случае $n=6$, можно показать, что отображение f продолжается до диффеоморфизма $\overline{f}\colon Z\to\overline{F}_n$.

Далее рассмотрим многообразие

$$H_{pq}=\{((c_{3i}:c_{3j}))\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\mid(c_{3p}:c'_{3p})=(c_{3q}:c'_{3q})=(1:1)\}$$

и обозначим через $\widetilde{H}_{pq}$ строгое преобразование многообразия H_{pq} в Z. Множество $\mathcal{G}''$ всех возможных пересечений подмногообразий $\widetilde{H}_{pq}$ является производящим. Теперь можно использовать результат работы Ли (см. [27; п. 4.4]), согласно которому многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ совпадает с замечательной компактификацией $Z_{\mathcal{G}''}$. Остается заметить, что диффеоморфизм $\overline{f}$ продолжается до диффеоморфизма замечательных компактификаций $Z_{\mathcal{G}''}\to(\overline{F}_n)_{\mathcal{G}}$, где производящее множество $\mathcal{G}$ задается всеми возможными пересечениями подмногообразий (7). Следовательно, гладкие многообразия $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ и $\mathcal{F}_n$ диффеоморфны. Теорема доказана.

§ 5. Многообразие $\mathcal{F}_n$ и факторы Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$

5.1. Основные факты о многообразиях Чжоу и факторе Чжоу. В изложении основных фактов о многообразии Чжоу мы следуем монографии [16; п. 4], а понятие фактора Чжоу $G_{n,k}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ описываем согласно статье Капранова [19]. В определении фактора Чжоу используется конструкция из алгебраической геометрии, известная как многообразие Чжоу, а именно, используется компактное многообразие, точки которого для данного многообразия параметризуют алгебраические циклы одинаковой размерности и степени. Многообразие Чжоу для $G_{n,k}$, которое используется для построения фактора Чжоу $G_{n,k}//(\mathbb{C}^*)^n$, можно описать следующим образом. Пусть $\delta \in H_{2(n-1)}(G_{n,k}, \mathbb{Z})$ – класс гомологий замыкания общей $(\mathbb{C}^*)^n$-орбиты в $G_{n,k}$. Обозначим через $C_{2(n-1)}(G_{n,k}, \delta)$ множество всех алгебраических циклов в $G_{n,k}$ размерности $2(n-1)$, реализующих класс гомологий δ. Координаты Плюккера задают вложение многообразия $G_{n,k}$ в $\mathbb{C}P^N$, $N = \binom{n}{k} - 1$. Пусть $d \in H_{2(n-1)}(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ – образ класса гомологий δ при этом вложении. Рассмотрим множество $G(N, d, 2(n-1))$ всех алгебраических циклов в $\mathbb{C}P^N$ размерности $2(n-1)$ и степени d. Другими словами, рассмотрим множество всех алгебраических циклов в $\mathbb{C}P^N$ кратности d относительно канонического образующего группы $H_{2(n-1)}(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$. Обозначим через $\mathcal{B}$ координатное кольцо многообразия $G_{n,k}$ относительно вложения Плюккера. Таким образом, $\mathcal{B}$ является фактором кольца полиномов $\mathbb{C}[z_1, \dots z_{N+1}]$ по идеалу, порожденному соотношениями Плюккера. Получаем $\mathcal{B} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{B}_k$, где $\mathcal{B}_k$ – комплексное линейное пространство, натянутое на однородные полиномы степени k. По теореме Чжоу и Ван дер Вардена множество $G(N, d, 2(n-1))$ получает структуру замкнутого проективного алгебраического многообразия, в частности компактного, при вложении Чжоу $G(N, d, 2(n-1)) \to P(\mathcal{B}_d)$. Таким образом, множество $C_{2(n-1)}(G_{n,k}, \delta)$ со структурой алгебраического многообразия, индуцированного вложением $C_{2(n-1)}(G_{n,k}, \delta) \subset G(N, d, 2(n-1))$, становится искомым многообразием Чжоу для $G_{n,k}$.

Опишем вложение Чжоу более детально, см. [16]. Для любого неприводимого алгебраического цикла $X \in G(N, d, 2(n-1))$ можно ввести множество $\mathcal{Z}(X)$ всех $(N-2(n-1)-1)$-мерных проективных подпространств L в $\mathbb{C}P^N$, которые нетривиально пересекают цикл X. Множество $\mathcal{Z}(X)$ является подмногообразием в многообразии Грассмана $G(N, N-2(n-1)+1)$. Можно доказать, что $\mathcal{Z}(X)$ определяется некоторым элементом $R_X \in \mathcal{B}_d$, который определен однозначно с точностью до постоянного множителя и называется формой Чжоу цикла X. Если цикл X является приводимым, то $X = \sum a_i X_i$, где X_i – $2(n-1)$-мерные замкнутые неприводимые многообразия и коэффициенты a_i – неотрицательные целые числа. В этом случае форма Чжоу цикла X определяется по формуле $R_X = \prod R_{X_i}^{a_i} \in \mathcal{B}_d$. Отображение $X \to R_X$ задает вложение многообразия $G(N, d, 2(n-1))$ в проективное пространство $P(\mathcal{B}_d)$ и называется вложением Чжоу.

Чтобы определить фактор Чжоу, рассмотрим естественное отображение

$$W/(\mathbb{C}^*)^n \to C_{2(n-1)}(G_{n,k}, \delta), \qquad x \to \overline{(\mathbb{C}^*)^n \cdot x},$$

где W – главный страт в $G_{n,k}$, состоящий из всех точек, у которых все координаты Плюккера ненулевые. По определению фактором Чжоу $G_{n,k}//(\mathbb{C}^*)^n$ называется замыкание образа этого отображения.

Напомним следующие результаты из [19], утверждения (1.2.11) и (1.2.15), которые дают описание множества компонентов нароста пространства $W/(\mathbb{C}^*)^n$ в $G_{n,k}//(\mathbb{C}^*)^n$.

Предложение 27. *Алгебраические циклы в факторе Чжоу $G_{n,k}//(\mathbb{C}^*)^n$ имеют вид $Z = \sum_i Z_i$, где Z_i – замыкания $(\mathbb{C}^*)^n$-орбит в $G_{n,k}$ таких, что* *матроидные многогранники* $\mu(Z_i)$ *образуют полиэдральное разложение гиперсимплекса* $\Delta_{n,k}$.

Отметим, что матроидные многогранники, определенные в [19], в случае $G_{n,2}$ совпадают с нашими допустимыми многогранниками, см. [5]. Таким образом, в нашей терминологии фактор Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ задает специальную компактификацию пространства параметров F_n главного страта $W \subset G_{n,2}$.

Обратим внимание, что фактор Чжоу $X//H$ можно определить для любого комплексного проективного многообразия $X \subset \mathbb{C}P^N$ с действием алгебраической группы H, см. [19]. А именно, замыкание орбиты $\overline{H \cdot x}$ является компактным подмногообразием в X для любой точки $x \in X$. Для некоторого малого открытого по Зариссому H-инвариантного подмножества $U \subset X$, состоящего из точек с общими орбитами, все многообразия $\overline{H \cdot x}$ для $x \in U$ имеют одинаковую размерность m и представляют один и тот же класс гомологий $\delta \in H_{2m}(X,\mathbb{Z})$. Таким образом, можно ввести многообразия Чжоу $C_{2m}(X,\delta) \subset G(N,d,2m)$, где d – образ класса δ при отображении $X \to \mathbb{C}P^N$, и ввести фактор Чжоу $X//H$ как замыкание образа отображения $U/H \to C_{2m}(X,\delta)$, индуцированного соответствием $x \to \overline{x \cdot H}$.

Используя конструкцию Гельфанда и Макферсона, Капранов в [19] доказал, что фактор Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ изоморфен фактору Чжоу $(\mathbb{C}P^1)^n//GL(2)$. Опираясь на этот результат, Капранов построил изоморфизм между фактором Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ и компактификацией Гротендика–Кнутсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$.

С другой стороны, из (8) следует, что пространство $\mathbb{C}P^{n-3}$, компактифицирующее пространство $\mathbb{C}^{n-3}$, является компактификацией пространства $\mathcal{M}(0,n)$. Капранов в [19] доказал, что $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ – более тонкая комапктификация, которая отображается в $\mathbb{C}P^{n-3}$ с помощью регулярного бирационального отображения. Кроме того, он доказал, что для любых $n-1$ общих точек $q_1,\dots,q_{n-1}$ в $\mathbb{C}P^{n-3}$ многообразие $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ получается из $\mathbb{C}P^{n-3}$ серией раздутий всех проективных пространств, натянутых на q_i.

Более того, используя полученный изоморфизм, Капранов в [19] дал описание фактора Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ как результат последовательности раздутий некоторых специальных подмногообразий в $\mathbb{C}P^{n-3}$.

В заключение подчеркнем, что согласно теореме 23 наша конструкция универсального пространства параметров $\mathcal{F}_n$ дает чисто топологическое описание фактора Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$, тесно связанное с нашим описанием пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

5.2. Структуры пространств $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ и $G_{n,2}/T^n$. В работе [5] мы описали пространство орбит $G_{n,2}/T^n$ в терминах CW-комплекса допустимых многогранников и универсального пространства параметров $\mathcal{F}_n$. В этом описании ключевую роль играет камерное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, индуцированное допустимыми многогранниками. Используя результаты работы [19], мы сначала описываем фактор Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ в терминах кортежей допустимых многогранников, задающих полиэдральное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, и пространств параметров многогранников, входящих в эти кортежи. Затем мы описываем пространства $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ в терминах виртуальных пространств параметров для допустимых многогранников, которые образуют $(n-1)$-мерную камеру в $\Delta_{n,2}$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ семейство всех допустимых $(n-1)$-мерных многогранников для стандартного T^n-действия на $G_{n,2}$. Введем множество $\{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_l\}$, состоящее из всех подсемейств $\mathcal{P}_i=\{P_{i_1},\ldots,P_{i_s}\}\subset\mathcal{P}$ таких, что многогранники $P_{i_1},\ldots,P_{i_s}$ дают полиэдральное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, т.е. $\bigcup_{j=1}^{s}P_{i_j}=\Delta_{n,2}$ и $\mathring{P}_{i_j}\cap\mathring{P}_{i_k}=\varnothing$ для всех $1\leqslant j<k\leqslant s$.

Сопоставим семейству $\mathcal{P}_i=\{P_{i_1},\ldots,P_{i_s}\}$ множество $\mathcal{W}_i=\{W_{i_1},\ldots,W_{i_s}\}$, где W_{i_j} – страт в $G_{n,2}$, соответствующий допустимому многограннику P_{i_j}, т.е. $\mu(W_{i_j})=\mathring{P}_{i_j}$. Факторизуя страты из множества $\mathcal{W}_i$ по $(\mathbb{C}^*)^n$-действию, мы получаем для любого семейства $\mathcal{P}_i$ множество пространств параметров $\{F_{i_1},\ldots,F_{i_s}\}$.

Далее, введем пространство $\mathcal{F}_i$ параметров семейства $\mathcal{P}_i$ как топологическое пространство, гомеоморфное прямому произведению $\mathcal{F}_i=F_{i_1}\times\cdots\times F_{i_s}$.

Согласно предложению 27 фактор Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ является объединением непересекающихся связных множеств $\mathcal{C}_i$, каждое из которых состоит из алгебраически циклов, определенных семейством $\mathcal{P}_i$, $1\leqslant i\leqslant l$. В частности, дополнение главного страта F_n в $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ является объединением непересекающихся связных множеств $\mathcal{C}_i$, для которых $\mathcal{P}_i\neq\{\Delta_{n,2}\}$.

Предложение 28. *Существует взаимно однозначное соответствие между пространствами $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{C}_i$ для всех $1\leqslant i\leqslant l$.*

Доказательство. Требуемое взаимно однозначное соответствие $g_i:\mathcal{F}_i\to\mathcal{C}_i$ задается формулой

$$g_i(c_{i_1},\ldots,c_{i_s})=Z_{i_1}(c_1)+\cdots+Z_{i_s}(c_{i_s}),$$

где $Z_{i_j}(c_{i_j})$ является $(\mathbb{C}^*)^n$-орбитой в страте W_{i_j}, которая определяется параметром c_{i_j}. Предложение доказано.

Фактор Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ и дополнение к F_n в $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ имеют также и другую интерпретацию.

Пусть P_σ – некоторый допустимый многогранник. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_\sigma=\{\mathcal{P}_{\sigma,1},\ldots,\mathcal{P}_{\sigma,s}\}\subset\mathcal{P}$, состоящее из всех разложений $\mathcal{P}_{\sigma,i}$ гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, которые содержат P_σ, т.е. $\mathcal{P}_{\sigma,i}\in\mathcal{P}_\sigma$, если и только если $P_\sigma\in\mathcal{P}_{\sigma,i}$.

Обозначим через $\widetilde{Z}_{\sigma,i}\subset G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ семейство алгебраических циклов, определенное разложением $\mathcal{P}_{\sigma,i}=\{P_{\sigma_{i_1}},\ldots,P_{\sigma_{i_q}}\}$. Согласно предложению 28 эти циклы имеют вид

$$Z_{\sigma_{i_1}}(c_{\sigma_{i_1}})+\cdots+Z_{\sigma,i_q}(c_{\sigma_{i_q}})$$

для $(c_{\sigma_{i_1}},\ldots,c_{\sigma_{i_q}})\in F_{\sigma_{i_1}}\times\cdots\times F_{\sigma_{i_q}}$, где $Z_{\sigma_{i_j}}(c_{\sigma_{i_j}})$ является замыканием орбиты алгебраического тора в $W_{\sigma_{i_j}}$. Каждая такая орбита определяется параметром $c_{\sigma_{i_j}}\in F_{\sigma_{i_j}}=W_{\sigma_{i,j}}/(\mathbb{C}^*)^n$. Положим

$$\widetilde{Z}_\sigma=\bigcup_{i=1}^{s}\widetilde{Z}_{\sigma,i}.$$

Предложение 29. *Для каждого допустимого множества σ существует проекция $p_\sigma\colon\widetilde{Z}_\sigma\to F_\sigma$, где $F_\sigma=W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$.*

Доказательство. Для каждого алгебраического цикла $Z \in \widetilde{Z}_\sigma$ существует $(\mathbb{C}^*)^n$-орбита Z_σ в страте W_σ, соответствующем допустимому многограннику P_σ, и орбита Z_σ является неприводимой компонентой цикла Z. Так как $F_\sigma = W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$, то существует каноническая $(\mathbb{C}^*)^n$-инвариантная проекция $q_\sigma\colon W_\sigma \to F_\sigma$. Определим требуемую проекцию p_σ по формуле $p_\sigma(Z) = q_\sigma(Z_\sigma)$. Предложение доказано.

Напомним, см. [17], [5], что допустимые многогранники, см. определение 4, задают камерное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$: камерой C_ω для некоторого подмножества ω в множестве всех допустимых множеств называется многогранник

$$C_\omega = \bigcap_{\sigma\in\omega} \mathring{P}_\sigma, \qquad C_\omega \cap \mathring{P}_\sigma = \varnothing, \qquad \sigma \notin \omega.$$

Используя диффеоморфизм между $\mathcal{F}_n$ и $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$, см. теорему 23, получаем следующую теорему.

Теорема 30. *Пусть $C_\omega \subset \Delta_{n,2}$ – некоторая камера размерности $n-1$. Тогда C_ω определяет разложение фактора Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ в объединение непересекающихся подмножеств и существуют гомеоморфизмы*

$$\bigcup_{\sigma\in\omega} \widetilde{Z}_\sigma \leftrightarrow \mathcal{F}_n \leftrightarrow G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n, \tag{10}$$

где топология объединения множеств $\bigcup_{\sigma\in\omega} \widetilde{Z}_\sigma$ определяется первым взаимно однозначным отображением.

Доказательство. Каждый цикл $Z \in G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ определяется некоторым полиэдральным разложением $\mathcal{P}_i = \{P_{\sigma_{i_1}}, \dots, P_{\sigma_{i_l}}\}$ гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$. Заметим, что для каждого допустимого многогранника P_σ либо $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$, либо $C_\omega \cap \mathring{P}_\sigma = \varnothing$. Таким образом, существует многогранник $P_{\sigma_{i_j}} \in \mathcal{P}_i$ такой, что $C_\omega \subset \mathring{P}_{\sigma_{i_j}}$, а это означает, что $\sigma_{i_j} \in \omega$. Следовательно, $Z \in \widetilde{Z}_{\sigma_{i_j}}$, и поэтому $Z \in \bigcup_{\sigma\in\omega} \widetilde{Z}_\sigma$.

Для доказательства того, что объединение (10) состоит из непересекающихся множеств, заметим, что из условия $\sigma_1, \sigma_2 \in \omega$, вытекает, что $C_\omega \subset \mathring{P}_{\sigma_1}, \mathring{P}_{\sigma_2}$, т.е. $\mathring{P}_{\sigma_1} \cap \mathring{P}_{\sigma_2} \neq \varnothing$. Таким образом, не существует разложения гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, которое одновременно содержит P_{σ_1} и P_{σ_2}. Следовательно, не существует алгебраического цикла, который одновременно принадлежит $\widetilde{Z}_{\sigma_1}$ и $\widetilde{Z}_{\sigma_2}$. Теорема доказана.

Заметим, что $\widetilde{Z}_\sigma = F_n$ для $P_\sigma = \Delta_{n,2}$, откуда следует, что гомеоморфизм (10) описывает не только фактор Чжоу, но и компоненты нароста пространства F_n в $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$, которые в общем случае имеют непустое пересечение.

Замечание 31. В наших статьях [2] и [3] для описания пространства орбит $G_{n,2}/T^n$ введено понятие виртуального пространства $\widetilde{F}_\sigma$ параметров страта W_σ. Свойства пространств $\widetilde{Z}_\sigma$, описанные в предложении 29 и в теореме 30, означают, что пространства $\widetilde{Z}_\sigma$ соответствуют пространствам $\widetilde{F}_\sigma$, когда $\dim P_\sigma = n-1$. Таким образом, теорема 7 из [5] является аналогом теоремы 30.

Из теоремы 23 и результата статьи [19] о том, что многообразия $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ и $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ диффеоморфны, вытекает, что универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ описывает топологию склейки компонентов нароста пространства F_n в $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$. В заключительных пунктах этой статьи мы используем представление пространства $\mathcal{F}_n$ в виде замечательной компактификации для $\overline{F}_n$, чтобы явно продемонстрировать обсуждаемые соответствия в случаях $n=4$ и $n=5$.

5.3. Пространства $G_{4,2}//(\mathbb{C}^*)^4$ и $G_{4,2}/T^4$. При $n=4$ компоненты множества наростов в $G_{4,2}//(\mathbb{C}^*)^4$ состоят из трех точек, приклеевая которые к $F_4 \cong \mathbb{C}P^1_A$ в $G_{4,2}//(\mathbb{C}^*)^4$, мы получаем $\mathbb{C}P^1$. Это было отмечено в [19], независимое доказательство следует из [1] и теоремы 23. В обозначениях настоящей статьи опишем, как происходит эта склейка. Существует в точности три разложения октаэдра $\Delta_{4,2}$, т.е. $\mathcal{P}=\{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3\}$, и они образованы тремя парами четырехгранных взаимно дополняющих пирамид. Пространством параметров для стратов каждой из этих пирамид является точка. Поэтому согласно предложению 28 пространство $(G_{4,2}//(\mathbb{C}^*)^4)\setminus F_4$ состоит из трех точек, т.е. $G_{4,2}//(\mathbb{C}^*)^4 \cong \mathbb{C}P^1$. Более точно, каждая из этих трех точек соответствует алгебраическому циклу, образованному $(\mathbb{C}^*)^4$-орбитами, допустимые многогранники которых являются взаимно дополняющими пирамидами в октаэдре $\Delta_{4,2}$. Остается только заметить, что для каждой пирамиды P_σ цикл $\widetilde{Z}_\sigma$ задается одним алгебраическим циклом, и, следовательно, $F_\sigma = \widetilde{Z}_\sigma$.

5.4. Пространства $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ и $G_{5,2}/T^5$. Используя результаты работы [2], дадим явное описание соответствия структур пространства $\mathcal{F}_5$ и фактора Чжоу $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$. Напомним, что гиперсимплекс $\Delta_{5,2}$ имеет 10 вершин $\{\Lambda_{ij}, 1\leqslant i<j\leqslant 5\}$. Согласно работе [2] имеем следующий результат.

Лемма 32. *Существует 25 разложений гиперсимплекса $\Delta_{5,2}$, образованных допустимыми многогранниками для T^5-действия на $G_{5,2}$. Они задаются парами $\{K_{ij},P_{ij}\}$, $1\leqslant i<j\leqslant 5$, и тройками $\{P_{ij},K_{ij,kl},P_{kl}\}$, $1\leqslant i<j\leqslant 5$, $1\leqslant k<l\leqslant 5$, $\{i,j\}\cap\{k,l\}=\varnothing$. Здесь K_{ij} – многогранник с девятью вершинами, выпуклая оболочка девяти вершин гиперсимплекса $\Delta_{5,2}$, среди которых нет вершины Λ_{ij}, P_{ij} – семисторонняя пирамида с верхней точкой Λ_{ij}, и $K_{ij,kl}$ – многогранник с восемью вершинами, среди которых нет вершин Λ_{ij} и Λ_{kl}.*

Пространством параметров для допустимых многогранников K_{ij} является пространство $\mathbb{C}P^1_A$, а пространством параметров для допустимых многогранников P_{ij} и $K_{ij,kl}$ является точка. В этом случае из утверждения 28 получаем

Следствие 33. *Множество непересекающихся компонентов нароста пространства F_5 в $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ состоит из пространства $\mathcal{C}_{ij}\cong\mathbb{C}P^1_A$ и точек $\mathcal{C}_{ij,kl}$ для $1\leqslant i<j\leqslant 5$, $1\leqslant k<l\leqslant 5$. Компонента $\mathcal{C}_{ij}$ состоит из циклов вида $Z_{ij,9}(c)+Z_{ij,7}$, а компонента $\mathcal{C}_{ij,kl}$ состоит из циклов $Z_{ij,7}+Z_{ij,kl}+Z_{kl,7}$, где $c\in\mathbb{C}P^1_A$. Здесь неприводимыми алгебраическими циклами являются:*

- *$Z_{ij,9}(c)$ – замыкание орбиты в страте с допустимым многогранником K_{ij};*
- *$Z_{ij,kl}$ – замыкание орбиты в страте с допустимым многогранником $K_{ij,kl}$;*
- *$Z_{ij,7}$ – замыкание орбиты в страте с допустимым многогранником P_{ij}.*

В работе [2] мы доказали, что универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_5$ является раздутием поверхности $\overline{F}_5 = \{((c_1 : c_1'), (c_2 : c_2'), (c_3 : c_3')) \in (\mathbb{C}P^1)^3,\ c_1c_2'c_3 = c_1'c_2c_3'\}$ в точке $((1 : 1), (1 : 1), (1 : 1))$. Отождествление многообразия $\mathcal{F}_5$ с фактором Чжоу $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ позволяет описать склеивание компонентов наростов в $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ следующим образом.

Следствие 34. *Склеивание компонентов наростов в $G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ соответствует следующей компактификации пространства $F_5 \subset \mathcal{F}_5$ следующим образом.*

• *Циклы $Z_{ij}(c) = Z_{ij,9}(c) + Z_{ij,7} \in \mathcal{C}_{ij}$ соответствуют подмногообразиям в $\mathcal{F}_5$ следующим образом*:
- $Z_{23}(c) = ((0 : 1), (0 : 1), (c : c'))$,
- $Z_{24}(c) = ((1 : 0), (c : c'), (0 : 1))$,
- $Z_{25}(c) = ((c : c'), (1 : 0), (1 : 0))$,
- $Z_{13}(c) = ((1 : 0), (1 : 0), (c : c'))$,
- $Z_{14}(c) = ((0 : 1), (c : c'), (1 : 0))$,
- $Z_{15}(c) = ((c : c'), (0 : 1), (0 : 1))$,
- $Z_{34}(c) = ((1 : 1), (c : c'), (c : c'))$,
- $Z_{35}(c) = ((c : c'), (1 : 1), (c' : c))$,
- $Z_{45}(c) = ((c : c'), (c : c'), (1 : 1))$,
- $Z_{12}(c) = \mathbb{C}P^1_A$, *лежащему в дивизоре* $\mathbb{C}P^1$.

• *Циклы $Z_{ij,kl} = Z_{ij,7} + Z_{ij,kl} + Z_{kl,7} = \mathcal{C}_{ij,kl}$ соответствуют точкам следующим образом*:
- $Z_{14,23} = ((0 : 1), (0 : 1), (1 : 0))$, $Z_{13,24} = ((1 : 0), (1 : 0), (0 : 1))$,
- $Z_{15,24} = ((1 : 0), (0 : 1), (0 : 1))$, $Z_{23,45} = ((0 : 1), (0 : 1), (1 : 1))$,
- $Z_{24,35} = ((1 : 0), (1 : 1), (0 : 1))$, $Z_{25,34} = ((1 : 1), (1 : 0), (1 : 0))$,
- $Z_{15,23} = ((0 : 1), (0 : 1), (0 : 1))$, $Z_{13,25} = ((1 : 0), (1 : 0), (1 : 0))$,
- $Z_{14,25} = ((0 : 1), (1 : 0), (1 : 0))$, $Z_{13,45} = ((1 : 0), (1 : 0), (1 : 1))$,
- $Z_{14,35} = ((0 : 1), (1 : 1), (1 : 0))$, $Z_{15,34} = ((1 : 1), (0 : 1), (0 : 1))$.
- $Z_{12,34}$, $Z_{12,35}$, $Z_{12,45}$ *равны точкам* $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ *в соответствующих дивизорах* $\mathbb{C}P^1$.

Опишем также в явном виде соответствие между подпространствами $\widetilde{Z}_{ij,9}$, $\widetilde{Z}_{ij,7}$, $\widetilde{Z}_{ij,kl}$ и подпространствами в $\mathcal{F}_5$.

Следствие 35. *Пространства $\widetilde{Z}_{ij,9}$, $\widetilde{Z}_{ij,7}, \widetilde{Z}_{ij,kl} \subset G_{5,2}//(\mathbb{C}^*)^5$ гомеоморфны пространствам $\mathbb{C}P^1_A$, $\mathbb{C}P^1$ и точке соответственно. Соответствующие подпространства в $\mathcal{F}_5$ имеют вид*

$$\widetilde{Z}_{ij,9} = \mathcal{C}_{ij}, \qquad \widetilde{Z}_{ij,kl} = \mathcal{C}_{ij,kl}, \qquad \widetilde{Z}_{ij,7} = \mathcal{C}_{ij} \cup \biggl(\bigcup_{k,l\in\{1,\dots,5\}\setminus\{i,j\}} \mathcal{C}_{ij,kl}\biggr).$$

Заметим, что пространства $\widetilde{Z}_{ij,9}$, $\widetilde{Z}_{ij,7}$ и $\widetilde{Z}_{ij,k}$ совпадают с виртуальными пространствами $\widetilde{F}_{ij,9}$, $\widetilde{F}_{ij,7}$ и $\widetilde{F}_{ij,kl}$ для соответствующих страт в $G_{5,2}$, см. [5].

Авторы выражают благодарность А. А. Гайфуллину за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, S. Terzić, "Topology and geometry of the canonical action of T^4 on the complex Grassmannian $G_{4,2}$ and the complex projective space $\mathbb{C}P^5$", *Mosc. Math. J.*, **16**:2 (2016), 237–273.

[2] V. M. Buchstaber, S. Terzić, "Toric topology of the complex Grassmann manifolds", *Mosc. Math. J.*, **19**:3 (2019), 397–463.

[3] В. М. Бухштабер, С. Терзич, "Основания $(2n,k)$-многообразий", *Матем. сб.*, **210**:4 (2019), 41–86; англ. пер.: V. M. Buchstaber, S. Terzić, "The foundations of $(2n,k)$-manifolds", *Sb. Math.*, **210**:4 (2019), 508–549.

[4] V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, *Chern–Dold character in complex cobordisms and theta divisors*, arXiv: 2007.05782.

[5] В. М. Бухштабер, С. Терзич, "Разрешение особенностей пространств орбит $G_{n,2}/T^n$", *Труды МИАН*, **317**, Торическая топология действия групп, геометрия и комбинаторика, Ч. 1 (2022), 27–63; англ. пер.: V. M. Buchstaber, S. Terzić, "Resolution of singularities of the orbit spaces $G_{n,2}/T^n$", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **317** (2022), 21–54.

[6] T. Coates, A. Givental, "Quantum cobordisms and formal group laws", *The unity of mathematics*, Progr. Math., **244**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006, 155–171.

[7] C. De Concini, C. Procesi, "Complete symmetric varieties", *Invariant theory* (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math., **996**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 1–44.

[8] C. De Concini, C. Procesi, "Wonderful models of subspace arrangements", *Selecta Math. (N.S.)*, **1**:3 (1995), 459–494.

[9] C. De Concini, C. Procesi, "Hyperplane arrangements and holonomy equations", *Selecta Math. (N.S.)*, **1**:3 (1995), 495–535.

[10] C. De Concini, G. Gaiffi, "Projective wonderful models for toric arrangements", *Adv. Math.*, **327** (2018), 390–409.

[11] C. De Concini, G. Gaiffi, "Cohomology rings of compactifications of toric arrangements", *Algebr. Geom. Topol.*, **19**:1 (2019), 503–532.

[12] C. De Concini, G. Gaiffi, O. Papini, "On projective wonderful models for toric arrangements and their cohomology", *Eur. J. Math.*, **6**:3 (2020), 790–816.

[13] W. Fulton, R. MacPherson, "A compactification of configuration space", *Ann. of Math. (2)*, **139**:1 (1994), 183–225.

[14] I. M. Gelfand, R. D. MacPherson, "Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm", *Adv. Math.*, **44**:3 (1982), 279–312.

[15] И. М. Гельфанд, В. В. Серганова, "Комбинаторные геометрии и страты тора на однородных компактных многообразиях", *УМН*, **42**:2(254) (1987), 107–134; англ. пер.: I. M. Gel'fand, V. V. Serganova, "Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifolds", *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 133–168.

[16] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Boston, MA, 1994, x+523 pp.

[17] M. Goresky, R. MacPherson, "On the topology of algebraic torus actions", *Algebraic groups* (Utrecht, 1986), Lecture Notes in Math., **1271**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 73–90.

[18] Yi Hu, "Topological aspects of Chow quotients", *J. Differential Geom.*, **69**:3 (2005), 399–440.

[19] M. M. Kapranov, "Chow quotients of Grassmannians. I", *I. M. Gel'fand seminar*, Adv. Soviet Math., **16**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 29–110.

[20] M. M. Kapranov, "Veronese curves and Grothendieck–Knudsen moduli space $\overline{M}_(0,n)$", *J. Alebraic Geom.*, **2**:2 (1993), 239–262.

[21] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов, *Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей*, МЦНМО, М., 2019, 272 с.; англ. пер.: M. E. Kazaryan, S. K. Lando, V. V. Prasolov, *Algebraic curves. Towards moduli spaces*, Moscow Lectures, **2**, Springer, Cham, 2018, xiv+231 pp.

[22] S. Keel, "Intersection theory of moduli space of stable N-pointed curves of genus zero", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330**:2 (1992), 545–574.

[23] S. Keel, J. Tevelev, "Geometry of Chow quotients of Grassmannians", *Duke Math. J.*, **134**:2 (2006), 259–311.

[24] S. Keel, J. McKernan, "Contractible extremal rays on $\overline{M}_(0,n)$", *Handbook of moduli*, v. 2, Adv. Lect. Math. (ALM), **25**, Int. Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2013, 115–130.

[25] N. Klemyatin, *Universal spaces of parameters for complex Grassmann manifolds* $G_{q+1,2}$, arXiv: 1905.03047.

[26] J. M. Landsberg, L. Manivel, "The projective geometry of Freudenthal's magic square", *J. Agebra*, **239**:2 (2001), 477–512.

[27] Li Li, "Wonderful compactification of an arrangement of subvarieties", *Michigan Math. J.*, **58**:2 (2009), 535–563.

[28] D. Luna, Th. Vust, "Plongements d'espaces homogènes", *Comment. Math. Helv.*, **58**:2 (1983), 186–245.

[29] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, xii+669 pp.

[30] H. Süß, "Toric topology of the Grassmannian of planes in $\mathbb{C}^5$ and the del Pezzo surface of degree 5", *Mosc. Math. J.*, **21**:3 (2021), 639–652.

[31] D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia Math. Sci., **138**, Invariant Theory Algebr. Transform. Groups, 8, Springer, Heidelberg, 2011, xxii+253 pp.

[32] Ф. Л. Зак, "Многообразия Севери", *Матем. сб.*, **126(168)**:1 (1985), 115–132; англ. пер.: F. L. Zak, "Severi varieties", *Math. USSR-Sb.*, **54**:1 (1986), 113–127.

Виктор Матвеевич Бухштабер
(Victor M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: buchstab@mi-ras.ru

Поступила в редакцию
07.06.2023 и 21.07.2023

Светлана Терзич
(Svjetlana Terzić)
Faculty of Science and Mathematics,
University of Montenegro, Podgorica, Montenegro
E-mail: sterzic@ucg.ac.me