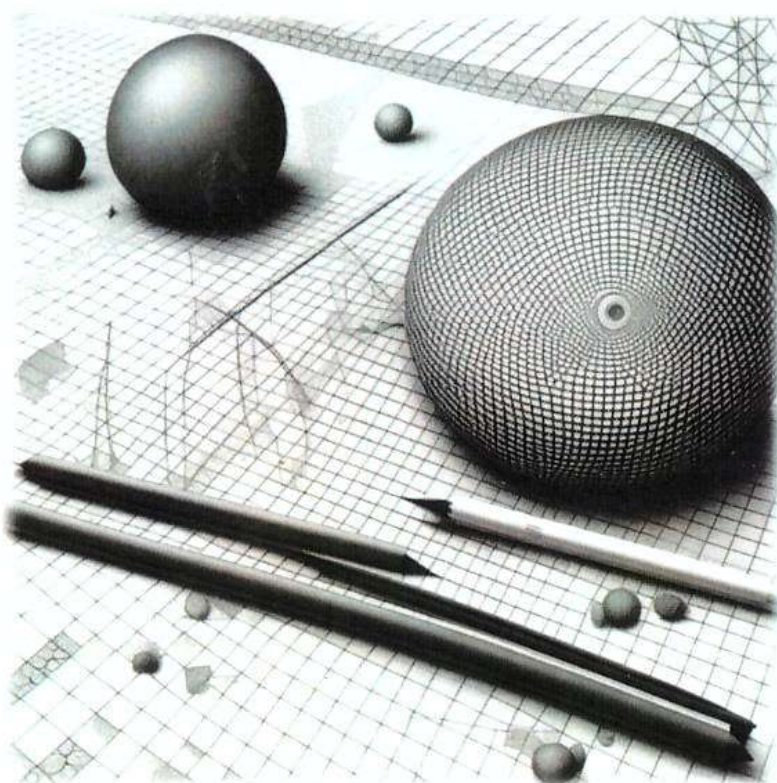


# МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ПРОБЛЕМЫ, ТЕХНОЛОГИИ, ПЕРСПЕКТИВЫ

*Материалы*

*42-го Международного научного семинара преподавателей математики  
и информатики университетов и педагогических вузов*

*12–14 октября 2023 года*



Смоленск  
2023

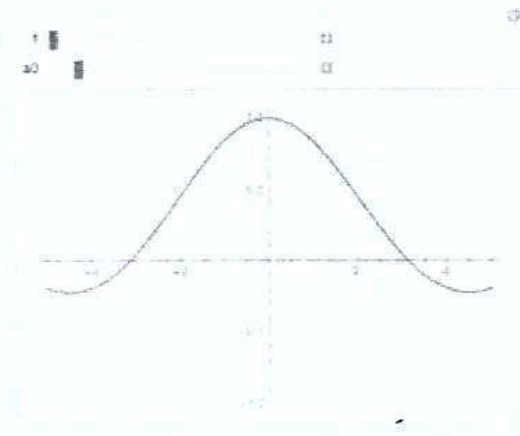


Рис. 3. Снимок интерактивного графика колебания струны, задаваемого функцией  $u = u(x, t)$ . Ось абсцисс соответствует переменной  $x$ , параметр  $t$  изменяется при помощи соответственного ползунка выше графика. Также можно менять значение параметра  $a$  из условия задачи

В построенном интерактивном графике при нажатии на «плюсики» правее ползунков появляются элементы управления: задать значение переменной, увеличить и уменьшить переменную на один шаг, анимировать график, сделать анимацию быстрее или медленнее и другие. Таким образом, WolframMathematica позволяет визуализировать колебание струны согласно условию задачи.

## ПАРА $M$ -КОНИК И $M$ -КУБИКА В МАКСИМАЛЬНОМ ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ<sup>2</sup>

**В.А. Горская**, аспирант

**Г.М. Полотовский**, кандидат физ.-мат. наук, доцент

*Национальный исследовательский университет*

*«Высшая школа экономики» (Россия, Нижний Новгород)*

e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru; polotovskiy@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается задача изотопической классификации расположений в вещественной проективной плоскости объединения пары кривых степени 2 и кривой степени 3 при условиях максимальности и общего положения.

**Ключевые слова:** плоская вещественная распадающаяся алгебраическая кривая, изотопическая классификация.

## PAIR OF $M$ -CONICS AND $M$ -CUBIC IN THE MAXIMAL GENERAL POSITION

**V.A. Gorskaya**, graduate student, **G.M. Polotovskiy**, PhD, assistant professor

*National Research University Higher School of Economics*

*(Russian Federation, Nizhny Novgorod)*

**Abstract.** The problem of isotopic classification of arrangements in the real projective plane of the union of a pair of curves of degree 2 and a curve of degree 3 is considered under the conditions of maximality and general position.

**Keywords:** plane real decomposable algebraic curve, isotopic classification.

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, Грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.



Задача о топологии плоских вещественных алгебраических кривых была включена Д. Гильбертом в первую часть его 16-й проблемы. К этой тематике естественным образом примыкает задача о топологии распадающихся кривых, систематическое изучение которой началось с классификации распадающихся кривых степени 6 в [1]. Достаточно длинный список работ по этой тематике разных авторов приведен в списке литературы в [2]. В настоящей работе изучаются некоторые классы распадающихся кривых степени 7.

Через  $C_n$  будем обозначать плоскую вещественную проективную кривую степени  $n$ , т.е. однородный многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{R}$  от однородных координат  $(x_0 : x_1 : x_2)$  в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя, а через  $\mathbb{R}C_n = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 | C_n(x_0, x_1, x_2) = 0\}$  – множество вещественных точек кривой  $C_n$ . Для краткости при  $n = 2$  (при  $n = 3$ ) кривая и множество её вещественных точек ниже называются коникой (соответственно кубикой).

Рассматривается задача изотопической классификации расположений в  $\mathbb{R}P^2$  кривых  $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_2 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_3$  при следующих условиях *максимальности* и *общего положения*:

(i) кривые  $C_2, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$  являются  $M$ -кривыми, т.е. каждая коника состоит из одного овала, а кубика состоит из овала  $O_3$  и нечётной ветви  $J_3$  (топологической окружности, вложенной в  $\mathbb{R}P^2$  односторонне);

(ii) коники  $C_2, \tilde{C}_2$  пересекаются в четырёх попарно различных вещественных точках;

(iii) нечётная ветвь  $J_3$  пересекает каждую из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  в шести попарно различных вещественных точках;

(iv) нет точек, общих для всех трёх кривых  $C_2, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ .

Число топологических моделей кривых, удовлетворяющих наложенным условиям, слишком велико, поэтому приходится ввести дополнительные ограничения.

Будем считать, что коники расположены так, как на рисунке 1<sup>3</sup> (т.е. существует прямая в  $\mathbb{R}P^2$ , не пересекающая объединение коник).

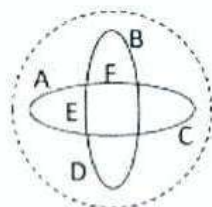


Рис. 1

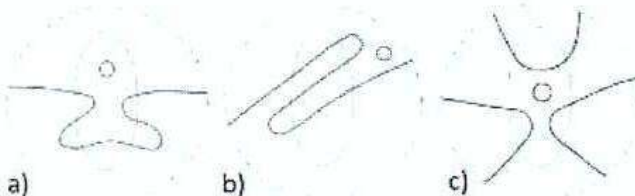


Рис. 2

Пусть, в дополнение к условиям (i)–(iv), выполняются условия:

(v) для каждой из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  все шесть общих точек нечётной ветви  $J_3$  кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т.е. лежит вне другой коники (дуги A, B, C, D на рис.1);

(vi) при монотонном движении по нечётной ветви  $J_3$  сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй.

<sup>3</sup>На рисунках в качестве модели  $\mathbb{R}P^2$  используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого (изображаемой пунктиром) считаются отождествлёнными.



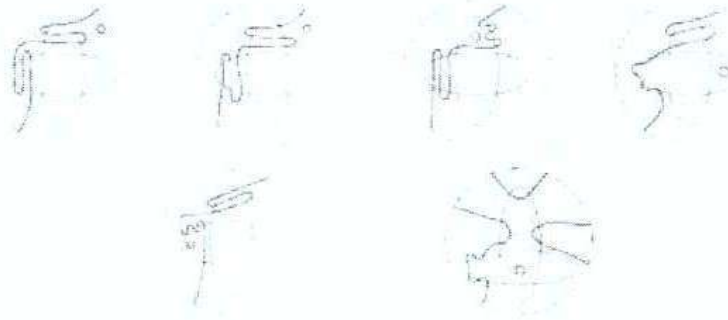


Рис. 3

**Теорема 1** [3]. *Любая кривая степени 7, распадающаяся в произведение кубики и пары коник при условиях (i)–(vi), изотопна в  $\mathbb{R}P^2$  одному из расположений, показанных на рисунке 3. Из этих шести расположений первые четыре реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости двух последних открыт.*

Для случая, когда вместо условия (vi) выполняется его отрицание (то есть имеются больше двух переходов по нечётной ветви с внешней дуги одной коники на внешнюю дугу другой), имеет место теорема 2.

**Теорема 2** (Усиление теоремы 5.1 [4]). *Любая кривая степени 7, распадающаяся в произведение кубики и пары коник, удовлетворяющее условиям (i)–(v) и отрицанию условия (vi), изотопна одному из двенадцати расположений<sup>4</sup>, из которых девять реализуются распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости оставшихся трёх открыт.*

Рассматривался также случай, когда вместо условия (v) требовалось выполнение условия

(vii) все шесть общих точек нечётной ветви  $J_3$  с одной из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  лежат на одной из внешних дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах.

Результат для этого случая – следующая теорема.

**Теорема 3** [5]. *Любая кривая степени 7, распадающаяся в произведение кубики и пары коник при выполнении условий (i)–(iv) и (vii), изотопна одному из 22 расположений, десять из которых реализованы распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости остальных двенадцати открыт.*

Рассмотрена ещё серия расположений, для которых вместо условий (v)–(vii) накладываются условия

(viii) все общие точки ветви  $J_3$  с кониками лежат на одной из дуг, на которые  $J_3$  делится точками пересечения с граничной окружностью модели плоскости  $\mathbb{R}P^2$  (таких точек может быть всего одна, как на рис. 2 а) и 2 б)) – другими словами, ситуация рис. 2 с) не рассматривается;

(ix) ветвь  $J_3$  пересекает каждую конику в пяти точках на внешней дуге (на рис. 1 это дуги А и В) и в одной точке на внутренней дуге (на рис. 1 – дуги Е и F).

**Теорема 4.** *Любая кривая степени 7, распадающаяся в произведение кубики и пары коник при условиях (i)–(iv) и (viii)–(ix), изотопна в  $\mathbb{R}P^2$  одному из расположений, показанных на рисунке 4. При этом первые два расположения реализованы распадающимися кривыми степени 7, а вопрос о реализуемости последнего открыт.*

<sup>4</sup> Рисунки к этой и следующей теореме не приводятся ввиду недостатка места.



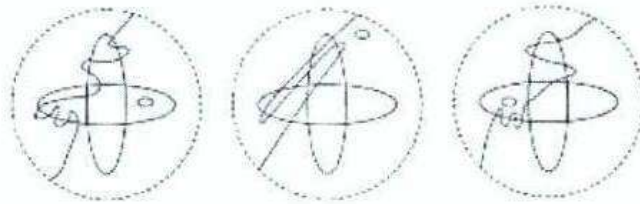


Рис. 4.

Схема доказательств всех теорем следующая. Сначала перечисляются топологические модели кривых, удовлетворяющие наложенным условиям, топологическим следствиям теоремы Безу и известным фактам о топологии алгебраических кривых (как неособых, так и распадающихся – например, классификации объединений кубики и коники, показанной на рисунке 2, и классификации объединений двух кубик из [1]). Затем к моделям полученного списка применяется метод Оревкова [6], основанный на теории кос и зацеплений, согласно которому для реализуемости модели алгебраической кривой данной степени  $m$  необходимо, чтобы соответствующая этой модели коса из  $m$  нитей была квазиположительной. Наконец, ищутся доказательства реализуемости моделей, удовлетворяющих указанному необходимому условию, с помощью различных вариантов метода малого параметра.

#### Список литературы

1. Полотовский Г.М. Каталог  $M$ -распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. № 236:3. С. 548–551.
2. Борисов И.М., Полотовский Г.М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2020. С. 3–18.
3. Горская В.А., Полотовский Г.М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал СВМО. 2020. № 22:1. С. 24–37.
4. Горская В.А. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. 2022. 23:3(184). С. 61–76.
5. Горская В.А. О кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубик // 2023 (в печати).
6. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. № 38. P. 779–810.

#### КАМЕРЫ И СТЕНКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ<sup>5</sup>

**В.И. Звониллов**, кандидат физ.-мат. наук, доцент  
*Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского*  
 (Россия, Нижний Новгород)  
 e-mail: zvonilov@gmail.com

**Аннотация.** Дан обзор известных результатов по жесткой изотопической классификации плоских кривых степени  $m \leq 6$  и кривых малых степеней на квадратах. Изучение особых вещественных тригональных кривых на поверхности Хирцебруха  $\Sigma_3$  с помощью графов этих кривых используется для завершения жесткой изотопической

<sup>5</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания FSWR-2023-0034.