О ТОПОЛОГИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РАСПАДАЮЩИХСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 8[1]

Борисов И.М.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Нижний Новгород, Россия
i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Г.М.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Нижний Новгород, Россия
polotovsky@gmail.com

Пучкова Н.Д.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Нижний Новгород, Россия
npuchkova@hse.ru

Предлагается обзор результатов о топологической классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8, полученных авторами за последние три года.

Мы изучаем топологию троек $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_k, \mathbb{R}\tilde{C}_{8-k})$, где $\mathbb{R}P^2$ – вещественная проективная плоскость, C_m – вещественная кривая (т. е. однородный многочлен от однородных координат в $\mathbb{R}P^2$) степени m, $\mathbb{R}C_m$ – множество точек, определяемых уравнением $C_m = 0$ в $\mathbb{R}P^2$, и $k \in \{2, 3, 4\}$.

Каждый раз мы предполагаем, что выполняются следующие условия:

i) кривые C_k и C_{8-k} являются M-кривыми (т. е. они неособые и число их компонент связности (= ветвей) максимально возможное по теореме Харнака);

ii) кривые $\mathbb{R}C_k$ и $\mathbb{R}\tilde{C}_{8-k}$ находятся в общем положении (т. е. пересекаются без касаний);

iii) $\mathbb{R}C_k$ и $\mathbb{R}\tilde{C}_{8-k}$ имеют максимально возможное число общих точек (равное $k \cdot (8-k)$) и эти точки принадлежат одной ветви каждой из этих кривых.

Рассматриваемая задача относится к тематике первой части 16-й проблемы Гильберта. Первый нетривиальный случай этой задачи – случай степени $m = 6$ – был изучен в [1]. Для степени $m = 7$ решение задачи близко к завершению благодаря усилиям многих авторов (см. список литературы в [2]), предпринятым в 1985 – 2022 гг. Для степеней $\geqslant 8$ полное решение задачи представляется нереальным ввиду слишком большого числа типов кривых.

Случай $\mathbf{k = 2}$ (объединение коники и секстики) при дополнительном условии – общие точки кривых-сомножителей лежат на пересекающихся овалах в одинаковых порядках – рассматривался в [2]. В этом случае топологические следствия теоремы Безу и хорошо известная классификация M-кривых степени 6 допускают 323 попарно различных топологических моделей кривых рассматриваемого класса. Для изучения вопроса о реализуемости этих моделей кривыми степени 8 применялся вариант метода Оревкова [3], основанного на теории кос и зацеплений.

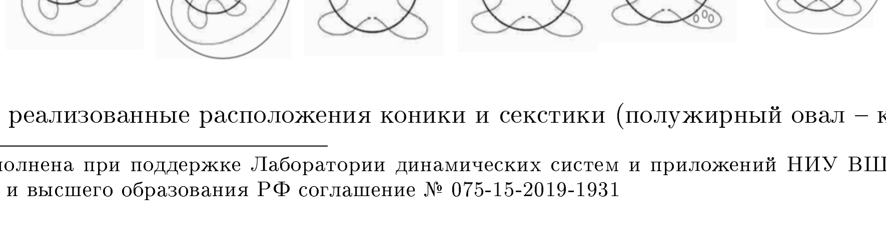

Рис. 1: реализованные расположения коники и секстики (полужирный овал – коника).

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

Этот вариант метода Оревкова применим к 251 моделям (из упомянутых выше 323). Доказано, что из них 231 не могут быть реализованы кривыми степени 8, а 6 моделей реализованы построением по способу Гильберта (рис. 1). Вопрос о реализуемости кривыми степени 8 оставшихся 14 моделей открыт.

Случай $\mathbf{k = 3}$ (объединение кубики и квинтики). Здесь число подлежащих изучению топологических моделей очень велико. В [4] с помощью версии Штурмфельса [5] patchworking-метода Виро [6] построены 29 попарно различных кривых рассматриваемого класса; пример построения показан на рис. 2, где на правом рисунке полужирными линиями нарисована кубика.

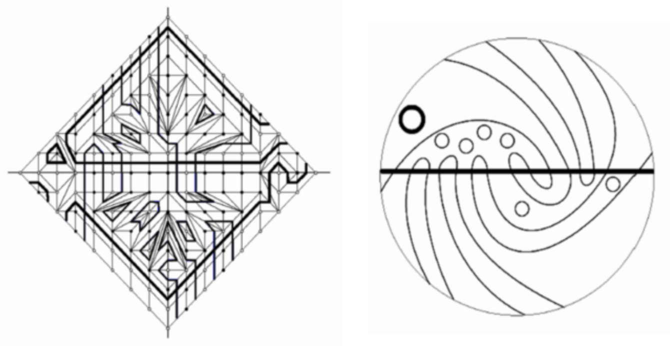

Рис. 2: слева – patchworking, справа – гладкая модель построенной слева кривой.

Случай $\mathbf{k = 4}$ (объединение двух квартик). В этом случае число моделей, подлежащих исследованию, тоже очень большое, поэтому в [7], [8] рассматриваются специальные классы расположений. Эти расположения названы "змея, обвивающаяся вокруг овала": змея – это граница достаточно малой окрестности незамкнутой дуги без самопересечений, пересекающей овал в 8 точках. В частности, в [8] найдена полная классификация для случая "змеи без свободного конца", показанная на рис. 3, где внешние окружности изображают границу модели проективной плоскости, т. е. диаметрально противоположные точки этих окружности считаются отождествлёнными.

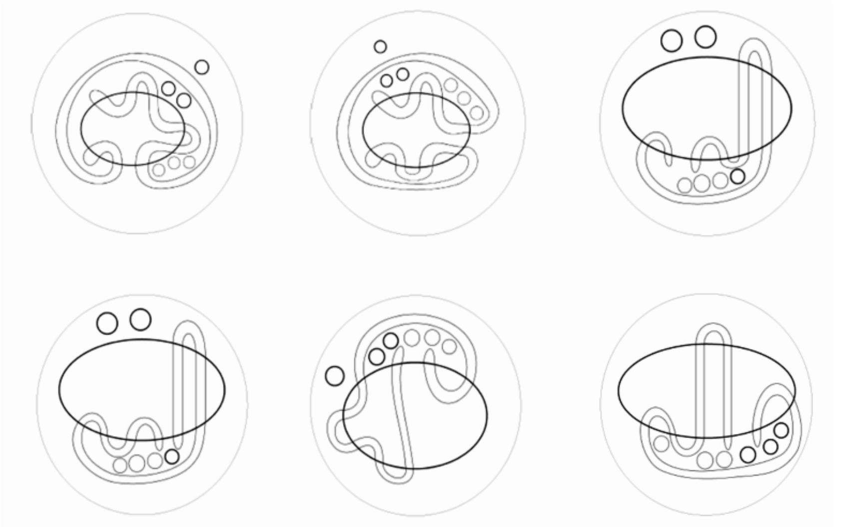

Рис. 3: полная топологическая классификация змей без свободного конца.

Список литературы

[1] Г. М. Полотовский, Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка. *ДАН СССР*, **236**:3 (1977), 548–551.

[2] И. М. Борисов, Г. М. Полотовский, О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8. *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*, Т. 176 (2020), 3–18.

[3] S. Yu. Orevkov, Link theory and oval arrangements of real algebraic curve. *Topology*, **38** (1999), 779–810.

[4] И. М. Борисов, Построение некоторых взаимных расположений M-кубики и M-квинтики. *Чебышевский сборник*, **22**:1 (2021), 76–91.

[5] B. Sturmfels, Viro's theorem for complete intersection. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **21**:3 (1994), 377–386.

[6] O. Ya. Viro, Patchworking real algebraic varieties. *Preprint Uppsala University U.U.D.M.*, Report **42** (1994).

[7] Н. Д. Пучкова, О взаимных расположениях двух M-кривых степени 4. *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*, Т. 222 (2023), 69–82.

[8] Н. Д. Пучкова, О расположениях двух M-кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой. *Чебышевский сборник* (2023, в печати).