МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодский государственный университет»

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского»

Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МЦМУ МИАН)

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН)

Региональный научно-образовательный математический центр «Уральский математический центр» (РНОМЦ-УМЦ)

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского» Уральского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Материалы II Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 160 -летию со дня рождения видного российского математика Д.А. Граве

19–23 сентября 2023 г.

ВОЛОГДА
2023

УДК 51 +372.851
ББК 22.1+74.262
Х-ХХ

Утверждено научным советом ВоГУ

Математика в современном мире: материалы II Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 160-летию видного российского математика Д. А. Граве (19–23 сентября 2023 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Вологодский государственный университет, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН; [ответственные редакторы В.А. Тестов, Н.В. Маслова]. – Вологда : ВоГУ, 2023. – 190 с. : ил.

ISBN

В настоящий сборник вошли статьи участников II Всероссийской научно-практической конференции «Математика в современном мире», состоявшейся 19–23 сентября 2023 г. в Вологодском государственном университете.

Предназначен для научных работников, преподавателей вузов, аспирантов, магистрантов и всех интересующихся современными проблемами математики и физико-математического образования.

УДК 51 +372.851
ББК 22.1+74.262

ISBN

К 160-летию Дмитрия Александровича Граве

(1863-1939)

Дмитрий Александрович Граве родился 6 сентября 1863 г в городе Кириллове Вологодской обл. в дворянской семье. Отец его, Александр Иванович Граве, служил уездным чиновником. Интерес к математике у мальчика проявился еще в начальной народной школе. После смерти отца (1871 г.) семья Граве переехала в Петербург, где он закончил с золотой медалью частную гимназию известного педагога Бычкова. В этой гимназии Граве получил прочные и широкие знания по математике.

В 1881 г. Д.А. Граве поступил на математическое отделение Петербургского университета. Учителями его в университете стали крупнейшие математики П.Л. Чебышев, А.Н. Коркин, А.А. Марков и др. Наибольшее влияние на Граве оказал Александр Николаевич Коркин, который происходил из крестьян Вологодской губернии. «Я должен признаться, – писал Граве, – что обе мои диссертации вытекали из бесед с Коркиным, хотя в докторской диссертации большую роль играли также Чебышев и Марков».

По окончании университета (1885) он был оставлен в нем для подготовки к профессорскому званию. В 1889 г. он защитил на степень магистра чистой математики диссертацию: "О частных дифференциальных уравнениях первого порядка" и с осени того же начал чтение лекций в Санкт-Петербургском университете.

В 1896 г. Д. А. Граве защитил диссертацию на степень доктора математики: Его докторская диссертация «Об основных задачах математической теории построения географических карт» обратила на себя внимание многих ученых, способствовала завязыванию его дружбы с Ш. Эрмитом (Париж) и К. Шварцем (Берлин).

С января 1902 г он начал работать профессором на кафедре чистой математики в Императорском университете св. Владимира в Киеве. Находясь в 1906-1907 гг. на лечении за границей. Д.А. Граве увлекся новыми направлениями в алгебре и теории чисел. Вернувшись на работу в Киевский университет, он стал передавать это увлечение своим многочисленным ученикам. Он был потрясающим лектором и одаренным педагогом. Ему удавалось необыкновенно просто и ясно объяснять сложные вопросы математической науки, тем самым, привлекая большое количество студентов на свои лекции, и развивая у слушателей пытливость ума и увлечение математическими науками.

Д.А. Граве отдавал всю свою энергию и весь свой энтузиазм на создание научной алгебраической школы. В деле организации научной школы решающую роль сыграло создание им семинара, где Д.А. Граве сумел наладить научную работу со студентами. Киевская математическая школа получила всеобщее признание, а семинар ее руководителя проф. Д.А. Граве стал известен среди европейской математической общественности. На этом семинаре была выращена целая плеяда блестящих математиков. Среди них П.Д. Белоновский, Б.Н. Делоне***, Е.И.*** Жилинский, М.Ф. Кравчук, А.М. Островский, О.Ю. Шмидт, Н.Г. Чеботарев и др. Но самыми выдающимися, самыми знаменитыми являются «три глыбы»: Б.Н. Делоне, О.Ю. Шмидт и Н.Г. Чеботарев, которые стали основателями алгебраических школ в Ленинграде, Москве и Казани. Большинство учеников Граве стали самостоятельными учеными, разъехались по другим городам и странам и обзавелись собственными учениками.

Д.А. Граве был автором многочисленных ценнейших исследований в различных областях математики, большого количества книг и монографий, на которых было воспитано несколько поколений математиков. Его книги пользовались большой популярностью среди учащейся молодежи, в них Д. А. Граве умел вложить тот энтузиазм, которым он **обладал** в высокой степени. Можно без особого преувеличения сказать, что книги Д. А. Граве воспитали и привили вкус к математике большинству советских математиков того времени.

Д. А. Граве прожил 76 лет, до конца жизни не переставая работать на пользу математической науки и математического образования. В советское время он стал заниматься механикой, математической физикой и различными прикладными вопросами. Поразительны разносторонняя образованность Д.А. Граве в областях, смежных с математикой, и свежесть мысли, которая всегда характеризует его работы.

С 1934 по 1939 г. он был первым директором вновь созданного Института математики АН УССР. В последние годы жизни Д.А. Граве часто возвращался к темам, которые занимали его в ранний период увлечения теорией чисел и алгеброй – теории Галуа и теории идеалов.

Д. А. Граве был членом-корреспондентом АН СССР (1924 г.), почетным академиком АН СССР (1929 г.), награжден орденом Трудового Красного Знамени.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП И ГРУПП, ТЕОРИЯ КОЛЕЦ И МОДУЛЕЙ, ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Минимальные спутники $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп

Бажанова Е.Н.
Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
DeminaENmf@yandex.ru

Понятие формации конечных групп было введено в 1963 году В. Гашюцом [1]. В этой работе с помощью функции $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}$ были построены локальные формации. Б. Хартли в работе [2] определил локальные классы Фиттинга с помощью функции $g : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга групп}\}$. Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга привела к необходимости рассмотрения спутников различных направлений. В работах [3, 4] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной были построены Ω-расслоенные и ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, имеющие бесконечное множество попарно неэквивалентных направлений Ω-спутника (ω-спутника) f.

Дальнейший анализ понятия расслоенности формации конечных групп и групп, обладающих конечными композиционными рядами, показал, что понятие расслоенности формации может быть применено к построению расслоенных формаций и классов Фиттинга универсальных алгебр, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. В работах [5, 6] построены различные типы соответственно Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами. В работе [7] А.Н. Скибой была предложена новая идея в функциональном подходе – так называемая идея σ-разбиений.

Цель настоящей работы – построить различные классы $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, дать описание строения их минимальных $\Omega\sigma$-спутников.

Пусть дана аддитивная группа G с нулевым элементом 0. Группа G называется *мультиоператорной T-группой* с системой мультиоператоров T (или, коротко, T-группой), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна.

Пусть $\mathfrak{C}$ – класс всех T-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых T-групп. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Класс $\mathfrak{X}$, содержащийся в классе $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{C}$-классом. Пусть Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \backslash \Omega$ и $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых T-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой. Обозначим через $\mathfrak{C}_\Omega$ – класс всех Ω-групп, принадлежащих $\mathfrak{C}$. Будем полагать $O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega}$, $O^{\Omega,\Omega'}(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega \mathfrak{C}_{\Omega'}}$.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – некоторое разбиение класса всех простых мультиоператорных T-групп $\mathfrak{I}$ на непустые попарно непересекающиеся подклассы σ_i, $i \in I$, т.е. $\mathfrak{I} = \cup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Пусть Ω – непустой класс простых мультиоператорных T-групп такой, что $\Omega \not\subseteq \sigma_i$, $\forall i \in I$. Обозначим через $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\}$, $\Omega\sigma = \{\Omega \cap \sigma_i | \Omega \cap \sigma_i \neq \varnothing\}$, $\Omega\sigma(G) = \{\Omega \cap \sigma_i | \Omega \cap \sigma_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\}$, $\Omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\Omega\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса T-групп $\mathfrak{F}$.

Функция f: $\Omega\sigma \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга T-групп$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$, называется *$\Omega\sigma R$-функцией*; функция $\varphi : \Omega\sigma \cup \{\Omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга T-групп$\}$ называется *$\Omega\sigma FR$-функцией*;

Через φ_0 обозначим такую $\Omega\sigma FR$-функцию, что $\varphi_0(\Omega') = \mathfrak{C}_\Omega$ и $\varphi_0(\Omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{C}_{(\Omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$; а через φ_1 – такую $\Omega\sigma FR$-функцию, что $\varphi_1(\Omega') = \mathfrak{C}_\Omega$ и $\varphi_1(\Omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{C}_{\Omega \cap \sigma_i} \mathfrak{C}_{(\Omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$.

Для любых $\Omega\sigma R$-функций ($\Omega\sigma FR$-функций) μ_1 и μ_2 полагаем $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\Omega') \subseteq \mu_2(\Omega')$ и $\mu_1(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq \mu_2(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$.

Теорема 1. *Пусть f – $\Omega\sigma R$-функция, φ – $\Omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega \cap \sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *$\Omega\sigma$-расслоенным*, если $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ – некоторые $\Omega\sigma R$-функция и $\Omega\sigma FR$-функция соответственно. Функцию f будем называть *$\Omega\sigma$-спутником*, а функцию φ – *$\Omega\sigma$-направлением* $\Omega\sigma$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi_0)$ называется *$\Omega\sigma$-свободным* или, коротко, *$\Omega\sigma Fr$-классом Фиттинга*, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\sigma FrR(f)$, а f называется *$\Omega\sigma Fr$-спутником* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi_1)$ называется *$\Omega\sigma$-каноническим* или, коротко, *$\Omega\sigma K$-классом Фиттинга*, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\sigma KR(f)$, а f называется *$\Omega\sigma K$-спутником* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

$\Omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *минимальным* $\Omega\sigma$-спутником, если f является минимальным элементом множества всех $\Omega\sigma$-спутников $\mathfrak{F}$.

Обозначим через $\Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех $\Omega\sigma$-расслоенных $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга с $\Omega\sigma$-направлением φ, содержащих множество T-групп $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\sigma Fr$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-канонический $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\sigma K$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(O^{\Omega\cap\sigma_i,(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Список литературы

[1] W. Gaschütz, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Mathematische Zeitschrift.* **80**:4 (1963), 300–305.

[2] B. Hartley, On Fischer's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.* **3**:19 (1969), 193–207.

[3] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискрет. математика.* **13**:3 (2001), 125–144.

[4] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Мат. заметки.* **71**:1 (2002), 43–60.

[5] В. А. Ведерников, Е. Н. Демина, Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп. *Сиб. мат. журн.* **51**:5 (2010), 990–1009.

[6] Е. Н. Бажанова, В. А. Ведерников, Ω-расслоеннные классы Фиттинга T-групп. *Сиб. электрон. мат. изв.* **14** (2017), 629–639.

[7] A. N. Skiba, On one generalization of the local formations. *Problems of Phesics, Mathematics and Technics.* **34**: 1 (2018), 79–82.

Полугруппы бинарных отношений на топологических пространствах

Вечтомов Е.М.
Вятский государственный университет, Киров, Россия
vecht@mail.ru

Обозначим через $R(X)$ полугруппу всех бинарных отношений на множестве X с операцией композиции бинарных отношений. Изучается проблема определяемости топологических пространств X различными подполугруппами полугруппы $R(X)$. Вопросам определяемости посвящена наша обзорная статья [3].

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $A(X)$ — алгебраическая структура из заданной категории A алгебраических структур. Предполагается, что соответствие $X \to A(X)$ функториально, в частности гомеоморфным топологическим пространствам X и Y отвечают изоморфные алгебраические структуры $A(X)$ и $A(Y)$.

Топологические пространства X и Y назовем *A-эквивалентными*, если изоморфны их производные алгебраические структуры $A(X)$ и $A(Y)$. Скажем, что топологическое пространство X *определяется алгебраической структурой $A(X)$ в классе T* топологических пространств, если любое топологическое пространство из T, A-эквивалентное X, гомеоморфно X. При этом определяемость топологического пространства X в классе всех топологических пространств называется *абсолютной определяемостью X алгебраической структурой $A(X)$*. Изоморфизм алгебраических структур $A(X)$ и $A(Y)$ называется *индуцированным*, если он порождается некоторым гомеоморфизмом пространств X и Y.

Бинарное отношение ρ на топологическом пространстве X называется:

– *непрерывным* (*относительно непрерывным*), если прообраз $U\rho^{-1}$ любого открытого множества U пространства X есть открытое множество в пространстве X (в образе $X\rho^{-1}$ отношения ρ) — эти понятия введены в [4];

– *замкнутым*, если ρ есть замкнутое подмножество тихоновского произведения $X \times X$.

Для произвольного топологического пространства X выделим в полугруппе $R(X)$ следующие подполугруппы:

– полугруппу $CR(X)$ всех непрерывных бинарных отношений;

– полугруппу $CR^*(X)$ всех относительно непрерывных бинарных отношений;

– полугруппу $S(X)$ всех непрерывных отображений $X \to X$;

– полугруппу $S'(X)$ всех относительно непрерывных частичных функций из X в X.

Указанные полугруппы имеют единицу — тождественное отображение 1_X, а полугруппы $R(X) \supseteq CR^*(X) \supseteq CR(X)$ и $S'(X)$ имеют также нуль $\varnothing$ — пустое отношение.

Обзор Маггила [6] посвящен определяемости топологических пространств X из различных классов пространств полугруппами $S(X)$.

Замкнутые бинарные отношения рассматривал Маггил [5]. Он назвал T_1-пространство X *σ-пространством* в случае, когда композиция любых двух замкнутых бинарных отношений на X также будет замкнутым бинарным отношением, и обозначил через $\sigma[X]$ полугруппу всех замкнутых бинарных отношений на σ-пространстве X. Он доказал индуцированность всех изоморфизмов полугрупп $\sigma[X]$ и $\sigma[Y]$. Следовательно, имеет место

Теорема 1 ([5]). *Каждое σ-пространство X определяется полугруппой $\sigma[X]$ в классе всех σ-пространств.*

Верна следующая теорема определяемости, доказанная О'Рейлли.

Теорема 2 ([7]). *Всякое хаусдорфово пространство определяется полугруппой всех замкнутых бинарных отношений на нем, имеющих компактный образ, в классе всевозможных хаусдорфовых пространств.*

Топологическое пространство назовем *нетривиальным*, если оно не дискретно и не антидискретно.

Теорема 3 ([2,3, теорема 4.13]). *Любое нетривиальное топологическое пространство X абсолютно определяется — с точностью до антигомеоморфизма — полугруппой $S'(X)$.*

Через $S_p(X)$ обозначим полутопологическую полугруппу $S(X)$ с топологией поточечной сходимости, т.е. $S(X)$ считается подпространством тихоновской степени X^X.

Теорема 4 ([2,3, предложение 4.14]). *Всякое топологическое пространство X абсолютно определяется своей полутопологической полугруппой $S_p(X)$.*

Теорема 1 из [1] описывает все изоморфизмы полугрупп $CR^*(X)$ и $CR^*(Y)$ над любыми топологическими пространствами X и Y. Из нее вытекает

Теорема 5 ([1, теорема 2]). *Любое нетривиальное топологическое пространство X абсолютно определяется полугруппой $CR^*(X)$.*

Если полугруппу $CR(X)$ рассмотреть с отношением включения бинарных отношений, то получим упорядоченную полугруппу $CR(X)$.

Теорема 6 ([8]). *Всякий изоморфизм упорядоченных полугрупп* $CR(X)$ *и* $CR(Y)$ *для произвольных топологических пространств* X *и* Y *является индуцированным. Следовательно, любое топологическое пространство* X *абсолютно определяется своей упорядоченной полугруппой* $CR(X)$.

Отметим следующие два новых результата.

Теорема 7 (Вечтомов Е. М., Волков М. В.). *Любое конечное топологическое пространство* X *абсолютно определяется полугруппой* $CR(X)$.

Теорема 8 (Вечтомов Е. М., Волков М. В.). *Всякий изоморфизм полугрупп* $CR(X)$ *и* $CR(Y)$ *для произвольных* T_1*-пространств* X *и* Y *— индуцированный. Следовательно, любое* T_1*-пространство* X *абсолютно определяется полугруппой* $CR(X)$.

Проблема определяемости произвольного топологического пространства X полугруппой $CR(X)$, поставленная в [8], пока остается открытой.

Список литературы

[1] В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, Полугруппы относительно непрерывных бинарных отношений и их изоморфизмы. *Математические заметки.* **113**:6 (2023), 807–819.

[2] Е. М. Вечтомов, О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах. *Успехи математических наук.* **45**:4 (1990), 143–144.

[3] Е. М. Вечтомов, Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций. *Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия.* **28** (1990), 3–46.

[4] Е. М. Вечтомов, Полукольцо непрерывных соответствий на топологических пространствах. *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XVIII Международной конференции, посв. столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина.* Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2020, 100–102.

[5] K. D. Maggil, Isomorphisms of triform semigroups. *J. Austral Math. Soc.* **10** (1969), 185–193.

[6] K. D. Maggil, A survey of semigroups of continuous self-maps. *Semigroup Forum.* **11**:3 (1976), 189–282.

[7] S. B. O'Reilly, The characteristic semigroup of a topological space. *Gen. Topol. and Appl.* **5**:2 (1975), 95–106.

[8] E. M. Vechtomov, Isomorphisms of semirings of continuous binary relations on topological spaces. *Semigroup Forum.* **106**:1 (2023), 327–331.

Строение нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа[1]

Гальт А.А.
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
galt@math.nsc.ru

Старолетов А.М.
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
staroletov@math.nsc.ru

Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [1]. Рассмотрим простую связную линейную алгебраическую группу $\overline{G}$ над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ простого поля характеристики p. Рассмотрим максимальный σ-инвариантный тор $\overline{T}$ группы $\overline{G}$, где σ — эндоморфизм Стейнберга. Все максимальные торы сопряжены в $\overline{G}$ и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Вопрос, поставленный Ж. Титсом, состоит в следующем: для каких групп $\overline{G}$ нормализатор $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$. Ответ был независимо получен в работе [2] и в [3–6]. В случае групп Ли данная проблема была решена в работе [7].

Аналогичный вопрос может быть сформулирован для конечных групп лиева типа. А именно, пусть G — конечная группа лиева типа, то есть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leqslant G \leqslant \overline{G}_\sigma$. Пусть $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы G и $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ — алгебраический нормализатор в G тора T. Известно, что в случае конечных групп максимальные торы не обязательно сопряженны в группе G. Задача заключается в описании таких групп G и их максимальных торов T, что группа $N(G,T)$ расщепляется над T. Данная проблема решена для групп лиевых типов A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и F_4 в работах [4–6, 8–10].

В работе [2] авторами был рассмотрен смежный вопрос: чему равен порядок поднятия элемента $w \in W$ в группе $N_{\overline{G}}(\overline{T})$? Легко понять, что если порядок элемента w равен d, то минимальный порядок поднятия для w равен либо d, либо $2d$. Очевидно, что если $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$,

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда № 23-41-10003, https://rscf.ru/project/23-41-10003/.

то минимальный порядок равен d.

В случае алгебраических групп $\overline{G}$ лиева типа E_6, E_7, E_8 или F_4 нормализатор тора не расщепляется. Тем не менее, в работах [8,9] получено, что в случае конечных групп $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ минимальный порядок поднятия всегда равен d. В частности, минимальный порядок поднятия равен d для соответсвующих алгебраических групп.

Для групп лиева типа F_4 в работе [2] найдены минимальные порядки поднятий для элементов, принадлежащих регулярным или эллиптическим классам сопряженности группы W. В частности, было показано, что существует эллиптический элемент порядка 4 для которого любое его поднятие имеет порядок 8. В работе [10] найдены минимальные порядки поднятий для всех элементов группы Вейля в группе $F_4(q)$.

Мы завершаем исследование поставленного вопроса о расщепляемости нормализатора максимального тора для оставшихся конечных групп лиева типа.

Теорема. *Пусть $G \in \{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q), {}^2F_4(q), {}^2B_2(q)\}$. Пусть T — максимальный тор группы G и $N(G,T)$ — алгебраический нормализатор тора T. Тогда N расщепляется над T.*

Список литературы

[1] J. Tits, Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus. *J. Algebra*, **4** (1966), 96–116.

[2] J. Adams, X. He, Lifting of elements of Weyl groups. *J. Algebra*, **485** (2017), 142–165.

[3] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных линейных алгебраических группах. *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:2 (2017), 35–52.

[4] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups *J. Algebra Appl.*, **16**:9 (2017), 1750174, 23 pp.

[5] A. A. Galt, On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups *J. Algebra Appl.*, **14**:7 (2015), 1550114, 20 pp.

[6] А. А. Гальт, О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:3 (2014), 19–34.

[7] M. Curtis, A. Wiederhold , B. Williams, Normalizers of maximal tori. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **418** (1974), 31–47.

[8] A. A. Galt, A. M. Staroletov, On splitting of the normalizer of a maximal torus in $E_6(q)$ *Algebra Colloq.*, **26**:2 (2019), 329–350.

[9] А. А. Гальт, А. М. Старолетов. О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$. *Мат. труды*, **24**:1 (2021), 52–101.

[10] А. А. Гальт, А. М. Старолетов. Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$. *Изв. РАН. Сер. матем.*, **86**:1 (2022), 134–159.

Нульмерные подмножества группы Томпсона F

Губа В.С.
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
victorguba@mail.ru

(Дискретная) группа называется аменабельной, если существует конечно аддитивная (право)инвариантная вероятностная мера на ней. Более формально, это отображение $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых дизъюнктных подмножеств $A, B \subseteq G$,
- $\mu(Ag) = \mu(A)$ для любого $A \subseteq G$, $g \in G$,
- $\mu(G) = 1$.

Подмножество A группы G называется *нульмерным*, если для любой конечно аддитивной правоинвариантной вероятностной меры μ на G верно равенство $\mu(A) = 0$.

Свойство аменабельности группы можно также описать в терминах графов Кэли. Мы рассматриваем конечно порождённые группы.

Плотностью конечного графа называем среднюю степень его вершин. Для графа Кэли группы G с m образующими известно, что G аменабельна тогда и только тогда, когда точная верхняя грань плотностей конечых подграфов принимает максимальное значение $2m$ (критерий Фёлнера). Свойство не зависит от выбора конечной системы образующих.

Семейство A_n $(n \geq 1)$ непустых конечных подграфов графа Кэли m-порождённой группы G называется *фёлнеровской системой*, если

$$\sup_n \delta(A_n) = 2m,$$

где δ обозгачает плотность. Для краткости можно говорить о фёлнеровских множествах.

Утверждение 1. *Удаление элементов нульмерного множества из фёлнеровских множеств снова приводит к фёлнеровской системе.*

Группа Томпсона F задаётся в терминах образующих и соотношений следующим способом:

$$\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \mid x_j x_i = x_i x_{j+1} \ (i < j) \rangle.$$

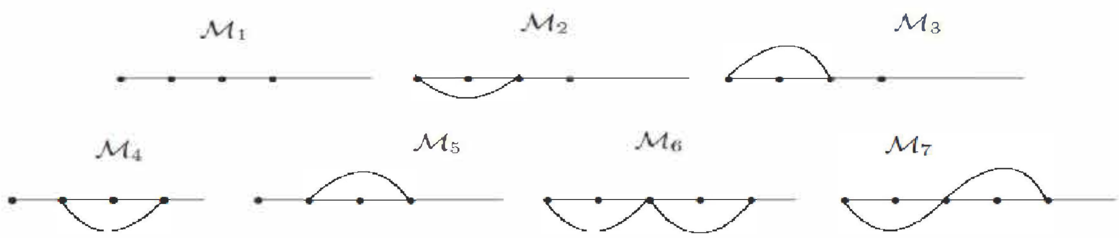
Она имеет также задание с двумя образующими и двумя соотношениями. Основные факты об этой группе см. в [3] и недавнем обзоре автора [7]. До сих пор не известно, является ли эта группа аменабельной. Проблема стоит как минимум с 1987 года [4, 5]. Относительно ответа среди специалистов нет единого мнения. Автор большей частью пытался обосновать неаменабельность. Однако недавно обнаружилось, что оценка плотности 3.5 для графа Кэли в системе образующих $\{x_0, x_1\}$, полученная Белком и Брауном [1, 2], не является оптимальной. Это было показано в недавней работе [8], что несколько увеличивает шансы на аменабельность группы.

Элементы группы F однозначно задаются своей нормальной формой вида

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s} x_{j_t}^{-1} \cdots x_{j_2}^{-1} x_{j_1}^{-1}, \tag{1}$$

где $s, t \geq 0$, $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_s$, $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_t$, и при этом требуется следующее: если (1) содержит как x_i, так и x_i^{-1} для некоторого $i \geq 0$, то оно содержит x_{i+1} или x_{i+1}^{-1}.

По данной нормальной форме естественным образом строится *каноническая диаграмма* элемента в соответствии с техникой работы [6]. Такие диаграммы можно подразделить на 7 видов.



1: Виды канонических диаграмм элемента.

Это даёт разбиение F на 7 дизъюнктных подмножеств: $F = \bigsqcup_{i=1}^{7} \mathcal{M}_i$. Вот наш основной результат.

Теорема. *Если μ есть конечно аддитивная правоинвариантная вероятностная мера на F, то подмножества $\mathcal{M}_i$ $(1 \le i \le 5)$ и $\mathcal{M}_7$ являются нульмерными. Инами словами, вся мера (в случае её существования) сосредоточена на $\mathcal{M}_6$.*

В соответствии с Утверждением 1, можно без ограничения общности считать, что фёлнеровские множества состоят только из диаграмм множества $\mathcal{M}_6$ (если F аменабельна). Это позволяет прояснить структуру фёлнеровских множеств в предположении, что они существуют.

Список литературы

[1] J. M. Belk, Thompson's group F. PhD Thesis, Cornell University, 2004.

[2] J. M. Belk, K. S. Brown, Forest diagrams for elements of Thompson's group F. *Int. J. Alg. and Comp.*, **15**:5-6 (2005), 815–850.

[3] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's groups. *L'Enseignement Mathématique* (2), **42** (1996), 215–256.

[4] R. Geoghegan, Open problems in infinite-dimensional topology. *Topology Proc.*, **4**:1 (1979), 287—338.

[5] S. M. Gersten, Selected problems. Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984). *Ann. of Math. Stud., 111*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, 545—551.

[6] V. S. Guba, On the properties of the Cayley graph of Richard Thompson's group F. *Int. J. of Alg. and Comp.*, **14**:5-6 (2004), 677–702.

[7] V. S. Guba, R. Thompson's group F and the amenability problem. *Russian Math. Surveys*, **77**:2 (2022), 251–300.

[8] V. S. Guba. Cayley graphs of R. Thompson's group F: new estimates for the density. *Journal of Combinatorial Algebra* (2023, to appear), https://arxiv.org/pdf/2210.12304.pdf.

Об одном классе групп конечного нормального ранга

Дашкова О.Ю.
Филиал МГУ в городе Севастополе, Севастополь, Россия
odashkova@yandex.ru

А. И. Мальцевым было введено понятие специального ранга группы [1]. Исследованию групп конечного специального ранга посвящено много работ. Достаточно полный обзор результатов о группах конечного специального ранга содержится в [2].

Другим важным направлением алгебраических исследований является изучение модулей над групповыми кольцами с различными ограничениями на группы. Естественно возникает идея о том, чтобы распространить модульный подход на исследование групп с условиями конечности. В связи с этим Л. А. Курдаченко ввел определение нормального ранга группы [3].

Определение. *Говорят, что группа G имеет конечный нормальный ранг r, если r – наименьшее число с тем свойством, что для любого конечного множества элементов $g_1, g_2, \cdots, g_n$ группы G найдутся элементы $h_1, h_2, \cdots, h_m$ из G такие, что $m \leq r$ и*

$$\langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle^G = \langle h_1, h_2, \cdots, h_m \rangle^G.$$

В случае, когда такого числа r не существует, нормальный ранг группы G считается бесконечным.

В [3, 4] начато исследование двуступенно разрешимых групп конечного нормального ранга. В частности, изучались двуступенно разрешимые периодические локально нильпотентные группы. В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании разрешимых групп ступени разрешимости 3, имеющих конечный нормальный ранг и бесконечный специальный ранг.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть W – сплетение группы простого порядка p и прямого произведения l групп, каждая из которых является квазициклической p-группой. Тогда нормальный ранг W равен $l + 1$.*

С использованием этого предложения доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть G – разрешимая группа, обладающая нормальным рядом $A \leq H \leq G$, такая, что A – бесконечная элементарная абелева p-*

группа, p – простое число, фактор-группа H/A разлагается в прямое произведение p квазициклических p-групп, фактор-группа G/H – циклическая группа порядка p^k для некоторого натурального k, порожденная элементом gH. Если элемент g централизует подгруппу A и A может быть порождена как H-подгруппа n элементами, т.е. $A = \langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle^H$, то нормальный ранг группы G конечен и не превосходит числа $n + p + 1$.

Список литературы

[1] А. И. Мальцев, О группах конечного ранга. *Мат. сб.*, **22**:2 (2002), 361–362.

[2] Д. Робинсон, Новый подход к разрешимым группам с условиями конечности для абелевых подгрупп. *Успехи мат. наук.*, **34**:1 (1979), 197–215.

[3] O. Yu. Dashkova, On groups of finite normal rank. *Algebra Discrete Math.*, **1**:1 (2002), 64–68.

[4] О. Ю. Дашкова, О некоторых разрешимых группах конечного нормального ранга. *Тезисы докладов Международной конференции "Алгебра и динамические системы", посвященной 110-летию со дня рождения С.Н. Черникова.* Нальчик: издательство "Принт-центр". 2022, 44–44.

Сигма инварианты обобщенных групп Баумслага–Солитера[1]

Дудкин Ф.А.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
DudkinF@gmail.com

Конечно порожденная группа G, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). По теореме Басса-Серра всякая GBS группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$ [1], вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Как заметил Д. Робинсон [2], GBS группы занимают важные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам: нециклические GBS группы – в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую подгруппу; GBS группы когерентны (всякая конечно порожденная подгруппа допускает конечное копредставление).

В начале 1970-х гг. Г. Баумслаг [3] и В. Н. Ремесленников [4] независимо обнаружили, что существует гораздо больше конечно представленных метабелевых групп, чем можно было ожидать. Они доказали, в частности, что всякая конечно порожденная метабелева группа вкладывается в конечно представленную метабелеву группу. Эти соображения мотивировали следующую задачу: найти инвариант группы выделяющий конечно определенные метабелевы группы в классе конечно порожденных метабелевых групп. Задача была решена Р. Биери и Р. Стребелем в 1978 году [5]. Эта работа легла в основу определения сигма инвариантов (см., например, книгу [6]).

Пусть G конечно порожденная группа, а X её порождающее множество. Сигма инвариант $\Sigma^1(G)$ определяется с помощью графа Кэли $Cay(G,X)$ следующим образом. Для каждого вещественного характера $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ определим подмоноид

$$G_\chi = \{\ g \in G \mid \chi(g) \geqslant 0\ \}.$$

Если на этот набор элементов посмотреть как на набор вершин графа

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

$Cay(G, X)$, то можно соединить соседние вершины из G_χ ребрами и получить подграф Γ_χ графа $Cay(G, X)$. Несложно понять, что если характеры χ_1 и χ_2 эквивалентны (т.е. отличаются только умножением на положительную константу), то подграфы Γ_{χ_1} и Γ_{χ_2} буду совпадать. Поэтому G_χ и Γ_χ зависят только от класса $[\chi]$ характеров.

Известно, что граф $Cay(G, X)$ связен тогда и только тогда, когда X порождает G. Подграф Γ_χ уже не обязан быть связным. Набор классов характеров

$$\Sigma^1(G) = \{\ [\chi] \mid \Gamma_\chi \text{ связный }\}$$

обычно называется (*гомотопическим*) *геометрическим инвариантом группы* G или BNS*-инвариантом группы* G.

Сигма инварианты активно изучаются для разных классов групп. В 2015 г. Н. Кобан, Дж. Маккэмонд и Дж. Мейер [7] получили описание сигма инвариантов группы крашенных кос, в 2017 г. К. Алмейда [8] описала сигма инварианты некоторых артиновых групп, весной этого года опубликована работа С. Фридла и С. Видусси [9] в которой описание сигма инвариантов помогает строить алгебраические расслоения некоторых расширений групп.

В представленной работе изучаются сигма инварианты GBS групп и доказывается

Теорема. *Пусть GBS группа G задана графом с метками $\mathbb{A}$. Существует алгоритм (мы его строим в явном виде) вычисления $\Sigma^1(G)$ по графу с метками $\mathbb{A}$. Более того, если группа G не изоморфна свободной абелевой группе ранга 2 или группе бутылки Клейна, то $\Sigma^1(G)$ зависит только от числа ребер вне максимального поддерева A и наличия нетривиального центра в группе G.*

Список литературы

[1] J. P. Serre, Trees. Berlin/Heidelberg/New York:Springer, 1980.

[2] D. J. S. Robinson, Generalized Baumslag-Solitar groups: a survey of recent progress. *Groups St Andrews 2013, LMS, Lecture Note Series* 422, 2016, 457–469.

[3] G. Baumslag, Subgroups of finitely presented metabelian groups. *J. Austral. Math. Soc.* **16** (1973), 98–110.

[4] N. Remeslennikov, On finitely presented soluble groups. *Proc. Fourth All-Union Symposion on the Theory of Groups*, 1973, 164–169.

[5] R. Bieri, R. Strebel, Almost finitely presented soluble groups. *Comment. Math. Helv.*, **53**:2 (1978), 258–278.

[6] R. Strebel, Notes on the Sigma invariants, Version 2, 2013, PDF avaliable at https://arxiv.org/abs/1204.0214.

[7] N. Koban, J. McCammond, J. Meier, The BNS-invariant for the pure braid groups. *Groups Geom. Dyn.*, **9**:3 (2015), 665–682.

[8] K. Almeida, The BNS-invariant for some Artin groups of arbitrary circuit rank. *J. Group Theory*, **20** (2017), 793–806.

[9] S. Friedl, S. Vidussi, BNS Invariants and Algebraic Fibrations of Group Extensions, arXiv:1912.10524.

О конечных группах с графом Грюнберга-Кегеля как у группы $G_2(3)$

Ильенко К.А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
christina.ilyenko@yandex.ru

Пусть G — конечная группа. *Спектром* $\omega(G)$ будем называть множество всех порядков элементов G. Под *простым спектром* $\pi(G)$ будем понимать множество всех простых чисел из $\omega(G)$. Неориентированный граф без петель и кратных рёбер, обозначим его через $\Gamma(G)$, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и две различные вершины p и q в котором смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$, называется *графом Грюнберга–Кегеля* или *графом простых чисел* группы G.

Пусть G — неабелева простая группа. Если любая группа H такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, содержит единственный неабелев композиционный фактор S такой, что $S \cong G$, то G называется *квазираспознаваемой* по своему графу Грюнберга–Кегеля.

В статье [1] авторами было показано, что если G — конечная группа и $\Gamma(G)$ состоит из трех связных компонент: $\{2,3\}$, $\{7\}$ и $\{13\}$, то $G \cong G_2(3)$. В то же время, в работе [2] была доказана квазираспознаваемость группы $G_2(3)$ по её графу Грюнберга–Кегеля. Однако обе статьи содержат неточности, так как $\Gamma(G_2(3)) = \Gamma(PSL_2(13))$.

Мы исправляем эти неточности и доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — конечная группа с $|\pi(G)| = 4$ такая, что $5 \notin \pi(G)$ и $\pi_1(G) = \{2,3\}$, тогда $\pi(G) = \{2,3,7,13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $G \cong G_2(3)$;

(2) $G/O_2(G) \cong PSL_2(13)$, *и если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор G как $G/O_2(G)$-модуль изоморфен одному из двух неприводимых 6-мерных $GF(4)PSL_2(13)$-модулей.*

Каждое из утверждений (1) и (2) теоремы реализуется, в частности, существует конечная группа H с $O_2(H) \neq 1$ такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(G_2(3))$.

Список литературы

[1] A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov, On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279**:Suppl 1 (2012), 43–61.

[2] Q. Zhang, W. Shi, R. Shen, Quasirecognition by prime graph of the simple groups $G_2(q)$ and ${}^2B_2(q)$. *J. Algebra Appl.*, **10**:2 (2011), 309–317.

Алгебраиические школы Пермского и Ярославского университетов[1]

Казарин Л.С.
Ярославский гос. университет им. П.Г.Демидова, Ярославль, Россия
lsk46@mail.ru

Пермский университет был открыт в октябре 1916 г. как отделение Петроградского университета. Он был первым на Урале. Законодательно ПГУ получил статус самостоятельного университета 5 мая 1917 г. Первым математиком в Пермском университете был ученик Д. А. Граве Казимир Фомич Абрамович, работавший в Пермском университете в 1916 – 1920 гг. В 1916 – 1920 гг. в Перми работали, ставшие впоследствии знаменитыми учеными, выпускники физико-математического факультета Санкт-Петербургского университта А. С. Безикович, А. А. Фридман, Я. Д. Тамаркин, И. М. Виноградов и др. Более подробно о жизни и деятельности Пермского университета и упомянутых ученых можно прочесть в статьях В. И. Яковлева и Я. Д. Половицкого [1]– [3].

Следует отметить, что среди учебных пособий, рекомендованных студентам К. Ф. Абрамовичем, А. С. Безиковичем и превым ректором университета К. Д. Покровским были книги Д. А. Граве, изданные в начале XX века. Хорошо известно, что Д. А. Граве – основатель российской алгебраической школы. Заведомо неполная математическая генеалогия Д. А. Граве указывает 2047 его научных потомков. Можно отметить, что научными правнуками Граве являются работавшие в ПГУ в 1950 -80-х гг. профессора С. Н. Черников, П. И. Трофимов и их учителя – профессора А. Г. Курош и С. А. Чунихин.

В докладе рассказывается о работе С. Н. Черникова, П. И. Трофимова и их учениках, работавших в Пермском и Ярославском государственном университетах.

Заметим, что имеется прямая связь с развитием идей упомянутых ученых в работах их последователей в Перми и Ярославле. Истории Пермского и Ярославского университетов обнаруживают неожиданные точки соприкосновения и определенную связь. Возрождение Ярославского университета в его математическом аспекте обнаруживает большое количество известных математиков, приложивших усилия к его известности. Рассматривая только алгебраическую сторону, можно увидеть, что имеется значи-

[1]Исследование выполнено за счет гранта ЯрГУ (проект ВИП - 008).

тельное количество ученых, внесших вклад в развитие ЯрГУ. В частности, внесли свой вклад профессора А. Л. Онищик, И. М. Яглом, В. А. Краснов, В. Г. Дурнев, Л. С. Казарин. В Ярославле работал и профессор А. С. Тихомиров, создавший собственную школу. В качестве результата работали Ученые советы по защитам диссертаций по специальности 01.01.06 в течение длительного времени.

В докладе более подробно рассматривается работа ученых, связанных генетически с исследованими, проводившимися С. Н. Черниковым и П. И. Трофимовым в Перми и Ярославле.

Некоторые дополнительные сведения можно найти в [4].

Список литературы

[1] В. И. Яковлев, Из истории физико-математического факультета ПГУ (1916 -1960). *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, **3** (2010), 4–15.

[2] В. И. Яковлев, Я. Д. Половицкий, Механико-математическому факультету ПГУ – 50! *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, **3** (2010), 16–20.

[3] Я. Д. Половицкий, Предшественники кафедр математического факультета Пермского государственного университета, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, **3** (2010), 21 –24.

[4] L. S. Kazarin, Factorizations of finite groups and related topics. *Algebra Colloquium*, **27**:1 (2020), 149–180.

Исследование полинома супердоминирования графов[1]

Кайдаш П.А.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
p.kaidash@g.nsu.ru

В этой работе исследуются полиномы супердоминирования графов. Впервые полином доминирования графов $D(G,x)$ был определен в работе [1]. Супердоминирующие множества, в свою очередь, появились в работе [2]. Однако, несмотря на нарастающую популярность темы супердоминирования на графах [3, 4], полином супердоминирования не был определен и исследован.

Далее приводятся несколько основных определений и обозначений. Множество $D_{sp} \subseteq V$ называется супердоминирующим множеством, если для любой вершины v из дополнения этого множества $\overline{D}_{sp} = V \backslash D_{sp}$ найдется вершина u из этого множества D_{sp}, такая что: $N(u) \cap \overline{D}_{sp} = \{v\}$, где множество всех вершин смежных с вершиной u обозначается $N(u)$.

В работе используются следующие обозначения:

1) γ_{sp} - размерность минимального супердоминирующего множества;

2) $d_{sp}(G,i)$ - мощность семейства супердоминирующих множеств размерности i;

3) $D_{sp}(G,x) = \sum\limits_{i=\gamma_{sp}(G)}^{|V(G)|} d_{sp}(G,i)x^i$ - полином супердоминирования;

4) $deg(D_{sp}(G,x))$ - степень полинома супердоминирования.

Следующий результат дает описание полинома супердоминирования для полного графа K_n, графа звезды $K_{1,n-1}$ и полного двудольного графа $K_{p,q}$.

Теорема 1.

1) Для полного графа K_n полином супердоминирования имеет следующий вид:

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00459).

$$D_{sp}(K_n, x) = x^n + nx^{n-1},$$

где $n \geq 2$.

2) Для графа звезды $K_{1,n-1}$ *верно следующее:*

$$D_{sp}(K_{1,n-1}, x) = x^n + nx^{n-1},$$

где $n \geq 2$.

3) Для полного двудольного графа $K_{p,q}$ *выполняется следующее:*

$$D_{sp}(K_{p,q}, x) = x^{p+q} + (p+q)x^{p+q-1} + pqx^{p+q-2},$$

где p, $q \geq 2$.

Доказательство этого результата основывается на общих свойствах полинома супердоминирования, которые представлены далее.

Теорема 2. *Рассмотрим граф* G *порядка* n. *Для него верны следующие утверждения:*

1) если G *связен, то* $d_{sp}(G, n) = 1$ *и* $d_{sp}(G, n-1) = n$;

2) $d_{sp}(G, i) = 0$, *если и только если* $i < \gamma_{sp}(G)$ *или* $i > n$;

3) $D_{sp}(G, x)$ *не имеет свободного члена;*

4) $D_{sp}(G, x)$ *является строго возрастающей функцией на* $[0, \infty)$;

5) если H *является индуцированным подграфом графа* G, *тогда* $deg(D_{sp}(G, x)) \geq deg(D_{sp}(H, x))$;

6) ноль является корнем $D_{sp}(G, x)$, *с кратностью* $\gamma_{sp}(G)$.

Таким образом, для полинома супердоминирования сохраняются некоторые свойства полинома доминирования. Для доказательства данного результата используются определения супердоминирующих множеств и полинома супердоминирования. Помимо этого получен результат, который показывает зависимость полинома супердоминирования от добавления к графу всесмежной вершины, то есть вершины, которая смежна со всеми остальными вершинами. Операция добавления всесмежной вершины увеличивает мощность множества вершин на один, а мощность множества ребер на n, где n порядок изначального графа.

Теорема 3. *Пусть $D_{sp}(G,x)$ является полиномом супердоминирования графа G порядка n. Тогда для графа H, который получается из графа G добавлением к нему всесмежной вершины, полином супердоминирования имеет следующий вид*:

$$D_{sp}(H,x) = xD_{sp}(G,x) + x^n.$$

Полученный результат может быть применим в различных случаях, например, для построения полиномов супердоминирования для класса графов, которые получаются добавлением всесмежных вершин. Также, когда будет построен полином супердоминирования для цикла C_n или колеса W_n, легко можно будет построить полином и для второго.

Список литературы

[1] S. Alikhani, P. Yee-Hock, Introduction to Domination Polynomial of a Graph. *Ars Combinatoria*, 2009, 257–266.

[2] M. Lemánska, V. Swaminathan, Y. B. Venkatakrishnan, R. Zuazua, Super Dominating Sets in Graphs. *Proceedings of the National academy of sciences, India, Section A: physical sciences*, **85** (2015), 353–357.

[3] W. Zhuang, Super Domination in Trees. *Graphs and Combinatorics*, **38** **(1)**:21 (2022).

[4] B. Senthilkumar, Y. B. Venkatakrishnan, H. N. Kumar, Super Domination in Trees. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **14**:4 (2022), 2150137.

Об аксиальных алгебрах и связанных с ними группах

Мамонтов А.С.
Институт Математики им.С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
mamontov@math.nsc.ru

Аксиальной алгеброй называют неассоциативную коммутативную алгебру, порожденную некоторым множеством идемпотентов, называемых осями, причем если a - ось, то присоединенный линейный оператор ad(a) полупрост и умножение собственных векторов контролируется некоторой фиксированной таблицей слияния.

Например, для алгебр Мацуо, которые можно построить по группам 3-транспозиций, эта таблица $\mathcal{J}(\eta)$ — правая на картинке.

$*$	1	η	$\frac{1}{2}$
1	1	η	$\frac{1}{2}$
η	η	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\eta, 1$

$*$	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	$1, 0$

Таблица 1: Таблица слияния $\mathcal{PC}(\eta)/\mathcal{J}(\eta)$

То есть собственные значения $ad(a)$ равны $1, 0$ или η, а, например, произведение двух собственных векторов с собственным значением η лежит в прямой сумме собственных подпространств для 0 и 1. Отметим, что при $\eta = \frac{1}{2}$ такую таблицу слияния также имеют йордановы алгебры, порожденные идемпотентами, в силу разложения Пирса.

В докладе будет представлен аксиальный взгляд на псевдокомпозиционные алгебры, и соответствующие результаты, полученные совместно с И.Б.Горшковым и А.М.Старолетовым. В частности, была доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2 и не 3, и $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{1, \frac{1}{2}\}$. Если A — примитивная аксиальная алгебра с таблицей слияния $\mathcal{J}(-1, \frac{1}{2})$, то A — псевдокомпозиционная алгебра, то есть найдется симметрическая билинейная Фробениусова форма, такая что в A выполнено тождество $x^3 = (x, x)x$.*

О характеризации небольших групп графом Грюнберга-Кегеля

Маслова Н.В.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
Уральский маетематический центр, Екатеринбург, Россия
butterson@mail.ru

Нечитайло Л.Г.
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
nechitailo.lg@phystech.edu

Спектром конечной группы G назовём множество всех порядков её элементов и обозначим его через $\omega(G)$. Спектр группы определяет граф, называемый *графом Грюнберга-Кегеля* (или *графом простых чисел*) и обозначаемый $\Gamma(G)$. Вершинами этого графа являются все простые делители порядка группы G, и две вершины p и q смежны в $\Gamma(G)$ тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

Конечную группу G назовем

- *распознаваемой* спектру (по графу Грюнберга-Кегеля), если она определяется своим спектром (графом Грюнберга-Кегеля, соответственно) однозначно с точностью до изоморфизма;
- *n-распознаваемой* по спектру (графу Грюнберга-Кегеля), если существует ровно n попарно неизоморфных конечных групп H таких, что $\omega(H) = \omega(G)$ ($\Gamma(H) = \Gamma(G)$, соответственно);
- *почти распознаваемой* по спектру (графу Грюнберга-Кегеля), если она n-распознаваема по спектру (графу Грюнберга-Кегеля, соответственно) для некоторого натурального числа n;
- *нераспознаваемой* по спектру (графу Грюнберга-Кегеля, соответственно), если существует бесконечное множество попарно неизоморфных конечных групп H таких, что $\omega(H) = \omega(G)$ ($\Gamma(H) = \Gamma(G)$, соответственно).

Группа H называется *почти простой*, если $S \leq H \leq Aut(S)$, где S — конечная неабелева простая группа. В [1] П. Камероном и первым автором было доказано, что конечная группа G почти распознаваема по графу

Грюнберга-Кегеля тогда и только тогда, когда каждая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста. Таким образом, вопрос о распознаваемости по графу Грюнберга-Кегеля представляет интерес для почти простых групп.

В 2005 г. А. В. Васильев [2] завершил исследование вопроса распознаваемости по спектру для конечных простых групп, все простые делители порядков которых не превосходят числа 13. Таких групп ровно 55. В [2] показано, что из этих групп 36 распознаваемы, 7 являются 2-аспознаваемыми, а 12 нераспознаваемы по спектру.

Исследуя вопрос распознаваемости таких групп по графу Грюнберга–Кегеля, мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *Группы $U_4(5)$ и $L_6(3)$ являются 3-распознаваемыми по графу Грюнберга-Кегеля.*

Теорема 2. *Пусть H — конечная группа такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(PSL_5(3))$. Тогда $H/F(H) \cong L_5(3)$ или $Aut(L_5(3))$ и $F(H) = O_2(H)$ (здесь $O_2(H)$ — это наибольшая нормальная 2-подгруппа из H).*

Таким образом, группа $PSL_5(3)$ является либо 2-распознаваемой, либо нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля. Более того, группа $PSL_5(3)$ нераспознаваема по графу Грюнберга–Кегеля тогда и только тогда, когда существует неприводимый $PSL_5(3)$-модуль K над полем характеристики 2 такой, что каждый элемент порядка 11 из $PSL_5(3)$ действует на K без неподвижных точек.

С учетом известных ранее результатов, среди 55 конечных простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13, 5 групп распознаваемы по графу Грюнберга–Кегеля, 5 вляются 2-распознаваемыми, 3 являются 3-распознаваемыми, 3 являются 5-распознаваемыми, 38 нераспознаваемы, и вопрос распознаваемости по графу Грюнберга–Кегеля открыт для 1 группы.

Список литературы

[1] P. J. Cameron and N. V. Maslova, Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph. *Journal of Algebra*, (2022) **607**, 186-213.

[2] A. V. Vasil'ev, On recognition of all finite nonabelian simple groups with orders having prime divisors at most 13. *Sib. Math. J.*, **46** (2005), 246–253.

О дистанционно регулярных графах с двумя P-полиномиальными структурами [1]

Махнев А.А.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
makhnev@imm.uran.ru

Для графа Γ диаметра d и $i \in \{1, 2, ..., d\}$ через Γ_i обозначим граф с тем же множеством вершин, в котором две вершины u и w смежны, если $d_\Gamma(u, w) = i$. В работе рассматриваются дистанционно регулярные графы с двумя P-полиномиальными структурами.

Для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений

$$\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$$

граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений

$$\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}.$$

Однако в [1] доказано, что графы с этими массивами пересечений не существуют.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ с $k \geq 3$. Если $\Delta = \Gamma_d$ – также дистанционно регулярный граф диаметра d, то $k_d = a_d + 1 > 1$ и Δ – обобщенный нечетный граф, или $a_d = 0$ [2, предложене 4.2.15]. Если $a_d = 0$, то либо $d = 3$ и расстояния в графах связаны соотношением $d(\Delta) = 4 - d(\Gamma)$, либо $d = 4$, $b_3(\lambda + a_2 - a_3) = a_2$ (т. е. $p^4_{34} = 0$), либо $d \geq 5$, $a_i = 0$ для $2i < d$ и $2i > d + 2$, $p^d_{jd} = 0$ для $j \neq 0, 2$ и в случае четного d имеем $a_i > 0$ для $i = d/2, d/2 + 1$.

Броувер (препринт 1988 г.: "A remark on association schemes with two P-polynomial structures") доказал, что для $d \geq 5$ либо d нечетно и Γ, Δ – двудольные графы, либо $d \leq 6$. Более того, $k(b_{d-1} - 1) = (k_{d-1} - 1)\mu$ и если $d \geq 6$ или $d = 5, a_3 > 0$, то также $\mu\mu(\Delta) = (b_{d-1} - 1)^2 + 1$ и $b_{d-1} = (\mu + \mu(\Delta) - 3)$.

Если Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2\mu^2 + \mu, 2\mu^2 - \mu - 1, \mu^2, \mu; 1, \mu, \mu^2 - \mu, 2\mu^2 + \mu\}$, то Γ_4 – дистанционно регулярный

[1] Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

граф с тем же массивом пересечений. В [3] доказано, что граф с таким массивом пересечений не существует. В работе получено новое доказательство несуществования графа с этим массивом пересечений.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{\mu(2\mu+1), (\mu-1)(2\mu+1), \mu^2, \mu; 1, \mu, \mu(\mu-1), \mu(2\mu+1)\}$ *не существует.*

Единственный известный примитивный граф с $a_d = 0$ – это граф Ливингстона с массивом пересечений $\{11, 10, 6, 1; 1, 1, 5, 11\}$. Броувером сформулирована проблема: существуют ли примитивные графы диаметра 4 с $a_4 = 0$, кроме графа Ливингстона? Он же отмечает, что массивы

$$\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\} \text{ и } \{22, 21, 21, 3; 1, 1, 3, 22\}$$

являются допустимыми и имеют $a_4 = 0$.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{22, 21, 21, 3; 1, 1, 3, 22\}$ *не существует.*

Для любого примитивного дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с $a_3 = 0$ граф Γ_3 также будет дистанционно регулярным с $a_3 = 0$. Имеется пара допустимых массивов пересечений графов с указанным свойством: $\{125, 112, 9; 1, 8, 125\}$ и $\{126, 125, 9; 1, 9, 126\}$. В работе доказано, что графы с такими массивами пересечений не существуют.

Теорема 3. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{125, 112, 9; 1, 8, 125\}$ *и* $\{126, 125, 9; 1, 9, 126\}$ *не существуют.*

Список литературы

[1] V. Bitkina, A. Gutnova, Distance-regular graphs with intersection arrays $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ and $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ do not exist. *Vladik. Math. Zhurnal*, **23**:4 (2021), 68–76.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1989.

[3] C. Godsil, J. Koolen, On the multiplicity of eigenvalues of distance-regular graphs. *Linear Algebra Appl.*, **226-228** (1995), 273–275.

О σ^{Ω}-спутниках σ^{Ω}-расслоенных формаций конечных групп

Нестеров А.С.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
a.s.nest@yandex.ru

Сорокина М.М.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов групп решение многих вопросов связано с рассмотрением локальных (В. Гашюц, 1963) и композиционных (Л.А. Шеметков, 1978) формаций. Естественными обобщениями данных видов формаций являются, соответственно, ω-локальные (Л.А. Шеметков, 1984) и $\mathfrak{L}$-композиционные (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков, 1999) формации, где ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, $\mathfrak{L}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ всех простых групп. Серии ω-веерных и Ω-расслоенных формаций, построенные В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной в [1,2], включают ω-локальные и $\mathfrak{L}$-композиционные (при $\Omega = \mathfrak{L}$) формации соответственно. Начиная с 2013 года, А.Н. Скиба для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ разработал σ-теорию конечных групп, получившую в дальнейшем интенсивное развитие. В [3] на основе использования методов данной теории для произвольного разбиения σ^{Ω} класса Ω (в терм. [3], $\sigma^{\Omega} = \bar{\Omega}$) построены σ^{Ω}-расслоенные формации, являющиеся обобщением Ω-расслоенных формаций. В теоремах 1 – 3 изучаются σ^{Ω}-спутники σ^{Ω}-расслоенных формаций.

Используемые обозначения и определения стандартны (см., напр., [4]). Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией (классом Фиттинга), если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений (относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп). Для непустой формации (непустого класса Фиттинга) $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ ($G_{\mathfrak{F}}$) обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал ($\mathfrak{F}$-радикал) группы G, т.е. наименьшая (наибольшая) нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$ (которая принадлежит $\mathfrak{F}$). Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп; $(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$; form$\mathfrak{X}$ — формация, порожденная $\mathfrak{X}$; $K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $K(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}} K(G)$; Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$; $\mathfrak{G}_\Omega = (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \Omega)$; $O_\Omega(G)$ — $\mathfrak{G}_\Omega$-радикал группы G. Пусть σ^Ω — произвольное разбиение класса Ω, т.е. $\sigma^\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$, где $\Omega_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I, i \neq j$. Пусть G — группа, $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда, следуя [5], полагаем

$$\sigma^\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma^\Omega \mid \Omega_i \cap K(G) \neq \varnothing\};$$
$$\sigma^\Omega(\mathfrak{F}) = \{\Omega_i \in \sigma^\Omega \mid \Omega_i \cap K(\mathfrak{F}) \neq \varnothing\}.$$

В соответствии с [2], функция $\alpha : \sigma^\Omega \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$, удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}_{\Omega_i{}'} \subseteq \alpha(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma^\Omega$, где $\Omega_i{}' = \mathfrak{I} \backslash \Omega_i$, называется *формационно-радикальной σ^Ω-функцией* или, коротко, *$\sigma^\Omega FR$-функцией*. Функция $f : \sigma^\Omega \cup \{(\sigma^\Omega)'\} \to \{$формации$\}$, где $f((\sigma^\Omega)') \neq \varnothing$, называется *формационной σ^Ω-функцией* или, коротко, *$\sigma^\Omega F$-функцией* (здесь $(\sigma^\Omega)'$ обозначает элемент из области определения функции α, не принадлежащий σ^Ω). Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f((\sigma^\Omega)') \text{ и } G/G_{\alpha(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma^\Omega(G))$$

называется *σ^Ω-расслоенной формацией с направлением α и σ^Ω-спутником f*, и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma^\Omega F(f, \alpha)$ [3].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma^\Omega F(f, \alpha)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Формация $\mathfrak{F}$ обладает таким σ^Ω-спутником h, что $h((\sigma^\Omega)') = f((\sigma^\Omega)') \cap \mathfrak{F}$ и $h(\Omega_i) = f(\Omega_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma^\Omega$.*

(2) *Формация $\mathfrak{F}$ обладает σ^Ω-спутником d, имеющим следующее строение: $d((\sigma^\Omega)') = \mathfrak{F}$ и $d(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma^\Omega$.*

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — некоторая совокупность $\sigma^\Omega F$-функций. Через $\cap_{j\in J} f_j$ обозначается такая $\sigma^\Omega F$-функция, что $(\cap_{j\in J} f_j)(X) = \cap_{j\in J} f_j(X)$ для любого $X \in \sigma^\Omega \cup \{(\sigma^\Omega)'\}$.

Теорема 2. *Пусть α — произвольная $\sigma^\Omega FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \sigma^\Omega F(f_j, \alpha)$ для любого $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \sigma^\Omega F(f, \alpha)$, где $f = \cap_{j\in J} f_j$.*

Следуя [4], минимальным σ^Ω-спутником σ^Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется минимальный элемент множества всех ее σ^Ω-спутников. Через $\sigma^\Omega F(\mathfrak{X}, \alpha)$ обозначается σ^Ω-расслоенная формация с направлением α, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$ [3].

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, α — произвольная $\sigma^\Omega FR$-функция, $\mathfrak{F} = \sigma^\Omega F(\mathfrak{X}, \alpha)$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным σ^Ω-спутником f таким, что*

$$f((\sigma^\Omega)') = (G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

$f(\Omega_i) = (G/G_{\alpha(\Omega_i)} \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $\Omega_i \in \sigma^\Omega(\mathfrak{X})$ *и* $f(\Omega_i) = \varnothing$, *если* $\Omega_i \in \sigma^\Omega \backslash \sigma^\Omega(\mathfrak{X})$.

В случае, когда σ^Ω — наименьшее разбиение класса Ω (т.е. для любого $\Omega_i \in \sigma^\Omega$ имеет место равенство $\Omega_i = (A)$, где $A \in \mathfrak{I}$), из теорем 1 – 3 вытекают результаты о Ω-спутниках Ω-расслоенных формаций (см. [2]).

Список литературы

[1] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические заметки*, **71**:1 (2002), 43–60.

[2] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика*, **13**:3 (2001), 125–144.

[3] А. С. Нестеров, М. М. Сорокина, Построение $\bar{\Omega}$-расслоенных формаций конечных групп. *Ученые записки Брянского гос. университета*, **2** (2023), 7–12.

[4] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978.

[5] A. N. Skiba, On one Generalization of the Local Formations. *ПФМТ.* **1**:34 (2018), 79–82.

О множествах Фиттинга конечных групп

Новикова Д.Г.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
novikovadg@yandex.ru

Сорокина М.М.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой группой все изоморфные ей группы. Понятия $\mathfrak{F}$-инъектора (Б. Фишер, В. Гашюц, Б. Хартли, 1967) и $\mathfrak{F}$-проектора (В. Гашюц, 1969) группы, где $\mathfrak{F}$ — произвольный класс групп, были введены в рассмотрение с целью обобщения и систематизации свойств силовских, холловых, картеровых и др. подгрупп в разрешимых группах. Первоначально, при изучении $\mathfrak{F}$-инъекторов в группах в качестве $\mathfrak{F}$ нередко рассматривался класс Фиттинга, т.е. класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Позднее была установлена целесообразность выбора в качестве $\mathfrak{F}$ множества Фиттинга рассматриваемой группы (Л.А. Шеметков, 1975), т.е. непустого множества подгрупп группы, замкнутого относительно нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений [1, (VIII.2)].

В [2] для произвольного класса групп $\mathfrak{F}$ и произвольного множества ω простых чисел были определены $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы в группах и установлены их ключевые свойства. Развивая данную идею, в [3] для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G введено в рассмотрение понятие $\mathcal{F}^\omega$-инъектора группы G и рассмотрены некоторые свойства таких подгрупп. Пусть G — группа, $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G, ω — непустое множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}^\omega$-инъектором группы G, если H — $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа в G и для каждой субнормальной ω-подгруппы K группы G пересечение $H \cap K$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой в K [3]. Очевидно, что всякий $\mathcal{F}$-инъектор группы G (см. [1, (VIII.2.5.b)]) является её $\mathcal{F}^\omega$-инъектором для любого множества ω простых чисел. Если ω совпадает с множеством $\mathbb{P}$ всех простых чисел, то $\mathcal{F}^\omega$-инъектор группы является ее $\mathcal{F}$-инъектором.

В теореме 1 для класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и произвольной группы $G \in \mathfrak{X}$ решается задача нахождения совокупности подгрупп группы G, являющейся множеством Фиттинга группы G, в зависимости от существования в подгруппах группы G $\mathcal{F}^\omega$-инъекторов.

Используется терминология, принятая в [1, 4]. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое непустое множество подгрупп группы G. Подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой в G, если $H \in \mathcal{F}$ и из $H \leq K \leq G$ и $K \in \mathcal{F}$ всегда следует, что $H = K$. Если $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G и $L \leq G$, то $\mathcal{F}_L = \{N \leq L \mid N \in \mathcal{F}\}$ — множество Фиттинга подгруппы L группы G [1]. Для класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathfrak{X}_\omega$ обозначается класс всех ω-групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$ [4].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $G \in \mathfrak{X}$, $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G, ω — непустое множество простых чисел. Если в каждой $\mathfrak{X}$-подгруппе L группы G существует ${\mathcal{F}_L}^\omega$-инъектор, то $\mathcal{F} \cap \mathfrak{X}_\omega$ является множеством Фиттинга группы G.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $G \in \mathfrak{X}$, $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G. Если в каждой $\mathfrak{X}$-подгруппе L группы G существует $\mathcal{F}_L$-инъектор, то $\mathcal{F} \cap \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G.*

Теорема 1 развивает известный результат о классах Фиттинга групп [4, теорема 5.42].

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes, Finite Soluble Groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] В. А. Ведерников, М. М. Сорокина, $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп. *Сиб. матем. ж.*, **57**:6 (2016), 1224–1239.

[3] Д. Г. Новикова, М. М. Сорокина, О множествах Фиттинга и инъекторах конечных групп. *Материалы Межд. научно-практ. конф. «Теоретические и прикладные аспекты естественнонаучного образования в эпоху цифровизации»*. Брянск: БГУ им. И.Г. Петровского, 2023, 82–86.

[4] В. С. Монахов, Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006.

О распознаваемости по графу Грюнберга-Кегеля конечных простых исключительных групп лиева типа[1]

Паньшин В.В.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
v.pansh1n@yandex.ru

Графом Грюнберга-Кегеля (или *графом простых чисел*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называют обыкновенный граф, вершинами которого являются все простые делители $|G|$, в котором две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе есть элемент порядка pq. Будем говорить, что конечная группа G *почти распознаваема* (по графу Грюнберга-Кегеля), если множество всех попарно неизоморфных групп H, для которых $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, конечно; если это множество бесконечно, то группа называется нераспознаваемой. В докладе будет рассказано о недавнем прогрессе в исследовании проблемы распознавания конечных простых исключительных групп лиева типа с не менее, чем тремя, компонентами связности графа Грюнберга-Кегеля, а именно будет представлен следующий результат.

Теорема. *Конечная простая исключительная группа лиева типа, не изоморфная* $^2B_2(2^{2n+1})$ *и* $G_2(3)$, *граф Грюнберга-Кегеля которой имеет не менее* 3 *компонент связности, почти распознаваема по графу Грюнберга-Кегеля. Более того, группы* $^2B_2(2^{2n+1})$ *и* $G_2(3)$ *нераспознаваемы по графу Грюнберга-Кегеля.*

Все представленные результаты получены совместно с Н.В. Масловой и А.М. Старолетовым.

[1]Н. В. Маслова поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект 075-02-2023-935 для развития Регионального научно-образовательного математического центра "Уральский математический центр", В. В. Паньшин поддержан Математическим центром в Академгородке по договору № 075-15-2022-281 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, А. М. Старолетов поддержан Программой фундаментальных исследований РАН, проект FWNF-2022-0002.

О решетках подгрупп локально конечных p-групп

Репницкий В.Б.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
vladimir.repnitskii@urfu.ru

Решетка называется *алгебраической*, если она полная и каждый ее элемент есть объединение компактных элементов. Важными представителями алгебраических решеток являются решетки подалгебр универсальных алгебр, в частности, решетки подгрупп.

Если решетка L полна и подмножество элементов M в L обладает тем свойство, что $\bigvee S$, $\bigwedge S \in M$ для любого непустого подмножества $S \subseteq M$, то M называется *полной подрешеткой* в L. Хорошо известно, что всякая полная подрешетка алгебраической решетки сама является алгебраической. Поэтому полные подрешетки решеток подгрупп так же алгебраические. Обратно, в работе [1] мы доказываем, что каждая алгебраическая решетка изоморфна некоторой полной подрешетке решетки подгрупп подходящей локально конечной 2-группы. Добавим, что каждая решетка вложима в некоторую алгебраическую решетку, а именно, в решетку ее идеалов. Отсюда следует, что любая решетка вложима в решетку подгрупп локально конечной 2-группы. Для заданного класса алгебр K, мы говорим, что K является *решеточно универсальным классом*, если всякая решетка вкладывается в решетку подалгебр некоторой алгебры из K. В этом смысле класс всех локально конечных 2-групп является решеточно универсальным. Отметим, что решеточная универсальность класса всех групп была впервые доказана Уитменом в [2].

Следующая теорема обобщает основной результат статьи [1] со случая $p = 2$ на случай произвольного простого числа p.

Теорема 1. *Для произвольного простого числа p, пусть K есть абстрактный класс групп, удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) K содержит группу порядка p;

(2) K замкнут относительно взятия прямых произведений, полупрямых произведений и прямых пределов над вполне упорядоченными множествами.

Тогда любая алгебраическая решетка изоморфна полной подрешетке в решетке подгрупп некоторой группы из K.

Следствие 1. *Для произвольного простого числа p, любая алгебраическая решетка изоморфна полной подрешетке в решетке подгрупп подходящей локально конечной p-группы.*

Следствие 2. *Для любого простого числа p, класс всех локально конечных p-групп является решеточно универсальным.*

Список литературы

[1] V. B. Repnitskiĭ, Lattice universality of locally finite 2-groups, *Algebra Univers.*, **81**:44 (2020), doi: 10.1007/s00012-020-00672-8.

[2] Ph. M. Whitman, Lattices, equivalence relations, and subgroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 507-522, doi: 10.1090/S0002-9904-1946-08602-4.

О конечных группах с заданными системами $\mathfrak{F}$-критических подгрупп

Сорокина М.М.
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, Брянск, Россия
mmsorokina@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется множество групп, содержащее с каждой группой все группы, ей изоморфные; формация — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений; наследственным называется класс групп, замкнутый относительно подгрупп [1]. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. *$\mathfrak{F}$-критической* (иначе, минимальной не $\mathfrak{F}$-группой) называется группа, не принадлежащая классу $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$ [1, 2]. В работе [2] для непустой насыщенной (локальной) наследственной формации $\mathfrak{F}$ установлены свойства группы, все $\mathfrak{F}$-критические подгруппы которой разрешимы и K-$\mathfrak{F}$-субнормальны (в терминологии [2], $\mathfrak{F}$-достижимы). Теоремы 1 и 2 развивают основной результат из [2] для случая ω-локальной формации, где ω — непустое множество простых чисел.

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех групп; $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ — функция. Формация

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G) \cap \omega\}$$

называется *ω-локальной* формацией [3], где $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа в G, $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа в G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$ [1]. $(G-H)$-цепь группы G называется $(G-H)^\omega$-*цепью относительно* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F}$-корадикал каждого члена данной цепи является ω-группой. Подгруппа H группы G называется: *$\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной* в G, если либо $H = G$ и $G^{\mathfrak{F}}$ — ω-группа, либо существует максимальная $(G-H)^\omega$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида

$$G = H_0 \supset H_1 \supset ... \supset H_k = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, $i = \overline{1,k}$; K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-*субнормальной* (иначе, $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в смысле Кегеля) подгруппой группы G, если существует $(G - H)^{\omega}$-цепь относительно $\mathfrak{F}$ вида

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq ... \supseteq H_k = H$$

такая, что для любого $i \in \{1, ..., k\}$ либо $H_i \lhd H_{i-1}$, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ [4]. Очевидно, что всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная) подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G (см., например, определения в [5]). В случае, когда ω совпадает с множеством $\mathbb{P}$ всех простых чисел, понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной) подгруппы совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-субнормальной (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной) подгруппы.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп. Следуя [5], будем говорить, что класс групп $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, если в любой $\mathfrak{X}$-группе множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных) подгрупп образует решетку. В случае, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с классом $\mathfrak{G}$, символ $\mathfrak{X}$ будем опускать.

Класс всех нильпотентных ω-групп обозначается $\mathfrak{N}_{\omega}$. Для непустых формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ через $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ обозначается их произведение [1], т.е. класс групп вида

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, обладающая решеточным свойством для $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп. Если все $\mathfrak{F}$-критические подгруппы группы G являются $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальными разрешимыми ω-подгруппами в G, то $G \in \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{F}$.*

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, обладающая решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Если каждая $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G разрешима и $\mathfrak{F}$-субнормальна, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная ω-локальная формация, обладающая решеточным свойством для K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп. Если все $\mathfrak{F}$-критические подгруппы группы G являются K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальными разрешимыми ω-подгруппами в G, то $G \in \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{F}$.*

Следствие 2 ([2], теорема 1). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная наследственная формация с решеточным свойством (для $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп). Если все минимальные не $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G разрешимы и $\mathfrak{F}$-достижимы, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978.

[2] В. Н. Семенчук, В. Ф. Велесницкий, О конечных группах с обобщенно субнормальными критическими подгруппами. *НАН Беларуси. Труды Института математики,* **21**:1 (2013), 98–101.

[3] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические труды,* **2**:2 (1999), 114–147.

[4] М. М. Сорокина, С. П. Максаков, О $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгруппах конечных групп. *Тезисы международной конференции «Мальцевские чтения».* Новосибирск, 2022, 104.

[5] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

Аппроксимируемость некоторых цилиндрических групп[1]

Усиков А.В.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
a.usikov@g.nsu.ru

Конечно-порожденная группа называется *цилиндрической*, если она является фундаментальной группой конечного графа групп, вершинные группы которого изоморфны $\mathbf{Z}^2$, а реберные – $\mathbf{Z}^2$. Многими авторами изучались различные свойства цилиндрических групп: кубируемость [3, 4], хопфовость [6], отделимость [2], квазиизометрическая классификация [7], характерезация функции Дэна [5] и т.д.

Судя по всему, самые простые и в то же время нетривиальные примеры групп, расщепляемых над графами групп, доставляют GBS-группы. Для таких групп критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости был найден в [8]. Можно попытаться распространить этот результат на группы «близкие» к GBS-группам, например, цилиндрические. В статье [1] Н. Хода, Д. Вайз и Д. Вудхаус нашли необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости цилиндрических групп. В настоящей работе мы начинаем изучать аппроксимируемость цилиндрических групп конечными π-группами.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф групп, связанный с цилиндрической группой. Тогда, очевидно, образ при вложении g_e каждой реберной группы G_e содержится в максимальной циклической подгруппе C_e вершинной группы $G_{\alpha}(e)$, где $\alpha(e)$ – начало ребра e. Меткой ребра e назовем число $|C_e : g_e(G_e)|$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ — дерево групп, связанное с цилиндрической группой. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется конечными π-группами.*
2. *метки всех ребер являются π-числами.*

Недавно теорему 1 удалось уточнить для более широкого класса цилиндрических групп.

Пусть задан граф групп $\mathcal{G}$, связанный с цилиндрической группой, причем эйлерова характеристика графа X равна 0. Тогда X есть цикл L, оснащенный деревьями. Пусть $e_0e_1\dots e_l$ — простой замкнутый путь, проходящий вдоль цикла L. Предположим, что

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-41-10003).

$$g_{e_{k+1}}(G_{e_{k+1}}) \cap g_{\bar{e}_k}(G_{\bar{e}_k}) \neq 0 \text{ в } G_{\alpha(e_{k+1})} \ (k \in \mathbb{Z}_{l+1}). \qquad (*)$$

В каждой вершиной группе, находящейся на цикле L, зафиксируем базис $\{a_k, b_k\}$ так, чтобы соответствующие соотношения имели вид

$$t^{-1}a_l^{n_l}t = a_0^{m_0}, \qquad a_k^{n_k} = a_{k+1}^{m_{k+1}} \ (k = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Определим число

$$\Delta = \frac{n_0 n_1 \ldots n_l}{m_0 m_1 \ldots m_l}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{G}$ — граф групп, связанный с цилиндрической группой, X — цикл, оснащенный деревьями. Группа $\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда*

- *метки всех ребер являются p-числами.*
- *Если $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию (*), то $p \neq 2$ и $\Delta = 1$ или $p = 2$ и $\Delta = \pm 1$.*

Список литературы

[1] N. Hoda, D. Wise, D. Woodhouse, Residually finite tubular groups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **150**:6 (2020), 2937–2951.

[2] R. G. Burns, A. Karrass, D. Solitar, A note on groups with separable finitely generated subgroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **36**:1 (1987), 153–160.

[3] D. T. Wise, Cubular tubular groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366**:10 (2014), 5503–5521.

[4] J. Button, Tubular free by cyclic groups act freely on $CAT(0)$ cube complexes. *Canad. Math. Bull.*, **60**:1 (2017), 54–62.

[5] N. Brady, M. R. Bridson, There is only one gap in the isoperimetric spectrum. *Geom. Funct. Anal.*, **10**:5 (2000), 1053–1070.

[6] D. T. Wise, A non-Hopfian automatic group. *J. Algebra*, **180**:3 (1996), 845–847.

[7] C. H. Cashen, Quasi-isometries between tubular groups. *Groups Geom. Dyn.*, **4**:3 (2010), 473–516.

[8] F. A. Dudkin, $\mathcal{F}_\pi$-residuality of generalized Baumslag–Solitar groups. *Archiv der Mathematik*, **114**:2 (2020), 129–134.

Автоморфизмы некоторых циклических расширений свободной группы ранга три

Шапорина Е.А.
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
grambergea@gmail.com

В 2006 году О. Богопольский, А. Мартино и Э. Вентура [1] описали группы внешних автоморфизмов всех циклических расширений свободной группы ранга 2

$$M_\varphi = \mathbb{F}_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{F}_2$ сопряжением так, как действует $\varphi \in Aut(\mathbb{F}_2)$ — автоморфизм, задающий это расширение.

В 1994 году С. Герстен [2] исследовал действие группы

$$H = F_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba, c^t = ca^2 \rangle$$

на $CAT(0)$ пространствах. Он доказал, что группа, действующая на $CAT(0)$ пространстве собственно и кокомпактно, не может содержать группу H в качестве подгруппы. В частности, группы $Aut(F_n)$ для $n \geqslant 3$ и $Out(F_n)$ для $n \geqslant 4$ не являются $CAT(0)$ группами. Группа Герстена и её обобщения упоминаются в работах Дж. Баттона, Н. Брэди, Д. Вайса.

В 2021 году автор совместно с Ф. А. Дудкиным описала группы внешних автоморфизмов группы Герстена [3].

Теорема 1. $Out(H) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

Пусть $G_k = F_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba^k, c^t = c \rangle$ — серия циклических расширений свободной группы ранга три, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0$.

В представляемой работе доказывается следующая

Теорема 2. $Out(G_k) \cong ((\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_k) \times N) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, *где* N*— прямоугольная артинова группа, строение которой известно. Группа* N *не зависит от параметра* k*.*

Список литературы

[1] O. Bogopolski, A. Martino, E. Ventura, The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2. *Comm. Alg.*, **35**:5 (2007), 1675-1690.

[2] S. M. Gersten, The automorphism group of a free group is not a CAT(0) group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **121**:4 (1994), 999–1002.

[3] Ф. А. Дудкин, Е. А. Шапорина, Автоморфизмы группы Герстена. *Сиб. матем. журн.*, **62**:3 (2021), 514–524.

О прямых произведениях групп диэдра в группах Шункова[1]

Шлепкин А.А.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
shlyopkin@mail.ru

Тимофеенко И.А.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
ivan.timofeenko@gmail.com

Пусть $\mathfrak{R}$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. В [2] был поставлен

Вопрос (Л. С. Казарин, Б. Амберг). *Будет ли разрешимой периодическая группа, у которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению d конечных групп диэдра? В случае $d = 1$ это так.*

В [3] установлена структура локально конечной группы, насыщенной прямыми произведениями двух конечных групп диэдра с тривиальным центром. Естественно было попытаться получить аналогичный результат в классе групп Шункова. Напомним, что группа G называется *группой Шункова* (или *сопряженно-бипримитивно конечной группой*), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Под *периодической частью* группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы при условии, что они образуют подгруппу.

Теорема. *Пусть G — группа Шункова, насыщенная группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{(D_i^{(1)} \leftthreetimes \langle t_i^{(1)}\rangle) \times \cdots \times (D_i^{(k)} \leftthreetimes \langle t_i^{(k)}\rangle) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где k — фиксированное натуральное число, для любого $m \in \{1, \cdots, k\}$ группа $D_i^{(m)}$ конечная циклическая без инволюций; $t_i^{(m)}$ — инволюция; для любого $d \in D_i^{(m)}, d^{t_i^{(m)}} = d^{-1}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017-П).

и

$$T(G) = (D^{(1)} \leftthreetimes \langle t^{(1)} \rangle) \times \cdots (D^{(k)} \leftthreetimes \langle t^{(k)} \rangle),$$

где для любого $m \in \{1, \cdots, k\}$ группа $D^{(m)}$ локально циклическая без инволюций; $t^{(m)}$ — инволюция; для любого $d \in D^{(m)}, d^{t^{(m)}} = d^{-1}$.

Список литературы

[1] А. К. Шлепкин, О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами. *Матем. тр. ИМ СО РАН.*, **1**:1 (1998), 129–138.

[2] И. Н. Белоусов, А. С. Кондратьев, А. В. Рожков, XII школа конференция посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева. *Тр. ИММ УрО РАН.*, **24**:3 (2018), 281–285.

[3] А. В. Кухарев, А. А. Шлепкин, Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **44** (2023), 71–81.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ И АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

О топологии вещественных распадающихся алгебраических кривых степени 8[1]

Борисов И.М.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия
i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Г.М.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия
polotovsky@gmail.com

Пучкова Н.Д.
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия
npuchkova@hse.ru

Предлагается обзор результатов о топологической классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8, полученных авторами за последние три года.

Мы изучаем топологию троек $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_k, \mathbb{R}\tilde{C}_{8-k})$, где $\mathbb{R}P^2$ – вещественная проективная плоскость, C_m – вещественная кривая (т. е. однородный многочлен от однородных координат в $\mathbb{R}P^2$) степени m, $\mathbb{R}C_m$ – множество точек, определяемых уравнением $C_m = 0$ в $\mathbb{R}P^2$, и $k \in \{2, 3, 4\}$.

Каждый раз мы предполагаем, что выполняются следующие условия:

i) кривые C_k и C_{8-k} являются M-кривыми (т. е. они неособые и число их компонент связности (= ветвей) максимально возможное по теореме Харнака);

ii) кривые $\mathbb{R}C_k$ и $\mathbb{R}\tilde{C}_{8-k}$ находятся в общем положении (т. е. пересекаются без касаний);

iii) $\mathbb{R}C_k$ и $\mathbb{R}\tilde{C}_{8-k}$ имеют максимально возможное число общих точек (равное $k \cdot (8-k)$) и эти точки принадлежат одной ветви каждой из этих кривых.

Рассматриваемая задача относится к тематике первой части 16-й проблемы Гильберта. Первый нетривиальный случай этой задачи – случай

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

степени $m = 6$ – был изучен в [1]. Для степени $m = 7$ решение задачи близко к завершению благодаря усилиям многих авторов (см. список литературы в [2]), предпринятым в 1985 – 2022 гг. Для степеней $\geqslant 8$ полное решение задачи представляется нереальным ввиду слишком большого числа типов кривых.

Случай k = 2 (объединение коники и секстики) при дополнительном условии – общие точки кривых-сомножителей лежат на пересекающихся овалах в одинаковых порядках – рассматривался в [2]. В этом случае топологические следствия теоремы Безу и хорошо известная классификация M-кривых степени 6 допускают 323 попарно различных топологических моделей кривых рассматриваемого класса. Для изучения вопроса о реализуемости этих моделей кривыми степени 8 применялся вариант метода Оревкова [3], основанного на теории кос и зацеплений.

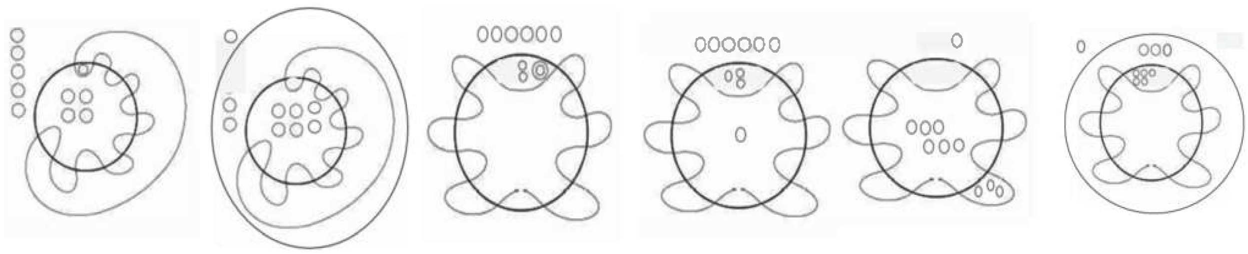


Рис. 2: реализованные расположения коники и секстики (полужирный овал – коника).

Этот вариант метода Оревкова применим к 251 моделям (из упомянутых выше 323). Доказано, что из них 231 не могут быть реализованы кривыми степени 8, а 6 моделей реализованы построением по способу Гильберта (рис. 1). Вопрос о реализуемости кривыми степени 8 оставшихся 14 моделей открыт.

Случай k = 3 (объединение кубики и квинтики). Здесь число подлежащих изучению топологических моделей очень велико. В [4] с помощью версии Штурмфельса [5] patchworking-метода Виро [6] построены 29 попарно различных кривых рассматриваемого класса; пример построения показан на рис. 2, где на правом рисунке полужирными линиями нарисована кубика.

Случай k = 4 (объединение двух квартик). В этом случае число моделей, подлежащих исследованию, тоже очень большое, поэтому в [7], [8] рассматриваются специальные классы расположений. Эти расположения названы “змея, обвивающаяся вокруг овала”: змея – это граница достаточно малой окрестности незамкнутой дуги без самопересечений, пересекающей овал в 8 точках. В частности, в [8] найдена полная классификация для случая “змеи без свободного конца”, показанная на рис. 3, где внеш-

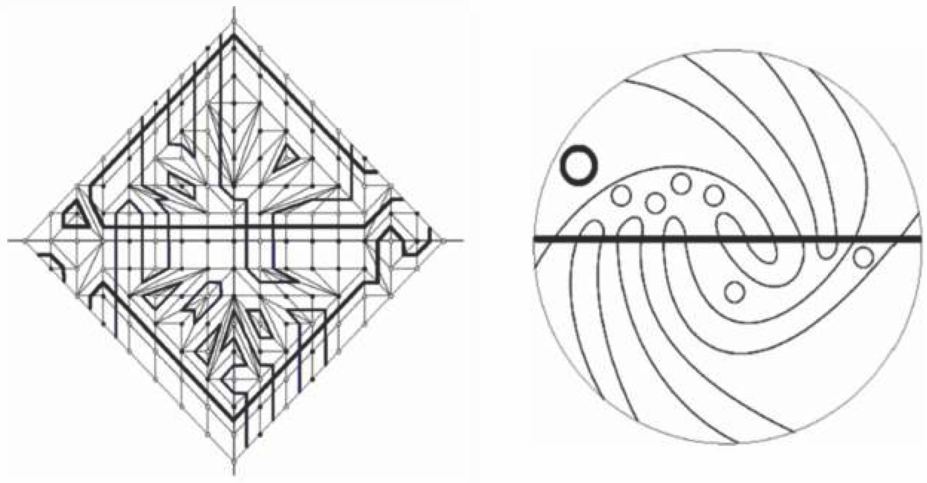


Рис. 3: слева – patchworking, справа – гладкая модель построенной слева кривой.

ние окружности изображают границу модели проективной плоскости, т. е. диаметрально противоположные точки этих окружности считаются отождествлёнными.

Список литературы

[1] Г. М. Полотовский, Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка. *ДАН СССР*, **236**:3 (1977), 548–551.

[2] И. М. Борисов, Г. М. Полотовский, О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8. *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*, Т. 176 (2020), 3–18.

[3] S. Yu. Orevkov, Link theory and oval arrangements of real algebraic curve. *Topology*, **38** (1999), 779–810.

[4] И. М. Борисов, Построение некоторых взаимных расположений M-кубики и M-квинтики. *Чебышевский сборник*, **22**:1 (2021), 76–91.

[5] B. Sturmfels, Viro's theorem for complete intersection. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **21**:3 (1994), 377–386.

[6] O. Ya. Viro, Patchworking real algebraic varieties. *Preprint Uppsala University U.U.D.M.*, Report **42** (1994).

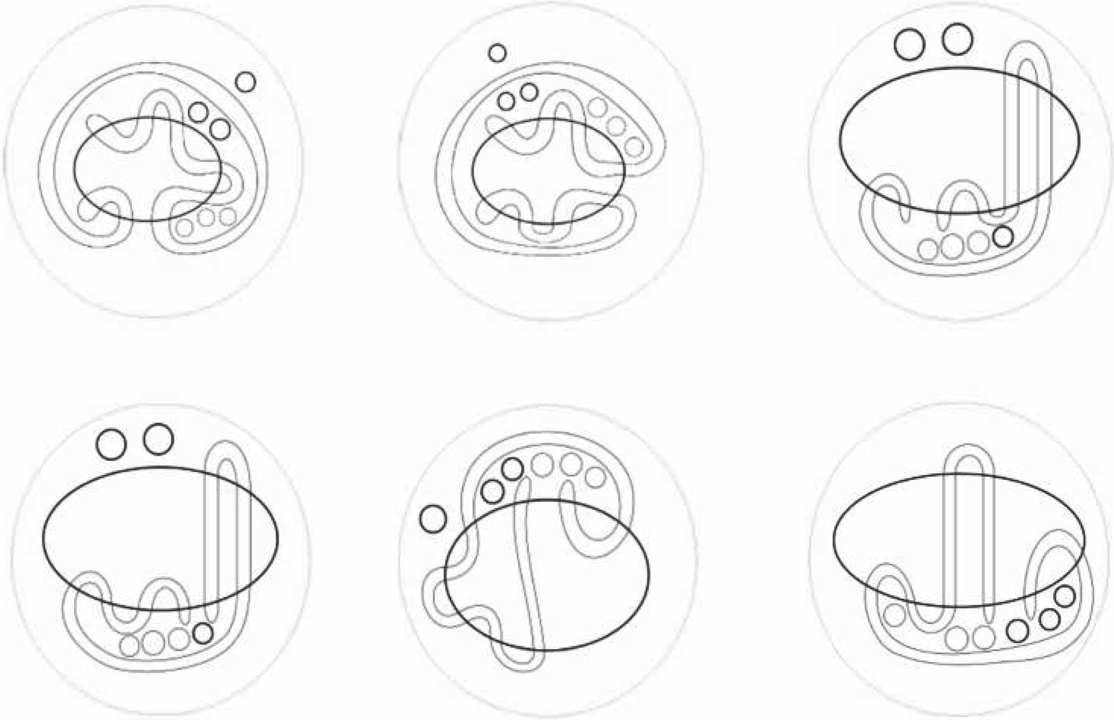


Рис. 4: полная топологическая классификация змей без свободного конца.

[7] Н. Д. Пучкова, О взаимных расположениях двух M-кривых степени 4. *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*, Т. 222 (2023), 69–82.

[8] Н. Д. Пучкова, О расположениях двух M-кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой. *Чебышевский сборник* (2023, в печати).

О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубику

Горская В.А.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
victoriya.gorskaya@mail.ru

Задача топологической классификации плоских вещественных алгебраических кривых – классическая задача, которая приобрела особую известность и современную формулировку после того, как в 1900 г. Д. Гильберт включил её в первую часть 16-й проблемы своего знаменитого списка математических проблем. В частности, Гильберт поставил вопрос о топологической классификации неособых кривых шестой степени, которую в 1969 г. решил Д.А. Гудков [1]. При этом Гудков поставил задачу топологической классификации кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей, которая была решена Г.М. Полотовским в 1977 г. ([2]). В [3] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении.

В настоящей работе продолжается исследование вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых степени 2 и неособой кривой степени 3, начатое в работах [4], [5]. Автор благодарит Г.М. Полотовского за предложенную задачу и полезные обсуждения.

Итак, задача состоит в топологической классификации расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ кривых вида $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_2 \cup \mathbb{R}C_3$[2] при некоторых условиях максимальности и общего положения.

Напомним эти условия:

(i) *C_3, C_2 и $\widetilde{C}_2$ являются M-кривыми*[3]*;*

(ii) *каждые две из указанных в* (i) *кривых пересекаются без касания в максимально возможном* (*то теореме Безу*) *числе вещественных точек,*

[2]Здесь и ниже C_m – однородный многочлен степени m с вещественными коэффициентами от координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}C_m \subset \mathbb{R}P^2$ – множество вещественных точек кривой C_m.

[3]Т. е. вещественная схема каждой из кривых C_2 и $\widetilde{C}_2$ представляет собой овал (окружность, вложенную в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне), а вещественная схема кривой C_3 состоит из двух компонент связности, одна из которых – овал, а вторая – нечётная ветвь (окружность, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне).

т. е.

$$\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 4;$$

(iii) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2 = \emptyset$, *т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;*

(iv) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;*

К эти предположениям добавляется условие комбинаторного характера

(v) *все шесть общих точек нечётной ветви кубики с одной из коник* C_2 *и* $\widetilde{C}_2$ *лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне второй коники; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах.*

Результат проведённого исследования – следующая

Теорема 1. *Расположения кривых вида* $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}\widetilde{C}_2 \cup \mathbb{R}C_3$, *удовлетворяющие условиям* (i) – (v), *отличные от показанных на рис.* 1 *и* 2, *не могут быть реализованы как схемы кривых степени* 7. *Из этих двадцати двух расположений десять* (*рис.* 5) *реализованы распадающимися кривыми степени* 7, *а вопрос о реализуемости двенадцати оставшихся* (*рис.* 6) *открыт.*

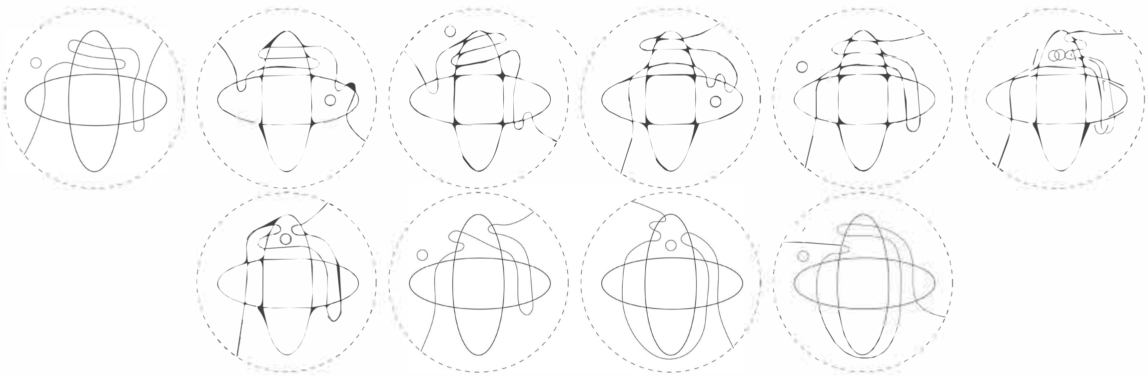


Рис. 5: Реализованные схемы

Список литературы

[1] Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта), *Уч. зап. Горьков. университета*, **87** (1969), 1–214.

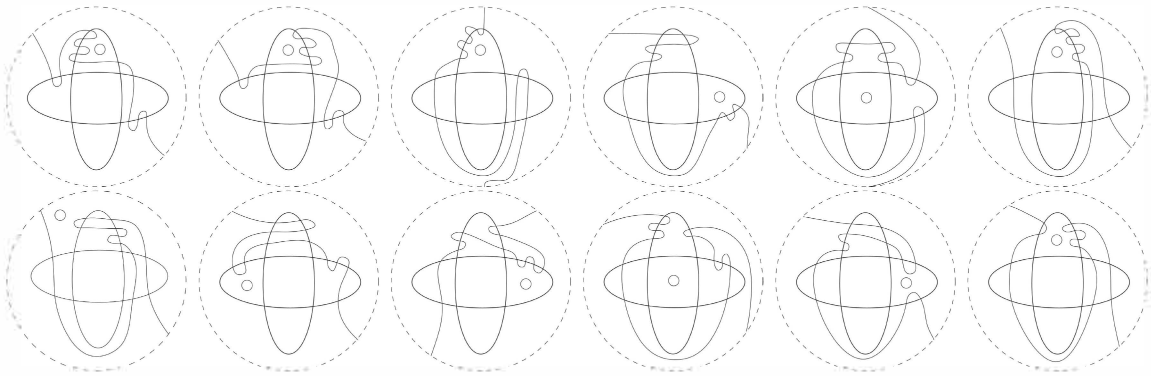


Рис. 6: Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт

[2] Г. М. Полотовский, Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка, *ДАН СССР,* **236**:3 (1977), 548–551.

[3] T. V. Kuzmenko, G. M. Polotovskiy, Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position, *AMS Translations, Ser. 2,* **173** (1996), 165–177.

[4] В. А. Горская, Г. М. Полотовский, О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости, *Журнал Средневолжского математического общества,* **22**:1 (2020), 24–37.

[5] В. А. Горская, О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II, *Чебышевский сборник,* **23**:3 (2022), 61–76.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ И СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАУКАХ

О резольвенте оператора Шредингера на графе с малыми ребрами[1]

Борисов Д.И.
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия
borisovdi@yandex.ru

В работе рассматривается оператор Шрёдингера на модельном графе с несколькими малыми петлями, присоединёнными к одной вершине. В данной вершине задаётся стандартное условие Кирхгофа и предполагается, что для такого оператора не выполнено стандартное нерезонансное условие.

В более ранних работах данное условие гарантировало, что резольвенты операторов общего вида на графах с малыми рёбрами голоморфны по малому параметру, описывающему длины малых рёбер. В настоящей работе мы исследуем поведение резольвенты модельного оператора при нарушении данного нерезонансного условия. А именно, исследуется поведение частей резольвенты, соответствующих конечным и малым рёбрам графа.

Показано, что хотя нерезонансное условие нарушается, части резольвенты сохраняют свойство голоморфности. В то же время, в главных членах ряда Тейлора части резольвенты, соответствующей малым петлям, возникают качественно новые слагаемые, описывающие определённую локализацию резольвенты на данных малых петлях.

Список литературы

[1] D.I. Borisov, Analyticity of resolvents of elliptic operators on quantum graphs with small edges. *Adv. Math.*, **397** (2022), 108125.

[2] Д.И. Борисов, Квантовые графы с малыми ребрами: голоморфность резольвент. *Докл. РАН. Математика, наука и процессы управления,* **498**:1 (2021), 21–26 .

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00009), https://rscf.ru/project/23-11-00009/.

Операторные подход и принцип Мопертюи-Якоби в задачах с локализованными правыми частями для линейных многомерных систем дифференциальных уравнений [1]

Доброхотов С.Ю.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
ИПМех РАН, Москва, Россия
s.dobrokhotov@gmail.com

В недавних работах А. Аникина, С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского и М. Руло [1] были развит метод построения эффективных асимптотических формулы для решений скалярных многомерных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с локализованными правыми частями. Задачи такого сорта близки к задачам об асимптотике функции Грина, например для уравнения Гельмгольца. Асимптотические формулы опираются на лагранжевы многообразиях, порождаемых гамильтоновыми системами, задаваемые символами исследуемых уравнений.

В докладе обсуждается метод построения асимптотических решений такого типа для систем дифференциальных и псевдодифференциальных. Метод основан на операторной редукции, основанной на операторном исчислении Фейнмана-Маслова, исходной систем уравнений к набору скалярных уравнений и последующему применению указанного метода, развитого для скалярных задач. Главные символы этих уравнений, задающие подходящие лагранжевы многообразия, определяются как собственные значения матричнозначного символа исходной системы. С помощью принципа Мопертюи-Якоби мы показываем, что вместо собственных значений можно использовать детерминант матричнозначного символа, что может сильно упростить реализацию предлагаемого метода в решении конкретных задач. Метод иллюстрируется системой уравнений Дирака.

Доклад основан на совместной работе с В. Е. Назайкинским и А. В. Толченниковым.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00341).

Список литературы

[1] A. Yu. Anikin, S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, M. Rouleux, Lagrangian manifolds and the construction of asymptotics for (pseudo)differential equations with localized right-hand sides, *Theor. Math. Phys.* , **214**, 2023.

Строгие результаты для стохастической модели волновой турбулентности Захарова-Львова [1]

Дымов А.В.
МИАН и РУДН, Москва, Россия
dymov@mi-ras.ru

Теория волновой (или слабой) турбулентности (ВТ) интенсивно развивается в физических работах с 1960-х годов. Несмотря на значительный интерес в сообществе, математические работы, посвященные ее строгому обоснованию, начали появляться лишь в последние несколько лет. В этих работах достигнут существенный прогресс, однако задача все еще остается плохо понятной.

ВТ может рассматриваться как кинетическая теория взаимодействующих нелинейных волн, параллельная знаменитой кинетической теории Р. Пайерлса, или как игрушечная модель для теории сильной турбулентности. С математической точки зрения ВТ представляет собой эвристический метод для изучения малоамплитудных решений нелинейных гамильтоновых УрЧП с периодическими граничными условиями большого периода. Принципиальное утверждение ВТ состоит в том, что одна из основных характеристик решения, называемая энергетическим спектром, приближенно удовлетворяет нелинейному кинетическому уравнению, называемому волновым кинетическим уравнением и восходящему к Р. Пайерлсу.

Я расскажу о совместных работах [1] - [3] с С. Б. Куксиным, а также С. Г. Влэдуцем и А. Майокки, в которых мы завершили первый шаг в строгом обосновании этого утверждения для энергетического спектра решения нелинейного уравнения Шредингера со случайным возмущением на торе. Такая стохастическая модель ВТ была предложена Захаровым и Львовым.

Говоря более детально, мы рассматриваем кубическое уравнение Шредингера

$$\partial_t u + i\Delta u - i\lambda |u|^2 u = (\text{вязкость} + \text{случайное возмущение}) \text{ размера} \ll \lambda, \tag{2}$$

где $u = u(t,x) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^d/(L\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 2$, период тора $L \gg 1$, а $0 < \lambda \ll 1$ — малый параметр. Энергетический спектр его решения — это функция $n_s(\tau)$ на двойственной решетке $L^{-1}\mathbb{Z}^d \ni s$, заданная выражением

$$n_s(\tau) = \mathbb{E}|v_s(\tau)|^2, \qquad s \in L^{-1}\mathbb{Z}^d.$$

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Здесь τ обозначает подходящим образом отмасштабированное время t, $\mathbb{E}$ — математическое ожидание, а v_s — отмасштабированные коэффициенты Фурье решения $u(\tau)$. Вместо точного решения $u(\tau)$ в работах [1], [3] мы рассмотрели *квазирешение* $U(\tau)$, равное сумме первых трех членов формального ряда по λ для точного решения u. Мы показали, что квазирешение решает уравнение (2) с малой погрешностью. Затем мы установили, что энергетический спектр квазирешения удовлетворяет основной гипотезе ВТ.

Теорема 1. *В пределе, когда сперва $L \to \infty$, а затем $\lambda \to 0$ (либо в совместном пределе $\lambda \to 0$, $L \gg \lambda^{-1}$), энергетический спектр $N_s(\tau)$ квазирешения $U(\tau)$ приближенно удовлетворяет волновому кинетическому уравнению. В обратном пределе, когда сперва $\lambda \to 0$, а затем $L \to \infty$, энергетический спектр $N_s(\tau)$ квазирешения приближенно удовлетворяет неавтономной версии волнового кинетического уравнения.*

Сейчас мы работаем над обоснованием следующей гипотезы, которая должна завершить строгое доказательство основного утверждения ВТ для уравнения (2).

Гипотеза. *Квазирешение хорошо аппроксимирует точное решение, так что утверждение теоремы 1 выполняется и для энергетического спектра $n_s(\tau)$ точного решения.*

Список литературы

[1] A. Dymov, S. Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: kinetic limit. *Comm. Math. Phys.*, **382** (2021), 951–1014.

[2] A. Dymov, S. Kuksin, Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 2: Method of diagram decomposition. *J. Stat. Phys.*, **190** (2023).

[3] A. Dymov, S. Kuksin, A. Maiocchi, S. Vladuts, The large-period limit for equations of discrete turbulence. ArXiv: 2104.11967.

К задаче группового преследования с дробными производными [1]

Мачтакова А.И.
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
bichurina.alyona@yandex.ru

Петров Н.Н.
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
kma3@list.ru

В настоящее время одним из направлений современного развития теории дифференциальных игр преследования-убегания является поиск новых задач, к которым применены ранее разработанные методы решения. В частности, в работе [1] получены достаточные условия поимки в задаче преследования двух лиц, описываемой уравнениями с дробными производными. Задачи группового преследования и уклонения с дробными производными и равными возможностями всех участников рассматривалась в [2]. В данной работе рассматривается конфликтное взаимодействие группы преследователей с одним убегающим в дифференциальной игре с дробными производными без предположения равенства возможностей участников.

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E с законами движения

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i,\ x_i(0) = x_i^0,\ u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y = ay + v,\ y(0) = y^0,\ v \in V.$$

Здесь $x_i, y, x_i^0, y^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha \in (0,1)$, $D^{(\alpha)}x$ — производная по Капуто [3] функции x порядка α, a_i, a — вещественные числа. Кроме того, $x_i^0 - y^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$, где M_i, $i \in I$ — заданные выпуклые компакты. Считаем, что преследователи в процессе игры используют квазистратегии.

Определение 1. *В игре $G(n+1)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0,T]$ существуют момент $t_0 \in [0,T]$ и номер $l \in I$ для которых $x_l(t_0) - y(t_0) \in M_l$.*

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070).

Определение 2. *В игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи, если существуют программное управление $v(\cdot)$ убегающего E такое, что для любых траекторий $x_i(t), i \in I$ преследователей $P_i, i \in I$ и для любого $t > 0$ имеет место $x_i(t) - y(t) \notin M_i$.*

Введем следующие обозначения. $\mathrm{IntA}, \mathrm{coA}$ — внутренность и выпуклая оболочка множества A,

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)} \text{ -- обобщенная функция Миттаг-Лефлера}$$

$$(\rho > 0, z, \mu \in \mathbb{R}^1),$$

$$f_i(t) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1), \quad f(t) = E_{1/\alpha}(a t^\alpha, 1),$$

$$g_i(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\big(a_i(t-\tau)^\alpha, \alpha\big), \quad g(t,\tau) = (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\big(a(t-\tau)^\alpha, \alpha\big),$$

$$F_i(t) = \int\limits_0^t g_i(t,\tau)\,d\tau, \quad F(t) = \int\limits_0^t g(t,\tau)\,d\tau,$$

Пусть $\gamma_i(t,\tau), i \in I$ $t \geqslant 0$, $\tau \in [0,t]$ — некоторые ограниченные, измеримые по (t,τ), локально суммируемые по τ (при каждом t) вектор функции. Зафиксируем некоторый набор функций $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_i(t,\tau), i \in I\}$, и обозначим

$$\xi_i(t) = f_i(t)x_i^0 - f(t)y^0 + \int\limits_0^t \gamma_i(t,\tau)\,d\tau,$$

$$W_i(t,\tau,v,\gamma_i) = g_i(t,\tau)U_i - g(t,\tau)v - \gamma_i(t,\tau), \quad W_i(t,\tau,\gamma_i) = \bigcap_{v \in V} W_i(t,\tau,v,\gamma_i),$$

$$\lambda_i^0(t,\tau,v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \ : \ -\lambda\xi_i^0(t) \in g_i(t,\tau)U_i - g(t,\tau)v - \gamma_i(t,\tau)\},$$

$$\xi_i^0(t) = \xi_i(t)/\|\xi_i(t)\|.$$

Теорема 1. *Пусть существуют функции* $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_i(t,\tau), i \in I\}$, *момент* $T > 0$ *и номер* $l \in I$ *такие, что* $0 \in W_l(t,\tau,\gamma_l)$, $\xi_l(T) \in M_l$. *Тогда в игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Далее считаем, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i \in I$, $t > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $M_i = \{0\}$ *для всех* $i \in I$, *существуют момент* $T > 0$ *и функции* $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_i(t,\tau), i \in I\}$ *такие, что* $0 \in W_i(t,\tau,\gamma_i)$, $i \in I$ *и*

$$\inf_{v(\cdot)} \max_i \int_0^T \frac{\lambda_i^0(T,\tau,v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|}\, d\tau \geqslant 1.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Теорема 3. *Пусть параметры задачи таковы, что* $a_i = a < 0$, $M_i = \{0\}$, $U_i = V = \{z : \|z\| \leqslant 1\}$ *для всех* $i \in I$ *и* $y^0 \in \operatorname{Intco}\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$. *Тогда в игре* $G(n+1)$ *происходит поимка.*

Пример. *В пространстве* $\mathbb{R}^k$ *рассматривается игра* $G(3)$, *описываемая системой вида*

$$D^{(\alpha)}x_i = u_i, \quad x_1(0) = (1,0,\ldots,0), \quad x_2(0) = (-1,0,\ldots,0),$$
$$D^{(\alpha)}y = v, \quad y(0) = (0,0,\ldots,0), i \in I = \{1,2\},$$

причем $u_i, v \in V = \{(v_1,\ldots,v_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ v_j \in [-1,1], j = 1,\ldots,k\}$, $M_i = \{0\}$. *Тогда в игре* $G(3)$ *происходит поимка.*

Теорема 4. *Пусть в игре* $G(n+1)$ *для всех* $i \in I$ *имеет место* $M_i = \{0\}$, $U_i = \{u_i : \|u_i - b_i\| \leqslant R_i\}$, $V = \{v : \|v - b\| \leqslant R$ *и существует вектор* $p \in R^k$, $\|p\| = 1$ *такой, что*

1) для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$ *справедливы неравенства* $\|b + Rp\|F(t) \geqslant (\|b_i\| + R_i)F_i(t)$, $f(t) \geqslant f_i(t)$.

2) $(b + Rp, y^0) \geqslant 0$, $(b + Rp, y^0) \geqslant \max_{i \in I}(b + Rp, x_i^0)$.

Тогда в игре $G(n+1)$ *происходит уклонение от встречи.*

Список литературы

[1] А. А. Чикрий, И. И. Мачитин, Игровые задачи для линейных систем дробного порядка. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **15**:3 (2009), 262–278.

[2] N. N. Petrov, Multiple Capture in a Group Pursuit Problem with Fractional Derivatives and Phase Restrictions. *Mathematics*, **9(11)** (2021), 1171, https://doi.org/10.3390/math9111171.

[3] M. Caputo, Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. R. Astr. Soc.*, **13** (1967), 529–539.

Об ограниченных решениях одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]

Мухамадиев Э.
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
emuhamadiev@rambler.ru

Наимов А.Н.
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
naimovan@vogu35.ru

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+a_1\right)^{m_1}...\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+a_n\right)^{m_n}u-bu=f(x_1,...,x_n);(x_1,...,x_n)\in R^n, \quad (3)$$

где натуральные числа $n\geq 2$, m_1, $\ldots$, m_n и комплексные числа $a_1=\alpha_1+i\beta_1$, $\ldots$, $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, b считаются заданными. Функция $f(x_1,...,x_n)$ предполагается комплекснозначной, непрерывной и ограниченной в R^n.

Ограниченным решением уравнения (1) называем комплекснозначную функцию $u(x_1,...,x_n)$, которая непрерывна и ограничена в R^n вместе со всеми частными производными

$$\frac{\partial^{k_1+...+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}, \quad \text{где} \quad k_j=\overline{0,m_j}, \quad j=\overline{1,n},$$

и удовлетворяет уравнению (1).

В работе [1] доказано, что произвольное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k_1=0}^{m_1}...\sum_{k_n=0}^{m_n}c_{k_1...k_n}\frac{\partial^{k_1+...+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}=f(x_1,...,x_n);(x_1,...,x_n)\in R^n, \quad (4)$$

с постоянными коэффициентами $c_{k_1...k_n}$ однозначно разрешимо в пространстве ограниченных обобщенных функций тогда и только тогда, когда символ уравнения

$$\sum_{k_1=0}^{m_1}...\sum_{k_n=0}^{m_n}c_{k_1...k_n}s_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot s_n^{k_n},$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

где $s_1, \ldots, s_n$ - комплексные переменные, не имеет чисто мнимых корней $(i\tau_1, \ldots, i\tau_n)$, $\tau_j \in R$, $j = \overline{1, n}$. При этом если f является непрерывной и ограниченной в R^n функцией, то решение u необязательно будет непрерывным и ограниченным вместе со всеми производными, входящими в уравнение. В связи с этим представляет интерес вопрос о нахождении дополнительных условий на символ, кроме отсутствия чисто мнимых корней, обеспечивающих гладкость решения в классическом смысле.

Гладкость решения уравнения (2), как показывают теоремы о гипоэллиптичности [2, с. 180-204], зависит от поведения символа уравнения на бесконечности. В работе [3] исследован вопрос о поведении символа уравнения (2) на бесконечности посредством выделения так называемого главного члена. В настоящей работе применяется такой же подход к уравнению (1).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *при любой непрерывной и ограниченной в* R^n *функции* $f(x_1, ..., x_n)$ *имеет единственное ограниченное решение тогда и только тогда, когда числа* $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\ldots$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ *и* b *удовлетворяют условиям*

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n \neq 0, \tag{3}$$

$$R_{|m|}\left(b\alpha_1^{-m_1} \ldots \alpha_n^{-m_n}\right) < 1, \tag{4}$$

где $|m| = m_1 + \ldots + m_n$,

$$R_{|m|}(c) = \max_{k=0,\ldots,|m|-1} Re\left(\sqrt[|m|]{c}\right)_k = |c|^{1/|m|} \max_{k=0,\ldots,|m|-1} \cos\left(\frac{arg(c) + 2\pi k}{|m|}\right).$$

Теорема 2. *Пусть числа* α_1, $\ldots$, α_n *положительны и выполнено условие* (4)*. Тогда единственное ограниченное решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$u(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} G(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) f(\xi_1, \ldots, \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где функция $G(x_1, \ldots, x_n)$ *определяется формулой*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = e^{-a_1x_1 - \ldots - a_nx_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_1^{m_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n-1} \left(b \cdot x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}\right)^k}{(m_1(k+1)-1)! \cdot \ldots \cdot (m_n(k+1)-1)!},$$

и абсолютно интегрируема в области $x_1 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$

$$\int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} |G(x_1, \ldots, x_n)| \, dx_1 \ldots dx_n < \infty.$$

Часть полученных результатов анонсирована и доказана в работах [4,5].

Если в уравнении (1) произвести замену $y_j = -x_j$, то скобка $(\partial/\partial x_j + a_j)^{m_j}$ преобразуется в скобку $(-1)^{m_j}\,(\partial/\partial y_j - a_j)^{m_j}$. Следовательно, уравнение (1) с ненулевыми $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ всегда можно свести к случаю, когда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положительны.

Согласно теореме 2.1, доказанной в работе [4], уравнение (1) при любой непрерывной и ограниченной в R^n функции $f(x_1, ..., x_n)$ имеет единственное ограниченное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (3) и символ уравнения (1) не имеет чисто мнимых корней.

Если имеет место (3), то отсутствие чисто мнимых корней для символа уравнения (1) равносильно условию

$$(i\tau_1 + 1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (i\tau_n + 1)^{m_n} \neq \widetilde{b} \quad \text{при всех} \quad \tau_1, \ldots, \tau_n \in R, \tag{5}$$

где $\widetilde{b} = b\alpha_1^{-m_1} \ldots \alpha_n^{-m_n}$. А условие (5) равносильно условию (4). Таким образом, если выполнены условия (3), то символ уравнения (1) не имеет чисто мнимых корней лишь в том случае, когда выполняется условие (4).

Список литературы

[1] Э. Мухамадиев, К теории дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных обобщенных функций. *Известия АН Таджикской ССР,* **110**:4 (1988), 77–80.

[2] Г. Е. Шилов, Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

[3] В. П. Михайлов, О поведении на бесконечности одного класса многочленов. *Тр. МИАН СССР,* **91** (1967), 59–80.

[4] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, А. Х. Сатторов, Аналог теоремы Боля для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных. *Уфимский математический журнал,* **9**:1 (2017), 75–88. doi: https://doi.org/10.13108/2017-9-1-75

[5] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, Оценка порядка роста одного класса целых функций на вещественной оси. *Известия вузов. Математика,* **62**:1 (2018), 75–80. doi: https://doi.org/10.3103/S1066369X18010097

Асимптотические решения уравнений с локализованными правыми частями[1]

Назайкинский В.Е.
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
nazaikinskii@yandex.ru

В докладе описывается метод построения квазиклассических асимптотических решений неоднородных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в частных производных с локализованными правыми частями. Эти задачи близки к задачам об асимптотике функции Грина для таких операторов, в частности, изученным в многочисленных работах задачах об асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца (см., например, [1–3]). Метод основан на конструктивном описании соответствующих лагранжевых многообразий и на недавно предложенных новых представлених [4] канонического оператора Маслова [5, 6] в окрестности лагранжевых сингулярностей (каустик и каустических множеств). Развитый метод служит основой аналитико-численного алгоритма построения эффективных асимптотических решений указанных задач, возникающих в различных областях физики и механики сплошных сред.

Доклад основан на совместных работах с С. Ю. Доброхотовым, А. Ю. Аникиным и М. Руло [7, 8].

Список литературы

[1] В. М. Бабич, О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца. *Матем. сб.*, **65(107)**:4 (1964), 576–630.

[2] Б. Р. Вайнберг, О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \to \infty$ решений нестационарных задач. *УМН*, **30**:2(182) (1975), 3–55.

[3] В. В. Кучеренко, Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера. *ТМФ*, **1**:3 (1969), 384–406.

[1] Работа частично поддержана грантом РФФИ 17-51-150006 НЦНИ_а и средствами госбюджета по госзаданию № АААА-А20-120011690131-7.

[4] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. И. Шафаревич, Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах. *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:2 (2017), 53–96.

[5] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.

[6] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976

[7] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, М. Руло, Канонический оператор Маслова на паре лагранжевых многообразий и уравнения с локализованной правой частью. *Докл. Акад. наук, Матем. физика*, **475**:6 (2017), 624–628.

[8] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, М. Руло, Лагранжевы многообразия и конструкция асимптотик для (псевдо)дифференциальных уравнений с локализованными правыми частями. *ТМФ*, **214**:1 (2023), 3–29.

Математическая модель управления трафиком маршрутизатора NoC[1]

Осовский А.В.
Астраханский государственный технический университет, Астрахань, Россия
a_osovskiy@mail.ru

Кутузов Д.В.
Астраханский государственный технический университет, Астрахань, Россия
d_kutuzov@mail.ru

Стукач О.В.
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
ostukach@hse.ru

Старов Д.В.
Астраханский государственный технический университет, Астрахань, Россия
bortv715ke@mail.ru

Введение. Построению схем NoC, топологий соединений IP-core и отдельных частей коммутаторов посвящено много исследований. Одной из важнейших задач при создании структур NoC является моделирование производительности сети маршрутизаторов. Из-за распределенной и сложной топологии сети маршрутизаторов, алгоритмов арбитража и маршрутизации и т. д., временные характеристики, образовавшиеся очереди в буферах и, следовательно, производительность инфраструктуры трудно предсказать.

Обзор шаблонов трафика. В книге [1] для информационного трафика сетей 5G, для IML-трафика, авторы показали, что длина сообщения и время между поступлениями лучше соответствуют степенному закону

[1]Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ No 23-21-00196, https://rscf.ru/project/23-21-00196/

распределения и логарифмически нормальному распределению, которые сильно отличаются от рекомендаций 3GPP. Для агрегированного трафика в пределах одной БС рекомендуется применять α-стабильные модели для характеристики этой статистической закономерности. Авторы показали допустимость применения пригодность α-стабильных моделей для трафика как в стационарных опорных сетях, так и в сетях сотового доступа. Трафик сетей порождает и трафик приложений в узлах обработки данных. Поэтому, не менее важны и характеристики трафика приложений в сетях 5G/6G, обрабатывающегося NoC. При обработке трафика многоядерными (в том числе, NoC) системами активность IP-ядер непостоянна, и не обладает стационарностью. Поэтому, можно говорить о разных фазах генерации трафика [2], причем каждой отдельной фазе может соответствовать своя схеме трафика, со своим распределением вероятностей. Часто распределение носит не пуассоновский характер [2]. Например, в исследовании [2] на основе работы [3] был предложен алгоритм обнаружения фаз трафика [4]. Этот алгоритм использует алгоритм k-средних [5], [6], который является классическим методом группировки многомерных значений в подобные наборы.

Построение модели. В статьях [7], [8] мы также строили модель коммутатора на основе теории массового обслуживания. Однако такая модель не всегда правильно отражает логику обработки запросов на соединения, не учитывает взаимных блокировок и других особенностей функционирования системы. Подходом, который может точнее учесть нюансы работы коммутатора является построение агентной модели. Для ее создания мы использовали фреймворк Mesa, реализованный на языке программирования Python. Модель использует объектно-ориентированный подход, и определяет класс поступающих информационных пакетов, класс, описывающий коммутатор, и класс, управляющий выполнением модели. Кроме того, мы использовали встроенные средства Mesa для сбора и анализа данных моделирования.

Теоретико-множественная модель процесса коммутации. Рассмотрим модель коммутатора [9]. Для данного коммутатора введем следующие обозначения: $X = (n, k)$ — множество заявок на установление соединения, причем n — физические входы коммутационной системы, а k — идентификаторы (имена) выходов, к которым требуется установить соединение. Множество $P = (k, m)$ — множество идентификаторов k, пришедших с соответствующих выходных линий m. Тогда множество $Y = (n, m)$ — множество точек коммутации, через которые установлено соединение, которое образуется в результате операции (5):

$$Y = f(X, P) \Leftrightarrow \{f = X \circ P = (n, m) \mid n \in N, m \in M\}. \tag{5}$$

Тогда, процесс коммутации может быть представлен формулой (6):

$$A = (\{X, P\}, f), \tag{6}$$

где f — функция коммутации.

Данная функция, инъективна, поскольку два и более входа системы не могут установить соединение к одному и тому же выходу и это заранее предусматривается. Здесь стоит отметить возможность и обратной ситуации, т. е. установления соединения одного входа к двум и более выходам.

Для реализации пачечного режима коммутации в матричных схемах необходимо предусматривать следующее. Необходимо сохранять уже установленные соединения путем деления времени на отдельные такты. Все заявки на установление соединения возникают в случайные моменты времени, т. е. асинхронно. Заявки, которые, поступили в промежутке времени между соседними тактами будут обрабатываться только при наступлении очередного такта, сигналом к которому служит тактовый импульс.

Здесь возможна ситуация, когда две заявки на обслуживание в один и тот же момент времени пытаются установить соединение к одному выходу. Такое положение приводит к конфликту и называется коллизией. В такой ситуации имеется два решения. Во-первых, можно отбрасывать все подобные заявки. Для этого потребуется схема, способная обнаружить коллизию и заблокировать соединение. Во-втором случае можно выбрать одну заявку и предоставить ей соединение. Для этого необходима схема для обнаружения конфликтной ситуации, с возможностью приоритетного выбора — какой заявке предоставить соединение.

При передаче достаточно длинных пакетов в момент, когда еще не закончено обслуживание предыдущей заявки требуется предусмотреть схему блокировки задействованных ячеек матрицы коммутации. Кроме того, необходимо также заблокировать строки и столбцы матрицы, в которых находятся такие ячейки. Незаблокированные ячейки коммутационной матрицы должны быть потенциально доступны для установления следующих соединений.

Тогда, математическая модель процесса коммутации претерпит некоторые изменения. Пусть время делится на такты, т. е. равные дискретные отрезки времени $t = t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ в течение которых поступают заявки на обслуживание. Тогда $X_t = (n, k)_t$ — множество заявок, поступивших за время $t = t_i - t_{i-1}$ с входных линий n и содержащих идентификаторы k. Эти заявки и образуют пачку.

Тогда множество $Y_t = (n, m)_t$ — множество точек коммутации, через которые установлено соединение в такте t, которое образуется в результате операции (7):

$$Y_t = f(X_t, P_t) \Leftrightarrow \{f = X_t \circ P_t = (n, m)_t \mid n \in N, m \in M\} \tag{7}$$

Таким образом, процесс коммутации может быть представлен формулой (8):

$$A = (\{X_t, P_t\}, f). \tag{8}$$

Как сказано выше, в отличие от предыдущего случая, здесь возможна ситуация, когда с двух и более входных линий n поступил транзакт содержащий требование на установление соединения к одной и той же выходной линии k за промежуток времени t. Для разрешения коллизии используется операция выделения приоритета. Тогда справедливо выражение (9):

$$Y_t = Y_t \backslash f(Y_t) \tag{9}$$

где $f(Y_t)$ — функция выделения приоритета.

Данная математическая модель (5)–(9) справедлива и для отдельных коммутаторов двухмерных и трехмерных сетей NoC.

Список литературы

[1] R. Li, Z. Zhao, C. Qi, and H. Zhang, Characterizing and Learning the Mobile Data Traffic in Cellular Network. *5G Networks: Fundamental Requirements, Enabling Technologies, and Operations Management*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2018, 453–498. doi: 10.1002/9781119333142.ch12.

[2] F. Gebali, H. Elmiligi, and M. W. El-Kharashi, Eds., Networks-on-chips: theory and practice. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009.

[3] T. Sherwood, E. Perelman, G. Hamerly, S. Sair, and B. Calder, Discovering and exploiting program phases. *IEEE Micro*, **23**:6 (2003), 84–93. doi: 10.1109/MM.2003.1261391.

[4] A. Scherrer, A. Fraboulet, and T. Risset, Automatic phase detection for stochastic on-chip traffic generation. *Proceedings of the 4th international conference on Hardware/software codesign and system synthesis*. Seoul Korea: ACM, 2006, 88–93. doi: 10.1145/1176254.1176277.

[5] J. MacQueen, Classification and analysis of multivariate observations. *5th Berkeley Symp. Math. Statist.* Probability, University of California Los Angeles LA USA, 1967, 281–297.

[6] I. A. Ershov, O. Stukach, Approach to the clustering modeling for the strong correlative control measurements for estimation of percent of the suitable integrated circuits in the semiconductor industry. *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*. Omsk, Russia: IEEE, 2016, 1–4. doi: 10.1109/Dynamics.2016.7819007.

[7] D. Kutuzov, A. Osovsky, O. Stukach, D. Starov, Modeling of Iiot Traffic Processing by Intra-Chip Noc Routers of 5g/6g Networks. *2021 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. Kazan, Russia: IEEE, 2021, 1–5. doi: 10.1109/SIBCON50419.2021.9438874.

[8] D. Kutuzov, A. Osovsky, D. Starov, O. Stukach, E. Motorina, Processing of the Gaussian Traffic from IoT Sources by Decentralized Routing Devices. *2019 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. Tomsk, Russia: IEEE, 2019, 1–4. doi: 10.1109/SIBCON.2019.8729617.

[9] Патент No 1441471. А. В. Каляев, В. В. Жила, ”Матричный коммутатор с параллельной настройкой”.

Интегрируемость маятника Циглера[1]

Полехин И.Ю.
Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
ivanpolekhin@mi-ras.ru

Маятник Циглера является классической системой для изучения в теории устойчивости неконсервативных систем. В первую очередь эта система известна в связи с «парадоксом» потери устойчивости при добавлении в систему трения [1] (см. также [2]). Подробнее об этой и других неконсервативных системах написано в [3]. Там же можно найти и более подробное изложение истории изучения задачи. Полная библиография работ, касающихся устойчивости этой и близких неконсервативных систем, слишком обширна, чтобы мы могли ее привести и также может быть найдена в [3]. Отметим только, что, насколько нам известно, изучение динамики *в целом* и интегрируемости маятника Циглера ранее не проводилось. Напротив, большое число работ посвящено динамике классического двойного маятника, в которых показано (экспериментально, численно и аналитически с помощью метода Пуанкаре-Мельникова), что эта система является хаотической. Первые нетривиальные результаты о неинтегрируемости систем с непотенциальными силами были получены в [4]. Проблема интегрируемости маятника Циглера также была впервые сформулирована в [4].

В работе нами исследуется динамика плоского двойного маятника при наличии в системе постоянной по величине следящей силы, направленной вдоль одного из звеньев маятника. Предполагается, что на систему не действует сила тяжести, но в узлах маятника могут находиться пружины линейной жесткости.

Нами исследуется случай, когда жесткость пружины, расположенной в точке подвеса маятника, равна нулю. В этом случае порядок системы может быть понижен. Доказывается, что в редуцированной системе суще-

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

ствуют двухпараметрические семейства периодических решений, т.е. локально, в окрестности этих семейств, у системы есть два первых интеграла. В этом случае можно говорить об интегрируемости системы (как минимум, для части начальных условий). Объясняется механизм нарушения периодичности решений при изменении параметров или начальных данных системы, из чего следует неинтегрируемость и хаотизация динамики системы (показывается численно). Отметим, что этот механизм принципиально отличен от случая гамильтоновых систем.

Список литературы

[1] H. Ziegler, Die stabilitätskriterien der elastomechanik. *Ingenieur-Archiv*, **20**:1 (1952), 49–56.

[2] V. Bolotin, N. Zhinzher, Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *International Journal of Solids and Structures*, **5**:9 (1969), 965–989.

[3] O. N. Kirillov, Nonconservative stability problems of modern physics. De Gruyter, 2013.

[4] V. V. Kozlov, On the Integrability of Circulatory Systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, **27**:1 (2022), 11–17.

О собственных значениях дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами[1]

Поляков Д.М.
Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
DmitryPolyakow@mail.ru

Рассматривается самосопряженный оператор четвертого порядка $S = S(p, q)$, действующий в пространстве $L^2(0, 1)$, вида

$$Sy = y^{(4)} + (py')' + qy, \qquad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \tag{10}$$

где p, q — вещественные, периодические (периода 1) коэффициенты, p, $q \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Этот оператор задается на следующей области определения

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(S) = \{y \in L^2(0,1) : y'', y''', (y''' + py')' \in L^1(0,1),\\ y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0,1), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\}.\end{aligned}$$

С физической точки зрения оператор S описывает прогиб (1-периодической) балки с жестким закреплением на концах, а его собственные значения указывают резонансные случаи, которые имеют важные приложения. Уравнения четвертого порядка появляются в качестве модельных для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих, например, в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике, моделях висячих мостов (см. [1], [2] и используемую там литературу).

Основная цель настоящей работы — получить асимптотику собственных значений при высоких энергиях, а также формулу следа для оператора S.

Перейдем к формулировке основных результатов. Через μ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначаются собственные значения оператора S. Кроме того, определим коэффициенты Фурье некоторой функции $f \in L^1(0, 1)$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x) \sin \pi(2n+1)x\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место следующий результат.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-160.2022.1.1).

Теорема 1. *Пусть p, $q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда собственные значения μ_n являются простыми, вещественными и допускают следующую асимптотику*

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \rho_{1,n}) + \mathcal{O}(n), \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $\rho_{1,n} =$

$$\int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}\big(p(s)+p(1-s)\big)\Big(e^{-\pi(n+1/2)s} - 2\sin\pi\big(n+1/2\big) - 2\cos\pi\big(n+1/2\big)\Big)\,ds.$$

Если дополнительно предположить, что p''', $q' \in L^1(\mathbb{T})$, то асимптотика в этом случае примет вид:

$$\mu_n = \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 \big(p_0 + \widehat{p}_{sn}\big) + 3\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8}$$
$$+ q_0 - \widehat{q}_{sn} - \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\rho_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

при $n \to +\infty$, где

$$\rho_{2,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}\bigg(\frac{1}{2}\big(p'''(s) - p'''(1-s)\big)\Big(\sin\pi(n+1/2)s + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8}\Big)$$
$$+ \big(q'(1-s) - q'(s)\big)\Big(\sin\pi(n+1/2)s + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4}\Big)\bigg)\,ds.$$

В [3, Corollary 1] была выписана "грубая" асимптотика собственных значений для оператора S в случае $p \in C^3[0,1]$ и $q \in C^1[0,1]$. Подобный результат также был установлен в [4, Theorem 3.1] также для гладких коэффициентов. В теореме 1 доказана более точная асимптотика оператора S в общем случае p, $q \in L^1(\mathbb{T})$.

Используя результаты теоремы 1, мы получим формулу следа для оператора S. Для этого рассмотрим оператор со сдвигом $S_t(p_t, q_t)$ вида (10), где $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\mu_n(t)$ мы обозначим собственные значения оператора S_t.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть p'''', $q'' \in L^1(\mathbb{T})$. Для оператора S_t, $t \in \mathbb{T}$, справедлива следующая формула следа*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigg(\mu_n(t) - \mu_n(0) - 3(p(t) - p(0))\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big) + \frac{p''(t) - p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{2(q(t) - q(0))}{\pi(2n+1)}\bigg)$$

$$= G(0) - G(t),$$

где

$$G = -\frac{p''}{2} + q - \frac{p^2}{4}.$$

При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Список литературы

[1] C. P. Gupta, Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems. *Appl. Anal.*, **36** (1990), 157–169.

[2] L. A. Peletier, J. A. Rodrigues, Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation. *J. Differ. Equat.*, **203** (2004), 185–215.

[3] J. R. McLaughlin, An inverse eigenvalue problem of order four —an infinite case. *SIAM J. Math. Anal.*, **9**:3 (1978), 395–413.

[4] N. B. Kerimov, Z. S. Aliev, On the basis property of the system of eigenfunctions of a spectral problem with spectral parameter in the boundary conditions. *Differ. Equat.*, **43**:7 (2007), 905–915.

Лежандрова особенность Арнольда в решении модельного уравнения Гельмгольца с локализованной правой частью [1]

Толченников А.А.
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия
ИПМех РАН, Москва, Россия
tolchennikov-aa@gmail.com

В докладе будет рассматриваться 2-мерное модельное уравнение Гельмгольца с линейным показателем преломления и локализованной правой частью, а также фундаментальное решение этого уравнения. В похожих задачах, согласно работе [1], конструкция асимптотического решения основывается на лагранжевой поверхности, составленной из полутраекторий системы Гамильтона, выпущенных из окружности (пересечении вертикальной плоскости с нулевой поверхностью уровня гамильтониана). Однако непосредственно результат этой статьи быть применен не может, поскольку имеется одна траектория, которая за бесконечное время приходит в особую точку. Это приводит к тому, что асимптотическое решение будет локализовано не только в окрестности проекции 2-мерного лагранжева многообразия в физическое пространство, но и в окрестности проекции особого луча, который "срывается"с негладкой лагранжевой поверхности, нормальная форма (лежандрова версия) которой была давно описана В.И. Арнольдом [2].

Доклад основан на совместной работе с С. Ю. Доброхотовым и И. А. Богаевским.

Список литературы

[1] A. Yu. Anikin, S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, M. Rouleux, Lagrangian manifolds and the construction of asymptotics for (pseudo)differential equations with localized right-hand sides. *Theor. Math. Phys.* , **214** (2023).

[2] В.И. Арнольд, Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00341).

Асимптотики с комплексными фазами ортогональных полиномов, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями[1]

Цветкова А.В.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
annatsvetkova25@gmail.com

Рассматриваются совместно ортогональные полиномы Эрмита $H_{(n_1,n_2)}(z)$ с двумя натуральными индексами. Такие полиномы можно определить с помощью рекуррентных соотношений, а также представить в виде решения дифференциального уравнения третьего порядка [1]. Обсуждается подход, позволяющий получить глобальную асимптотику для полиномов с большими индексами в виде специальных функций, опираясь на каждое из упомянутых представлений.

В частности, разностное уравнение для совместно ортогональных полиномов Эрмита с равными индексами можно свести к псевдодифференциальному уравнению. Особенность задачи заключается в том, что символ получившегося оператора комплекснозначный. Мы развиваем подход, который позволяет избавиться от комплексности и свести рассматриваемое уравнение к трем уравнениям с вещественными символами [2].

Аналогичную идею можно применить и для дифференциального уравнения третьего порядка. В этом случае удается получить глобальную асимптотику не только для диагональных полиномов, но и для полиномов с неравными большими индексами [3].

Доклад основан на совместных работах с А.И. Аптекаревым, С.Ю. Доброхотовым и Д.Н. Туляковым.

Список литературы

[1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, Multiple orthogonal polynomials for classical weights. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00341).

[2] А. И. Аптекарев, С. Ю. Доброхотов, Д. Н. Туляков, А. В. Цветкова, Асимптотики типа Планшереля-Ротаха для совместно ортогональных многочленов Эрмита и рекуррентные соотношения. *Изв. РАН. Сер. Матем.*, **86**:1 (2022), 36–97.

[3] S. Yu. Dobrokhotov, A. V. Tsvetkova, Asymptotics of multiple orthogonal Hermite polynomials $H_{n_1,n_2}(z,\alpha)$ determined by a third-order differential equation. *Rus. J. Math. Phys.*, **28**:4 (2021), 439-454.

ЧАСТЬ 2. ИСТОРИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И СМЕЖНЫХ ДИСЦИПЛИН

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ БАЗЕЛЬСКОЙ ЗАДАЧИ

В.В. Афанасьев

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Ярославль, Россия

e-mail: afvv2018@mail.ru

Аннотация. Предлагается вероятностный подход к продолжению знаменитой Базельской задачи, в основу которого положены предыдущие результаты автора с использованием урновых моделей. Задача заключалась в поиске подходящих моделей и технике их использования. Построены новые ряды с обратными значениями натуральных чисел второй, четвертой и шестой степеней.

Ключевые слова: числовые ряды, сходимость, дзета-функции Римана, Базельская задача, ряды Лейбница и Эйлера, вероятностные урновые модели, продолжения схемы Бернулли.

Базельская задача о поиске в замкнутом виде ряда из обратных квадратов натуральных чисел была решена в 1735 году молодым Леонардом Эйлером через 46 лет после своей постановки. Неожиданный ответ в виде $\pi^2/6$ подводит нас к дзета-функции, с которой имеем дело в гипотезе Римана. Это утверждение занимает важное место в истории математики, для него найдено много чрезвычайно изящных и глубоких доказательств ([1], с. 45-46).

I. Рассмотрим ряд Эйлера $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ и ряд Лейбница, полученный в [2] из вероятностной интерпретации продолжения схемы Бернулли: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=1$

Вычтем из второго ряда почленно первый, перенеся из левой части предварительно первое слагаемое. Получаем:

$$\frac{2-1}{1\cdot 2^2}+\frac{3-2}{2\cdot 3^2}+\frac{4-3}{3\cdot 4^2}+\frac{5-4}{4\cdot 5^2}+\cdots=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) \text{ или}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}+\frac{1}{4\cdot 5^2}+\cdots=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

I.2. Рассмотрим вторую диагональ треугольника Лейбница, которую можно получить из урновой модели с тремя шарами [2].

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

Вычитая его из предыдущего ряда, получим:

$$\frac{3-2}{1\cdot 2^2\cdot 3}+\frac{4-3}{2\cdot 3^2\cdot 4}+\frac{5-4}{3\cdot 4^2\cdot 5}+\frac{6-5}{4\cdot 5^2\cdot 6}+\cdots=\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)-\frac{1}{4}$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4^2\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5^2\cdot 6}+\cdots=\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}.$$

I.3. Эйлер нашел и другие суммы:

а) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

б) $\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots+\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

([4], с. 103), что и нам позволяет продолжить процесс комбинирования и поиска новых рядов.

Так, перенеся в правую часть первое слагаемое ряда Эйлера в I.3.а) и вычтя его из ряда I.2., получаем:

$$\frac{2^2-3}{1\cdot 2^4\cdot 3}+\frac{3^2-2\cdot 4}{2\cdot 3^4\cdot 4}+\frac{4^2-3\cdot 5}{3\cdot 4^4\cdot 5}+\frac{5^2-4\cdot 6}{4\cdot 5^4\cdot 6}+\cdots=\left(\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}\right)-\left(\frac{\pi^4}{90}-1\right).$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 2^4\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^4\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4^4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5^4\cdot 6}+\cdots=\frac{11}{4}-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}.$$

I.4. Аналогичную процедуру проделаем с другим рядом Эйлера I.3.б).

Получаем:

$$\frac{2^2-1\cdot 3}{1\cdot 2^6\cdot 3}+\frac{3^2-2\cdot 4}{2\cdot 3^6\cdot 4}+\frac{4^2-3\cdot 5}{3\cdot 4^6\cdot 5}+\frac{5^2-4\cdot 6}{4\cdot 5^6\cdot 6}+\cdots=\left(\frac{11}{4}-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}\right)-\left(\frac{\pi^6}{945}-1\right)$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 2^6\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^6\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4^6\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5^6\cdot 6}+\cdots=\frac{15}{4}-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^6}{945}$$

II.1. Рассмотрим ряд, состоящий из суммы обратных значений квадратов нечетных чисел.

Для получения его суммы представим ряд Эйлера в виде суммы двух рядов с нечетными и четными знаменателями.

$$\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right)=$$

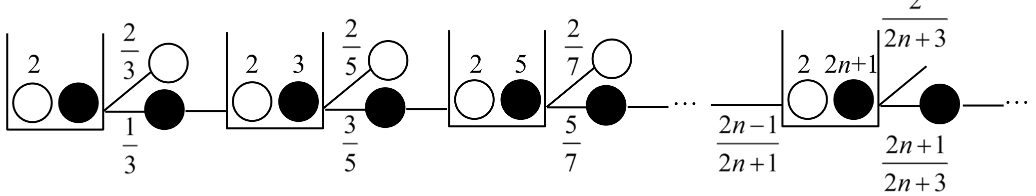
$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Тогда $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}$.

Сравним его с тремя вероятностными рядами, полученными из вероятностного продолжения схемы Бернулли.

Рассмотрим урну с двумя белыми и одним черным шарами. Проводим извлечение шара до появления белого, а в случае извлечения черного шара возвращаем его и уже добавляем два черных шара.

Получаем следующее вероятностное дерево:



$$\mathrm{P}(\varnothing) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 0\,.$$

Тогда $1 = \mathrm{P}(\mathrm{O}) = \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{7}+\ldots+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-1}\cdot\dfrac{2n-1}{2n+1}\cdot\dfrac{2}{2n+3}+\ldots$

и $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}+\ldots=\dfrac{1}{2}$.

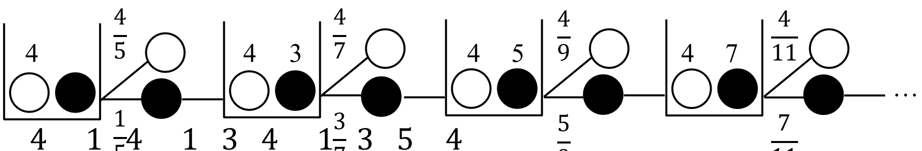
Вычитаем почленно из ряда, состоящего из сумм обратных значений квадратов нечетных чисел $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{8}$ полученный ряд из продолжения схемы Бернулли $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 11}+\ldots=\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$\frac{3-1}{1^2\cdot 3}+\frac{5-3}{3^2\cdot 5}+\frac{7-5}{5^2\cdot 7}+\frac{9-7}{7^2\cdot 9}+\frac{11-9}{9^2\cdot 11}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$$

или

$$\frac{1}{1^2\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 7}+\frac{1}{7^2\cdot 9}+\frac{1}{9^2\cdot 11}+\ldots=\frac{\pi^2-4}{16}$$

II.2. Рассмотрим теперь урну с четырьмя белыми и одним черным шарами. Проводим повторные зависимые извлечения шара до появления белого, а в случае извлечения черного шара возвращаем его в урну и добавляем в неё еще пару черных шаров.



$$\mathrm{P(O)} = \frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}+\cdots$$

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{12}.$$

Сравнивая полученный ряд из продолжения схемы Бернулли с продолжением нечетных слагаемых ряда Эйлера, получаем новый ряд:

$$\frac{3-1}{1\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{5-3}{3\cdot 5^2\cdot 7}+\frac{7-5}{5\cdot 7^2\cdot 9}+\frac{9-7}{7\cdot 9^2\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{12}-\frac{\pi^2-4}{16}+\frac{1}{3}$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7^2\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9^2\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{32}$$

II.3. Рассмотрим сумму ряда Эйлера обратных значений четвертых степеней нечетных натуральных чисел

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi^4}{90}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{16}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{96}$$

Сравнивая его с полученным рядом, получаем:

$$\frac{3^2-1\cdot 5}{1\cdot 3^4\cdot 5}+\frac{5^2-3\cdot 7}{3\cdot 5^4\cdot 7}+\frac{7^2-5\cdot 9}{5\cdot 7^4\cdot 9}+\frac{9^2-7\cdot 11}{7\cdot 9^4\cdot 11}+\cdots=\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{32}\right)-\left(\frac{\pi^4}{96}-1\right)$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 3^4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7^4\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9^4\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{128}-\frac{\pi^4}{384}.$$

II.4. Рассмотрим сумму ряда Эйлера обратных значений шестых степеней нечетных натуральных чисел.

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}-\frac{1}{2^6}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi^6}{945}\left(1-\frac{1}{64}\right)=1-\frac{\pi^6}{960}$$

Учитывая предыдущий результат, получаем:

$$\frac{3^2-1\cdot 5}{1\cdot 3^6\cdot 5}+\frac{5^2-3\cdot 7}{3\cdot 5^6\cdot 7}+\frac{7^2-5\cdot 9}{5\cdot 7^6\cdot 9}+\frac{9^2-7\cdot 11}{7\cdot 9^6\cdot 11}+\cdots=\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{128}-\frac{\pi^4}{384}\right)-\left(\frac{\pi^6}{960}-1\right)$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 3^6\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^6\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7^6\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9^6\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{512}-\frac{\pi^4}{1536}-\frac{\pi^6}{3840}.$$

Таким образом, используя ряды Эйлера и ряды из продолжений схемы Бернулли, получили способы построения новых рядов, сходящихся к удивительным иррациональным числам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней: пер. с англ. – М.: Мир, 2006. – 256 с.
2. Афанасьев В.В. Продолжения схемы Бернулли в треугольнике Лейбница // Сборник трудов XV Международной конференции Колмогоровские Чтения, Арзамас, 2019. – С. 169-173.
3. Афанасьев В.В. Комбинирование рядов Эйлера и продолжений схемы Бернулли // Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова: материалы XVI Колмогоровских чтений: 3-й Международной научно-методической конференции г. Кострома, 7–9 декабря 2021.
4. Грэхем Р. Конкретная математика. Основания информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник; пер. с англ. – 3-е изд. – М.: Мир; БИНОМ Лаб. знаний, 2009. – 703 с.
5. Дербишир Дж. Простая одержимость: Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. – 463 с.
6. Стюарт И. Величайшие математические задачи / Иэн Стюарт: пер. с англ. – 3-е изд. – М.: Альпина НОН-фикшн, 2019. – 586 с.

ВКЛАД А.Н. КОЛМОГОРОВА В РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Булинский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: bulinski@yandex.ru

Аннотация. Кратко описывается творческий путь академика А.Н. Колмогорова и рассматриваются его основные работы в области теории вероятностей, математической статистики, случайных процессов, а также разнообразных приложений стохастических моделей. Кроме того, обсуждается деятельность научной школы, созданной великим ученым. Рассказывается и о впечатлениях автора, являвшегося аспирантом А.Н. Колмогорова, от общения с Учителем.

Ключевые слова. Аксиоматика теории вероятностей, предельные теоремы, приложения.

В апреле этого года отмечалось 120-летие со дня рождения великого ученого Андрея Николаевича Колмогорова (1903 – 1987), внесшего фундаментальный вклад в математику, физику, биологию и другие дисциплины, включая педагогику. Он был связан с Московским университетом 67 из 84 лет своей жизни, прошел путь от студента до профессора, работал деканом (1954 – 1958 гг.) механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, последовательно заведовал тремя кафедрами. В 1935 году основал и возглавил кафедру теории вероятностей, в 1976 г. – кафедру математической статистики (ныне – кафедра математической статистики и случайных процессов), с 1980 г. до кончины заведовал кафедрой математической логики. В 35 лет А.Н. Колмогоров был избран академиком АН СССР и несколько лет руководил Отделением физико-математических наук АН СССР. Андрей Николаевич был удостоен Сталинской и Ленинской премий, звания Героя Социалистического Труда, награжден семью орденами Ленина (высший орден СССР). Кроме того, А.Н. Колмогоров – лауреат премии имени П.Л. Чебышева, премии Н.И. Лобачевского и ряда престижных международных премий (в том числе премии Фонда Бальцана, эту премию в 1962 году одновременно с А.Н. Колмогоровым получил Папа Римский Иоанн XXIII). Ведущие академии мира избрали А.Н. Колмогорова своим почетным членом.

Будучи 19-летним студентом физико-математического факультета Московского университета, А.Н. Колмогоров построил пример почти всюду расходящегося ряда Фурье. Эта статья сразу принесла ему мировую славу. Затем последовали выдающиеся работы практически во всех областях математики, а также в физике, биологии, геологии. Андрей Николаевич не сразу выбрал математику в качестве основного направления своей деятельности. В университете он активно участвовал в семинаре профессора С.В. Бахрушина, занимаясь исследованиями, относящимися к Новгородскому землевладению 15 века, и написал на эту тему научную статью, которая была найдена и опубликована в 1994 г. с предисловием академика В.Л. Янина.

Андрей Николаевич является единственным ученым, прославившимся решением двух из общего списка 23 проблем, составленного Д. Гильбертом и представленного им на Втором конгрессе математиков (Париж, 1900 г.). В 6-й проблеме предлагалось «аксиоматизировать те физические науки, в которых важную роль играет математика». К 20-му веку теорию вероятностей стали относить к физике. Для этого были некоторые основания, которые мы рассмотрим далее. В отличие от геометрии, возникшей более 4000 лет тому назад, теория вероятностей является молодой наукой. Некоторые математические задачи, связанные с азартными играми, стали исследовать лишь в 17-ом веке Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс, Я. Бернулли. Принципиальную роль сыграла книга Я. Бернулли “Ars Conjectandi” («Искусство предположений»), изданная в 1713 году уже после смерти ученого. Именно в этом труде появился «закон больших чисел» (в слабой форме), заложивший подход к обоснованию наблюдаемой устойчивости частот определенных событий в опытах, производимых в одинаковых условиях так, что их результаты не влияют друг на друга. Начиная с 18-го века, усилия многих выдающихся ученых были направлены на то, чтобы изучить флуктуации сумм $S_n=X_1 + . . . + X_n$, $n \in N$, где X_1, X_2, ... являются независимыми величинами. Не останавливаясь на исследованиях, которые проводились вплоть до начала 20-го века, отметим вклад следующих известных ученых: А. де Муавр, К. Гаусс, П.С. Лаплас, Д. Пуассон, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Л. Башелье, Э. Борель, М. Фреше, П. Леви, Я. Линдеберг, Н. Винер, С.Н. Бернштейн.

Например, П.-С. Лаплас доказал, что для последовательности независимых, одинаково распределенных, ограниченных и невырожденных величин $X_1, X_2, . . .$ при любых $- \infty < u < v < \infty$ имеет место предельное соотношение:

$$P\left(u \leq \frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) \to P(u \leq Z \leq v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ \ n\to\infty,$$

где $a=EX_1$, $\sigma^2 = var\,X_1$, $Z\sim N(0,1)$. Результаты о сходимости распределений к нормальному закону были в 1920 году по предложению Д. Пойа объединены названием «центральная предельная теорема». Параллельно развитию теоретических результатов шло изучение моделей, возникавших в связи с важными запросами практики.

Первая математическая модель броуновского движения была введена Л. Башелье в 1900 г. при изучении колебаний на бирже курсов ценных бумаг. В 1905 году появилась статья А. Эйнштейна и в 1906 году – статья М. Смолуховского, в которых была заложена теория таких процессов диффузии, связанных с молекулярным строением вещества. В 19-ом веке интенсивно развивалась статистическая физика, использовавшая стохастические модели. Достаточно упомянуть исследования Р. Клаузиуса, Л. Больцмана, Дж. Максвелла, Я. Ван-дер-Ваальса, Дж. Гиббса, Л. Онзагера. В частности, Дж. Гиббс ввел каноническое, микроканоническое и большое каноническое распределения. В 1902 году был опубликован фундаментальный труд Дж. Гиббса «Основы статистической механики».

В 1906 году А.А. Марков определил новый класс случайных величин, обладающих цепной зависимостью. Интересный пример марковской цепи рассмотрели в 1907 году физики Т. Эренфест и П. Эренфест для объяснения второго закона термодинамики.

Таким образом, если ранее вероятностные модели были связаны с демографическими исследованиями, а также обработкой данных астрономических наблюдений, то к началу 20-го века они стали играть важную роль в физике и других областях. Заметим, что математические модели броуновского движения были предложены Н. Винером, П. Ланжевеном, П. Леви и другими учеными.

Назрела необходимость разобраться с общими свойствами моделей, использующих понятие случайности. Тогда даже не было строгого определения случайной величины. Как же ученые занимались исследованиями до 20-го века? В большинстве случаев изучались простые дискретные модели (или изучались величины, имеющие плотность распределения).

Сложные стохастические модели потребовали понимания, как следует рассматривать одновременное поведение бесконечного числа случайных величин.

Первые попытки аксиоматизации теории вероятностей в начале 20-го века предприняли Э. Борель, а также С.Н. Бернштейн. В 1929 году выдающийся математик и философ Б. Рассел сказал: “Probability is the most important concept in modern science, especially as nobody has the slightest notion what it means”.

Именно Андрей Николаевич Колмогоров в своей монографии «Основные понятия теории вероятностей», впервые опубликованной в 1933 году, заложил прочный фундамент этой науки. После этого он на многие годы стал её признанным лидером. Вклад А.Н. Колмогорова в теорию вероятностей можно структурировать следующим образом.

1. Создание фундамента теории вероятностей и решение ряда её классических и новых проблем.

2. Развитие математической статистики.

3. Важные исследования в области случайных процессов.

4. Изучение стохастических моделей в физике, биологии, геологии и других науках.

5. Разработка нового подхода к определению случайности.

Аксиоматика А.Н. Колмогорова была основана на понятии вероятностного пространства (Ω, $\mathscr{F}$, P), описывающего разнообразные случайные эксперименты. До его книги отсутствовал даже ответ на вопрос, удастся ли построить бесконечное семейство независимых случайных величин с заданными распределениями. Тем более, было неясно, как задать последовательность величин с цепной зависимостью, введенной А.А. Марковым. Фактически ранее математики изучали свойства объектов, существование которых не было строго доказано. Для создания аксиоматики теории вероятностей требовалось глубокое понимание теории меры и интеграла Лебега, интенсивно развивавшихся в начале 20-го века. Андрей Николаевич был необычайно эрудированным в области математики (он говорил, что до войны читал все без исключения советские и зарубежные математические журналы). Даже в 70-е годы 20-го века на одном из заседаний Московского математического общества академик П.С. Александров сказал, что Андрей Николаевич единственный, кто понимает всю современную математику.

Подчеркнем, что при построении фундамента теории вероятностей дело не сводилось только к искусному применению готового математического аппарата. В своей монографии А.Н. Колмогоров ввел важнейшее понятие условного математического ожидания E(X|$\mathscr{E}$) случайной величины X относительно сигма-алгебры $\mathscr{E}$, нашедшее широкое применение, в частности, в новом направлении теории вероятностей, получившем название случайных процессов.

Андрею Николаевичу принадлежит целый ряд классических результатов теории вероятностей. Он получил необходимые и достаточные условия сходимости рядов из независимых случайных величин, установил критерий справедливости усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных величин X_1, X_2, . . . , а именно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to a \in \mathrm{R} \text{ почти наверное при } n\to \infty \text{ тогда и только тогда, когда } EX_1 = a.$$

Андрей Николаевич дал полное описание распределений безгранично делимых величин, имеющих конечную дисперсию. Величина X безгранично делима, если для любого n найдутся независимые одинаково распределенные величины $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ такие, что распределение X совпадает с распределением $X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$. Он доказал, что X, у которой var $X<\infty$ (т.е. конечна дисперсия), безгранично делима тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция представима в виде

$$f(t) = \exp\{i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} dG(x)\}, \quad t \in R,$$

здесь константа $\gamma \in R$, G – неубывающая функция ограниченной вариации. Позднее эта теорема привела к знаменитой формуле Леви – Хинчина.

А.Н. Колмогоровым найдены неулучшаемые условия выполнения закона повторного логарифма для последовательности независимых ограниченных случайных величин. Широко известен критерий Колмогорова – Петровского – Эрдёша – Феллера, описывающий верхние и нижние функции для броуновского движения и для сумм независимых случайных величин. Упомянем также знаменитое неравенство Колмогорова.

Перед войной в 1941 г. А.Н. Колмогоров и А.Я. Хинчин были удостоены Сталинской премии за исследования в области предельных теорем теории вероятностей. Широкую известность получила монография Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогорова «Предельные распределения сумм независимых случайных величин» (1949), отмеченная премией имени П.Л. Чебышева. В частности, получено обобщение центральной предельной теоремы (ранее не было описания того, какими могут быть предельные законы распределения для сумм независимых случайных величин в схеме серий, когда слагаемые в должном смысле малы).

Андрей Николаевич обогатил результатами и математическую статистику, которая решает задачи, в определенном смысле, обратные задачам теории вероятностей. Требуется по данным наблюдений выяснить, какая вероятностная модель адекватно описывает изучаемое явление. Согласно классическому критерию согласия Колмогорова, если F_n – эмпирическая функция распределения, построенная по значениям n независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F \in C^1$, то для любого $t > 0$ при $n \to \infty$ верно соотношение

$$P\left(\sqrt{n}\ sup_{x\in \mathrm{R}} |F_n(x) - F(x)| \le t\right) \to \mathrm{K(t)} := \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}.$$

В 1940 г. в Докладах АН СССР была напечатана статья А.Н. Колмогорова «Об одном новом подтверждении законов Менделя», в которой он статистическими методами проанализировал выводы сотрудников академика АН СССР Т.Д. Лысенко (президента ВАСХНИЛ), полученных ими при анализе опытов по скрещиванию гороха для опровержения теории Менделя. Т.Д. Лысенко остался несогласен с математическими выводами А.Н. Колмогорова и, более того, заявил, что тот не понимает биологии. На это

Андрей Николаевич ответил, что готов сдать экзамен по биологии, если Т.Д. Лысенко согласится сдать экзамен по математике. Т.Д. Лысенко отказался.

В годы Великой Отечественной войны А.Н. Колмогоров выполнил важные прикладные работы, относящиеся к теории рассеивания снарядов при стрельбе, разработал основы статистического контроля выпускаемой продукции.

В 1931 году была опубликована статья А.Н. Колмогорова «Аналитические методы в теории вероятностей», посвященная общей теории марковских процессов. В ней были выявлены глубокие связи теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными). В 1937 году А.Н. Колмогоров, совместно с И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым публикует работу «Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме». В 40-х годах 20-го века (и даже ранее) Андрей Николаевич инициировал новое направление в теории случайных процессов, получившее название функциональных предельных теорем. Дальнейшие результаты в этой области связаны с деятельностью его ученика Ю.В. Прохорова (впоследствии академика АН СССР). В совместной статье А.Н. Колмогорова и его ученика Н.А. Дмитриева в 1947 году было введено понятие ветвящегося случайного процесса. Вскоре Н.А. Дмитриев принял участие в работах по созданию атомного оружия, стал лауреатом Сталинской и Государственной премий. Считается, что за теорию неполного атомного взрыва он был бы достоин Нобелевской премии.

Выдающийся вклад А.Н. Колмогоров внес в изучение турбулентности. Рассказывают, что в Москве профессор Ж. Адамар, отвечая на вопрос, какая проблема не будет решена с помощью математики, взял графин с водой, встряхнул его и сказал, что не удастся описать такое движение воды. Однако Андрей Николаевич сумел продвинуться и в этом направлении! Ему принадлежат глубокие исследования в области локально-изотропной турбулентности. При этом он ввел важное понятие «масштаба турбулентности». Оказалось, что в определенных масштабах (и при некоторых предположениях) среднее квадратичное разности скоростей потока v(x) и v(y) в точках x и y, т.е. структурная функция второго порядка, приобретает вид $D_v(x,y) = C(\varepsilon r)^{2/3}$, где $D_v(x,y) := \langle (v(x)-v(y))^2 \rangle$, угловые скобки традиционно обозначают усреднение, r – расстояние между точками x и y, ε – некоторый параметр, характеризующий физическую систему, C – константа Колмогорова. Это – закон двух третей Колмогорова. Рассказывают, что Нобелевский лауреат И.Р. Пригожин номинировал А.Н. Колмогорова на Нобелевскую премию за работы в области турбулентности. Исследования в этом направлении получили дальнейшее развитие в трудах учеников Андрея Николаевича М.Д. Миллионщикова, ставшего академиком АН СССР, вице-президентом АН СССР, А.М. Обухова (впоследствии академика АН СССР), А.С. Монина (впоследствии академика РАН), А.М. Яглома (ставшего профессором), Г.И. Баренблатта (ставшего профессором).

Отметим, что ученик А.Н. Колмогорова академик РАН Я.Г. Синай в 2014 году был награжден премией Абеля, которая является полным аналогом Нобелевской премии для математиков (за математические исследования, как известно, по решению А. Нобеля учрежденные им премии не присуждаются).

В 60-е годы 20-го века А.Н. Колмогоров предложил алгоритмический подход к определению случайности. Очень привлекательной является идея А.Н. Колмогорова считать случайным тот объект, который трудно описать. На этом пути получены важные результаты. Однако, к сожалению, вообще говоря, не существует единственной «минимальной» программы описания. Чем важен такой подход? Если взять последовательность, состоящую из n нулей, полученных в схеме Бернулли, то она (в рамках классической теории вероятностей) имеет вероятность 2^{-n}, как и всякая другая последовательность такой длины. Трудно согласиться, что (при большом n) исход из одних нулей отвечает представлению о случайности. Заметим, что такую последовательность легко описать, сказав «все нули». И это говорит в пользу того, что она в новом смысле неслучайна. Мы не приводим точного определения понятия сложности. Однако подчеркнем, что возможности классической аксиоматики Колмогорова далеко не исчерпаны.

А.Н. Колмогоров создал в нашей стране уникальную научную школу, которую можно назвать школой школ, поскольку 13 его учеников стали академиками АН СССР и РАН, 2 – членами-корреспондентами АН СССР. Они сами сформировали выдающиеся научные школы. Среди его учеников есть известные зарубежные ученые, например, М. Арато, П. Ягерс, П. Мартин-Лёф. Перечислим учеников Андрея Николаевича в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, избранных в АН СССР, РАН и академии республик Советского Союза: Л.Н. Большев, А.А. Боровков, В.С. Михалевич, Ю.В. Прохоров, Б.А. Севастьянов, Я.Г. Синай, А.Н. Ширяев, Б.В. Гнеденко, С.Х. Сираждинов, В.А. Статулявичус.

В чем секрет педагогической деятельности А.Н. Колмогорова, сумевшего воспитать многих известных математиков? По-видимому, главную роль играл личный пример. Ученики видели человека, увлеченного наукой, получающего принципиально важные результаты, им хотелось приобщиться к этой деятельности. Андрей Николаевич давал советы, что следует изучить, обсуждал с учениками прочитанный материал. Говорил, что на его взгляд интересно. Ученикам А.Н. Колмогорова всегда хотелось продвинуться в научной работе и рассказать об этом своему Учителю.

Общение с Андреем Николаевичем производило неизгладимое впечатление. Он не ограничивался только беседами о науке. С учениками он катался на лыжах, совершал длительные прогулки по Подмосковью, говорил о литературе, о событиях культурной жизни. Большой честью было приглашение приехать к нему на дачу в Комаровку. Обычно там были не только беседы о математике, но гостей также угощали вкусным обедом и предлагали вместе послушать классическую музыку.

Андрей Николаевич Колмогоров прожил яркую жизнь, целью которой (по его собственному выражению) был поиск истины. Благодаря усилиям ректора МГУ академика РАН В.А. Садовничего на университетской территории появилась улица Колмогорова, у подъезда корпуса «Л» Главного здания МГУ установлена бронзовая мемориальная доска. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Гнеденко и С.Л. Соболев в своей статье 1983 года подчеркнули, что

«Андрей Николаевич Колмогоров занимает уникальное место в современной математике, да и в мировой науке в целом. По широте и разнообразию своих научных занятий он напоминает классиков естествознания прошлых веков».

ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЕДИНИЦ ДЛИНЫ

С.Э. Погожев

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: pogozev69@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые, на наш взгляд, наиболее интересные факты из истории возникновения и использования единиц измерения длины у народов разных стран. Представлены примеры использования нестандартных единиц длины в решении практических задач.

Ключевые слова: история физики, метрическая система мер, международный эталон метра, задачный подход в изучении физики.

При изучении различных явлений и процессов нам постоянно приходится иметь дело с разными величинами. Большинство величин имеют единицы измерения, у каждой из них своя история возникновения и дальнейшего развития. Особый интерес представляет история возникновения единиц длины. Еще в III в. до н.э. индусы использовали такие единицы длины, каждая из которых в 7 раз меньше предыдущей: сустав пальца, зерно ячменя, зерно горчицы, зерно мака, пылинка-бык, пылинка-баран, пылинка-заяц, большая пылинка, средняя пылинка, малая пылинка, атом [1]. Например, в средние века в Европе за единицу длины была принята длина «цепочки» из 16 человек, которые стояли так, что концы пальцев предыдущего касались пятки следующего. 1/16 длины такой «цепочки» составляла фут (1 фут – 30,48 см). Среди индейцев, например, единицей измерения считалась территория, которую человек мог обойти за один световой день.

История возникновения и развития метрической (десятичной) системы мер имеет свои особенности. В основе данной системы, как совокупности единиц физических величин, лежит единица измерения длины метр. Важная особенность метрической системы мер – образование кратных и дольных единиц. Для образования наименований производных единиц были предложены приставки: кило, гекто, дека, деци, санти, милли и др. Метрическая система была разработана во Франции. По предложению комиссии за единицу длины был принят метр – десятимиллионная часть 1/4 длины парижского географического меридиана. 7 апреля 1795 г. Был принят Декрет о введении метрической системы мер. Эталон метра был изготовлен в 1799 г. в виде платиновой линейки, по которой сделали 34 эталона из платино-иридиевого сплава. По решению 1 Генеральной конференции по мерам и весам (1889 г.) один из них и еще две контрольные копии хранятся в Международном бюро мер и весов в Севре (Франция). Две копии были переданы России, как стране участнице 1 Генеральной конференции по мерам и весам. В 1983 г. на заседании 17 Генеральной конференции по мерам и весам было принято определение метра как расстояния, которое проходит в вакууме плоская электромагнитная волна за 1/299792458 долю секунды.

Точность нового эталона метра (относительная погрешность) составляет $\sim(10^{-9} - 10^{-11})$ [2].

До возникновения метрической системы и в настоящее время часто можно слышать такие единицы длины, например, используемые в Европе и ряде других стран, 1 морская миля международная – 1852 м; 1 миля законная – 1609,344 м; 1 фарлонг – 201,17 м; 1 кабельтов – 85,2 м; 1 ярд – 0,9144 м; 1 фут – 30,48 см; 1 дюйм – 25,4 мм. Получается, что 1 миля законная равна 1760 ярдам, 1 ярд равен 3 футам, а 1 фут составляет 12 дюймов. В России применялись такие единицы длины, как верста, равная 500 саженям. Одна сажень это три аршина, один аршин – 16 вершков, а вершок равен 71,12 см. В переводе в метрическую систему получаем следующее: 1 верста – 1,0668 км; 1 сажень – 2,1336 м; 1 аршин – 71,12 см. Часто использовались и такие единицы длины, как 1 линия – 2,54 мм; 1 точка – 0,254 мм; 1 пядь – расстояние между большим и вытянутым указательным пальцами руки; 1 локоть равен длине руки от конца среднего пальца до локтя.

Приведем несколько примеров использования нестандартных единиц длины. Моряки часто используют для измерения больших расстояний милю. Названия миля происходит от латинского mille, что означает тысяча, это тысяча двойных шагов (шаг правой и шаг левой ногой). В России часто используемой мерой длины был локоть (название очевидно), которым измеряли ткани, поскольку ткань удобно наматывать на руку. Например, единица длины «пядь» происходит от слова «пять» и означает кисть руки. Купцы часто использовали единицу длины аршин (ткани привозили из азиатских стран), название которого происходит от персидского «арш», что означает «локоть». Кстати говоря, аршин был официально узаконен в России в 17 в. как мера длины. В это же время было принято считать сажень, равной трем аршинам. «Сажень» означает досягаемое рукой расстояние. Использовали маховую сажень – расстояние между кончиками пальцев раскинутых рук и косую сажень – расстояние от ступни левой ноги до кончика пальцев вытянутой правой руки.

Рассмотрим несколько примеров использования нестандартных единиц длины в решении практических задач [1].

Задача 1. При создании М.В. Ломоносовым мозаичной картины «Полтавская битва» использовались цветные стекла. Картина получилась внушительных размеров – в длину 11 аршин, а в высоту 12. Какие размеры имеет картина в метрах?

Задача 2. Меры длины, описанные в «Уставе ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки» (применялся в русской армии в период с 1777 г. по 1781г.): «Верста содержит в себе 500 двойных шагов, а шаг – по полсажени, или 5 ступней». Переведите указанные меры длины в метры.

Задача 3. Гелиос на Родосе (Колосс Родосский) – одно из семи чудес света. Согласно летописям, его высота составляет 70 локтей, а для изготовления было использовано 300 талантов железа и 500 талантов бронзы. Оцените высоту статуи в метрах, а расход металла – в килограммах. Принять равным 1 локоть – 32 см, 1 талант – 25 кг.

Задача 4. Используя единицы длины индусов (представлены в начале работы) и, считая сустав пальца, равным 3 см., оцените размер атома. Полученный результат сравните со средним размером атома, приведенном в современных справочниках.

Решение. Пусть l_1 – длина сустава пальца, а последующие единицы длины, соответственно, l_2, l_3,…, l_n. Тогда получаем, что

$l_2 = l_1/7$;

$l_3 = l_2/7 = l_1/7^2$;

$l_4 = l_3/7 = l_2/7^2 = l_1/7^3$;

……………………………

$l_n = l_1/7^{n-1}$.

В задаче $n = 11$, тогда $l_{11} = l_1/7^{10} \approx 4{,}3 \cdot 7^{-10}$ см. В физических справочниках средний размер атома порядка 10^{-10} м.

Таким образом, рассматривая исторические факты, связанные с единицами измерения и, используя их в решении практических задач, мы знакомимся с историей науки, физики или математики. Тем самым устанавливаем взаимосвязь и взаимообусловленность науки и образования [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Позойский С.В., Галузо И.В. История физики в вопросах и задачах: пособие для учителей учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования. Минск: Высшая школа, 2005. 270 с.
2. Физическая энциклопедия. Т.3 / Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. кол. Д.М. Алексеев, А.М. Балдин, А.М. Бонч-Бруевич и др. Москва: Большая Российская энциклопедия, 1992. 672 с.
3. Погожев С.Э. Пространство, движение, время – загадки и парадоксы в задачах с историческим содержанием // Современная наука и физико-математическое образование: фундаментальные исследования, инновации и перспективы развития: материалы Всероссийской конференции. Москва: МГОУ, 2021. С. 99-101.

ОЧЕРК ИСТОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В НИЖНЕМ НОВГОРОДЕ

Г.М. Полотовский

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия

e-mail: polotovsky@gmail.com

Аннотация. Описывается история развития топологического образования в Нижнем Новгороде – от первой лекции по топологии для школьников, прочитанной в 1939 г., до настоящего времени.

Ключевые слова: топологическое образование, Нижний Новгород, А.А. Андронов, Д.А. Гудков.

Описывается история развития топологического образования в Нижнем Новгороде – от первой лекции по топологии для школьников, которую прочитал в 1939 г. профессор А.Г. Майер, до обязательных курсов топологии на математических факультетах в недавнее время.

Необходимость знания топологии для дальнейших исследований первыми в Нижнем Новгороде поняли представители школы академика А.А. Андронова по теории нелинейных колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений. Важным моментом в развитии интереса к топологии была Горьковская топологическая школа 1964 г., в которой приняли участие многие выдающиеся математики (Д.В. Аносов, М.Л. Громов, С.П. Новиков, Я.Г. Синай и др., см. рис. 1). Научный и организационный уровень этой школы получил высокую оценку в [1]. Однако «мотором» внедрения топологии в учебный процесс стал специалист по вещественной алгебраической геометрии профессор Д.А. Гудков. Эта его деятельность проходила в тесном сотрудничестве с ленинградским топологом профессором В.А. Рохлиным и его учениками О.Я. Виро и В.М. Харламовым.

Рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Новиков С.П., Постников М.М. Горьковский математический семинар по гомотопической топологии // УМН. 1963. **19**:6(120). – С. 237-238.

П.Л. ЛАВРОВ. ССЫЛКА В ВОЛОГОДСКОЙ ГУБЕРНИИ. ПЕРВЫЕ В РОССИИ ЛЕКЦИИ ПО ИСТОРИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК.

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский гос. архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: galina.sinkevivch@gmail.com

Аннотация. Первый в России цикл лекций по истории физико-математических наук был прочитан военным профессором математики полковником П.Л. Лавровым в 1864-1866 гг. в Артиллерийской академии. После покушения на Александра II Лавров был арестован и сослан в Вологодскую губернию, откуда в 1870 г. бежал за границу, где стал заниматься публицистикой. В своих «Лекциях» Лавров сформулировал основы методологии истории науки. К 200-летию со дня рождения.

Ключевые слова: история математики, Античность, Греция, Александрия, лекции, методология, библиография.

П.Л. Лавров – военный профессор математики в Артиллерийской академии, философ и идеолог народничества. Входил в организацию «Земля и Воля». Был арестован и сослан в Тотьму, затем в Кадников, бежал за границу, жил в Париже, занимаясь социально-политической и философской публицистикой. Основным направлением его философских трудов была история человеческой мысли.

Лавров родился в семье отставного офицера-артиллериста, в 14-летнем возрасте поступил в Михайловское артиллерийское училище, где был лучшим и любимым учеником М.В. Остроградского. По его рекомендации был оставлен в офицерском классе, затем преподавателем; после образования Артиллерийской академии стал военным профессором математики, читал переданные Остроградским курсы дифференциального и интегрального исчисления, а также курс теоретической механики.

Начиная с 1857 г. Лавров начинает широко печататься как публицист. Немало статей и стихов, связанных с идеологией народничества, написано им под псевдонимами, в том числе и в эмигрантском издании А.И. Герцена «Голоса из России». Лавров был близок к кружку Н.Г. Чернышевского, входил в первую организацию «Земли и воли».

4 апреля 1866 г. Дмитрий Каракозов стрелял в Александра II. Начались обыски и аресты всех, что был связан, хотя бы и опосредовано, с революционерами. Поводом к аресту Лаврова (25.04.1866) послужило его участие в «Издательской артели». Суд не нашел его виновным в причастности к покушению, лишь в «преступном образе мыслей». За это в 1867 г. Лавров был уволен в отставку без содержания и сослан в Вологодскую губернию. Вологодский губернатор определил Лаврову первое место жительства в небольшом городке Тотьма. Пробыв два года в Тотьме, два месяца в Вологде, Лавров был переведен в маленький город Кадников. Среди других ссыльных Тотьмы Лавров познакомился с Николаем Александровичем Гернетом (1844–1910), сосланным «за знакомство с некоторыми из близких знакомых государственного преступника Каракозова». Гернет принимал участие в поисках способа побега Лаврова из ссылки.

Известия о желании Лаврова бежать из ссылки достигли Германа Лопатина, близкого к революционным кругам выпускника физико-математического факультета Петербургского университета (1866). Приехав в феврале в Кадников в форме отставного штабс-капитана и с чужим паспортом, Лопатин познакомился с Лавровым, помог ему загримироваться и увез его на своей тройке в Петербург, где уступил ему заготовленный для себя заграничный паспорт. Побег сопровождался множеством случайностей, забавных, счастливых и драматических, но все закончилось благополучно. В марте 1870 г. Лавров был уже в Париже и продолжал научные занятия. 21 апреля 1870 г. Лавров становится действительным членом Парижского антропологического общества. Нам удалось найти подтверждение возвращения П. Лаврова в Петербург 1 мая 1870 г. Он присутствовал на крестинах дочери своего старшего сына, о чем в метрической книге Сергиевского Всей Артиллерии собора, прихожанами которого были Лавровы, имеется запись[1]. Вероятно, другой целью его приезда были книги, без которых он не мог работать.

Лавров жил по большей части в Париже. Был участником Парижской коммуны. Его литературная и издательская деятельность вынуждала его периодами жить в Цюрихе и Лондоне. Росла его популярность как публициста. Организация «Народная воля» сделала его своим идеологом; возникло движение «лавровцев» (лавристов). Он сблизился с К. Марксом и его семьей; с Ф. Энгельсом, многими русскими эмигрантами-революционерами. В Париже Лавров восстановил свое знакомство с И.С. Тургеневым. Лавров много писал под псевдонимами в русские газеты для поддержания организации Интернационала. В Цюрихе Лавров начал издавать журнал «Вперед», где в 1875 г. было опубликовано его стихотворение Лаврова «Отречемся от старого мира!», названное впоследствии «Рабочей Марсельезой». В 1883–1886 гг. был соредактором «Вестника „Народной воли”». С января 1874 в Петербурге, в журнале «Знание» стала публиковаться его работа «Опыт истории мысли».

Лавров был обособлен от всех революционных движений: близкий знакомый Маркса, но не стал марксистом; расходился с Бакуниным, с «лавровцами», с обществом «Земля и воля» не только по организационным вопросам, но и по принципиальным. Анализу его идеологического пути посвящена богатая Список литературы.

В конце 80-х гг. в Женеве отдельными выпусками стал выходить «Опыт истории мысли нового времени» Лаврова, в 1898 г. его же «Очерк эволюции человеческой мысли».

В середине 90-х гг. Лавров стал заметно дряхлеть: ослабла память, совсем плохим стало зрение, появилась быстрая утомляемость, пропадало зрение. Оставляя детей, из России наездами бывала его дочь Мария, заботилась об отце. 25 января (6 февраля) 1900 г. Петр Лаврович умер. Похоронен на кладбище Монпарнас.

В период 1864-1866 в Петербурге Лавров прочитал для офицеров Михайловской артиллерийской академии 12 лекций по истории физико-математических наук, опубликованных в 12 статьях на 452 страницах в «Морском сборнике» 1865-1866 [1]. Лавров планировал прочитать 20 лекций, покрывающих период до конца XVII в., но в связи с арестом и ссылкой успел прочитать только историю математики Древнего мира, Греции и Александрии. Также он прочитал три лекции «Влияние развития точных наук на успехи военного дела и в особенности артиллерии» [2].

Цикл лекций Лаврова 1864-1866 «История физико-математических наук» был первым в России. Нам известно, что в Европе такой цикл читали Г.Г.Ф. Нессельман (Кёнигсбергский университет, с 1842), М. Кантор (Гейдельбергский университет, с 1850) и Г. Ганкель (Тюбингенский университет, с 1870). В России В.В. Бобынин читал курс лекций по истории математики в Московском университете с 1882 г.

В лекциях по истории физико-математических наук Лавровым сформулированы методологические основы истории естественных наук, которые не утратили своего значения и в наше время. По мнению Лаврова, история науки должна излагать этапы истории

[1] Сергиевский собор - 42 01.05.1870 родилась Антонина родители дворянин Михаил Петров сын Лавров и Евдокия Николаевна. Восприемники: отставной артиллерии полковник Петр Лаврович Лавров и дочь коллежского советника Мария Николаевна Писарева (ЦГИА . Ф.19. Оп.124. Д.1100. Л. 46).

формирования научного знания как наблюдение, понимание, решение, и, наконец, научное знание. Первые *научные* исследования в области геометрии и чистой математики относятся к позднейшему времени, и их нельзя поставить в начале всякой науки: для того, чтобы человека заинтересовали отвлеченные свойства чисел или протяжений, чтобы он пытался понять их или поставить себе вопросы относительно их, надо, чтобы ум его достаточно упражнялся в понимании и в постановке вопросов из других сфер знания, более доступных человеческому чувству. В истории наук необходимо должен присутствовать научной биографии. Вторым необходимым моментом является библиографический, а именно, история книг (рукописей) и их переводов. История физико-математических наук должна показывать роль исторических обстоятельств рассматриваемой эпохи, предоставивших почву для развития данной идеи (понятия), что ускорило это развитие, какие предшествующие научные успехи сделали это возможным; что препятствовало ясному понимаю рассматриваемой истины и ее следствий; с какими препятствиями приходилось истине, чтобы укорениться в уме ученого, потом в коллегиальном сообществе, потом в массовой математической культуре; как индивидуальные особенности ученого позволили именно ему уловить эту истину и утвердить за ней место в науке; была ли ограниченность понимания будущей роли данного открытия и его следствий. В каких формах открытая истина представлялась ученым предшествовавших периодов: проявлялась ли она в форме догадки, или в связи с какими-либо искажавшими ее заблуждениями в трудах предшественников; как она постепенно уяснялась автору открытия; какие выводы принадлежат ему, и какие – его преемникам. Какое влияние имело данное открытие на последующие события в истории мысли и в истории вообще. Лавров замечает, что именно в таком плане еще никто не излагал историю математики. Добавим при этом, что он был прекрасно знаком с историко-математическими сочинениями предшествующих веков.

Не могу отказаться от удовольствия привести слова Лаврова об Архимеде: «Здесь перед нами не безличная система, в которой, как у Евклида, нельзя проследить, что принадлежит автору, и которая развивается пред нашими глазами, подобно процессу физических явлений, как будто по силе вещей, без участия воли человека. У Архимеда на каждом шагу следы личной деятельности, сознание побежденного затруднения, сознание, что автор вносит нечто новое в массу истин науки» [1, с. 278].

Высоко ценил историко-математические труды Лаврова математик Александр Васильевич Васильев [3]. Среди историков математики первым обратил внимание на лекции Лаврова Вячеслав Алексеевич Добровольский [4]. Биография П.Л. Лаврова изложена в книге А.И. Володина и Б.С. Итенберга [5]. Подробнее содержание лекций Лаврова см. в статье Г.И. Синкевич [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавров П.Л. Очерк истории физико-математических наук. Составлено по лекциям П. Лаврова, читанным в лаборатории артиллерийской академии // Морской сборник 1865-1866. Статья первая. 1865. Т. LXXVI, № 1. – С. 1-36. Статья вторая. 1865. Т. LXVII. №3. – С. 37-68. Статья третья. 1865. Т. LXVII. №4. – С. 69-115. Статья четвертая. 1865. Т. LXXVIII, №5. – С. 125-154. Статья пятая. 1865. Т.LXXIX, №7. С. – 155-170. Статья шестая. 1865. Т.LXXIX, №8. – С. 171-214. Статья седьмая. 1865. Т. LXXX. №9. – С. 215-254. Статья осьмая. 1865. Т. LXXX. №10. – С. 255-297. Статья девятая. 1865.

Т. LXXXI, №11. – С. 298-342. Статья десятая. 1865. Т. LXXXI. № 12. – С. 343-355. Статья одиннадцатая. 1866. Т. LXXXII. №2. – С. 357-408. Статья двенадцатая. 1866. Т. LXXXIII, №3. – С. 409-452.
2. Лавров П.Л. Влияние развития точных наук на успехи военного дела и в особенности артиллерии. Лекции, читанные полковником Лавровым для офицеров артиллерии в 1865-1866 гг. // Артиллерийский журнал. Лекция первая. 1865. №4. – С. 231-250. Лекция вторая. 1865. №6. – С. 285-303. Лекция третья. 1865, №7. – С. 355-375.
3. Васильев А.В. Лавров – историк и философ математики // П.Л. Лавров. Сборник статей. Петербург: Колос. 1922. – С. 373-384.
4. Добровольский В.А. Первый курс по истории физико-математических наук в России П.Л. Лаврова // Вопросы истории естествознания и техники. 1971. Вып. 1 (34). – С.47-49.
5. Володин А.И., Итенберг Б.С. Лавров /ЖЗЛ. Вып. 11. М.: Молодая гвардия. 1981.
6. Синкевич Г.И. П.Л. Лавров (1823-1900) – автор первого в России цикла лекций по истории физико-математических наук. К 200-летию со дня рождения // История науки и техники, 2023, №4. – С. 3-22.

ВКЛАД А.Н. КОЛМОГОРОВА В ОБНОВЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В. А. Тестов
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
e-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматривается вклад А.Н. Колмогорова в подготовку и проведение реформы математического образования 60-70-х годов прошлого столетия. Показывается, что его идеи, а также анализ итогов этой реформы имеют большое значение для предотвращения ошибок при обновлении содержания обучения математике в современную цифровую эпоху.
Ключевые слова: цифровизация; математическое моделирование; дифференциация содержания обучения, основные понятия.

Двумя важнейшими задачами, стоящими перед математическим образованием в любую историческую эпоху, являются подготовка квалифицированных учителей математики и оптимальный отбор содержания школьного курса математики, что предполагает выделение тех математических знаний, которые необходимы любому культурному человеку и в то же время являются основой как для дальнейшего изучения математики в вузах, так и для изучения смежных дисциплин. А.Н. Колмогоровым были предприняты большие усилия в 60-е годы прошлого столетия для решения этих задач.

А.Н. Колмогоров пользовался большим авторитетом в математическом мире, он был не только выдающимся математиком мирового уровня, но и крупным ученым-наставником, которому удалось вырастить много учеников, ставшими видными учеными–математиками (В.И. Арнольд, И.М. Гельфанд, А.И. Мальцев, С.М. Николь-ский, В.А. Успенский, А.Н. Ширяев и др.). Многие из учеников А.Н. Колмогорова стали играть ведущую роль в выбранном направлении исследований, создали собственные научные школы. Андрей Николаевич с гордостью подчёркивал, что наиболее дороги ему ученики, превзошедшие учителя в научных поисках.

А.Н. Колмогоров являлся наставником не только для своих аспирантов и соискателей, но и для тысяч учителей математики во всей нашей огромной стране. Широким кругам педагогической общественности имя А.Н. Колмогорова стало известным после того, как он возглавил в 1964 г. математическую секцию комиссии АН СССР и АПН РСФСР по определению содержания математического образования в средней школе. Личный вклад А.Н. Колмогорова в дело реформы был настолько велик, что эту реформу в нашей стране назвали колмогоровской, хотя, безусловно, большой вклад в дело проведения реформы внесли и другие крупные математики. Передовые педагогические идеи А.Н. Колмогорова в математическом образовании во многом опередили свое время.

Как известно, позднее эта реформа рядом ученых была подвергнута критике. В этой критике доминировали идеологические соображения: будто бы реформа была навязана нашей стране Западом, что она явилась результатом экспансии Н. Бурбаки и т.д. Однако основные идеи реформы высказывались рядом крупных математиков еще задолго до Н. Бурбаки, и поэтому нельзя считать, что Н. Бурбаки "повинен" в этой реформе. Теоретико-множественная основа математики была разработана еще Кантором и Дедекиндом. Ряд идей о реформе математического образования был высказан Ф. Клейном, в частности, им была высказана необходимость включения в школьную математику начал анализа. В России вопрос о реформе математического образования, о необходимости включения в школьную программу идей аналитической геометрии и математического анализа настойчиво ставился на первом и втором Всероссийских съездах преподавателей математики (1912 и 1915 гг.). Позднее вопросы пересмотра содержания математического образования поднимали и другие ученые.

Обсуждение разных точек зрения в печати на предстоящую реформу математического образования велось достаточно долго. Некоторые отечественные и зарубежные ученые высказывали предупреждения о предстоящих трудностях реформы, о том, что изменения программы по математике для средней школы должны совершаться с большой осторожностью. О справедливости таких предупреждений свидетельствует опыт проведения таких реформ в разных странах.

Рассмотрим в самых общих чертах основные педагогические идеи А.Н. Колмогорова, которые он пытался внедрить в ходе реформы математического образования и их значение в настоящее время. Первой из них являлось построение математики на теоретико-множественной основе. По словам А.Н. Колмогорова "представляется несомненным, что основной позицией школьного курса математики должна быть позиция «наивной теории множеств»" [3, с. 236]. Особо им в этом отношении был отмечен курс алгебры, в которой использование теоретико-множественного языка было вполне приемлемым для школы. Удобство этого языка успели оценить многие учителя, и поэтому после периода всяческих гонений на эту идею, она стала постепенно воплощаться в школьной математике.

Вторая идея в значительной степени была навеяна трактатом Н. Бурбаки и заключалась в обеспечение единства в изучении различных разделов математики как единой науки через изучение основных математических структур. Из этой идеи вытекало, что начинать построение курса математики надо с выделения основных структур и организовывать материал обучения в порядке их логического развертывания в систему математической науки. Однако эта в целом разумная идея требовала детальной проработки и согласования ее с принципом учета возрастных особенностей учащихся. Между тем ее поспешное воплощение в программах и учебниках по математике без достаточной экспериментальной проверки привело к возникновению серьезных недостатков. В частности, это повышенная степень абстракции без учета уровней мышления школьников, чрезмерный объем и неоправданная сложность изложения программного материала, отсутствие опоры при введении ряда понятий на наглядность и интуицию и т.д. Все это и послужило поводом для контрреформации.

Следует отметить, что сам А.Н. Колмогоров не считал необходимым добиваться единого для всех содержания школьного образования. Наоборот, он поддержал в 60-е годы идею о создании для наиболее способных учащихся школ и классов с математической специализацией, летних математических лагерей и т.д. В декабре 1963 года при его активном участии при МГУ открылась первая специализированная школа-интернат физико-математического профиля, а затем такие школы стали открываться и при других крупных университетах (Ленинграде, Новосибирске и др.). С тех пор в нашей стране сосуществовали два типа математического образования: образование «для всех» и «углубленное математическое образование» для будущих исследователей.

В последние годы в направлении дифференциации содержания обучения математике были сделаны определенные шаги, в частности ЕГЭ разделили на два уровня, но этого недостаточно. Для тех учащихся, которые хотят поступать на технические или экономические специальности, нужен еще один – «промежуточный» уровень. А для «остальных», т.е. для будущих юристов, артистов, стилистов, кулинаров и т.д. видимо необходимо упростить курс математики в старших классах.

При отборе содержания обучения математике А.Н. Колмогоров большое значение придавал выделению основных понятий. Выделение основных понятий способствует упорядоченности всей понятийной структуры курса. При этом основной педагогической идеей должно являться единообразие процесса преподавания математики на разных ступенях обучения: основные понятия сначала должны восприниматься наглядно на примерах, потом формулироваться более отчетливо, и, наконец, подвергаться тонкому логическому анализу. Особое внимание следует уделить начальному этапу при введении ведущих понятий. По мнению А.Н. Колмогорова, «выделение нового общего понятия должно получать некоторое, достаточно убедительное оправдание уже в эвристическом введении, предшествующем формальному определению, или же непосредственно после его появления» [2].

А.Н. Колмогоров был сторонником поэтапного обучения математике. Необходимость несколько раз возвращаться к одному и тому же материалу отмечалась им, в частности, в преподавании начал анализа. В статье А.Н. Колмогорова, написанной в 1965 г. совместно с И.М. Ягломом, отмечалось, что начальное ознакомление с математическим анализом следует осуществлять на полуинтуитивном уровне. Мнение же о возможном вреде от такого предварительного знакомства с идеями анализа без надлежащей «строгости» является ошибочным. Без такого предварительного знакомства при изучении курса математического анализа на первых курсах университетов и пединститутов возникают большие трудности, с которыми справляются только лучшие студенты [1].

Большое значение в содержании школьного курса математики А.Н. Колмогоров придавал математическому моделированию. По его мнению, задача состоит в том, чтобы уже в школе убедительно показать, что «современная математика» позволяет строить математические модели реальных ситуаций и процессов, изучаемых в применениях не только не хуже, но и логически последовательно и проще, чем традиционная [2]. Эта его идея получила развитие в современных школьных учебниках по математике. Достаточно упомянуть учебник А.Г. Мордковича, получивший премию президента в области образования.

Большое внимание А.Н. Колмогоров уделял и решению проблемы подготовки и переподготовки учителей математики к работе по новым программам и учебникам. Все действовавшие в стране учителя математики прошли переподготовку на курсах усовершенствования учителей. Нельзя сказать, что все они поняли и восприняли новые идеи в обучении математики. Дело в том, что А.Н. Колмогоров переоценил возможности как школьников, так и учителей математики, к которым были обращены его разработки. Тем не менее большинство учителей отнеслись очень ответственно к выполнению своего учительского долга.

Еще более трудной оказалась проблема написания новых учебников по математике. А.Н. Колмогорову удалось собрать квалифицированные коллективы авторов новых учебников, которые, оставив все свои дела, не покладая рук трудились над осуществлением такого замечательного замысла. Сам Андрей Николаевич, забросив все свои научные исследования, выступал в качестве либо соавтора, либо редактора, либо консультанта и рецензента новых учебников. По его мнению, полноценного среднего образования не может быть, если не будут раскрыты перед учащимися принципы построения математики как научной теории в качестве основы для понимания того, что есть научная истина. Одним из с его сокровенных желаний было привлечение к научному творчеству детей, живущих вдалеке от ведущих научных центров. Для этого им был основан при МГУ физико-математическая школа–интернат, а также (совместно с академиком И.К. Кикоиным) журнал «Квант». Этот журнал должен был дать возможность школьнику, где бы он ни жил, познакомиться с увлекательными физико-математическими материалами, побудить его к занятиям наукой.

Параллельно со школьной реформой под руководством А.Н. Колмогорова проходила реформа программ и учебников по математике для будущих учителей математики. Были существенно перестроены программы педагогических вузов основных математических курсов «Алгебра и теория чисел», «Геометрия», «Математический анализ» в сторону повышения научного уровня.

Сам А.Н. Колмогоров разработал для педагогических вузов программу нового курса «Научные основы школьного курса математики», имевшего принципиальное значение. Этот курс был призван занять промежуточное положение между теоретическими общематематическими курсами и курсом методики математики. Изучение этого курса должно было обеспечить знакомство студентов – будущих учителей математики – с тем, по каким мотивам и какие разделы математической науки входят в школьную программу, а какие целесообразно не в нее не включать, что в школьных учебниках остается изложенным без полного обоснования, и как эти пробелы могут быть восполнены. К сожалению, этот курс, во многом призванный обеспечить профессиональную направленность обучения на подготовку учителя математики, недолго продержался в учебном плане. Предполагалось, что вопросы школьного курса математики будут освещены в основных математических курсах. Однако из-за большой насыщенности программ теоретическим материалом сделать это в большинстве случаев не удалось. Поэтому проблема обеспечения профессиональной направленности обучения математике во многих педагогических вузах остается нерешенной.

Острые дискуссии по проблемам содержания школьного курса математики в современных условиях, в условиях цифровизации общества продолжаются и в настоящее время. Цели обучения математике, как известно, носят разнонаправленный характер, а в зависимости от преобладающих приоритетов в целях обучения у разных ученых и педагогов взгляды на содержание обучения математике могут сильно различаться. Следует спокойно и профессионально находить консенсус ученых-математиков и учителей-практиков исходя из общих целей математического образования и педагогического опыта.

Задачу отбора содержания обучения математике усложняет еще то обстоятельство, что с течением времени меняется соотношение между различными разделами математики. Ясно, что содержательная сторона образования должна быть ориентирована не столько на сегодняшние потребности, сколько на стратегические перспективы. Начавшееся в последние десятилетия бурное развитие компьютерной техники, системы Интернета вызвало становление и развитие нового стиля научного мышления, в основе которого лежит методология моделирования как новая исследовательская культура, основанная на использовании возможностей математики и компьютеров. Сама математика шагнула далеко вперед, она легла в основу формирования новых трансдисциплинарных систем знаний (теория информации, искусственный интеллект, Big Data и др.). Поэтому, если связывать будущее России с инновационным развитием, то требуются соответствующие изменения и в содержании образования. В частности, за последние десятилетия в связи с цифровизацией общества выросла роль дискретных разделов математики [4]. Слова А.Н. Колмогорова о роли дискретной математики оказались прозорливыми. «По существу, − писал он, − все связи между математикой и ее реальными применениями полностью умещаются в области конечного... Мы предпочитаем непрерывную модель лишь потому, что она проще» [3, с. 15].

Автором неоднократно подчеркивалась важность обновления содержания обучения математике [4, 5, 6]. В настоящее время необходимость перемен стала столь очевидна, что в декабре 2020 г Президентом РФ было дано поручение обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов "Математика" и "Информатика", установив их приоритет в учебных планах и скорректировав их содержание. Во исполнение этого поручения Президента РФ Рабочей группой на базе Института стратегии развития образования РАО была разработана программа для 5-9 классов, которая предусматривает выделение с 7 класса наряду с алгеброй и геометрией отдельного предмета «теория вероятностей». Значительная часть понятий дискретной математики была включена в курс информатики средней школы. К сожалению, разработка новых программ происходила без широкого обсуждения и без глубокого анализа опыта Колмогоровской реформы, что может вновь привести к ошибкам, пагубным для математического образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики. //Математика в школе, 1965, № 4. –С. 53-62.
2. Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе. //Математика в школе, 1971, № 6.–С. 2-3.
3. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. –М.: Наука, 1988.
4. Тестов В.А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты: монография. -Вологда: ВГПУ, 2012. 176 с.
5. Тестов В.А. О проблеме обновления содержания обучения математике в школе /Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. –Глазов: Глазовс. гос. пед. ин-т, 2009. – С. 106-111.
6. Современные проблемы физико-математического образования: вопросы теории и практики: всероссийская коллективная монография: под общ. ред. проф. И.Г. Липатниковой. – Екатеринбург: УрГПУ, Издательство АМБ. 2012. – 262 с.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗАДАЧ С ИСТОРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

А.Ю. Белянина, Т.А. Кочкарева

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: belianinaaiu@vogu35.ru, kochkarevata@vogu35.ru

Аннотация. В статье предложен эффективный метод повышения интереса учащихся к изучаемому материалу курса математики с привлечением исторических сведений. Однако, на сегодня существует проблема нехватки аудиторного времени на уроках для рассмотрения исторических моментов в учебную программу.

Ключевые слова: математика, задачи с историческим содержанием.

Многие обучающиеся, открывая задачник с домашними упражнениями, в очередной раз задают вопрос: «а для чего я вообще это делаю, где мне эти формулы пригодятся?». Вот какие доводы можно привести:

1) «Царица наук» тренирует силу воли. Думать, искать решение задачи позволяет при изучении других предметов не пасовать перед трудностями;

2) На уроках математики вы развиваете мышление. Навыки логически и стратегически мыслить нужны в любой сфере нашей жизни;

3) На уроках математики вы тренируете память, что позволяет держать в голове структурированную информацию. Обучающийся учится анализировать информацию, подбирать наиболее выгодное решение.

В настоящее время в России проводится много различных математических олимпиад. Формат проведения олимпиад также разнообразен: очные, заочные, дистанционные, устные, накопительные и т.д. Практически каждая олимпиада собирает большое число участников. Интерес к математике, как к науке стал возрастать у школьников, но в том числе, остается большая доля ребят, у которых возникают большие сложности при изучении предмета.

Для привлечения внимания к решению нестандартных задач, на наш взгляд, самым действенным способом является включение исторических сведений на уроках математики.

К вопросу о применении задач с историческим содержанием возвращались учителя неоднократно. Анализ методической литературы позволяет выделить следующие этапы реализации данного факта [3]:

- преподнесение математического материала в исторической последовательности,
- использование исторических сведений на различных этапах урока,
- внеклассная (дополнительная) работа учащихся.

На различных этапах урока можно применять следующие методические приемы: некоторые вводные обзоры, библиографические выдержки об ученом - математике, истории применения математического сведения, использование цитат ученых, демонстрация презентаций с историческим содержанием.

Наиболее действенным способом реализации данного методического приема является включение в обучение задач из старинных учебников [4]. Такие задачи обязательно привлекут внимание обучающихся, позволяют предложить современный способ решения, упростить первоначальное решение.

Библиотеки города Вологды (Вологодская областная универсальная научная библиотека им. И.В. Бабушкина №1, Научная библиотека Вологодского государственного университета) предлагают в открытом доступе большое число различных учебников (учебных пособий) из нашего прошлого. Большинство из них оцифровано или сохранены в очень хорошем состоянии. А работа с такими книгами должна принести большое удовольствие пусть не на основных уроках, а на внеклассных или дополнительных.

Многие коллеги отмечают, что часто возникают проблемы на уроках с устным счетом. Поэтому можно сочетать исторические факты с вычислительными задачами на уроках математики. Так, например, известно, что музыкальные часы в России впервые появились в 18 веке. Механизм часов в 1720 году установили на колокольне собора Петропавловской крепости в Санкт-Петербурге. В настоящее время куранты можно услышать каждую четверть часа. Сколько раз в течение суток можно услышать мелодию этих часов?

Используя задачи из старинных учебников, ученики знакомятся с древними единицами измерения длины, площади, массы. Например, собака усмотрела в 150 саженях зайца, который пробегает в 2 минуты по 500 сажен, а собака в 5 минут – 1300 сажен. Спрашивается, в какое время собака догонит зайца.

Большой интерес вызывают сведения о различных системах записи чисел у разных народов [6]. Например, попросить учащихся записать те или иные числа в римской, арабской, греческой системе счисления; рассказать о различных способах округления.

Историческая справка о великих математиках также может содержать математическую задачу. В качестве примера можно привести задачу Пифагора Самосского (около 510-502г.г. до н.э.). Поликрат однажды спросил на пиру у Пифагора, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат, - отвечал Пифагор. Половина моих учеников изучает прекрасную математику. Четверть исследует тайны вечной природы. седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь еще к ним трех юношей. Сколько учеников веду я к рождению вечной истины?»

Специальная тематика практических задач позволит напомнить учащимся о важности геометрических знаний, повысит интерес к геометрии. В процессе решения старинных задач, учащиеся получают навыки построения карандашом и линейкой, которые в дальнейшем помогут установить прочные связи при обучении черчению и пространственной геометрии.

Обязательно следует отметить, что многие старинные задачи решаются с помощью логики, а решение, представленное в учебниках прошлых лет, зачастую громоздкое. Поэтому решение таких задач современными методами обычно вызывает восторг у школьников.

Включение исторического содержания на уроках является неотъемлемой частью формирования математических компетенций. Грамотное использование в процессе обучения позволит улучшить качество усвоенных математических знаний. Позволит «влюбить» в математику, установить межпредметные связи с другими дисциплинами, способствовать умственному развитию. Задачи, приведенные в качестве примеров не являются эталоном применения данной методики на уроках, а позволяют показать более качественное ее использование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Число и наука о нем. – Москва: ГИТТЛ, 1960.
2. Максимова В.Н. Межпредметные связи в процессе обучения. – М.: Просвещение, 2008.
3. Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. Мотивация учения и ее воспитание у школьников.- М.: Просвещение, 2003.
4. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Старинные занимательные задачи. – М.: Наука, 2008.
5. Полякова Е.С, Романов Ю.В. Средства историзации специальной подготовки учителя математики //Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Межвуз. сб. науч. тр. Выпуск 5. / Под ред. Ю.А. Дробышева и И.В. Дробышевой. – Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2003.
6. Скороходова Н.Ю. Психология ведения урока. – СПб.: Изд-во «Речь», 2002.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «СМЕСИ, СПЛАВЫ, КОНЦЕНТРАЦИЯ»

Д. А. Ермакова

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: ermakovada@vogu35.ru

Аннотация. Работа посвящена проблеме решения текстовых задач в условиях подготовки к государственной итоговой аттестации. Рассматриваются этапы усложнения задач в разных классах основной школы с учетом развития математического аппарата обучающихся.

Ключевые слова: текстовые задачи, ОГЭ, подготовка к экзамену.

Решение текстовых, сюжетных задач - важная составляющая школьного курса математики. Математическая задача неизменно помогает ученику сформировать правильные математические понятия и более глубоко выяснить все аспекты взаимодействия в окружающей его жизни, дает возможность применять изучаемые теоретические положения. Решение текстовых задач способствует развитию мышления учащихся и навыку смыслового чтения, более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости и повышению вычислительной культуры. В процессе решения текстовых задач у обучающихся формируется навык моделирования реальных объектов и явлений. Сюжетные задачи дают возможность проследить связь теории с практикой, обучения с жизненными ситуациями.

Умение решать текстовые задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины, прочности и системности освоения учебного материала обучающимся. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач. Текстовые задачи есть в открытой части контрольно-измерительных материалов ОГЭ (основной государственный экзамен).

При этом статистика говорит, что даже решение несложных задач вызывает у большинства выпускников затруднения. Так в 2021 году всего 5,6% школьников Вологодской области решили 21 задание (текстовая задача) в ОГЭ.

В экзаменационных работах девятого класса встречаются задачи на движение по суше, кругу и воде, на совместную работу, на смеси, сплавы и концентрацию. Решение данных заданий рассматривается, начиная с младших классов. Так задачи на движение и работу ребята впервые учатся решать в 3-4 классе, а на проценты в 5. Причём на всех ступенях обучения математики происходит усложнение этих заданий.

Рассмотрим эволюцию сложности задач на примере темы "Смеси, сплавы, концентрация" с учетом развития математического аппарата обучающихся.

Эти задачи имеют практическое значение, являются эффективным средством развития логики и мышления у обучающихся. Задачи на смеси и сплавы позволяют учащимся осознать практическое значение и ценность математики в целом. Данные задачи обладают прогностической и диагностической ценностью, то есть с помощью их можно продиагностировать знания и умения основных разделов курса школьной математики, уровень развития математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности, то есть лишний раз оценить способности к математике. При решении задач на растворы, смеси и сплавы очевидны межпредметные связи с физикой, химией и экономикой, познание этого повышает учебную мотивацию учащихся по многим предметам.

Впервые с данным типом задач обучающиеся встречаются в 5 классе при изучении темы «Проценты»: нахождение процента от числа и числа по его процентам. Причём решение задач вначале рассматривается через нахождение 1%, затем по правилам, через умножение/деление на дробь, равную процентам.

Задача 1: *Виноград при сушке теряет 70% своей массы. Сколько килограммов изюма получится 250 кг свежего винограда?*

Решение:

1) 100% - 70% = 30% - масса сухой части винограда
2) 250 : 100 = 2,5 (кг) – масса 1%
3) 2,5 · 30 = 75 (кг) – масса изюма

Ответ: 75 кг изюма.

В 6 классе при изучении темы "Отношение" дети решают следующий тип задач:

Задача 2: *В растворе уксуса отношение уксусной кислоты и воды равно 2:11 соответственно. Сколько надо взять уксусной кислоты, чтобы получить 780 г раствора?*

Решение:

1) 2 ч + 11 ч = 13 ч – весь раствор.
2) 780 : 13 = 60 (г) – 1 часть раствора.
3) 2 · 60 = 120 (г) – уксусной кислоты

Ответ: 120 г.

Также в этом классе ученики изучают алгебраический способ решения задач:

Задача 3: *Сколько литров воды нужно разбавить с 300 г соли для получения раствора с концентрацией 15%?*

Решение: Пусть нужно x граммов воды разбавить с 300 г соли для получения раствора с концентрацией 15%, тогда 0,15x г - количество соли в x г воды 15%-го раствора. По условию соли 300 г. Получаем уравнение:

$0,15x = 300$

$x = 300:0,15$

$x = 2000$ г = 2 л воды.

Ответ: 2 л воды.

При изучении темы «Пропорция» рассматриваются задачи, решаемые с помощью неизвестной и составления пропорции.

Задача 4: *Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащей 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?*

Решение: Разберём задачу с помощью рисунка 1. Примем за x кг массу чистого олова.

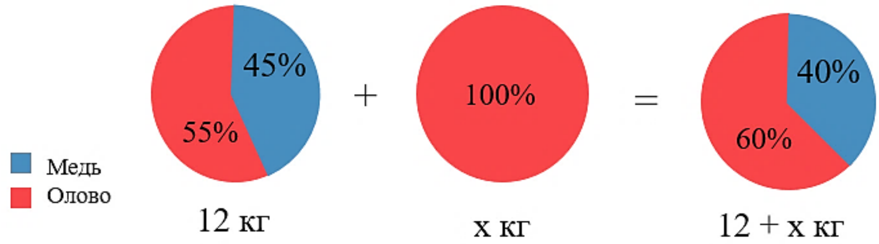


Рисунок 1 – Краткая запись задачи 4

В первоначальном сплаве меди 45%.

12 · 0,45 = 5,4 (кг) – меди в первом сплаве.

Составим пропорцию:

5,4 кг – 40%

(12 + x) кг – 100%

$$12 + x = \frac{5.4 \cdot 100\%}{40\%} \rightarrow 12 + x = 13{,}5 \rightarrow x = 1{,}5$$

1,5 (кг) – олова.

Ответ: 1,5 кг.

В 7 классе учатся решать задачи с помощью системы уравнения, вводя 2 переменные.

Задача 5: *После того как смешали 50%-й и 20%-й растворы кислоты, получили 900 г 30%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора смешали?*

Решение: Пусть масса первого раствора равна x грамм, тогда масса кислоты, которая составляет 50%, равна 0,5x (рисунок 2). Если масса второго раствора равна y грамм, то масса кислоты – 0,2y. Масса итогового раствора равна 900 грамм и состоит из суммы масс обоих растворов. А масса вещества будет равна 270 грамм.

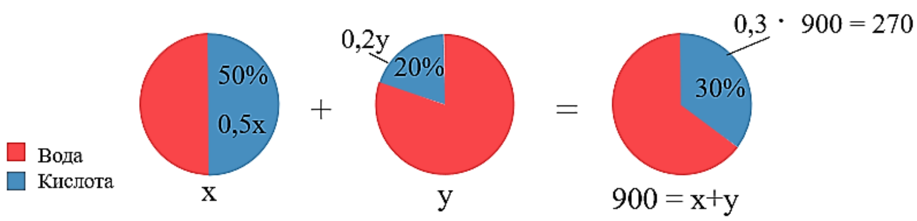


Рисунок 2 – Краткая запись задачи 5

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}2y = 270 \\ x + y = 900 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x + 0{,}2(900 - x) = 270 \\ y = 900 - x \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}2x = 90 \\ y = 900 - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3x = 90 \\ y = 900 - x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 600 \end{cases}$$

300 грамм первого раствора, 600 грамм второго раствора.

Ответ: 300 г; 600 г.

В 8 классе на уроках алгебры изучают решение дробно-рациональных и квадратных уравнений. Поэтому на данной ступени обучения рассматривают задачи более сложного уровня.

Задача: *В сплаве меди и цинка содержится 20 кг цинка. Когда к сплаву добавили 10 кг цинка, его процентное содержание увеличилось на 10%. Найдите первоначальную массу сплава, если она меньше 50 кг.*

Решение:

	Было	Добавили	Стало
Сплав	x кг	-	(x + 10) кг
Цинк	20 кг	10 кг	(20 + 10) кг
Содержание цинка	$\frac{20}{x}$	100%	$\frac{20}{x}$ + 10% = $\frac{20}{x} + 0{,}1$

Составим уравнение:

$\frac{20}{x} + 0{,}1 = \frac{20+10}{x+10}$

$\frac{20+0{,}1x}{x} = \frac{30}{x+10}$

$x^2 - 90x + 2000 = 0$

$x_1 = 50$ – не удовлетворяет условию задачи.

$x_2 = 40$

Ответ: 40 кг

В 9 классе выделяются часы для систематизации знаний по всей теме, связанной с текстовыми задачами. Но процент не просто решивших, а хотя бы приступивших, крайне мал.

При подготовке к экзамену, в частности к 21 заданию ОГЭ, нельзя подходить формально, путём "натаскивания" на задания экзаменационного вида в последний момент. Навык решения текстовых задач следует формировать с младших классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далингер, В.А. Методика обучения математике. Традиционные сюжетно-текстовые задачи: учеб. Пособие для СПО. – 2-е изд., испр. и доп./ В. А. Далингер. – Москва: Издательство Юрайт, 2017. – 174 с.
2. Дорофеев, Г.В. Проверка решений текстовых задач / Г.В. Дорофеев// Математика в школе. – № 5. – 1974. –С. 37–45.
3. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся/ Ю. М. Колягин. - Москва: Просвещение, 1977. – 113 с.а
4. Пойа, Д. Как решать задачу: пособие для учителя // Д. Пойа; пер. с англ. под ред. Ю.М. Гайдука. – Москва: Учпедгиз, 1959. – 207 с.
5. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – Москва: Просвещение, 1984. - 175 с.
6. Шевкин, А.В. Текстовые задачи по математике. 5-6 классы. – 2-е изд., испр. / А.В. Шевкин – Москва: ИЛЕКСА, 2009. – 106 с.

Шевкин, А.В. Текстовые задачи по математике. 7-11 классы. / А.В. Шевкин – Москва: ИЛЕКСА, 2019. – 208 с.: илл.

ОБОСНОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОНЛАЙН-КУРСА ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

В.Д.Зайкова

Вятский государственный университет, Киров, Россия

e-mail: Zaykova1988@yandex.ru

Аннотация. В статье осмысляются три основных принципа построения курса репетиторской онлайн-школы «Мир_математика». Отмечается, что дистанционный курс необходим для закрепления учащимися пройденного материала по математике за 5–9 классы, более эффективной педагогической диагностики и контроля знаний школьников. Подчеркивается: данный вид обучения должен сопровождать процесс освоения материала в основной школе, а не заменять полноценное и логически выстроенное преподавание курса математики. Выявлено различие отношения учащихся и учителей математики к дистанционному образованию: к его повсеместному применению, условиям реализации, качеству.

Ключевые слова: дистанционный курс, математика, подготовка к ОГЭ, дистанционное обучение, информационно-коммуникационные технологии (ИКТ), основная школа, онлайн-школа «Мир_математика».

В настоящее время в образовательной системе произошли новые преобразования, в частности, обусловленные повсеместным применением дистанционного формата обучения в условиях Covid-19 в 2020–2021 учебных годах. Известно, что точные науки сложнее даются учащимся общеобразовательной школы, чем гуманитарные. Следовательно, математика требует повышенного внимания, ведь именно с этой дисциплиной возникает множество трудностей. Эффективность обучения данной дисциплине во многом определена синхронной и системной работой ученика и учителя, основанной на методике формирования основных математических умений и навыков. В связи с этим требуется перестройка процесса обучения математике в условиях дистанционной подготовки к ОГЭ с целью формирования у учащихся целостных систем математических понятий.

Уровень полученных школьником знаний оценивается в ходе государственной итоговой аттестации (ГИА), а именно – основного государственного экзамена. В целях построения системы эффективного обучения в условиях дистанционной подготовки в онлайн-школе «Мир_математика» выделяется три основных принципа, которые положены в основу конструирования методической системы подготовки к ОГЭ [1, с. 84–94]. Вся система обучения, уроки, рабочие тетради, чек-листы с формулами были созданы на основе принципов, описанных ниже.

1. Тематический принцип.

Подготовка обучающихся строится поэтапно: сначала – простые типовые задания первой части экзамена, затем – второй части. Распределение однотипных задач по подгруппам особенно эффективно, поскольку дает возможность научиться логическим умозаключениям и рассуждениям непосредственно при решении. Развитие логического и дивергентного мышления учащихся основной школы осуществляется с помощью подбора различных типов заданий и примеров с постепенным увеличением уровня трудности их выполнения.

2. Принцип использования комплексных тестов.

Предполагает постепенный переход к комплексным тестам, когда учащиеся основной школы освоили общие подходы к решению основных типов задач и примеров, используемых на экзамене, и у них уже появился опыт их применения при решении заданий различной степени сложности. Применение данного принципа рекомендуется начинать со второго полугодия девятого класса, когда освоено более 70% тем основного государственного экзамена по математике. Этот принцип также позволяет производить постоянное повторение пройденного материала и делает знания школьников более прочными.

3. Принцип контроля времени выполнения заданий.

Уроки подготовки к сдаче экзамена необходимо проводить в ускоренном режиме, осуществляя контроль времени выполнения работы учащимися, так как во время проведения ОГЭ по математике будет установлен лимит времени – 3 часа 55 минут. Приведенная схема работы сначала достаточно тяжело воспринимается девятиклассниками, так как у подростков разная скорость мышления. Но через некоторое время они привыкают к данному условию работы, и вследствие этого чувствуют себя на ОГЭ по математике более спокойными, уверенными и собранными. Сокращать время решения заданий рекомендуется постепенно, чтобы школьники успевали пройти адаптацию к этим условиям.

Для наиболее эффективного проведения дистанционного курса подготовки к ОГЭ по математике учителю необходимо управлять учебной деятельностью учащихся основной школы, консультировать их на всех этапах обучения, начиная с предоставления информации о процессе подготовки к экзамену и заканчивая проведением контрольных мероприятий по оценке знаний на момент окончания дистанционного курса. Кураторы и преподаватели совместно осуществляют мониторинг процесса обучения, а также контроль посещения занятий учащимися 9-х классов. Правильная организация совместной коммуникативной деятельности и интерактивного общения учеников курса подготовки к выпускному экзамену помогает преодолеть психологический барьер и страх перед экзаменом.

Стоит отдельно отметь, что учащимся 9-х классов, обучающимся на дистанционных курсах подготовки к ОГЭ по математике, рекомендуется осуществлять рефлексию своей учебной деятельности после прохождения каждого этапа обучения. На основе компетенций учителя математики при работе в режиме дистанционного обучения разработаны критерии для измерения уровня знаний обучающихся и создана модель методической системы дистанционного курса эффективной подготовки к ОГЭ по математике, примененная на практике в нашей онлайн-школе.

Модель виртуального класса заключается в пространственной удаленности ученика от школы, но не от учителя, общение с которым строится на платформах с использованием дистанционных технологий (Zoom и Skype) [1, с. 84–94].

Преподаватели скептически относятся к повсеместному применению дистанционного обучения в аспекте его качества, в большинстве анкет указано отсутствие специальной кадровой подготовки для работы в условиях ДО [2, с. 19]. В связи с выявленной проблематикой запланирована разработка квалификационных критериев к учителю математики для ведения деятельности в системе ДО. Совокупность этих факторов во многом препятствует развитию и полноценному функционированию системы дистанционного образования в нашей стране. Но в нынешнее время глобализация наступает огромными темпами, и система обучения должна качественно адаптироваться к реалиям времени.

В нашей онлайн-школе «Мир_математика» процесс обучения построен таким образом, чтобы полностью учитывать все потребности ученика, создать для него комфортную среду для восполнения знаний в период подготовки к экзаменам. Система обучения позволяет поэтапно проходить модули подготовки к ОГЭ по математике, а также своевременно идентифицировать пробелы в знаниях школьников, что позволяет эффективно выстраивать систему повторения материала. В то же время были проработаны и учтены комментарии дистанционных учителей и создана целая экосистема для эффективного взаимодействия с учениками для достижения максимальных результатов на выпускных экзаменах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайкова В.Д. Сетевой учитель и онлайн-школа «Мир-математика» // Педагогика, 2022. № 2. С. 84–94.
2. Половинкина В.В. Педагогическая модель организации дистанционного образования в вузе: Автореф. дис. канд. пед. наук. Нижний Новгород, 2010. 19 с.

РАБОТА С ЗАПРОСОМ СТУДЕНТОВ НА ПОНИМАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ И ОЦЕНИВАНИЯ

В.Г. Казакевич, С.Б. Колоницкий, Е.А. Толкачева
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия
e-mail: sokratt@gmail.com, sbkolonitskii@etu.ru, eatolkacheva@etu.ru

Аннотация. Приводится к рассмотрению и дискуссии вариант условной классификации критериев проверки письменных учебных студенческих работ по математическим дисциплинам в техническом вузе. Предлагаются способы работы с коллизией: наличие запроса от студентов на ознакомление с этими критериями и неготовностью многих студентов понимать критерии, сформулированные не количественно (возможно, не измеримые численно).

Ключевые слова: критерии проверки, преподавание математики в технических вузах, проверка и оценивание письменных работ.

Введение

В последние несколько лет от студентов все чаще поступает запрос на ознакомление с критериями оценивания их письменных работ (индивидуальных домашних заданий, а также контрольных и экзаменационных письменных работ). В случае с тестовыми работами все тривиально – есть конкретная шкала, конвертирующая полученный в результате проверки набор численных параметров (количество правильных ответов, набранные баллы с учетом количества и сложности решенных задач и т.п.) в оценку по принятой в вузе шкале (например, стандартной 5-балльной). В случае с работами нетестового формата, особенно предполагающими изложение решения в относительно свободной форме, говорить о количестве верно решенных задач с учетом сложности, разумеется, тоже можно. Но часто этого оказывается недостаточно, особенно если баллы дробятся (то есть за частично решенную задачу можно получить часть баллов). Полностью формализовать критерии проверки в измеримых терминах зачастую невозможно, а описание в качественных терминах для студентов оказывается трудным для понимания. Рассмотрим условную классификацию критериев проверки работ, которая раскрывает суть этой проблемы, и предложим способ ее решения.

Проверка и оценивание

Прежде всего, предлагается различать процессы проверки и оценивания. Результат проверки – суждение о качестве выполненной работы, которое конвертируется в оценку, а также – в список недостатков и рекомендации по улучшению. Результат оценивания – собственно оценка.

Большинство студентов интересуют в первую очередь критерии оценивания. Сложность заключается в том, что даже критерии оценивания не всегда можно сформулировать чисто количественно.

В качестве примера предлагается выдержка из программы учебной дисциплины «Дискретная математика: теория графов» (ВШЭ, осень 2022):

«Домашнее задание 1. Состоит из 5 заданий по 5 пунктов в каждом. Максимальная оценка за каждый пункт — 4 балла. Критерии оценивания: По каждому пункту отдельно выставляется оценка от 0 до 4. 4: при наличии полного решения и полного верного ответа. 3: незначительные недочеты в решении. 2: существенные недочеты в решении. 1: грубые ошибки в решении. 0: отсутствие решения вне зависимости от наличия ответа.»

То есть, несмотря на наличие количественных показателей, воспользоваться ими без понимания того, какой недочет можно считать «незначительным», а какую ошибку «грубой», невозможно. Соответственно, воспользоваться подобными критериями для самопроверки большинство студентов не в состоянии и часть из них (наиболее думающая из умеренно-подготовленных) оказывается в растерянности: слишком уж отличается этот расклад от привычного по школе. Кроме того, в приведенном выше примере фактически предложены критерии проверки и шкала конвертации результатов этой проверки в баллы (на момент чтения курса в ВШЭ применялась болонская система, в совокупности за семестр могло быть набрано от 0 до 100 баллов и эта сумма затем конвертировалась в оценку по шкале 0 –10, поэтому конвертирование баллов за отдельное домашнее задание в оценку по другой шкале в этом пункте не предусмотрено).

Классификация критериев проверки. Предлагается классифицировать критерии проверки на два типа:

1.Формальные. Некоторые характеристики формальных критериев:

- часто легко измеримы (ширина полей, количество правильных ответов, правильность ответа в задаче);
- могут быть проверены неспециалистом при помощи сверки с образцом, поиска ключевых слов и т.д., проверки соответствия формы и т.п. (вопрос о том, что один и тот же верный ответ может быть записан по-разному, оставлен за рамками данной работы);
- как следствие - проверка таких критериев часто достаточно легко автоматизируется.

2.Экспертные. Некоторые характеристики экспертных критериев:

- часто трудно измеримы (полнота и корректность решения, связность изложения);
- не могут быть применены без понимания происходящего (а нередко и недоступны для понимания неспециалистом);
- как следствие – на нынешнем уровне развития технологий принципиально неавтоматизируемы.

Из вышенаписанного очевидно следует, что формальные критерии, среди прочего, вполне доступны большинству студентов. Но, когда речь идет о проверке содержательного решения, использовать только формальные критерии невозможно.

В чем проблема? При обсуждении проблемы автоматизации доказательства один из основных тезисов «чтобы компьютер мог рассуждать, нужно превратить рассуждение в вычисление». В данном случае ситуация принципиально иная: необходимо научить студентов хотя бы в первом приближении оценивать качество своих решений. Нужно отметить, что низкое качество письменных работ часто связано не с ленью или небрежностью студентов, а именно с неумением оценить качество своего текста по каким-то критериям помимо формальных (отсюда, например, совершенно бессмысленные фразы, имеющие, однако, структуру импликации и т.п.). Такие студенты искренне убеждены, что при проверке в их работе будут искать некий набор «заклинаний», единственный смысл которых – повысить будущую оценку (а вовсе не математическое содержание).

Что делать? В первую очередь переводить понимание написания и проверки работ с «магических» рельс на «научные» (или лучше сказать «технические»? «инженерные»?). «Магический подход» в данном случае означает, что критерии оценивания воспринимаются как некоторый набор заклинаний и для того, чтобы работа при проверке была оценена положительно, достаточно, чтобы в ней присутствовали «ключи от этих заклинаний» (используя игровую терминологию – бафф на повышение значения полезного параметра прохождения квеста). «Инженерный подход» в данном случае означает, что необходимо держать в уме универсальный набор «знаю-понимаю-излагаю» и конструировать решение так, чтобы будущий читатель ИЗ ТЕКСТА мог сделать вывод о том, что автор (решения) хотел сказать.

Естественно, без практики научиться такому невозможно. Первым автором применяется классическое упражнение «А теперь поменялись тетрадями!» в следующей форме: небольшая работа, минут на 10-15, в которой требуется изложить решение несложной задачи. Затем студенты разбиваются на группы (если это возможно – на тройки) и каждая работа проверяется двумя другими студентами (иногда работа по проверке дается на дом. Критерии проверки формулируются преподавателем заранее. Причем в описании присутствуют как формальные критерии, например, «ответ верный», так и экспертные – например, «решение верное, то есть полное и корректное»). Затем те же работы проверяются преподавателем и результаты – не столько написания, сколько проверки студентами чужих работ – подробно обсуждаются.

Пока данных недостаточно, чтобы говорить о статистике, но есть впечатление, что подобные упражнения положительно влияют на качество работ.

Также хочется отметить как фактор, положительно влияющий на понимание критериев проверки, темы, близкие современным студентам, родившимся в эпоху компьютеризации. Изучение тем, связанных с криптографией или нейронными сетями всегда вызывает много интереса и энтузиазма, благодаря включенности студентов в соответствующий контекст. И изучение подобных тем часто удается привлечь в качестве удачной иллюстрации формирования критериев проверки письменных работ.

Примеры.

1. При изучении криптографии много внимания уделяется односторонним функциям. И одним из примеров односторонних функций (а также примеров необходимого, но не достаточного) первый автор стандартно приводит как раз ответ (численный) в математической задаче: если ответ неправильный, то в решении точно есть ошибка. Если же ответ правильный, это не гарантирует правильности решения. Но зато, имея решение, можно получить ответ и это сравнительно легко. А вот, имея только ответ, сконструировать решение, которое его выдает – заметно сложнее.

2. В рамках различных дисциплин и семинаров, посвященных нейронным сетям, студенты хорошо усваивают, что один из критериев обученности нейронной сети – способность к обобщению, что есть корректной работе не только на тех данных, на которых нейросеть обучалась. Отсылка к этому соображению практически полностью решает проблемы с вопросами от студентов в духе: «а почему на контрольной не те задачи, которые были в домашней работе?»

Выводы

Встраивание в процесс обучения упражнений на конструирование (а не воспроизведение в формате «заклинаний») решений и оценивание чужих работ, позволяющее получить соответствующий опыт, положительно влияет на качество студенческих работ, а также решает проблему с пониманием необходимости экспертных критериев оценивание (а также – отчасти – с пониманием студентами самих критериев).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Heiko Knospe, A Course in Cryptography. AMS, 2019.
2. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville, Deep Learning. URL: www.deeplearningbook.org (application 19.07.2003).

О ЗНАЧЕНИИ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ВУЗОВСКИХ КУРСАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

А.Р. Кашенков

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: alex27k@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена занимательным задачам, важности решения таких задач при изучении математических курсов в профессиональной подготовке будущих учителей математики. Особое внимание уделено решению занимательных задач по теории вероятностей.

Ключевые слова: занимательные задачи, преподавание математики в вузе, курс теории вероятностей.

Решение задач в математическом образовании занимает огромное место. Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математической подготовки, глубины освоения учебного материала. Следует заметить, что решение занимательных задач является важной частью математического образования будущих учителей математики. Задача может быть занимательной потому, что интересно само условие, или потому, что обладает значительной степенью общности, или в решении спрятана «изюминка», или из-за того, что неожиданно красив и прост ответ. Все составляющие задачи (её представление, анализ, решение, ответ, заключение и выводы) могут быть иногда необычными для обучающихся. Поэтому занимательной считают такую задачу, в которой содержатся элементы занимательности либо в содержании задачи, либо в форме, в которую она облекается, либо в методе решения. Иногда занимательность заключается для студентов в неожиданном ответе.

В настоящее время выпускники решают олимпиадные задачи на занятиях по элементарной математике в течение одного семестра. Также они могут посещать кружки по решению нестандартных и олимпиадных задач, но они не каждый учебный год проводятся, да и не все их посещают. Что касается занимательных задач, то их в процессе обучения в университете решается, как правило, немного. Однако, занимательные задачи встречаются почти в любой математической дисциплине. Можно решать занимательные задачи на некоторых практических занятиях параллельно с изучением основного материала или проводить отдельные занятия по данной теме. Также можно давать их наиболее подготовленным студентам в качестве домашнего задания. Значительные затруднения часто вызывают решения нестандартных задач. К ним относятся задачи алгоритм решения которых неизвестен студентам. Заметим, что одна и та же задача может быть как стандартной, так и нестандартной для учащихся, в зависимости от того, обучались ли они решению аналогичных задач, или нет.

Далее более подробно рассмотрим вопросы, связанные с решением занимательных задач при изучении курса теории вероятностей для будущих учителей математики. С включением в школьный курс математики вероятностно-статистической линии, а также включением заданий по теории вероятностей в итоговую аттестацию в форме ЕГЭ глубокое и всестороннее изучение этих вопросов со студентами педагогических направлений в высшей школе становиться особенно актуальным [1-3].

Для решения занимательных задач необходимо, конечно, знать и в совершенстве владеть соответствующим материалом по теории вероятностей. Также при решении таких задач часто требуются знания из других математических курсов, умения применять эти знания при решении конкретных задач.

Как показывает опыт, наиболее удобно проводить отдельные практические занятия, полностью посвященные решению занимательных задач. Желательно проводить их в конце изучения темы или курса целиком, когда пройден весь материал. За одну или две недели до занятия можно предложить наиболее подготовленным студентам задачи и список дополнительной литературы. На занятии студентам, подготовившим выступление, предоставляется возможность рассказать о полученных ими результатах. Выступающие составляют систему вопросов, намечают план решения задачи и предоставляют возможность решить ее учащимся самостоятельно. Если задача вызывает значительные затруднения, то выступающий сам рассказывает ее решение. Проведение таких занятий развивает творческие способности студентов, формированию математического мышления, позволяет глубже понять предмет теории вероятностей и свободнее оперировать основными понятиями, формулами и теоремами, прививает стремление к постоянному пополнению своих знаний с помощью самообразования. Студенты приобретают практические навыки решения занимательных задач, накапливают материал по решению таких задач для будущей работы в школе.

Такие занятия позволяют решить следующие задачи:

- образовательную - вовлечение студентов в процесс активного обучения;
- развивающую - развитие интереса к изучаемой дисциплине, творческих способностей, формирование навыков исследовательской деятельности, расширение кругозора и эрудиции;
- воспитательную - воспитание усидчивости, упорства в достижении цели, личной ответственности за выполнение задания.

В качестве примера рассмотрим достаточно простую задачу, которую можно решить сразу на занятии после изучения темы «Формула полной вероятности». Эта задача вызвала интерес у студентов. Она довольно популярна и имеет много формулировок.

Задача. Студент пришел на экзамен, выучив из 20 билетов только 15. Перед ним было взято два билета. Какова вероятность того, что он знает наудачу вытянутый билет.

Задача на формулу полной вероятности. До того, как наш студент вытянет билет, могли быть взяты либо два известных ему билета с вероятностью $\frac{15\cdot14}{20\cdot19}=\frac{21}{38}$, либо один известный и один неизвестный с вероятностью $\frac{15\cdot5}{20\cdot19}+\frac{5\cdot15}{20\cdot19}=\frac{15}{38}$, либо два неизвестных с вероятностью $\frac{5\cdot4}{20\cdot19}=\ \frac{1}{19}$. Вероятность вынуть третьим выученный билет при условии реализации гипотез будет равна, соответственно, $\frac{13}{18}$, $\frac{14}{18}$ и $\frac{15}{18}$.

Тогда искомая вероятность P = $\frac{15\cdot14\cdot13}{20\cdot19\cdot18}+2\frac{5\cdot15\cdot14}{20\cdot19\cdot18}+\frac{5\cdot4\cdot15}{20\cdot19\cdot18}=\frac{3}{4}$.

Заметим, что если бы студент вытягивал билет первым, то вероятность вынуть выученный билет также была бы $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

Выясним, какова будет вероятность вытянуть выученный билет, если студент берет билет вторым. В этом случае до него мог быть вынут выученный билет с вероятностью $\frac{15}{20}$ и невыученный с вероятностью $\frac{5}{20}$.

Тогда искомая вероятность будет равна $\frac{15\cdot14}{201\cdot9}+\frac{5\cdot15}{20\cdot19}=\frac{3}{4}$.

Итак, оказывается вероятность вынуть выученный билет не зависит от того, вынимать его первым, вторым или третьим и равна $\frac{3}{4}$.

Также могут предлагаться и достаточно известные и популярные задачи. Рассмотрим в качестве примера задачу о нетерпеливых дуэлянтах. Эта задача также достаточно популярна и имеет много формулировок.

Задача. Дуэли в городе N редко заканчиваются печальным исходом. Порядок проведения дуэлей определен следующим образом. Каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени между 6 и 7 часами утра и, подождав соперника 5 минут уходит. Если соперник прибудет в течение этих 5 минут, то дуэль будет проведена. Найти вероятность того, что дуэль состоится.

Можно построить следующую геометрическую модель. Пусть x и y обозначают время прибытия первого и второго участников дуэли, измеренное в долях часа начиная с 6 часов. Область, определяемая неравенствами $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, может быть представлена в виде квадрата на плоскости. Область благоприятных исходов определяется неравенством $-\frac{1}{12} \leq x - y \leq \frac{1}{12}$. Вероятность того, что участники дуэли не встретятся равна $(\frac{11}{12})^2 = \frac{121}{144}$.

Значит, вероятность того, что участники дуэли встретятся, равна $1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$.

Для домашней подготовки могут быть предложены более сложные задачи. Например, задачи о случайном блуждании частицы в одномерном и двумерном случаях [2].

Обобщая все выше сказанное, можно сделать вывод, что занимательные задачи по теории вероятностей способствуют развитию математического мышления студентов, требуют более глубокого и сознательного изучения ими дополнительной литературы, систематизации вопросов теории, а также формируют навыки исследовательской деятельности, что способствует развитию интереса как к конкретной теме, так и к изучаемой дисциплине в целом. Решение таких задач играет важную роль в профессиональной подготовке будущего учителя математики [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашенков, А.Р. О занимательных задачах в курсе теории вероятностей / А. Р. Кашенков // Современные проблемы и перспективы обучения математике, физике, информатике в школе и вузе: межвузовский сборник научно-методических трудов. – Вологда: ВоГУ, 2022. – С. 23 – 26.

2. Кашенков, А.Р. Использование квест-технологий при изучении курса теории вероятностей / А. Р. Кашенков // Современные проблемы и перспективы обучения математике, физике, информатике в школе и вузе: межвузовский сборник научно-методических трудов. – Вологда: ВоГУ, 2020. – Вып. 3. – С.30 – 34.

3. Тестов, В.А. Решение задач как основное средство развития математического мышления / В. А. Тестов //Математический вестник Вятского государственного университета. – 2022. – № 1 (24). – С. 57 – 61.

4. Эвнин, А. Ю. Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах / А. Ю. Эвнин, Э. Ю. Лернер, Ю. А. Игнатов, И. С. Григорьева // Математическое образование. – 2017. – № 4(84). – С. 45 – 60.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ УЧАЩИХСЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ ПРИ ВВЕДЕНИИ ДЕЙСТВИЯ УМНОЖЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМЕ РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ

Н.К. Князева

Научный руководитель М. В. Носков, доктор физ.-мат. наук, профессор, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

e-mail: Nadusha8@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается подход к организации деятельности учащихся на уроках математики в системе развивающего обучения Д.Б.Эльконина, В.В.Давыдова. Приводятся методические приемы введения действия умножения во 2 классе с использованием основной и промежуточной мерки при измерении величины.

Ключевые слова: развивающее обучение, измерение величины, мерка, умножение.

В соответствии с приказом Министерства просвещения от 31 мая 2021 г. обновленный федеральный государственный образовательный стандарт требует достижения предметных результатов в деятельностной форме, а научно-методологической основой его является системно-деятельностный подход. [1].

Рассмотрим в этой статье подход к организации деятельности учащихся в системе развивающего обучения Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, авторы которой считают предметные действия учеников неотъемлемой частью системы формирования теоретических понятий в начальной школе [2]. Практическая задача, поставленная перед учениками, превращается в учебно-практическую, а затем в учебную задачу. Условие решения таких задач – совместная деятельность учеников. А.К. Дусавицкий называет такую работу «совместной работой в условиях решения практических задач» [3].

С.Ф. Горбов называет факторами, определяющими эффективность деятельностного подхода в обучении математике, особенности математического содержания и логику построения курса, позволяющие формировать учебную деятельность, применение квазиисследовательского метода в обучении, развертывание коллективно-распределенных форм деятельности, характер отношений учащихся между собой и с учителями и родителями [4].

Приведем пример введения темы «Умножение» из курса математики 2 класса в системе развивающего обучения Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова. Понятие действия умножения начинает формироваться с постановки и решения задачи отмеривания величины в ситуации, когда величина значительно больше имеющейся мерки. В этом случае использование основной мерки неудобно, приходиться строить дополнительную мерку и отмеривать величину с помощью нее.

Введение понятия умножения может разворачиваться по следующему сюжету. Необходимо измерить объем воды в ведре. (Дети уже знакомы с понятием величины и знают некоторые величины: длину, площадь, объем, массу и время, умеют измерять и отмеривать величины с помощью мерки.) Обычно при измерении величины ученики использовали мерку, соизмеримую с величиной. При данном практическом задании ученикам предлагается неудобная мерка – слишком **маленькая** для ведра воды. Это может быть небольшой стакан, мензурка и др.

Практическое действие измерение объема маленькой меркой начинается в демонстрационном режиме - перед всем классом. В обсуждении должно прозвучать, что мерка не подходит для измерения объема ведра воды. Но как же быть, ведь нам надо знать количество именно таких мерок! Это условие может быть заложено в истории, которая предшествует измерению: «Доктор прописал микстуру для заболевшего слона. Ему надо столько же микстуры, сколько в этом ведре. Надо сообщить число мерок в зоопарк по телефону. (Важное условие: нельзя просто сравнить объемы, разместив два ведра рядом). Надо измерить объем мензуркой, потому что такая мензурка есть у доктора в зоопарке».

При фронтальном обсуждении сложившейся ситуации («мы так до вечера будем измерять») поступают предложения детей использовать более крупную мерку. Крупной меркой можно измерить объем быстро и точно. А саму крупную мерку надо измерить маленькой (основной) меркой всего **один** раз.

Далее необходимо дать возможность самим ученикам провести практические измерения в группах. Работа проводится с тремя сосудами: маленькая мерка, дополнительная (более крупная) мерка и большой сосуд (ведро, ваза, банка и т.д.)

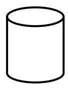
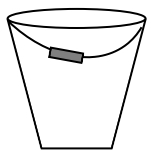
		
Маленькая мерка (основная)	Крупная мерка (дополнительная)	Объем воды, который нужно измерить

Рис. 1 Сосуды для проведения практических измерений

Полученные данные группа оформляет в виде модели на листе бумаги и вывешивает при обсуждении на доску. Группа выступает и расшифровывает свою модель для всех.

Авторы учебника по математике, 2 класс, предлагают такую модель при использовании дополнительной мерки [5], где Е - основная мерка, С - дополнительная мерка, К – величина, которую надо измерить.

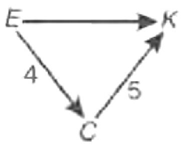


Рис. 2. Модель измерения величины К меркой Е [5].

Использование моделей очень важно в обучении математике в начальной школе – именно в них фиксируется общее отношение, составляющее смысл учебной задачи. В данной модели показано, что измерение маленькой меркой большой величины «идет в обход» – сначала вводится дополнительная мерка, потом уже ею измеряется величина.

Прочитать данную модель можно следующим образом: «Мерка Е уложилась в мерке с 5 раз, мерка С уложилась в величине К 4 раза». Или «по 4 взяли 5 раз». Умножение рассматривается как особое действие, связанное с переходом к новым меркам в процессе измерения величин [6].

Таким образом, организация практического действия учащихся на уроках математики способствует формированию умственных действий и введению математических понятий. Эффективность подобной практики подтверждается высокими результатами предметной диагностики учащихся, например, при проведении единой итоговой работы по математике в разных классах, второклассники, обучающиеся в данной системе, показывают более высокие результаты, чем их ровесники, обучающиеся в традиционной системе обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 286 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования» https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400807193/
2. Давыдов В.В., Жаренова О.Ю., Либерман А.А., Морщенок И.С., Николаев С.А., Репина О.К., Хатипов Д.А. Проблема формирования у детей младшего школьного возраста теоретических понятий. / Информационный бюллетень РФФИ, 5 (1997) Науки о человеке и обществе.
3. Урок в начальной школе. Реализация системно-деятельностного подхода к обучению : книга для учителя / А. К. Дусавицкий [и др.]. – 3-е изд.. – Москва : Вита-Пресс, 2011. – 287 с.
4. Обновление содержания основного общего образования. Математика / С. Ф. Горбов, Т. А. Конобеева, Т. В. Новикова [и др.]. – Москва : Некоммерческое партнерство содействия научной и творческой интеллигенции в интеграции мировой культуры «Авторский Клуб», 2017. – 80 с.
5. Горбов, С. Ф. Обучение математике. 2 класс : (система Д. Б. Эльконина - В. В. Давыдова) : пособие для учителя начальной школы / С. Ф. Горбов, Г. Г. Микулина, О. В. Савельева ; С. Ф. Горбов, Г. Г. Микулина, О. В. Савельева. – 3-е изд.. – Москва : Вита-Пресс, 2009.
6. Александрова, Э. И. Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс. (Система Д. Б. Эльконина-В. В. Давыдова) : пособие для учителя / Э. И. Александрова ; Э. И. Александрова. – 3-е изд.. – Москва : Вита-Пресс, 2004.

ДИДАКТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВНЕКЛАССНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕРОПРИЯТИЙ

Я.В. Корж, С.П. Грушевский, В.А. Лазарев

Кубанский государственный .университет, Краснодар, Россия

e-mail: nurktwin@yandex.ru, spg@kubsu.ru, victor_lazarev@mail.ru

Аннотация. Математически одаренному ребенку необходимо создавать условия выхода за рамки шаблонов в рассуждениях. Тематика и содержательная часть решаемых заданий должна быть как можно более разнообразной – от задач по изученным ранее темам, до заданий на смекалку, элементарных математических ребусов и вопросов-шуток, от задач «на слух» и скорость реакции до задач дистанционных олимпиад, при решении которых можно пользоваться любой вспомогательной литературой.

Ключевые слова: математическая одаренность, олимпиада, матхоккей, матбой.

В условиях динамично изменяющейся жизни фундаментальные математические знания являются не только инвариантом, но и базисом для огромного количества профессий современного мира. Одна из лучших возможностей пробудить интерес к математическому творчеству и развить нестандартное мышление – это участие школьника в математических кружках или тематических сезонных школах.

Главные отличительные особенности математических кружков – это выход за рамки шаблонов, многообразие форм работы и особая творческая атмосфера сотрудничества между преподавателем и учащимися. Среди заданий, выполняемых учащимися должны использоваться в том числе и фундаментальные математические идеи, оформленные в виде задач. При этом акцент традиционно делается не на обучение самим фактам, а на методы их получения и применения.

Участие в математических мероприятиях помогают выработке умений и навыков, которые в комплексе способствуют развитию математической подготовки школьников.

К примеру, скорость реакции и быстроту мышления помогают развивать турниры по «Математическому хоккею». Способствовать развитию интуиции, логического мышления, формированию геометрических представлений поможет решение исследовательских геометрических задач в рамках очных или заочных олимпиад. Командные турниры с уровнем сложности задач ниже олимпиадной (такие как «Математическая драка», «Регата» и т.д.) в первую очередь учат немаловажной не только в математике, но и в любой другой науке вещи - умению работать в коллективе, умению совместного решения проблемы. А одно из самых популярных на постсоветском пространстве мероприятий, «Математический бой», вырабатывает умение мыслить критически, строить доказательства и находить ошибки.

Среди большого разнообразия стандартных и нестандартных задач для различных математических мероприятий можно выделить следующие системы, разделенные по условиям времязатратности и возможности использования вспомогательных материалов и коллективной работы:

- задачи заочных олимпиад (на решение может отводится несколько суток, в силу элемента соревновательности участникам не имеет смысла решать задачи коллективно, совместно с прямыми конкурентами, при отсутствии контроля доступен любой справочный материал, решения задачи и их заявленная сложность оцениваются разным количеством баллов);
- задачи очных олимпиад (соревнование длится от нескольких часов один или несколько дней, в силу наличия контроля участник не имеет возможности использовать справочный материал и прочую помощь со стороны, решения задачи и их заявленная сложность оцениваются разным количеством баллов);
- задачи Матбоя (работа в команде в течение нескольких часов, решения задач проверяют в первую очередь соперники, задачи более творческие, не привязанные жестко к методу решения, изначально полное решение каждой задачи оценивается одним и тем же количеством баллов, которые могут быть поделены между командами);

- задачи Матхоккея (блицзадачи, задачи на смекалку, решение которых предполагает от 10 до 30 секунд);
- задачи математических регат и математической драки (работа в команде, время от 15 до 30 минут на блок задач, оцениваемых разным количеством баллов);
- комплекс исследовательских геометрических задач (которые могут быть использованы не только в математических соревнованиях, но и как методическое обеспечение курса математики 5-8 классов), способствующих формированию геометрической интуиции в процессе обучения школьников.

В 2023 году издательством КубГУ готовится к выпуску книга «Математические турниры, конкурсы и соревнования. Сборник задач», в которой систематизированы наборы задач для различных видов математических соревнований. Большинство приведенных в книге задач в том или ином смысле нестандартные, и в зависимости от турнира, их решение требует или смекалки и сообразительности, или скрупулезности и вдумчивости, а в некоторых случаях и многочасовых размышлений. Некоторые задачи с полным правом можно назвать «фольклорными».

В книге подробно рассказывается о специфике организации учебного процесса на примере Летней математической школы, о формах проведения занятий, о проводимых в рамках школы математических турнирах и конкурсах. Прилагаются регламенты турниров «Математический бокс» (как развитие идей турнира «Математическая драка», изложенных в [1]) и «Математический хоккей» [2]. Приведены избранные задачи сезонных школ разных лет, они снабжены рубрикатором и сгруппированы по сложности.

Книга адресована школьникам, их родителям и учителям, руководителям кружков, студентам педагогических специальностей, также она будет интересна всем любителям красивых математических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров: "АСА", 1994.-272 с
2. Корж Я.В. Турнир "математический хоккей" для одаренных учащихся 6-8 классов // Преподавание математики и информатики в школе и вузе. Материалы межвузовской научно-практической конференции. Под редакцией С.П. Грушевского. – 2017. – С.43-47.

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ КАК ИСТОЧНИКИ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Л.В. Панкратова

Вятский государственный университет, Киров, Россия

e-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. В статье приводятся примеры заданий, которые могут быть включены в содержание лабораторных работ по дисциплине «Численные методы» при изучении теории погрешностей, приемов численного интегрирования, приближенного решения нелинейных уравнений. Большинство примеров взяты из известных учебных пособий по математическому анализу.

Ключевые слова: численные методы, определенный интеграл, относительная погрешность.

Дисциплина «Численные методы» составляет важную часть подготовки современного математика (исследователя, специалиста в области математических приложений, педагога и др.). Готовность же будущих выпускников к деятельности в этих сферах выражается в их умении решать практические задачи, возникающие в реальных условиях. Для этого студенты должны не только осознавать проблему, описываемую в задаче, но и разрабатывать алгоритм ее решения, а также выбирать наиболее оптимальные способы его реализации.

Лабораторные работы – один из традиционных видов организации занятий со студентами при изучении дисциплины «Численные методы». Однако чаще всего содержание каждой лабораторной работы включает типовые задания, связанные лишь с отдельным вопросом изучаемого курса: приближенным решением нелинейных уравнений или систем уравнений, методами численного дифференцирования или интегрирования, построением интерполирующей или аппроксимирующей функции и т.д.

Однако в реальной профессиональной практике нередко требуется не только одновременная работа с несколькими чертежами, таблицами и графиками, но и применение комплекса численных методов для решения одной задачи. Умение их грамотно комбинировать показывает не только достаточный уровень предметной подготовки студентов, но и сформированность их критического мышления, важного качества современного специалиста. Подчеркнем: наименование универсальной компетенции УК-1, установленной ФГОС ВО 3++ для выпускников бакалавриата, предусматривает их способность «осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач».

В данной связи мы считаем целесообразным включение в содержание лабораторных работ по дисциплине «Численные методы» соответствующих заданий (в определенной мере их можно называть кейсами, поскольку каждое из них описывает какую-либо практическую проблему, для решения которой необходимо предложить план действий и подобрать информацию для успешной реализации этого плана).

Приведем примеры таких заданий.

1. Применяя методы численного интегрирования, найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{16 - x^2}$ и $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ (см. рис. 1).

Решение данной задачи сведется к вычислению определенного интеграла. В данном случае она «осложнится» тем, что пределы $[a; b]$ интегрирования придется искать, применяя методы приближенного решения нелинейных уравнений, а уже после обращаться к изученным способам приближенного вычисления определенного интеграла.

Аналогичные примеры задач можно найти в [1], №№2360–2363.

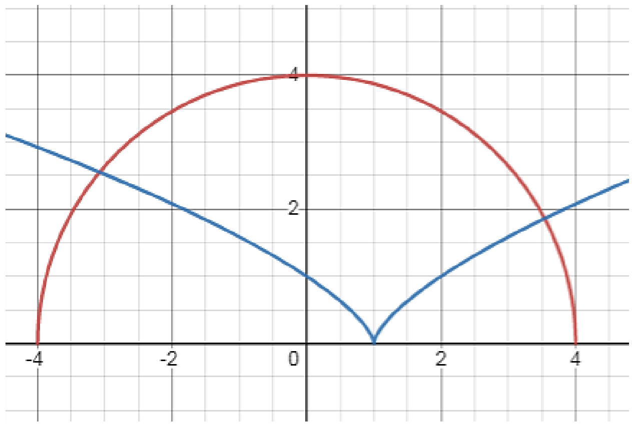


Рис. 1

2. Для вычисления работы пара в цилиндре паровой машины вычисляют площадь индикаторной диаграммы, представляющей собой графическое изображение зависимости между давлением пара в цилиндре и ходом поршня. На рис 2 изображена индикаторная диаграмма паровой машины. Ординаты точек линий *ABC* и *ED*, соответствующие абсциссам x_0, x_1, x_2, …, x_{10}, даны следующей таблицей:

Абсциссы	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ординаты линии *ABC*	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0
Ординаты линии *ED*	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8
Абсциссы	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
Ординаты линии *ABC*	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2	
Ординаты линии *ED*	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7	

Вычислить с помощью формулы Симпсона площадь *ABCDE*. Ординаты даны в миллиметрах. Длина *OF* = 88,7 мм (точка *F* – общая проекция точек *C* и *D* на ось абсцисс) [1, с. 154].

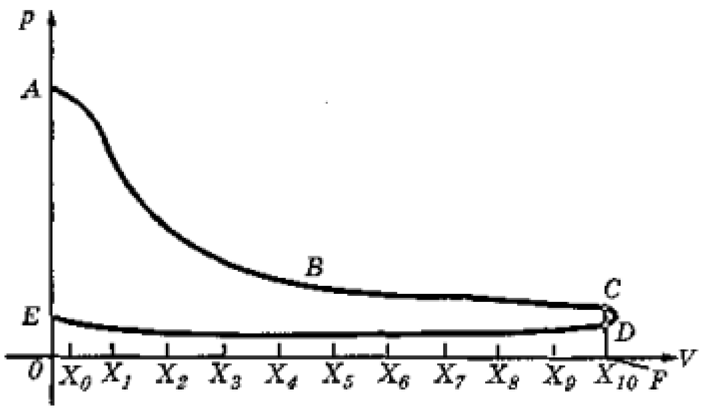


Рис. 2

В цитируемом источнике можно найти другие задачи, связанные с анализом индикаторной диаграммы.

3. При технических расчетах часто сокращают π и $\sqrt{g}$ и (g – ускорение силы тяжести), когда одно из этих чисел стоит в числителе, а другое в знаменателе. Какую относительную погрешность делают при этом [1, с. 70]?

4. Для определения ускорения свободного падения с помощью колебания маятника пользуются формулой

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

где l – длина маятника, T – период его колебаний. Как отразится на значении g относительная погрешность при измерении: а) длины l; б) периода T [2, с. 107–108]?

Подобные задачи хорошо дополняют изучение темы «Теория погрешностей» в рамках дисциплины «Численные методы». Отметим здесь же, что их формулировки взаимосвязаны.

Помимо данных примеров, в [1] и [2] можно найти упражнения, требующие приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная тема также традиционна для вузовского курса численных методов. Наряду с упомянутыми источниками здесь следует упомянуть и учебное пособие [4], в котором представлена тематика приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (рассмотрен методы Эйлера и Адамса, разностный метод на основе формулы Тейлора) и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены соответствующие упражнения (см. [4, с. 151]). Кроме заданий на приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений в [4, с. 398–399] можно найти упражнения, связанные с приближенным решением уравнений математической физики (в частности, требующие построения разностных схем в первой краевой задаче для уравнения теплопроводности и задаче Дирихле).

Упоминаемые источники [1], [2], [4] – широко известные учебные пособия по математическому анализу, активно используемые при обучении в вузе. Однако, до задач, подобных приведенным, при изучении анализа чаще всего «не доходят руки». Включение же таких заданий в содержание лабораторных работ по численным методам позволяет продемонстрировать обучающимся прикладную направленность курса, развить навыки применения аппарата математического анализа, усилить понимание межпредметных и внутрипредметных связей математики. В отношении последних ранее мы указывали: их роль в учебном процессе нельзя недооценивать, поскольку формирование внутрипредметных связей ликвидирует у студентов формализм знаний и умений, помогает им в осмыслении динамики развития главных линий учебного курса (см. [3, с. 35]). Качество усвоения содержания дисциплины повышается, а затраты учебного времени на ее изучение сокращаются.

В заключение отметим, что задачи из цитируемых источников, в том числе приведенные выше, предлагались для решения студентам ВятГУ направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» на лабораторных работах по дисциплине «Численные методы и математическое моделирование» и были решены вполне успешно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. Пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб., Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.

2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. – М.: ООО «Издательство Астрель»: «Издательство АСТ», 2002. – 558 с.

3. Панкратова Л. В. Реализация внутрипредметных связей математического анализа при изучении числовых рядов // Advanced science, 2020. – №4. – С. 31–35.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.2: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Т. Л. Панфилова

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: ptl-70@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается методическая направленность в преподавании элементарной алгебры на педагогических направлениях на примере решения текстовых задач экономического содержания

Ключевые слова: элементарная алгебра, этапы работы с задачей, математическая модель, методические аспекты.

Одной из базовых дисциплин учебного плана подготовки будущих учителей математики является элементарная алгебра. Эта дисциплина в Вологодском государственном университете изучается на первых двух курсах и предусматривает систематизацию знаний студентов, полученных при изучении школьного курса алгебры и математического анализа, углубление знаний новыми фактами с целью подготовки студентов к будущему преподаванию математики в средней общеобразовательной школе в классах разного профиля. Одна из тем, рассматриваемых в указанном выше курсе, связана с решением текстовых задач. Наряду с основными типами задач (задачи на движение, на работу и т.д.), рассматриваются задачи, решение которых связано с введением параметров, математическими моделями в виде неравенств, задачами - аналогами задач ЕГЭ с экономическим содержанием и задачами на целые числа. Остановимся на рассмотрении задач с экономическим содержанием. В Вологодской области, процент выполнения задания №15 ЕГЭ за последние два года значительно вырос с 21,65% в 2021 году до 34,32% в 2022 году, в то же время по опросам студентов – первокурсников педагогического направления, только порядка 8% из них приступали к решению этой задачи. Одна из причин такой ситуации, что школьники никогда не решали таких заданий: на уроках математики просто не хватает времени, а самостоятельно разобраться с их решением бывает довольно сложно. Поэтому на занятиях по элементарной алгебре студенты учатся решать задачи с экономическим содержанием. Вместе с тем, учитывая выбранное выпускниками педагогическое направление, естественным становится применение в процессе работы с текстовой задачей элементов методики. О необходимости непрерывной методической подготовки студентов при изучении математических дисциплин на педагогическом направлении отмечают авторы работ [1-3]. Методическая составляющая в процессе обучения решению задач способствует формированию умений решать математические задачи с позиции учителя – с осознанием путей поиска решения, его этапов и приемов, комментирования и объяснения решения, то есть способствует формированию умения решать задачи методически правильно.

Приведем пример работы с задачами с экономическим содержанием типа задания 15 ЕГЭ.

Задача 1. [4] 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

-1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го числа по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Замечание. При решении задачи четко выделяем этапы работы с задачей: 1 этап – анализ условия задачи и построение математической модели, 2 этап – исследование математической модели, 3 этап – получение ответа исходной задачи. В соответствии с ними и проходит решение.

Приведём кратко решение задачи.

Решение. Обозначим А – сумму планируемого кредита. Пусть k=$\frac{r}{100}$, *в*несём всю информацию задачи в таблицу 1:

Таблица 1

Номер месяца	Сумма долга на конец месяца	Сумма долга после начисления процентов (1 числа каждого месяца)	Ежемесячные выплаты
1	A	(1+k)A	kA+A/14
2	13A/14	(1+k)*13A/14	13kA/14+A/14
3	12A/14	(1+k)*12A/14	12kA/14+A/14
…	…	…	…
14	A/14	(1+k)*A/14	kA/14+A/14
15	0		

Так как общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит, то $A+kA\left(1+\frac{13}{14}+\frac{12}{14}+\frac{11}{14}+\cdots+\frac{1}{14}\right)=1{,}15A,\ A(1+k\cdot 7{,}5)=1{,}15A,\ k=0{,}02,\ r=2.$

Ответ. 2.

После решения студенты получают задание, которое позволяет посмотреть на задачу с позиции учителя: выделить основные этапы решения, продумать какая система вопросов поможет в составлении математической модели, какие ошибки могут возникнуть в процессе решения уравнения и как их предотвратить. Эти задания можно дать в качестве домашних. Следует обратить внимание, что модели решения задачи могут быть разными, и строиться они могут из разных рассуждений. Поэтому рассматриваются разные варианты решения, предлагаемые студентами. Кроме того, необходимо учить студентов разбираться в предложенных математических моделях.

Продемонстрируем несколько заданий для работы с предложенной задачей.

Задание 1. Опишите рассуждения, с помощью которых заполнен четвёртый столбец таблицы, лежащий в основе построенной математической модели задачи.

Примерный вариант ответа. Результат после выплаты можно представить схематично как на рисунке 1, то есть, каждый раз выплата состоит из набежавших процентов и части погашения основного долга (в задаче 1 часть основного долга – это A/14).

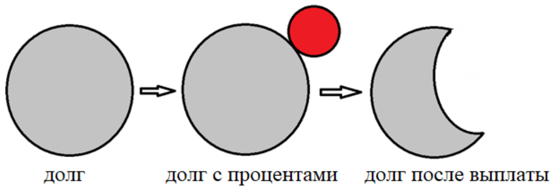


рисунок1

Задание 2: « Верна ли математическая модель задачи $kA\left(1+\frac{13}{14}+\frac{12}{14}+\frac{11}{14}+\cdots+\frac{1}{14}\right)=0{,}15A$? Обоснуйте свой ответ».

Примерный вариант ответа может быть следующий: «Замечаем, что общая выплата состоит из суммы, взятой в кредит и переплаты, а переплата складывается из суммы набегающих процентов, поэтому переплата – это сумма процентов, которая равна $kA\left(1+\frac{13}{14}+\frac{12}{14}+\frac{11}{14}+\cdots+\frac{1}{14}\right)$. Значит, модель верна».

Задание 3. Опишите рассуждения, с помощью которых заполнен четвёртый столбец таблицы 2, лежащий в основе построения математической модели задачи. Укажите, как в этом случае может быть записана математическая модель.

Таблица 2

Номер месяца	**Сумма долга на конец месяца**	**Сумма долга после начисления процентов (1 числа каждого месяца)**	**Ежемесячные выплаты**
1	A	(1+k)A	(1+k)A-13A/14
2	13A/14	(1+k)·13A/14	(1+k)·13A/14-12A/14
3	12A/14	(1+k)·12A/14	(1+k)·12A/14 – 11A/14
…	…	…	…
14	A/14	(1+k)·A/14	(1+k)·A/14-0
15	0		

Примерный вариант ответа. В каждой строке четвертого столбца записана разность долга после начисления процентов и остатка долга после выплаты. Математическая модель: (1+k)A-13A/14+(1+k)·13A/14-12A/14+(1+k)·12A/14 – 11A/14+…+(1+k)·A/14=1,15A.

Задача 2. [4] В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

-с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя **равными** платежами (то есть за 4 года)?

Приведем вариант задания для работы с задачей после решения.

Задание. Проверьте, верны ли математические модели задачи и попытайтесь сформулировать рассуждения, с помощью которых они получены:

Модель 1. Пусть x – ежегодная выплата, а A=8052000 – сумма, взятая в кредит, тогда $1{,}2^4A - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x = 0$.

Модель 2. Пусть A=8052000 – сумма, взятая в кредит, первая выплата $0{,}2A + x_1$, вторая - $0{,}2(A - x_1) + x_2$, третья - $0{,}2(A - x_1 - x_2) + x_3$, четвертая - $1{,}2(A - x_1 - x_2 - x_3)$. Тогда $\begin{cases} 1{,}2x_1 = x_2 \\ 1{,}2x_2 = x_3 \\ 1{,}2(A - x_1 - x_2 - x_3) = 0{,}2(A - x_1 - x_2) + x_3 \end{cases}$.

Предложенные типы заданий вызывают интерес со стороны студентов, но они требуют глубокого осмысления задачи, поэтому часть заданий, например, связанные с другим подходом, другой моделью, другим способом решения, как правило, предлагаются в качестве домашнего задания. Такие упражнения помогают не только научиться правильно решать задачи, но и начать формировать методические умения у студентов младших курсов педагогических направлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлова Л.В. Методическая составляющая профессиональной компетентности будущего учителя математики // Современные проблемы обучения математике в школе и вузе. Материалы Всероссийской научно-методической конференции. В 2-х томах. Псков, – 2020. – С.13-19.

2. Сарванова Ж.А. Методическая направленность обучения элементарной математики студентов математических специальностей педвуза: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е.Евсевьева, Саранск, – 2009.

3. Ульянова И.В., Сарванова Ж.А. Интеграция математической и методической подготовки студентов в обучении элементарной математики // Интеграция образования. – 2010. – №3(60). – С.100-105.

О РАЗВИВАЮЩЕМ ОБУЧЕНИИ В ФОРМИРОВАНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ О ПОНЯТИЯХ ИЗОМОРФИЗМА И АВТОМОРФИЗМА ГРАФОВ И РЕШЕТОК

Е.А. Перминов

Уральский технический институт связи и информатики, Екатеринбург, Россия

e-mail: perminov_ea@mail.ru

Аннотация. Изучение симметрии объектов в науке и природе имеет фундаментальное общеобразовательное значение в школе. Целью работы является углубление геометрических познаний школьников о понятии симметрии. Это осуществляется на основе формирования их представлений о понятиях изоморфизма и автоморфизма (симметрии) графов и решеток. Охарактеризована роль принципов развивающего обучения в изучении этих понятий.

Ключевые слова: школа, обучение математике, содержание, понятие симметрии, симметрия графов и решеток.

На уроках геометрии в школе значительное внимание уделяется изучению симметрии геометрических фигур и тел. Однако в силу уникального общекультурного и научного значения понятия симметрии этого далеко недостаточно. В связи с этим сошлемся на мнение крупного математика и физика Г. Вейля о том, что «симметрия в широком смысле … является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство …» [1]. Поэтому идея симметрии является трансдисциплинарной идеей [8], буквально пронизывающей не только исследования многих естественных, технических и других наук, но и являет нам красоту окружающего мира природы, отражая ее в науке и в произведениях искусства.

Как известно, некоторые понятия теории графов, необходимые для последующего формирования углубленных представлений школьников о симметрии в науке и природе уже внедрены в профильное обучение математике и информатике в школе. Однако обучение важным понятиям теории решеток с целью формирования этих представлений в профильном обучении в школе не осуществлено. Особенно важное значение в углубленном изучении симметрии имеет формирование представлений школьников о понятиях изоморфизма, автоморфизма (симметрии) графов и решеток.

Анализ монографии В.В. Давыдова [2] показывает, что в методике формирования представлений школьников об этих понятиях ведущую роль играют следующие принципы развивающего обучения: *принципы понятийного подхода к содержанию обучения, опоры на поисковую активность учащихся, диалогичности этого обучения* в совместной творческой деятельности учащихся с учителем и между собой.

Как известно, стандартные определения графов и решеток из учебников для вузов и их изоморфизмов с использованием понятия биекции множества их вершин и элементов трудны для восприятия школьников. Поэтому в формировании их представлений о понятиях изоморфизма и автоморфизма графов и решеток важно предварительно изложить методику реализации принципов *понятийного подхода к содержанию обучения* и *опоры на поисковую активность учащихся* в поэтапном формировании этих понятий по описываемым далее методическим *схемам.*

1. *Схема изучения понятий графа, изоморфизма и автоморфизма графов.* В процессе решения практических и занимательных задач понятие графа традиционно предстает вначале как множество точек на плоскости, часть из которых попарно соединены между собой отрезками прямой. Далее учащимся предлагается задача о нахождении всех графов, наглядно иллюстрирующих все возможные варианты расположения дорог между четырьмя населенными пунктами. Затем предлагается считать, что вершины этих графов и ребра изображают схемы сигнальных устройств каких-то пунктов охраны. Учащиеся устанавливают, что существует только две схемы (графа), принципиально отличающиеся друг от друга с возможностью передачи сигнала с одного устройства любое другое. Затем на рисунках изображаются еще две сигнальные схемы, являющиеся графами с пятью вершинами, образующими цикл, но с различными обозначениями вершин и сильно отличающихся расположением ребер. Но для них тоже есть один и тот же вариант последовательной передачи сигнала по ребрам цикла графов. Поэтому такие графы после определения их изоморфизма не будут различаться и называться *равными*.

Охарактеризуем методическую схему изучения понятия изоморфизма *конечных* графов из учебного пособия для школы [3]. При этом по аналогии с равными треугольниками изоморфные графы в ней будут называться привычно для учащихся равными.

Рассматривается произвольный граф с n вершинами. Занумеруем его вершины числами от 1 до n. Ребро графа, соединяющие вершины i и j, обозначим (i, j) в случае $i < j$. Если же $j < i$, то обозначим ребро (j, i). Таким образом, с помощью точек с координатами (i, j) в прямоугольной декартовой системе координат Oxy можно записать всю информацию о ребрах: число ребер и то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Дается *определение*. Графы Γ и G с одинаковым числом элементов называются *равными*, если вершины каждого графа можно занумеровать так, чтобы ребрам Γ и ребрам G соответствовало одно и то же множество точек на координатной плоскости Oxy.

Далее для пояснения этого определения целесообразно вернуться к рисунку с двумя графами с пятью вершинами, изображающими схему сигнальных устройств, а на другом рисунке предложить два не равных графа тоже с 5 вершинами. Учащимся предлагается с помощью этого определения выяснить, какая именно пара графов является равными. Для этого учащиеся перебирают все варианты нумерации вершин каждого из этих пар графов. В результате учащимся убеждаются, почему ранее два графа (схемы сигнальных устройств) не случайно названы равными графами.

Сообщается, что в отличие от треугольников равные графы в теории графов называются соответственно изоморфными и в противном случае не изоморфными.

При определении автоморфизма графа с n вершинами его вершины обозначаются натуральными числами от 1 до n. Затем при его определении используется, как и в комбинаторике, перестановка на множестве вершин графа. И далее объясняется, что *автоморфизмом* графа является такая перестановка его вершин, при которой любые вершины (до их перестановки) были соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие им при перестановке вершины другого ребра. Приводятся примеры автоморфизмов графов.

Далее, реализуя *принцип диалогичности обучения,* целесообразно предложить школьникам решить серию несложных исследовательских задач на описание различных видов n-вершинных неизоморфных обыкновенных связных графов при $n \leq 5$ и их автоморфизмов. В этом важное значение имеют принципы опоры на поисковую активность каждого учащегося и диалогичности этого обучения.

2. *Схема изучения понятий решетки, изоморфизма и автоморфизма решеток.* Важно отметить, что в школьной и в значительной степени в вузовской математике учащиеся встречаются лишь с линейным порядком. Однако еще в младших классах можно начинать пропедевтику различия понятий линейного и нелинейного порядка. Как обосновано в [6], это очень важно в формировании нелинейного мышления учащихся и студентов, лежащего в основе исследования сложных природных и технических систем.

Предлагаемая методическая схема формирования представлений о изоморфизмах и автоморфизмах *конечных* решеток с точки зрения развивающего обучения во многом аналогична предыдущей схеме. Сначала приводятся примеры линейно и нелинейно упорядоченных множеств: линейный порядок на множестве матрешек, среди учащихся по возрасту, по росту, по фамилии в классном журнале, на множестве нот, нелинейный порядок на множестве воинских званий, на множестве прямоугольников (упорядочиваемых в зависимости от длины и ширины) и других предметов. Затем на рисунках изображаются специально подобранные обыкновенные графы с небольшим числом вершин, у каждого из которых любое ребро отрезком (или коротким отрезком выпуклой кривой) можно изобразить так, что один конец этого ребра находится выше другого. Но *главное*, все эти графы надо подобрать такими, чтобы в результате на рисунках они предстали как изображения (диаграммы) частично упорядоченных множеств. Среди графов целесообразно также сразу предусмотреть графы, являющиеся диаграммами решеток.

Далее вершины графа будут называться элементами. Для каждого ребра такого графа с элементами a и b называется *большим* тот элемент, который на рисунке (диаграмме) находится выше другого. Например, пусть это будет элемент b. Тогда вводится обозначение $b > a$. Если не существует элемент x такой, что $b > x > a$, то элемент b называется *покрытием* элемента a. При этом граф называется *упорядоченными множествами,* его изображение – *диаграммами*.

На основе определенного таким образом отношения покрытия на упорядоченном множестве наглядно определяются операции нахождения точной верхней и нижней грани вершин этого множества. В силу необычности и трудности восприятия этих терминов теории решеток эти операции называются привычным для школьников образом соответственно суммой $a + b$ и произведением $a \cdot b$ элементов a и b (как и в случае операций с числами). Элемент $a + b$ определяется на диаграмме как наименьший среди элементов, больших a и b одновременно. Двойственным образом определяется произведение $a \cdot b$ элементов a и b и тем самым наглядно определяется *понятие решетки*. Далее приводятся примеры диаграмм упорядоченных множеств, в которых для некоторых элементов a и b их произведение $a + b$ или элемент $a \cdot b$ не находится. Учащиеся устанавливают, что эти диаграммы – не решетки. Затем организуется их поисковая деятельность на нахождение всех n -элементных решеток для $n \leq 5$ (и даже для $n \leq 6$).

Изоморфизм (равенство) двух решеток определяется на основе взаимно-однозначного соответствия между их элементами, при котором элемент, соответствующий элементу a, обозначается a'. При этом взаимно-однозначное соответствие называется *изоморфизмом*, если сумме $a + b$ элементов a и b одной решетки соответствует сумма $(a + b)'$ элементов a' и b' другой решетки, равная $a' + b'$. Одновременно аналогичное требование формулируется для произведения $a \cdot b$ элементов a и b. Изучение определения иллюстрируется диаграммами решеток.

Исходя из этого определения, точно также на основе взаимно-однозначного соответствия, устанавливаемого уже между элементами решетки, определяется изоморфизм решетки на себя, называемый его автоморфизмом. Приводятся примеры автоморфизмов решетки.

Используя предложенные методические схемы, далее можно дать учащимся традиционные определения понятия решетки, изоморфизмов и автоморфизмов решеток из учебников из теории решеток. При определении этих понятий необходимо предварительное изучение основных свойств бинарных отношений и порядковых структур, изложенных в [4, 7]. Тем самым будет подготовлено изучение понятия решетки как алгебраической структуры, определяемой тождествами.

Следует отметить, что в статье [5] предложен ряд исследовательских задач для школьников на графы и решетки с «богатой» – симметрической группой их автоморфизмов (симметрий) с указаниями для учителей к их решению. В статьях [5, 9] есть и другие задачи на некоторые виды групп симметрий графов и решеток, в том числе – на реализацию междисциплинарных связей алгебры, геометрии, физики, химии и других предметов. В их решении также важен принцип *диалогичности обучения.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. Симметрия. Пер. с англ. / М.: Изд. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 192 с.

2. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. 2-е изд. / М.: Педагогическое общество России. 2000. – 480 с.

3. Перминов Е.А. Дискретная математика: учеб. пособие для 8–9-х кл. сред. общеобразоват. школы / Екатеринбург: ИРРО, 2004. – 206 с.

4. Перминов Е.А. Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений / Екатеринбург: изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. – 256 с.

5. Перминов Е.А. О профильном обучении школьников решению исследовательских задач на группы симметрий графов и решеток // Материалы III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, физике и информатике в условиях цифровой трансформации». Вологда: ВоГУ, 2022. – С. 135-139.

6. Тестов В. А. Математика как основное средство развития мышления учащихся в цифровую эпоху // Материалы XXXIX Межд. научного семинара преподавателей математики и информатики

университетов и педагогических вузов «Математика – основа компетенций цифровой эры», Москва, МГПУ, 2020. – С. 67-70.
7. Тестов В.А. Порядковые структуры в алгебре и теории чисел / М.: МПГУ, 1997. – 110 с.
8. Тестов В. А., Перминов Е. А. Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23, № 3. – С.11–34.
9. Kuznetsova I. V., Perminov E. A., Smirnov E. I., Solovyeva A. A., Tikhomirov S. A. Founding of Mathematical Structures Through Learners' Network Project Activities. Ярославский педагогический вестник, № 6, 2016. – С. 139-145.

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБУЧЕНИЯ

В.А. Тестов *доктор пед. наук, профессор*
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
e-mail: vladafan@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматриваются особенности методики преподавания математики в условиях цифровой трансформации обучения. Затрагиваются проблемы использования в обучении трансдисциплинарного подхода и преподавания информационной математики.

Ключевые слова: трансдисциплинарный подход, самообразование, метапредметные результаты, информационная математика.

В настоящее время в обучении математике школьников и студентов происходят существенные перемены, связанные с информатизацией образования и использованием нового программного обеспечения, предоставляющие в умелых руках педагога эффективные способы для развития у обучающихся интереса к изучению математике. Однако зачастую процесс цифровой трансформации образования является скоропалительным, методологически не подкрепленным, наблюдается отсутствие четкой процедуры адаптации обучаемых к цифровому формату обучения. Поэтому этот процесс часто приводит к ущемлению фундаментальности подготовки по математике. Причина возникающих трудностей кроется не в косности и невосприимчивости педагогов и студентов к цифровым технологиям, а прежде всего в том, что нарушается единство обучения и воспитания в форме живого общения с учащимися. Возникающие трудности в условиях коммерциализации образования усугубляются попытками со стороны некоторых структур навязать школам и вузам недостаточно качественные цифровые технологии.

В исследовании проблем цифровой трансформации математического образования споры развернулись вокруг центрального понятия – «цифровизация образования». Одни ученые считают этот термин неудачным, поскольку смысловое значение словосочетания «цифровизация образования» является некорректным. Поэтому предлагается его вообще не использовать в научной литературе. Другие считают термин «цифровизация образования» синонимом термина «информатизация образования». Третьи считают этот термин более предпочтительным, чем «информатизация образования», поскольку, по их мнению, цифровизация возникла раньше информатизации. Но большинство авторов пытаются все же развести эти два понятия, но при этом предлагают совершенно разные критерии разделения этих понятий [3].

Вместо полноценного обучения математике и информатике часто звучат призывы развивать так называемые «цифровые навыки». «Хотя термин «навыки» давно используется в российской педагогике, однако в последнее время трактовки этого термина в научной литературе стали существенно отличаться от его традиционного понимания. Между тем англоязычный термин «skills», широко распространенный на Западе и поспешно перенятый рядом российских ученых, не соответствует в полной степени российскому термину «навыки»». Понимание этого термина комиссией ЮНЕСКО ближе к значению российского термина «профессиональное умение». В российской педагогической науке была разработана теория знаний–умений–навыков в результаты многолетних исследований в НИИ общей педагогики РАО. Ядром этой теории является идея о тесной взаимосвязи знаний и навыков. Без знаний, имея только набор определенных навыков, человек превращается в робота – исполнителя, который не может самостоятельно действовать в критических ситуациях. Из этой теории вытекает, что нельзя отрывать навыки от знаний, что знания, особенно математические, являются методологической основой «нормативного» содержания других видов содержания образования, в том числе умений и навыков [1; 5].

Однако некоторые реформаторы образования, не вникая в суть ключевых общенаучных понятий, ставят навыки выше знаний, в том числе математических. Мол, знания быстро устаревают, а навыки остаются. Поэтому надо строить не общество знаний, а общество навыков. Невольно напрашивается вывод о том, что для обучения навыкам достаточно научить учащихся пользоваться инструктивным материалом. Однако учителям математики хорошо известен большой вред обучения с такими довлеющими над учителем и учащимися рекомендациями, когда думать не обязательно, а надо лишь работать по установленным кем-то инструкциям.

Происходящие в современном обществе процессы цифровой трансформации образования приводят к тому, что в системе образования появляется определенная доля хаоса. Функционирование системы образования в этих условиях можно и нужно рассматривать как организацию сложных нелинейных самоорганизующихся систем. В цифровом образовательном пространстве конструктивная роль хаоса становится все более очевидна, который предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы образовательного процесса. Саморазвитие обучающегося в таком учебном процессе, как правило, принимает форму самообразования [1].

В этих условиях возникает проблема поиска педагогических подходов, способных осуществлять «сжатие» необходимого для усвоения учебного материала. Одним из наиболее приемлемых для таких целей является использование трансдисциплинарного подхода, основанного на обнаружении общих закономерностей организации любого знания. Сейчас большую часть своей жизни человек тратит на освоение опыта прошлого, на получение репродуктивных знаний. Использование же такого подхода в обучении позволяет обучающимся не тратить усилия и время на освоение второстепенных, частных знаний, а сосредоточиться на главном.

Идеи и методы современной математики, особенно дискретной (компьютерной), породили уникальные трансдисциплинарные научные области такие, как искусственный интеллект, большие данные и др., коренным образом преобразующие профессиональную деятельности и весь мир профессий. Ключевыми математическими понятиями, буквально пронизывающими современное научные исследования с использованием компьютера, стали понятия дискретной математики (комбинаторная конфигурация, *n*-арное отношение, высказывание и предикат, граф и сеть, формальный язык и др.). Перечисленные научные области позволяют вывести все образование, а не только математическое, на новый, трансдисциплинарный уровень, как новую ступень проявления его междисциплинарности. Трансдисциплинарный тренд в образовании имеет определяющее значение для реализации опережающего образования [9].

Современная математика является не только основой получения студентами общих междисциплинарных знаний и представлений, но и основой формирования наиболее плодотворного трансдисциплинарного способа мышления, овладения развитыми аналитическими способностями, нелинейным мышлением. Для формирования нелинейного мышления очень полезным является изучение нелинейных порядковых структур [6].

На 32-й Генеральной конференции ЮНЕСКО отмечалось, что учитель остается для образования одновременно «и проблемой, и ее решением». Таким образом, в предотвращении негативных последствий цифровой трансформации образования ключевой фигурой является учитель (преподаватель), реализующий в своей профессиональной деятельности основополагающую идею единства обучения, воспитания и развития.

Поэтому актуальной является проблема методологической и методической проработки процесса цифровой трансформации содержания обучения математике как в школе, так и вузе. Несомненно, что обучение математике не должно быть основано на механическом запоминании большого числа определений, утверждений, формул и т.д. Оно должно быть направлено прежде всего на формирование в качестве метапредметных результатов обучения когнитивных структур и схем как основы универсальных познавательных учебных действий, важных в профессиональной деятельности любого специалиста. Среди таких когнитивных схем следует отметить логические, алгоритмические, комбинаторные, стохастические и образно-геометрические. Главным средством формирования таких схем является решение соответствующих типов нестандартных задач [4]

При отборе содержания обучения математике были выделены также наиболее перспективные направления в работе [7].

Как заметил академик А.Л. Семенов, «в чистой математике наиболее радикальное изменение состояло в том, что математика включила в сферу своего изучения информационные объекты и процессы». Эти «новые» области математики (математическая логика, комбинаторика, теория графов и теория алгоритмов и др.) быстро оказались в очень большой степени востребованными информатиками. Такую «*информатическую»* математику, по его мнению, «целесообразно начинать изучать еще в начальной школе, поскольку во многих случаях ее объекты и процессы обладают высокой степенью наглядности и даже осязаемости» [2].

Несомненно, что в цифровой трансформации содержания обучения математике велико значение математических основ компьютерных наук. Поэтому возникает потребность в расширении содержания подготовки студентов в области информационной математики. необходимы разработка и внедрение в подготовку специалистов разных профилей соответствующего профильного курса обучения таким основам. Более того, для подготовки учителей математики и информатики видимо необходимо внедрение специального модуля, состоящего из комплекса таких дисциплин. Однако возможность такого расширения содержания весьма ограничена, Ограничения такого расширения можно частично снять при использовании в обучении уникальных возможностей Искусственного интеллекта и Больших данных.

Как следует из вышеизложенного, главным направлением расширения возможностей преподавателя (учителя) при использовании цифровых, педагогических и других технологий является его подготовка к применению трансдисциплинарного подхода, основанного на выявлении общих закономерностей организации любого знания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методология научного исследования в педагогике: Коллективная монография / под ред. Р.С. Бознева, В.К. Пичугиной, В.В. Серикова. –М.: Планета, 2016. – 208 с.
2. Семенов А.Л. Современный курс математики и информатики в школе // Вопросы образования, 2004, №1. – С. 79-94,
3. Тестов В.А. О некоторых методологических проблемах цифровой трансформации образования // Информатика и образование. 2019;(10): – С. 31-36.
4. Тестов В.А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике //Образование и наука. 2016;(1): – С. 4-20.
5. Тестов В.А. Содержание современного образования: выбор пути //Образование и наука. 2017. Т. 19. No 8. – С. 29–46.
6. Тестов В.А. Порядковые структуры в алгебре и теории чисел. Учебное пособие. М., МПГУ. Изд-во "Русь", 1997. –110 с.
7. Тестов В.А. О проблеме обновления содержания обучения математике в школе /Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. –Глазов: Глазовс. гос. пед. ин-т, 2009. –С. 106-111.
8. Современные проблемы физико-математического образования: вопросы теории и практики: всероссийская коллективная монография: под общ. ред. проф. И.Г. Липатниковой. – Екатеринбург: УрГПУ, Издательство АМБ. 2012. – 262 с.
9. Тестов В. А., Перминов Е. А. Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. Т. 23, 2021, № 3. -С. 11–34.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ СВЯЗИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ ИНЖЕНЕРА

Е.А. Толкачева

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

e-mail: eatolkacheva@etu.ru

Аннотация. Рассматриваются научно-практические основания результатов работы кафедры алгоритмической математики СПБГЭТУ «ЛЭТИ», связанные с введением горизонтальных связей в математическое инженерное образование. Ставятся вопросы о потенциале горизонтальных связей для активизации интеллектуальной работы студентов, повышения их учебной мотивированности, а также повышения устойчивости системы умственной деятельности при увеличении нагрузки.

Ключевые слова: горизонтальные связи, инженерное образование, продуктивное обучение, техническое мышление, ПроКоТех-подход

В современном техническом (инженерном) образовании все более актуальными являются вопросы извлечения, преобразования и применения знаний. Подразумевается не только развитость навыков работы с информацией, но и гибкость мыслительной деятельности субъекта, так как именно мышление человека становится идеальной базовой моделью для технологий.

Математика и другие фундаментальные дисциплины в технических университетах читается, в основном, на первом курсе. Такая «близость» к школе дает возможность выдвигать гипотезы, связанные с обучением школьников. Но отношение к структуре высшего образования принуждает планировать содержание, формы и методы обучения “по-вузовски”, с акцентом на увеличение интенсивности умственной работы.

Выбор математики в качестве синтезатора фундаментального инженерного образования на кафедре алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» производится вслед за классиками инженерной педагогики [1-5] и в рамках методики ПроКоТех-подхода к обучению [6].

В настоящее время в организации образовательного процесса преобладают, так называемые вертикальные форматы обучения, когда обучающиеся привязаны к «своим» группам, а преподаватели – к назначенному перечню групп. Они ограничивают всех участников в широте контактов, что не позволяет удерживать мотивацию к обучению на должном уровне. Проблема решается добавлением различных форм «горизонтального» взаимодействия между студентами, школьниками, преподавателями, научными сотрудниками, что активизирует позиции всех участников процесса обучения.

Организационные формы горизонтальных связей

Наряду со строгой иерархичностью строения системы образования, последовательностью этапов образовательного процесса в современном мире нарастают тенденции к выстраиванию индивидуальных траекторий обучения. В первую очередь это касается высших ступеней образования, поэтому возникли сетевые формы профессионального обучения, основанные на независимости членов сети, множественности лидеров (организаций), объединяющей цели на основе конкурентного сотрудничества, добровольности связей и множественности уровней взаимодействия [7]. В связи с необходимостью интенсификации подготовки инженерных кадров возник формат R&D (Research and Development), основной акцент при котором делается на погружение обучающегося в исследования, направленные на решение актуальных задач науки и производства, то есть на погружение в профессиональный контекст. Именно это влияет на усвоение смыслов при обучении, на изменения мотивации студентов, продвигая к формированию мировоззрения [8].

В отечественной педагогической практике организационные аспекты связи науки и школы были всегда сильны – это и работа школ-интернатов для одаренных детей в больших научно-академических центрах страны, множество программ сотрудничества университетов со школами. И сейчас реализуются педагогические проекты на основании концепции взаимосвязи и интеграции общего, дополнительного образования и академической науки, например, ЛНМО [9].

Горизонтальные связи являются не только основным фактором культуры учебного заведения, воздействуя на отношения, интересы и ценности учащихся, но и оказывают значительное влияние на качество обучения. В мировой педагогической практике и сейчас ведутся работы по организации неформальных сообществ для общения ученых со школьниками, например J.M. Danch [10]. Обзор результатов зарубежных исследований конца двадцатого века [11] позволяет говорить о важности неформального взаимодействия в конструировании среды обучения.

Исходя из цели развития мышления профессионала (погружения в профессиональный контекст) и развития технического мышления в рамках ПроКоТех-подхода на кафедре алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ» реализуются следующие виды горизонтального взаимодействия [12]:

- проектная деятельность (альтернативный экзамен по дискретной математике);
- студенческие коллективы (неформальные коллективы, семинары, лаборатории);
- студенческий университет (IT-ЛЭТИ).

Изменение целеполагания студентов [13], переход от формального учета баллов через различные виды тестирования к поддержке самостоятельной умственной деятельности, позволяет формировать самооценку этой деятельности, мотивировать студентов к самостоятельным занятиям. Повышается и устойчивость системы умственной деятельности при увеличении нагрузки, так как результаты учебной деятельности работы оценивается со стороны «горизонтального сообщества», что не вызывает такого диссонанса, как оценивание со стороны преподавателя.

Горизонтальные связи организации содержания образования

Для развития интеллектуальных механизмов обучаемого необходимо введение эффективных технологий и форм обучения для продуктивности мышления [1]. Но этого недостаточно для рассмотрения концептуальных вопросов математического образования в техническом университете [6; 14]. Основой технологической поддержки должна быть не методика обучения, а структура самого научного материала [13].

Вертикальные связи, которые характеризуют преемственность обучения по каждому из предметов возможно дополнить горизонтальными. Перенос содержания из одной дисциплины в другую не имеет смысла с точки зрения поддержки развития мышления, контролируемости не только объема знаний, умений, навыков, но и обязательно их целостности, связности. Но возможен перенос научного стиля, как это сделано у А. Шенфилда [15], или перенос духа, как описано у Я.Б. Зельдовича [16]. В современной отечественной педагогической науке горизонтальность (межпредметность) рассматривается как интеграционный и системообразующий компонент [17;18], инструментарий для формирования универсальных учебных действий [19].

Модульность содержания. Методика введения в общий фундаментальный курс модулей, читаемых внешними специалистами по прикладной или научной тематике, что равносильно разбиению дисциплины на базовую и вариативную части, введению внешних модулей [20]. Прикладная направленность этих модулей и общение со специалистом обеспечивают такую глубину в понимании отдельных прикладных аспектов, которую не может обеспечить ни один самый великолепный преподаватель.

Укрупнение дидактических единиц (УДЕ), предложенное П.М. Эрдниевым, – технология горизонтального соединения отдельных взаимосвязанных разделов одной дисциплины [21]. Создание последовательности укрупненных разделов при изучении дисциплины способствует целостности знаний, как главного условия саморазвития интеллекта учащихся. На ФКТИ ЭТУ дисциплины «Дискретная математика», «Математическая логика» перенесены из общеобразовательной части подготовки в профессиональную как: «Дискретная математика и теоретическая информатика», «Комбинаторика и теория графов», «Математическая логика и теория алгоритмов». Фундаментальные дисциплины не только названы с акцентом на профессиональные аспекты, но и проработаны по технологии УДЕ и дополнены соответствующим содержанием, касающимся информатики [22].

Востребованное обучение в традиционной трактовке в части фундаментального содержания предполагает специализацию в каких-то связанных с профессиональной тематикой областях. В такой форме этот подход не применим к преподаванию математики в вузе, особенно на младших курсах. Для развития технического мышления при ПроКоТех-подходе практический компонент математики для ИТ-инженеров можно увидеть либо в программировании, либо в моделировании. Студенты горят желанием получить профессиональные знания, поэтому необходимо помочь им организовать объединения вокруг значимых для них прикладных направлений (ИИ, машинное обучение, нейронные сети, DataScience). Далее выбрав прикладную задачу, студент через некоторое время почувствует, что ему не хватает знаний для моделирования, для чтения актуальных научных статей, понимания современных научно-инженерных разработок, и возникает мотивация и запрос на фундаментальное образование.

Горизонтальные связи между субъектами процесса обучения

Наиболее изученным направлением горизонтальных связей в обучении является взаимодействия, направленные на активацию позиций участников процесса.

Обучение у равных. Основы понимания горизонтальных установления связей как обучения у равных были заложены в концепции Белл-Ланкастерской системы (системы взаимного обучения). С тех пор эта концепция развивается и варьируется в разных уровнях образования и для разных предметов. Недавно Корнели и Данофф [23] предложили теорию «горизонтальной» учебной деятельности и обучения по модели «равный равному», которую назвали парагогикой. Многие отечественные педагогические технологии в сфере математического образования основываются на принципах обучения у равных (например, технологии кружковой работы, знаменитая система «листочков»). При организации общей информационной среды [24] не только эффективно передается информация между членами, но и копятся знания, позволяющие анализировать смысловые аспекты общих идей, обсуждать между собой новые идеи.

Обучение через преподавание. Если активизация позиции студента в процессе обучения достигается за счет изменения его ролевой функции, то говорят о подходе “learning through teaching” (обучение через преподавание). Исследования влияния преподавания на обучение проводятся более полувека, вот и в научно-педагогической школе Позднякова С.Н. работают над этим направлением [25; 26].

В концепции информационной среды обучения [24] цифровые технологии могут использоваться только как инструменты формирования среды обучения. Человек всегда находится выше любого цифрового инструмента или технологии в иерархической социальной среде обучения. Даже создание интеллектуального агента [27] только обеспечивает общее информационное рабочее пространство. Студенты, участвующие в разработке системы, трансформируют их из математического представления описательными алгоритмами в компьютерные программы («обучения компьютера»).

Умный слушатель. В психологических работах обосновывается автоматический перевод во внутренний план действий человека с объектами внешнего мира. Поэтому в случае отсутствия некоторых внутренних (интеллектуальных) механизмов можно использовать для их гарантированного формирования их вывод вовне. Можно утверждать, что внешнее действие “преподавание” переводится во внутренний план – “понимание”, механизм понимания формируется, запускается в процессе преподавания. На этих основаниях и разрабатывается новая педагогическая технология.

Потенциал горизонтальных связей обучения

Введение горизонтальных связей на младших курсах технического университета имеет огромный потенциал с точки зрения позитивного влияния на мотивацию обучающегося. Если на младших курсах обучения была сформирована персонально значимая профессиональная тематика, то студент не воспринимает себя как шестеренку в “машине обучения”. Эффективность введения горизонтальных связей обучения возможно оценить пока только по косвенному влиянию таких связей на учебную мотивацию студента и его самооценку учебной деятельности. Именно поэтому важен неинвазивный мониторинг результатов обучения [28].

Учебная работа, организованная горизонтально, позволяет повысить осмысленность содержания образования. Именно в самом начале профессиональной подготовки, при изучении общих фундаментальных дисциплин должны быть приобретены компетенции по получению информации (знаний), ее представлению и преобразованию, чтобы в дальнейшем на этой базе учится использовать информацию в конкретных инженерных приложениях и решениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков М.И. Теория и практика продуктивного обучения. М.: Народное образование, 2000. – 248 с.

2. Кудрявцев Т.В. Психология технического мышления: процесс и способы решения технических задач. – М.: Педагогика, 1975. – 304 с.

3. Minsky M. The Society of Mind. New York: Simon and Schuster. 1987. 336 p.

4. Minsky M. The emotion machine: commonsense thinking, artificial intelligence, and the future of the human mind. New York: Simon and Schuster. 2006. 373 p.

5. Papert S. An Exploration in the Space of Mathematics Educations. // International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol. 1, No. 1 in 1996, pp. 95–123.

6. Поздняков С.Н., Толкачева Е.А. ПроКоТех-подход к фундаментальной подготовке ИТ-специалистов // XVIII Всероссийская научно-практическая конф. Планирование и обеспечение подготовки кадров для промышленно экономического комплекса региона: сб. докладов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2020 г. С. 43-46.

7. Чучкевич М.М. Основы управления сетевыми организациями. М.: Изд-во Института социологии, 1999. 38 с.

8. Казакевич В.Г., Толкачева Е.А. Включение в контекст: от учебной мотивации к формированию мировоззрения // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2020. – № 8. – С. 141-148. – DOI 10.25206/2307-5430-2020-8-141-148.

9. ЛНМО. Формула новой школы: сборник статей и материалов о тридцатилетнем опыте формирования фрактальной педагогической технологии в «школе с научным подходом» / под ред. Чистяковой М.В. – СПб.: ЧОУ ОиДО «ЛНМО», фонд «Время науки», 2022. – 114 с.

10. Danch J.M. The Effectiveness of Informal and Formal Collaborations Between High School Science Research Students and the Scientific Community. AGU Fall Meeting Abstracts 2019. Retrieved from https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019AGUFMED21D1058D (accessed on 14.05.2022).

11. Thompson M. D. Informal Student-Faculty Intraction: Its Relationship to Eductional Gains in Science and Mathematics Among Community College Students. Community College Review 2001, 29(1), 35–57. doi:10.1177/009155210102900103.

12. Толкачева Е.А. Математика в техническом университете: потенциал горизонтальных связей / Е. А. Толкачева // Компьютерные инструменты в образовании. – 2021. – № 2. – С. 84-100. – DOI 10.32603/2071-2340-2021-2-84-100.

13. Поздняков С.Н. Связь целеполагания в преподавании математики с ее технологическим сопровождением // Компьютерные инструменты в образовании. 2019, № 3. С. 70-89. DOI: https://doi.org/10.32603/2071-2340-2019-3-70-89.

14. Толкачева Е.А., Казакевич В.Г. О концепции содержания математического образования инженера // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2019. №7. С. 315-322. DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-315- 322.

15. Schoenfeld A.H. Addressing Horizontal and Vertical Gaps in Educational Systems. European Review 2020, 1–17. https://doi.org/10.1017/S1062798720000940

16. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. Москва: Издательство «Наука», 1982.

17. Баляйкина В.М., Маскаева Т.А., Лабутина М.В., Чегодаева Н.Д. Межпредметные связи как принцип интеграции обучения // Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 6. ; URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=29320 (дата обращения: 17.03.2023).
18. Блинова Т.Л., Кирилова А.С. Подход к определению понятия «Межпредметная коммуникация в учебном процессе» с позиций ФГОС СОО Материалы III Международной научной конференции. Екатеринбург: Изд-во УрГПУ, 2013. С. 65-67.
19. Тестов В.А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука. 2016. №1 (130). С 4 – 20.
20. Рыбин С.В. Изучение дискретной математики в ЛЭТИ: текущее состояние и перспективы // Математическое образование инженера (TEMPUS PROJECT META-MATH Modern Educational Technologies for Math Curricula in Engineering Education of Russia): Сборник статей. Часть I. / Под ред. Позднякова С.Н. СПб: Элмор, 2015. С. 70-79.
21. Эрдниев П.М. УДЕ как технология обучения. – М.: Просвещение, 1992. 287 с.
22. Толкачева Е.А. Укрупнение дидактических единиц обучения и включение в профессиональный контекст /Е.А. Толкачева, В.Г. Казакевич // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2023. – № 10. – С. 103-107.
23. Корнели Дж, Данофф Джеффри Ч. Парагогика: синергия самостоятельной и организованной учебной деятельности // ПУСС. 2014. №11. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paragogika-sinergiya-samostoyatelnoy-i-organizovannoy-uchebnoy-deyatelnosti (дата обращения: 26.04.2023).
24. Башмаков М.И., Поздняков С.Н., Резник Н.А. Информационная среда обучения. Российская академия образования, Северо-Западное отделение, Институт продуктивного обучения. – Санкт-Петербург : Свет, 1997.
25. Иванов С.Г., Толкачева Е.А. Самообучение в процессе преподавания: возможности измерения // Технические и технологические системы : Материалы тринадцатой Международной научной конференции, Краснодар, 23–25 ноября 2022 года. – Краснодар: Общество с ограниченной ответственностью "Издательский Дом - Юг", 2022. – С. 167-177.
26. Толкачева Е.А., Иванов С.Г. Учебно-методические материалы при реализации технологии «обучение через преподавание» //Развитие образования. – 2022. Т. 5, № 4. – С. 79-86.
27. Поздняков С.Н. Система компьютерной алгебры как педагогическая задача // Компьютерные инструменты в образовании. № 2, 2017. С. 25-41.
28. Чухнов А.С., Поздняков С.Н. Педагогические и методические аспекты неинвазивного мониторинга // Компьютерные инструменты в образовании, вып. 4, март 2021 г., сс. 113-45.

ТРАНСДИСЦИПЛИНАРНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ СТУДЕНТОВ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

С. И. Торопова

Вятский государственный университет, Киров, Россия
e-mail: svetori82@mail.ru

Аннотация. В современной математической подготовке студентов – будущих экологов востребована реализация трансдисциплинарного подхода ввиду актуальности решения сложных экологических проблем.

Ключевые слова: трансдисциплинарный подход, математическое моделирование, студенты – будущие экологи.

Экологические проблемы современности представляют существенный вызов для человечества. Однако, их решение и в целом радикальные перемены в экологическом сознании общества не могут быть достигнуты исключительно посредством призывов «изменить свои ежедневные привычки» или принять участие в одноразовых экологических акциях. По мнению N. Radakovic, T. Weiland, J. Bazzul, необходимы трансдисциплинарные инициативы в сфере экологического воспитания и обучения в таких областях, как математическое образование будущих экологов [5].

По определению ЮНЕСКО, трансдисциплинарный подход стирает границы между традиционными дисциплинами и организует преподавание вокруг создания смысла в контексте реальных проблем или тем [6]. Авторы работы [5] признают, что его реализация трудоемка, тем не менее, возможна путем создания определенных методических условий. Среди них – решение реальных математических задач, знакомство с математическими моделями, например, изменения климата, стимулирование самостоятельных исследований учащихся, которые проводятся с помощью статистического анализа данных и математического моделирования с последующей интерпретацией этих моделей согласно поставленным вопросам. Отдельно подчеркивается формирование способности обучающихся к критическому мышлению, поскольку трансдисциплинарный тренд подразумевает большее, чем создание экологического контента для математического образования. С точки зрения ученых, целесообразно готовить подрастающее поколение к критическому существованию в мире, проблемы которого, в том числе экологические, характеризуются сложностью, неопределенностью и нестабильностью. Заметим, что развитие критического мышления студентов смежного с экологами направления подготовки средствами математики подробно проанализировано нами в исследовании [4]. Среди условий, стимулирующих будущих биотехнологов мыслить критически – трансдисциплинарность их математического образования в вузе.

Еще одно методическое условие – включение в содержание обучения современных математических теорий и их применений – выделяют В. А. Тестов и Е. А. Перминов [3]. В соответствии с ним, для обеспечения трансдисциплинарной тенденции математической подготовки студентам – будущим экологам в Вятском государственном университете для изучения предлагаются, в частности, фрактально-статистические и нейро-сетевые методы анализа воздействий на лесные массивы аварий на газо- и нефтепроводах [1].

Очевидно, что подбор приложений математики, которые показали бы ее существенную роль в исследовании реальности, нередко затруднен по нескольким причинам, в их числе – дефицит подобных заданий в учебно-методической литературе, несоответствие сложности реальных проблем уровню математических знаний студентов и др. Приведем пример задач, отвечающих выделенным методическим условиям, которые предлагаются для решения студентам ВятГУ.

Задача 1. Моделирование заболеваемости Covid-19 в Кировской области

На ресурсе https://coronavirus-monitor.info/country/russia/kirovskaya-oblast/ представлен график значений подтвержденных случаев заражения Covid-19 в Кировской области по дням от начала сбора официальной статистической информации. Основываясь на данной информации и оценке, согласно которой 30 марта 2020 г. было 12 подтвержденных случаев заражения, 3 апреля 2020 г. – 15, найдите экспоненциальную функцию $y = f(t)$ (где t – количество дней после 30 марта), которая моделирует рассматриваемую кривую в течение недели после 30 марта. Вычислите $f(6)$ и сравните с фактическим значением заболеваемости 5 апреля 2020 г.

Задача 2. Кластеризация лесных массивов

Экологическое зонирование можно осуществлять на основе анализа доза-эффект зависимостей с помощью дифференциального исчисления функции одной независимой переменной. Данная зависимость позволяет получить объективные критерии для разграничения загрязненных территорий на зоны экологического качества, например, по степени техногенной деградации лесов в районе металлургических комбинатов Южного Урала [2]. Такими критериями выступают точки экстремумов первой, второй и третьей производной от функции доза-эффект: точка минимума первой производной соответствует границе зоны риска и буферной зоны, точка максимума второй производной – границе буферной зоны и зоны деградации, точка максимума третьей производной – границе фоновой зоны и зоны риска, точка минимума третьей производной – началу импактной зоны (см. табл. 1).

Таблица 1

Зоны экологического районирования

Уровни дозы	**Зона**	**Характеристика**
0 – 0,25	Фоновая	Зона обратимых нарушений лесного покрова
0,25 – 0,32	Риска	Зона слабых необратимых или допустимых нарушений лесного покрова
0,32 – 0,55	Буферная	Ослабленные деревья со слабо ажурной кроной, усыханием отдельных ветвей или отдельных корневых лап
0,55 – 0,75	Деградации	Сильно ослабленные деревья с ажурной кроной, со значительными повреждениями ствола, корневых лап
0,75 – 1	Импактная	Зона экологического бедствия

На рис. 1 [2, с. 156] представлен график логистической функции Ричардса $Y = Y(X)$ зависимости типа доза-эффект (доза обозначена буквой *X*, эффект – *Y*).

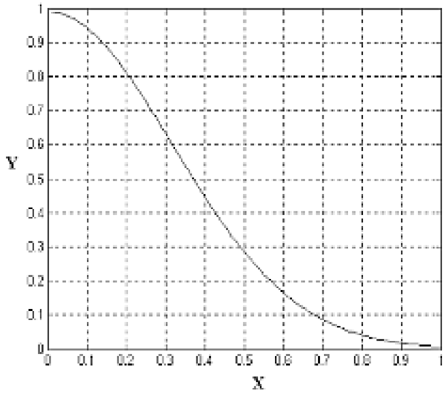
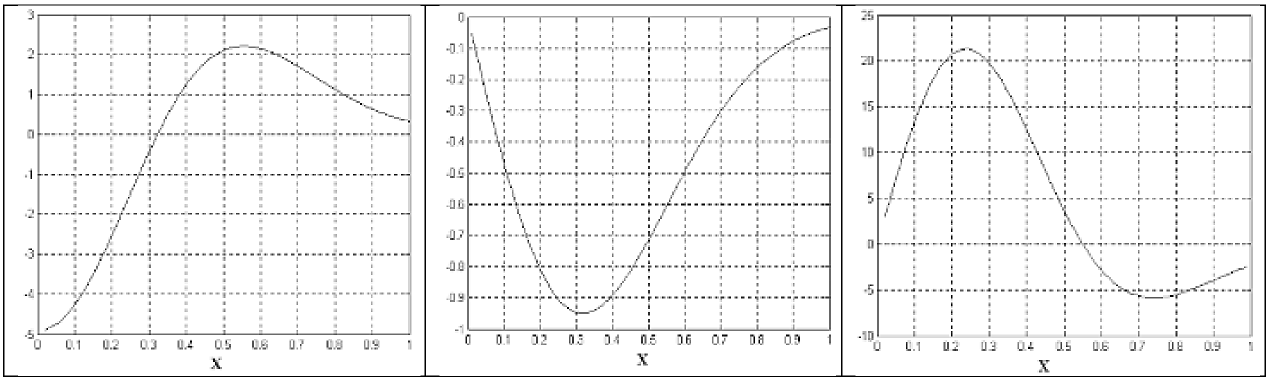


Рис. 1. Логистическая функция Ричардса

Будем считать саму функцию $Y = Y(X)$, ее производные первого $Y'(X)$, второго $Y''(X)$ и третьего порядков $Y'''(X)$ непрерывными функциями. Выполните задания.

2.1. Используя рис. 2 [2, с. 156–157], соотнесите первую, вторую и третью производные функции Ричардса с их графиками. Заполните табл. 2.



а) б) в)

Рис. 2. Производные функции Ричардса

Таблица 2

Производные функции Ричардса

	Рис. 2 а)	Рис. 2 б)	Рис. 2 в)
$Y'(X)$			
$Y''(X)$			
$Y'''(X)$			

2.2. Заполните со второго по четвертый столбцы табл. 3, указав знак первой $Y'(X)$, второй $Y''(X)$ и третьей $Y'''(X)$ производных функции $Y(X)$. Заполните с пятого по восьмой столбцы табл. 3, указав возрастание и убывание рассматриваемых функций.

Таблица 3

Зоны экологического районирования в районе металлургического производства

Зона	**Знак**			**Возрастание / убывание**			
	$Y'(X)$	$Y''(X)$	$Y'''(X)$	$Y(X)$	$Y'(X)$	$Y''(X)$	$Y'''(X)$
Фоновая зона							
Зона риска							
Буферная зона							

Зона деградации							
Импактная зона							

Среди инструментов, опубликованных ЮНЕСКО [6] для демонстрации решения конкретной экологической проблемы средствами математики, содержится исследование механизма эвтрофикации вод на примере накопления фосфора с использованием аппарата дифференциального исчисления функции одной независимой переменной. На основе опубликованных в [2] результатов изучения концентрации фосфатов в двух пунктах отбора проб в водных экосистемах Германии нами составлена следующая задача.

Задача 3. Восстановление фосфора из донных отложений в водной экосистеме

На рис. 3 [2, с. 103] представлен график функции $WT = f(T_W)$ (выделен жирным) температурной зависимости процессов восстановления фосфора из донных отложений, характерной для неглубоких озер. Полагаем, что функция $f(T_W)$, ее производные первого $f'(T_W)$ и второго порядков $f''(T_W)$ являются непрерывными функциями.

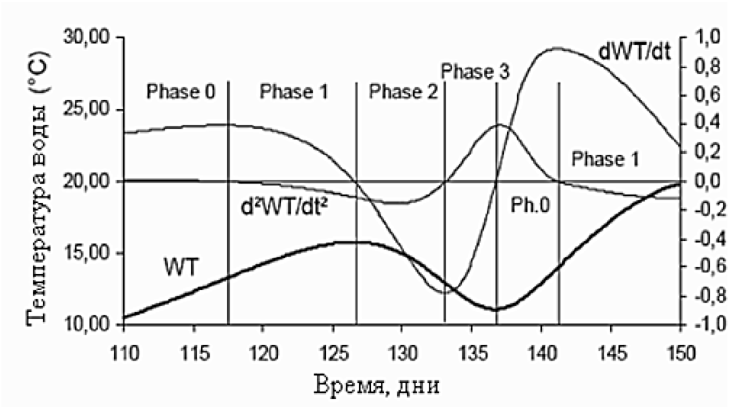


Рис. 3. Четыре фазы протекания процессов накопления и восстановления фосфора

3.1. Используя рис. 3, заполните третий и четвертый столбцы табл. 4, указав знак первой $f'(T_W)$ и второй $f''(T_W)$ производных функции $WT = f(T_W)$ соответственно.

Таблица 4

Фазы температурной зависимости процессов восстановления фосфора

Фаза	**Изменение температуры**	$f'(T_W)$	$f''(T_W)$	**Динамика фосфатов**
0	Увеличение температуры			Процесс накопления фосфатов
1	Слабое увеличение температуры			Начало процесса восстановления
2	Уменьшение температуры			Интенсификация процесса восстановления
3	Слабое уменьшение температуры			Прекращение процесса восстановления

3.2. Сформулируйте вывод на языке дифференциального исчисления, закончив фразу «Процесс восстановления фосфора из донных отложений происходит тогда и только тогда, когда …».

3.3. На основе рис. 4 [6, с. 21], демонстрирующего два устойчивых состояния равновесия неглубоких пресноводных озер, закончите предложения «В состоянии стабильного равновесия первая производная …», «В состоянии стабильного равновесия вторая производная …».

Рис. 4. Кривая, иллюстрирующая устойчивость положений равновесия в водоеме

3.4. Укажите положение касательной к графику функции в точках стабильного равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мешалкин В. П., Бутусов О. Б. Компьютерная оценка воздействия на окружающую среду магистральных трубопроводов. М.: ИНФРА-М, 2022. 449 с.

2. Мешалкин В. П., Бутусов О. Б., Гнаук А. Г. Основы информатизации и математического моделирования экологических систем. М.: ИНФРА-М, 2020. 357 с.

3. Тестов В. А., Перминов Е. А. Роль математики в трансдисциплинарности содержания современного образования // Образование и наука. 2021. Т. 23, № 3. С. 11–34. DOI: 10.17853/1994-5639-2021-3-11-34

4. Торопова С. И. Развитие критического мышления студентов – будущих биотехнологов средствами математики // Образование и наука. 2023. Т. 25, № 5. С. 49–76. DOI: 10.17853/1994-5639-2023-5-49-76

5. Radakovic N., Weiland T., Bazzul J. Transdisciplinarity, Critical Mathematics Education, Eco-justice, and the Politics to Come // Transdisciplinarity in Mathematics Education. 2018. DOI 10.1007/978-3-319-63624-5_6

6. UNESCO: Mathematics for action: supporting science-based decision-making. Режим доступа: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380883.locale=en (дата обращения: 12.06.2023).

ОБ ОПЫТЕ ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНОЙ ПРАКТИКИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Г. Н. Шилова
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
e-mail: shgn@mail.ru

Аннотация. В данной статье обобщается опыт проведения специализированной практики на физико-математических профилях педагогических направлений

Ключевые слова: функциональные методы решения задач, задачи с параметром

Согласно новым федеральным государственным образовательным стандартам (ФГОС 3++) на педагогических направлениях на различные виды практик отводится 60 зачетных единиц. Поэтому кроме педагогических практик в учебный план нашего университета по направлению 44.03.05, профили «Математическое и физическое образование» и «Математическое образование и информатика» включена учебная практика по математике.

Учебная практика рассчитана на два семестра и посвящена решению задач с параметром. Выбор темы для учебной практики не случаен. Задачи с параметром включены в ЕГЭ, но, к сожалению, при изучении учебных дисциплин с нужной полнотой эту тему рассматривать не удается.

Первая часть учебной практики (по учебному плану проводится в 6 семестре) посвящена квадратным уравнениям и неравенствам с параметром, а также уравнениям, сводящимся к ним. Это достаточно стандартные задачи, поэтому мы не будем на них останавливаться

Вторая часть учебной практики (по учебному плану проводится в 7 семестре) посвящена функциональным методам решения задач с параметром остановимся на них поподробнее.

Рассматриваются следующие методы решения задач:

- метод оценки (использование свойства ограниченности функций);
- использование свойства монотонности функции;
- использование свойств четности и нечетности функций;
- использование свойства непрерывности функций;
- использование производной;
- графический метод (в плоскости XOY и в плоскости XOA)/

Учебная группа разбивается на подгруппы, каждая подгруппа разрабатывает научно-методическое обоснование одного из методов , составляет систему задач и затем проводит практические занятия по разработанной теме для остальных студентов.

Кроме того, для эффективного прохождения учебной практики каждый студент получает индивидуальное задание по рассмотренным методам и оформляет отчет о прохождении практики.

Приведем пример индивидуальных заданий.

Задание №1(6 семестр)

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$(a-2)x^2+(a-1)x-5a=0$
имеет положительные корни.
2. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения
$(a-2)x^2+2ax+a+3=0$ лежат на интервале $(-2;1)$.
3. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства
$x^2-3x+2<0$ будет и решением неравенства
$ax^2-(3a+1)x+3>0$?

4. При каких значениях параметра a уравнение $\log_4(16^x + 8a^3) = x$ имеет два решения?

5. При каких значениях параметра p уравнение $sin^2x + psinx = p^2 - 1$ имеет решения?

Задание №2 (7 семестр)

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$a^2 + 12a + 34 + 3^{25x^2-60x+37} = cos(10\pi x)$

имеет хотя бы один корень.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$sin(x - 3a) + sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$ не имеет действительных корней.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1} + 2a\right| = a^2$ имеет нечетное число корней

4. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$3cos2x + \frac{2p}{sinx} = -17$ имеет корни.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases}(xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0\\ y = ax\end{cases}$

имеет ровно 3 различных решения.

На наш взгляд, проведение такой практики позволяет серьезно расширить и углубить знания студентов по рассматриваемой теме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин, В. В. Задачи с параметрами: справ. пособие / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – Минск: Асар, 2002. – 464 с.
2. Высоцкий, В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. / В. С. Высоцкий. – Москва: Научный мир, 2011. – 316 с.
3. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами: учеб. пособие / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003. – 336 с.
4. ЕГЭ 2016. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень): учеб. пособие / под ред. И. В. Ященко. – Москва: МЦНМО, 2016. – 240 с.
5. Кожухов, С. К. Уравнения и неравенства с параметром: учеб. - метод. пособие / С. К. Кожухов. – 2013. – 70 с.
6. Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи. / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – Москва: МЦНМО, 2007. – 296 с.
7. Задачи с параметром: учебно-методическое пособие /научный редактор Г.Н.Шилова. – Вологда: ВГПУ, 2007. – 80с.
8. Шилова, Г.Н. Функциональные методы решения задач с параметром: учебно-методическое пособие / Г.Н.Шилова, Е.В.Шульман. – Вологда: ВИРО, 2020 – 88 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЙ НА МОДЕЛИ КЭЛИ–КЛЕЙНА КАК КАТАЛИЗАТОР САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.В. Ястребов
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Ярославль, Россия
e-mail: alexander.yastrebov47@gmail.com

Аннотация. Продолжается изучение компьютерных инструментов, начатое автором в работах [4, 5]. Ранее созданные инструменты применяются для построения нового объекта – окружности на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского (далее КК-модели). В отличие от известных руководств изложение базируется только на фактах элементарной математики и не использует ни проективных образований, ни теории кривых второго порядка. Выводятся новые параметрические уравнения окружности.

Ключевые слова: преподавание, компьютерные инструменты, геометрия Лобачевского, модель Кэли–Клейна.

В 2026 г. математической общественности предстоит отметить 200-летие геометрии Лобачевского. Этот исторический факт заставляет обратиться к любопытному противоречию: с одной стороны, существуют многочисленные инструменты для построений фигур евклидовой геометрии, а с другой стороны, отсутствуют инструменты для построений фигур геометрии Лобачевского. Отсутствие инструментов делает многие чертежи условными, доступными для понимания только в результате длительного и скрупулезного аксиоматического изложения теории. В качестве примера можно привести канонический вид четырехугольника Саккери, у которого две стороны изображены как прямолинейные отрезки, а две другие – как отрезки кривых. (Кстати, автору неизвестны литературные источники, в которых объяснялась бы природа этих «криволинейных» сторон.) В результате «изучатель» геометрии Лобачевского – студент, школьник, профессиональный математик – лишается таких мощных инструментов, какими являются геометрическая интуиция и математические эксперименты, и вынужден опираться преимущественно на логику.

Для устранения этой «несправедливости» автором была использована интерактивная математическая среда GeoGebra и создана система из 13-ти компьютерных инструментов, описанная в статьях [4, 5]. С ее помощью можно строить прямолинейные объекты на КК-модели, то есть прямые, лучи, отрезки, параллели, перпендикуляры и т.п., а также можно измерять длину отрезка и меру угла.

В настоящем докладе делается следующий естественный шаг: ранее созданные инструменты применяются для построения окружностей на КК-модели. Возможность такого применения базируется на двух математических фактах. Во-первых, образующими группы движений на КК-модели являются центральные симметрии, определенные А. Ширшовым в статье [3]. Во-вторых, гиперболическая окружность с центром в центре O абсолюта является обычной евклидовой окружностью. При этом ее евклидов радиус r и гиперболический радиус r' связаны соотношением $r' = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$. Благодаря этим фактам появляется возможность строить окружность заданного радиуса с центом в заданной точке.

Действительно, если мы хотим построить окружность гиперболического радиуса r' с центром в точке A, то достаточно проделать следующее: 1) построить «эталонную» евклидову окружность ω радиуса r с центром в точке O; 2) найти гиперболическую середину S отрезка $[OA]$; 3) отразить окружность ω относительно центра S.

В докладе описаны три естественных способа построения окружности: по центру и точке на ней; по центру и радиусу; с помощью параметрических уравнений. Например, последний способ построения окружностей базируется на новом факте.

Теорема. Пусть точка $A(a;\ \varphi)$ с полярными координатами a и φ является центром окружности гиперболического радиуса r'. Тогда ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} u = \dfrac{[2s - (1+s^2)r\cos t]\cos\varphi - [(s^2-1)r\sin t]\sin\varphi}{1+s^2-2sr\cos t} \\ v = \dfrac{[2s - (1+s^2)r\cos t]\sin\varphi + [(s^2-1)r\sin t]\cos\varphi'}{1+s^2-2sr\cos t} \end{cases}$$

где коэффициенты s и r вычисляются по формулам $s = \left[\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - 1\right] \Big/ \left[\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + 1\right]$ и $r = \left(e^{r'} - 1\right)/\left(e^{r'} + 1\right)$, а параметр t изменяется в промежутке $[0, 2\pi]$.

Разумеется, теория кривых второго порядка в геометрии Лобачевского давно построена; достаточно обратиться к монографии [2]. Однако эта книга в определенном смысле «недоступна» для начинающего пользователя, потому что базируется на теории проективных преобразований и общей теории кривых второго порядка. Книга [1] также трудна для начинающего, хотя и базируется на школьной аксиоматике, потому что в ней предпринято полное, развернутое и, как следствие, весьма объемное изложение геометрии Лобачевского. Особенность нашего изложения состоит в том, что оно базируется только на фактах элементарной, «школьной» математики.

Техническая простота изложения является для нас важным, но отнюдь не определяющим обстоятельством. Гораздо важнее то, что в процессе освоения инструментов пользователь сталкивается с длинной серией вопросов, которые невольно и с неизбежностью возникают перед ним. Даже если он не имеет опыта в самостоятельной и целенаправленной постановке математических задач, спонтанно возникающие вопросы заставляют его задумываться о природе геометрии Лобачевского. Опишем кратко некоторые проблемные ситуации.

Прежде всего, пользователь обнаружит, что его геометрическая интуиция не может быть использована при работе с КК-моделью. Действительно, отрезок, имеющий постоянную евклидову длину, меняет свою гиперболическую длину в зависимости от того, в каком месте модели он расположен. Четырехугольник, выглядящий квадратом, может иметь четыре стороны различной длины и не иметь прямых углов. Возникает естественный, и весьма общий, вопрос о том, что должно лежать в основе геометрической интуиции при работе с КК-моделью.

Кроме того, в ряде случаев пользователю удается раскрыть природу инструмента. Например, построив несколько перпендикуляров к прямой, пользователь может обнаружить, что их продолжения пересекаются в одной точке, а впоследствии может догадаться, как можно найти эту точку без построения перпендикуляров.

Естественный логический ход «изучателя» состоит в том, чтобы понять, в какой мере новая для него геометрия совпадает с обычной геометрией. В результате очень простых экспериментов он обнаружит, что точки на серединном перпендикуляре, и только они, равноудалены от концов отрезка, а это говорит о справедливости теоремы в обеих геометриях. Проведя три медианы треугольника, пользователь обнаружит, что они пересекаются в одной точке, однако не делятся ею в отношении 2:1, а это говорит о частичном совпадении теорем. Проведя среднюю линию треугольника, пользователь увидит, что она не параллельна основанию треугольника и не равна его половине.

В процессе сравнения теорем двух геометрий пользователь обнаружит некую «неоднородность» множества давно знакомых фигур. Например, в евклидовой геометрии для *любого* треугольника существует описанная около него окружность. В геометрии Лобачевского это не так, поскольку *существуют* треугольники, не имеющие описанной окружности. Возникает естественный вопрос: при каком условии, наложенном на треугольник, существует описанная около него окружность? Аналогичное рассуждение можно провести в отношении окружностей. Действительно, в евклидовой геометрии около *любой* окружности можно писать треугольник, а в геометрии Лобачевского *существуют* окружности, около которых невозможно описать треугольник. Возникает естественный вопрос: при каком условии, наложенном на окружность, существует описанный около него треугольник?

Наконец, «изучатель» легко обнаружит, что в геометрии Лобачевского имеются фигуры, о существовании которых он даже не подозревал. Достаточно построить три перпендикуляра к одной прямой и отложить на них отрезки одинаковой гиперболической длины. Окажется, что они не лежат на одной прямой, а значит, образуют какую-то особую фигуру.

Разумеется, все хитросплетение общих и различных свойств двух геометрий описано нами неполно, лапидарно и, быть может, поверхностно. Для нас важно, что многие неочевидные геометрические тонкости могут быть обнаружены пользователем *самостоятельно, в течение краткого времени, в результате отнюдь не чрезмерных усилий.* Именно в этом и заключается методическое достоинство предлагаемых инструментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян, Л.С. Геометрия Лобачевского: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 2001. – 336 с.
2. Каган, В.Ф. Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе ее исторического развития. Часть вторая. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 344 с.
3. Ширшов, А. Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. // Квант. – 1976. – № 3. – С. 18–24.
4. Ястребов, А.В. Освоение геометрии Лобачевского посредством компьютерных экспериментов на модели Кэли–Клейна // Геометрия и геометрическое образование. Сборник трудов IV Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 80-летию Е. В. Потоскуева) 29–30 ноября 2019 года. – Тольятти: Издательство ТГУ, 2020. – С. 78–83.

5. Ястребов, А.В., Кошелева, Л.Ю. Чертежные инструменты для геометрии Лобачевского: модель Кэли–Клейна // Математическое образование в цифровом обществе: материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (26–28 сентября 2019 г.). – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ. – 2019. – С. 314–317.

ПРОБЛЕМЫ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И СМЕЖНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

НЕОБХОДИМОСТЬ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМЫ НАСТАВНИЧЕСТВА В ШКОЛЬНОМ ИНЖЕНЕРНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Е.О. Биловол

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: sidorov@mail.ru

Аннотация В статье приведен анализ известных школ с инженерным уклоном, которые используют современные технологии, в том числе цифровые, а также различными способами взаимодействия с ВУЗами. Представлен опыт Вологодской области на примере Центра ДНК ВоГУ, описаны особенности организации работы с учащимися и студентами.

Ключевые слова инженерное образование, наставничество, цифровые технологии, инженерные классы

На сегодняшний день существует ряд проблем внедрения инженерного компонента в школьном образовании. Одни из часто встречающихся факторов – специализированные кадры и техническое оснащение, поскольку оба ресурсы отсутствуют у обычных школ. С целью подтверждения фактов модернизации образования, было проведено региональное исследование инженерного потенциала в России. Одними из крупных центров развития инженерной подготовки в школьной среде являются Москва, Новосибирск, Санкт-Петербург, Томск и Екатеринбург [1, с. 65].

Для начала следует отметить технический потенциал в Бауманской инженерной школе № 1580 в городе Москва. Особенностью преподавания является проведение лекций и семинарских занятий, как в университетах. Отклонения от общего курса физики нет, однако программа дополнена сложными теоретическими положениями, системой допуска к контрольным работам и т.д. В лицее представлены образцы комплектов осуществления фронтальных лабораторных работ, аппараты для изучения плавления тел, генераторы звуковых частот, комплекты для электродинамики [2, с. 210].

Необходимо отметить СУНЦ НГУ Свердловской области, где реализуются различные марафоны с участием математического центра Академгородка, в том числе известный конкурс «За ранний вход в науку». Школьники могут принимать участие в специализированных онлайн-курсах, которые организованы через элективные занятия Подобные способы приобщают учеников к реальной разработке оборудования и участию в проектах.

Президентский физико-математический лицей №239 города Санкт-Петербург выделяется на общем фоне образовательных учреждений упором на углублённую литературу в области физики. При поступлении в данную гимназию, ученики сдают экзамен, подразумевающий два теоретических вопроса и одну задачу. В процессе обучения применяются цифровые электротехнические приборы, приборы, демонстрирующие молекулярную физику и термодинамику.

В СУНЦ УрФУ Свердловской области разработана специальная платформа электронного образования, в разделе физики и астрономии ученикам предоставляет доступ к важным темам, как кинематика или электрические цепи, олимпиадным практикумам, избранным тематическим задачам. В интернет-курсах есть список преподавателей не только самой гимназии, но и университета, у которых учащиеся могут получить консультацию, подробно раскрыт теоретический материал с формулами и комментариями, графическое отображение задач со всеми необходимыми схемами и картинками [3, с. 88].

МБОУ ЛИЦЕЙ при ТПУ г. Томска имеется всё демонстрационное оборудование для развития практического опыта у школьников и их непосредственное участие в проведении опытов, работе с разного рода материалами и процессами. Лицей проводит совместные мероприятия и инженерные квизы в сфере образования с такими компаниями, как ООО «Газпром Трансгаз», Томский электромеханический завод им. Вахрушева (ТЭМЗ), АО «НПФ «Микран», ООО «Томскнефтехим». Это стимулирует учеников на улучшение своих компетенций в области физики и математики, стремлению поступить в лучшие ВУЗы и получить востребованную профессию.

Также многие лицеи и гимназии развивают систему внеурочного инженерного развития учеников. Такая потребность приводит к внедрению образовательных интернет-сервисов со всей необходимой информацией для изучения программы. Старшая школа (10-11 классы) являются не только важными для подготовки к экзаменам, но и для предварительной вузовской подготовки школьников. То есть тот объем материала, который ученики не смогли охватить в период школы, будет затруднительно восполнить в университете и благополучно сдать сессию. Поэтому преподаватели заинтересованы также участвовать в совместных мероприятиях, марафонах, лекциях, повышая тем самым уровень знаний учеников [4, с. 72].

Экспериментальная практика в школах в области физики и астрономии нуждается в комплексном реформировании и финансировании. Зачастую во многих региональных школах отсутствуют учебные приборы, в особенности в более узких темах, как конвекция или электростатика. Кабинеты не оснащены всеми необходимыми наборами для демонстрационного показа фундаментальных явлений. Одним из вариантов решения проблемы выступает мультимедийное оборудование, которое можно применять для показа различных физических процессов и техники. С другой стороны, сейчас идет активное внедрение точек роста и всё больше сельских школ получают современное оборудование.

Так, на основании изложенных параметров регионального инженерного потенциала, можно сделать следующие выводы. Наиболее эффективная подготовка школьников осуществляется в тех гимназиях и школах, которые учреждены на базе университетов, и имеют тесное сотрудничество с ними: не только в рамках плана образования, но и в рамках исследовательской модернизации.

С 2019 года в Вологодской области функционирует ряд центров по работе с детьми, в том числе по развитию технического творчества. Один из них – центр развития современных компетенций детей «Дом научной коллаборации им. С.В. Ильюшина» на базе Вологодского государственного университета (ВоГУ). В данном центре сосредоточены технические ресурсы для ведения таких курсов для детей, как промышленный дизайн, 3Д моделирование, интернет вещей, робототехника, программирования и ряд других. Кроме того, имеет ресурс высококвалифицированных кадров из числа профессорско-преподавательского состава университета, накопленная методическая база и сотрудничества с различными организациями.

На сегодняшний день участники курсов не просто посещают занятия по технологии, проектной и исследовательской деятельности, курс «Инженер будущего» и другие, но и активно участвуют в инженерных конкурсах. Подобные участия являются своеобразным индикатором сформированности ряда компетенций, необходимых будущему инженеру, освоенные hard и soft skills. Только в первый квартал 2023 года воспитанники центра заняли 1 и 3 места во Всероссийском конкурсе «Звезда будущего», несколько 2-х и 3-х мест на региональном этапе Всероссийского конкурса «Шустрик», первые места в конференции «Юные техники и изобретатели», 2 место на всероссийском этапе «Сила света» и др. Отличительными особенностями являются научные экскурсии в места сосредоточения инженерной мысли. Ребята посещают лаборатории Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ), Центра подготовки космонавтов, «НПО Лавочкина» и «НПО Энергомаш». Каждые полгода на территории Центра ДНК реализуются различные развивающие проекты: проектная смена по следам Дежнева, смена «Путь авиатора»

Таким образом созданная среда соответствует современным техническим требованиям и высокому уровню методической базы, высоко квалифицированным кадрам. Такой синтез позволяет повысить эффективность формирования инженерных навыков у школьников, помочь им быстрее выбрать профессиональную область и адаптироваться к получению высшего образования. Постоянно обновляющаяся база цифровых и технических ресурсов привлекает молодое поколение и студентов, объединяя их в команды для выполнения проектов.

В этом учебном году наши воспитанники и студенты активно смогли принять успешно участие в проектах "Сириус. Лето", что тоже является частью концепции нашего центра, где установлена связка "школа - ВУЗ - партнер (предприятие или учреждение)" и "обучающийся - студент - преподаватель".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власова Е. З. Теоретические основы и практика использования адаптивных технологий обучения в профессиональной подготовке студентов педагогического вуза: Дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.08. - СПб., - 2020.

2. Чернобай Е. Крупные образовательные комплексы столицы как новые возможности для достижения новых образовательных результатов//Учительская газета. № 07 от 12 февраля 2021 г. - [Электронный ресурс] -Режим доступа: http://www.ug.ru/archive/49836
3. Бруcник О. В. Общие методические указания к изучению курса теоретической физики в педагогическом университете/О. В. Брусник//Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия: Естественные и точные науки. - Томск: ТГПУ - 2021. - Вып. № 6 (57). - С. 167-169.
4. Микляева Н. В., Маринюк А. А., Якушева С. Д., Алисов Е. А. Закономерности и принципы организации территориальных (многоуровневых) образовательных комплексов//Вестник Московского городского педагогического университета. Научный журнал. Серия «Педагогика и психология». - 2019. - № 2.

ПРОГРАММНАЯ СРЕДА OPENSCAD КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Е.М. Ганичева
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
e-mail: ganichevaem@vogu35.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы освоения программной среды OpenSCAD будущими учителями математики и информатики в процессе изучения дисциплины «Учебная практика по информатике».

Ключевые слова: 3d моделирование, методика обучения информатике, функциональное программирование, цифровые технологии.

Одним из важных условий цифровой трансформации образования является освоение учителями цифровых инструментов для работы с разными видами информации, информационными моделями, включая трехмерные модели. В рамках основной образовательной программы направления подготовки «Педагогическое образование» студенты осваивают цифровые технологии, знакомятся с цифровыми образовательными ресурсами федеральных платформ. Особенностью профиля подготовки «Математическое образование и информатика» является то, что в ходе учёбы в вузе у студента необходимо сформировать представление о тесной связи математики и информатики, о том, что в основе цифровых технологий «работают» математические понятия, зависимости, закономерности. В то же время для решения прикладных задач необходимо использовать математические модели, для создания которых необходимы цифровые инструменты и умение управлять исполнителями. При этом следует отметить и кажущийся «отрыв» содержания школьного курса математики от сложных задач современных направлений деятельности человека.

Именно поэтому необходимо знакомить студентов с различными программными средами, с помощью инструментов которых возможно работать с математическими объектами, используя для этого цифровые технологии и учиться программировать.

Рассмотрим один из таких инструментов – программную среду OpenSCAD. Это свободно распространяемая программа, поддерживаемая Мариусом Кинтелом (Marius Kintel). Она предназначена для построения 3D моделей на основе специального программного кода. Это не интерактивная программа, в которой формы рисуются мышкой на экране, а специальная среда функционального программирования. Изучение этой среды возможно организовать, например, в рамках дисциплин «Учебная практика по информатике» или «Учебная практика по математике».

OpenSCAD позволяет создавать трехмерные модели с помощью твердотельного моделирования (Constructive Solid Geometry). Идея состоит в том, чтобы создавать сложные геометрические формы, комбинируя ограниченный набор простых базовых элементов, таких как сферы, цилиндры или коробки - это похоже на игру со строительными блоками.

Особенностью OpenSCAD является то, что геометрия задается посредством чисто текстового описания, а не с помощью указывающего устройства в графическом редакторе. Такой подход предопределяет OpenSCAD для целого ряда вариантов использования, которые было бы труднее реализовать в системах с более интерактивной схемой использования. Например:

- полностью параметризуемый дизайн технических компонентов,
- создание геометрии на основе алгоритмов или математических описаний,
- создание и использование библиотек геометрии,
- использование в автоматизированных средах.

Программа OpenSCAD позволяет привлечь внимание и на наглядных примерах, показать, как выглядит фигура или геометрическое тело с разных сторон, можно найти те или иные значения их элементов при построении, исследовать изменения, расположение на координатной плоскости или в пространстве.

Изучение инструментов среды желательно «связывать» с содержанием школьного курса математики и информатики, деятельностью с математическими объектами и созданием алгоритмов работы с ними. Для составления алгоритмов можно использовать все базовые алгоритмические конструкции: следование, ветвление, цикл.

Если взять за основу изучение геометрических фигур в 5-6 классах, то можно выделить следующие типы заданий, предлагаемые авторами учебников:

1. Построить многоугольник (треугольник, квадрат, прямоугольник и др.)
2. Определить длины сторон.
3. Найти периметр.
4. Найти площадь прямоугольника.
5. Найти площадь или периметр сложного многоугольника.
6. Определение значений на осях координат.

Рассмотрим команды, которые используются для построения базовых элементов [1].

Многоугольник

circle(радиус, количество углов).

Это команда, позволяющая построить правильный многоугольник, размеры которого зависят от заданного радиуса. При изменении параметра количества углов можно получить и треугольник, и четырехугольник и даже круг (в случае, если заданное значение больше 70).

Пример 1:

Построить треугольник с центром в начале координат и радиусом описанной окружности, равным 15 (рис.1).

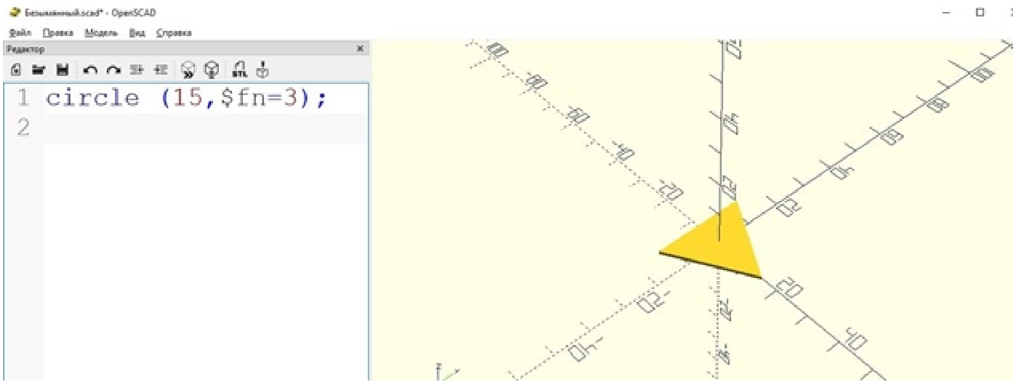


Рис. 1. Фрагмент кода и треугольник

С помощью команды **square ([x,y],center)** можем задать прямоугольник, с определенными значениями по осям x и y. Также есть возможность указать, где будет находиться фигура относительно начало оси координат.

Пример 2:

Построить прямоугольник 10 на 20 с центром в начале координат (рис.2).

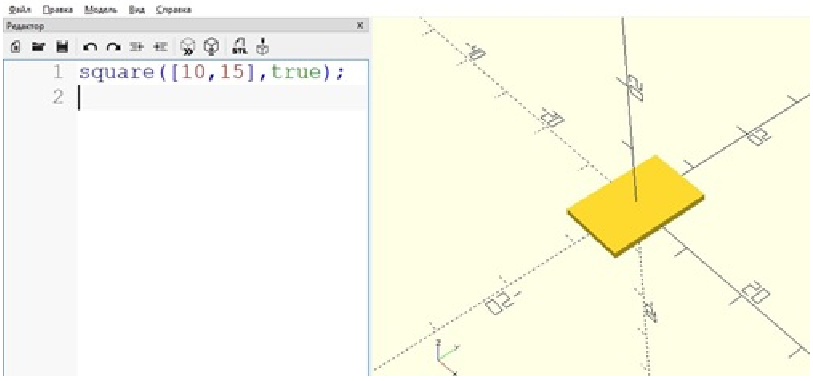


Рис. 2. Фрагмент кода и прямоугольник

Кроме выше перечисленных фигур, OpenSCAD позволяет задать и произвольные многоугольники, с разными длинами сторон. Для их построения следует знать, какие точки на осях координат необходимо соединить и в какой последовательности. Команда, отвечающая за построение –

polygon (points=[[x,y],…], paths=[[p1,p2,p3,…],…].

Для того, чтобы осуществить преобразования объектов, например, перенос, поворот, масштабирование, применяются команды:

перенос **translate ([Δx. Δy, Δz])**, где в скобках указывается, на сколько нужно переместить фигуру относительно той или другой оси.

поворот **rotate** ([rx, ry, rz], где rx, ry, rz – это угол (в градусах), на который нужно повернуть объект относительно соответствующей оси – Ox, Oy или Oz.

масштабирование **scale** ([kx,ky,kz]} {фигуры}, где kx, ky, kz – коэффициенты масштабирования по соответствующим осям.

Пример 3:

Построить круг, с переносом по осям x на 10, y на 15, относительно начала координат (рис.3).

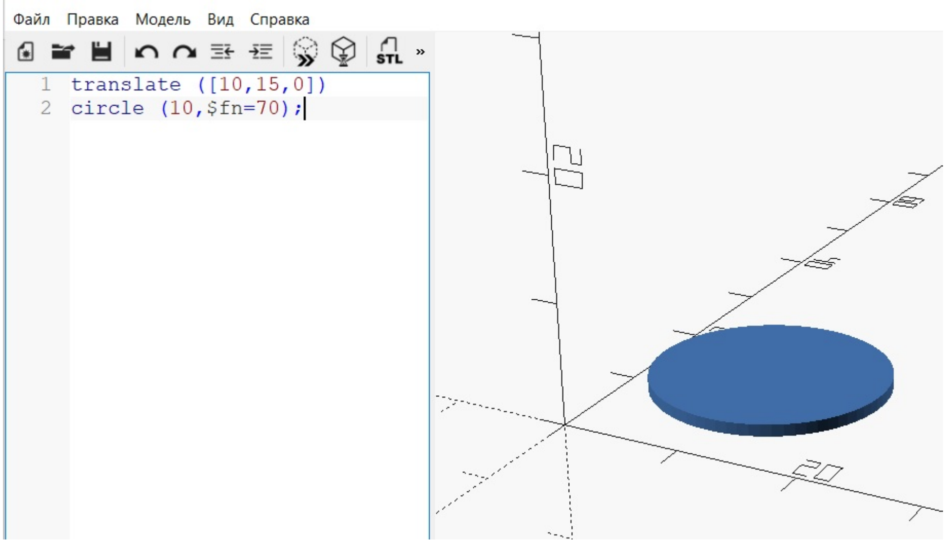


Рис. 3. Фрагмент кода и круг

При изучении инструментов программной среды желательно предлагать студентам задания на разработку дидактических материалов для обучения математике и информатике.

Примеры заданий, которые можно предложить школьникам, для реализации в программе OpenSCAD, в зависимости от ранее указанных типов:

1. Постройте следующие фигуры с центром в начале координат: 1) четырехугольник; 2) пятиугольник; 3) шестиугольник; 4) семиугольник.
2. Постройте окружность радиусом 35 мм, с центром в точке (12,26).
3. Постройте пятиугольник с координатами (0,0),(0,20),(25,10),(25,25), (25,0).
4. Постройте фигуру, изображенную на рисунке (рис.4), двумя разными способами.

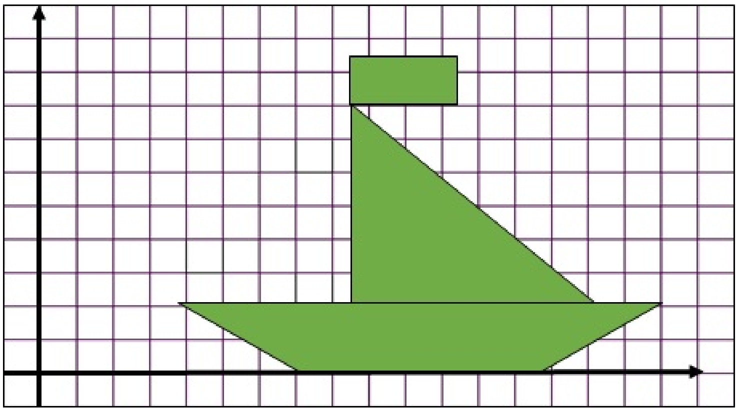


Рис.4. Рисунок для задания 4

5. Постройте прямоугольник со сторонами 23 мм и 45 мм, найдите его периметр и площадь. Рядом изобразите прямоугольник, имеющий такую же площадь. Что можно сказать про периметр нового прямоугольника?

В основе любой геометрии в OpenSCAD лежат так называемые *примитивы*. Это двух - или трехмерные базовые формы, которые мы можем использовать в качестве строительных блоков для нашей модели [1]. Создадим простую сферу. Для этого достаточно ввести команду:

sphere(10);

Если запустить предварительный просмотр (*F5*), в окне вывода должна появиться сфера с радиусом 10 миллиметров (рис.5).

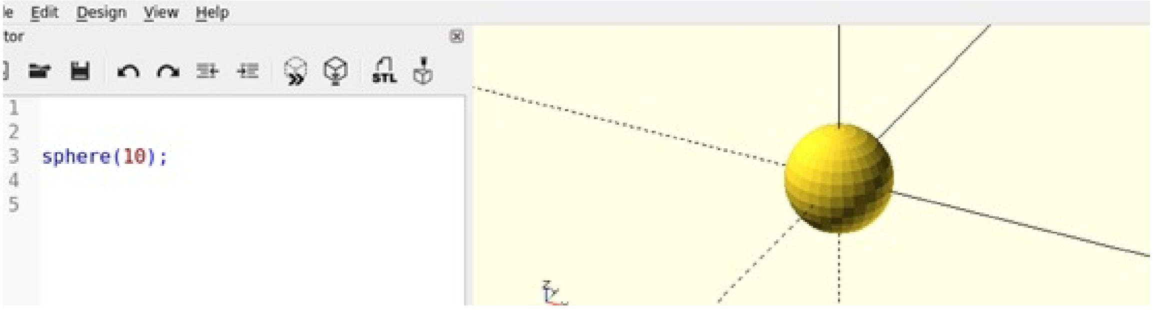


Рис. 5. Фрагмент кода и сфера

Каждая базовая фигура в OpenSCAD имеет уникальное имя, за которым всегда следует список параметров в круглых скобках и завершающая точка с запятой. В приведенном выше примере радиус сферы является первым параметром. У каждого параметра также есть имя, и, как правило, лучше включать это имя. В случае сферы параметр радиуса имеет имя *r,* и использование этого имени параметра будет выглядеть так:

sphere(r = 10);

В этом случае мы занимаемся пропедевтикой достаточно сложных для восприятия терминов, как «параметр» и «переменная», без понимания смысла которых возникает много проблем как при изучении математики, так и информатики. Кроме того, студент получает представление о функциональном программировании, в котором для создания объекта необходимо описать математические отношения между данными и целью.

В качестве примера геометрических тел рассмотрим пирамиду. Это многогранник, одна из граней которого (основание) – произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые) треугольники с общей вершиной. На рисунке показан фрагмент кода и многогранник (рис.6).

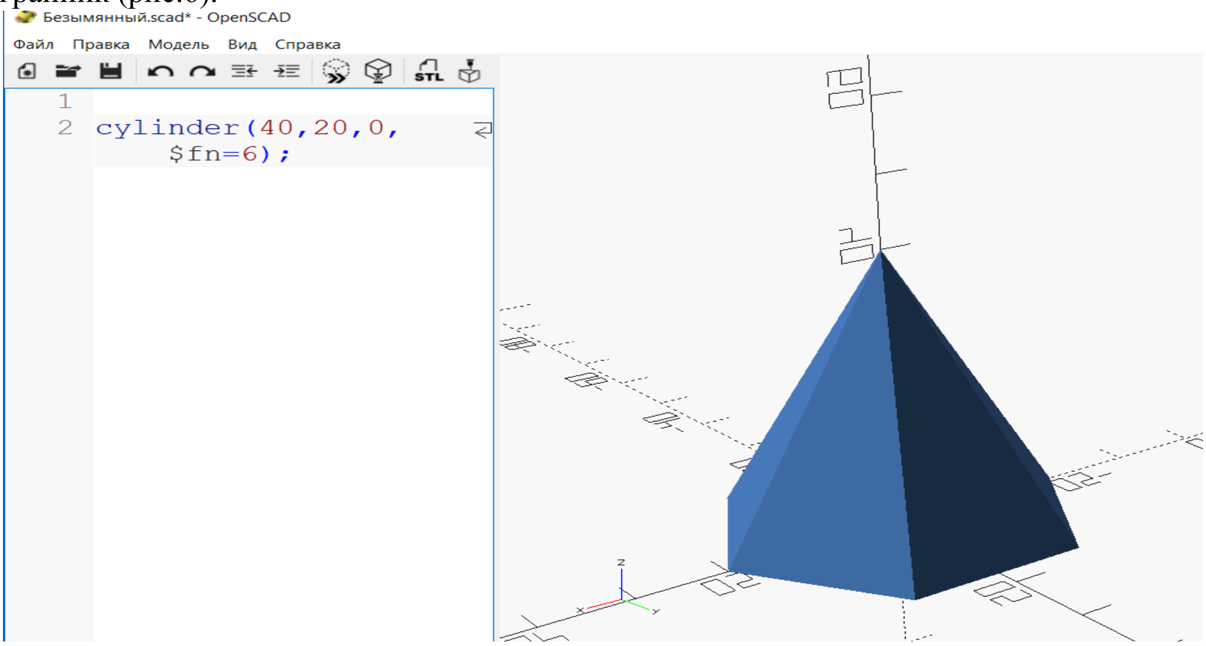


Рис. 6. Фрагмент кода и пирамида

Применение программы OpenSCAD, позволит лучше понять, как устроены те или иные геометрические объекты; любую сложную фигуру можно разбить на части, состоящие из простых многоугольников. На рисунке представлена модель спиннера (рис.7).

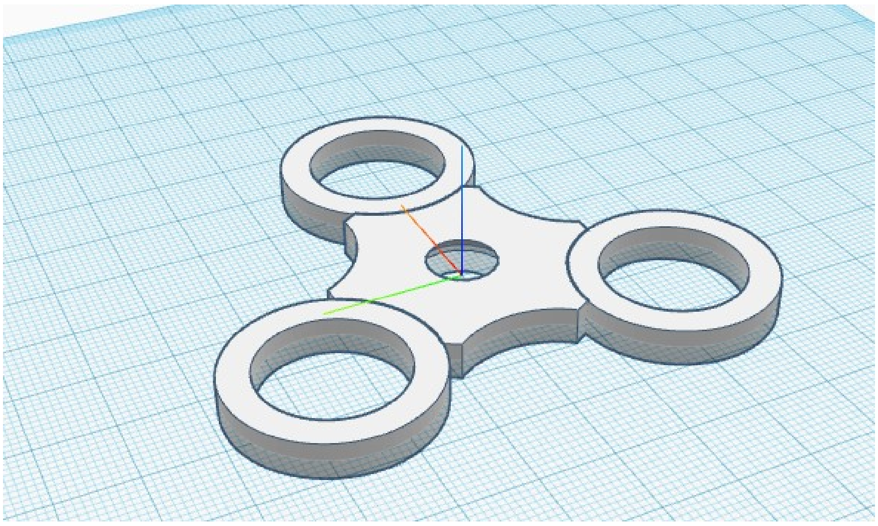


Рис. 7. Модель спиннера

Несмотря на небольшой набор инструментов, программная среда OpenSCAD позволяет познакомить ещё с одним методом трехмерного моделирования - линейной экструзией (выдавливанием) [2]. Команда линейной экструзии (выдавливания) делает двумерные объекты объёмными (рис.8).

linear_extrude (параметры) {двумерный объект…}

Пример 4:

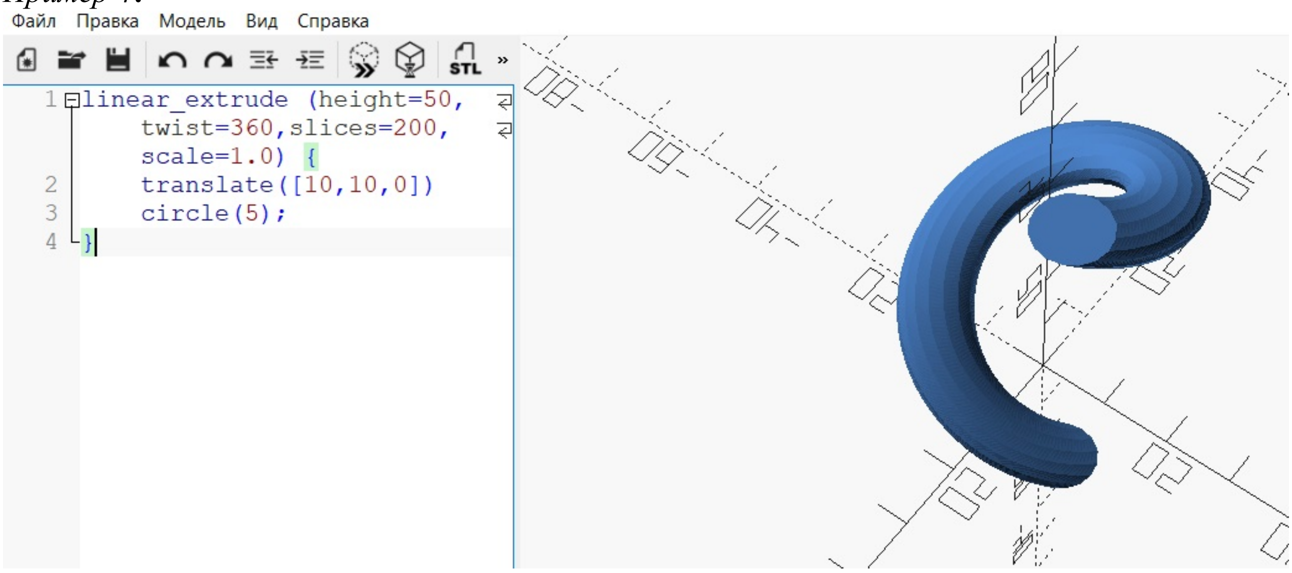


Рис. 8. Фрагмент кода и спираль

В качестве задания для самостоятельной работы можно предложить создание модели брелока для ключей (рис.9)

:

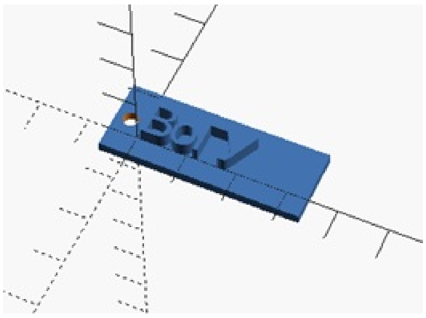


Рис. 9. Модель брелока для ключей

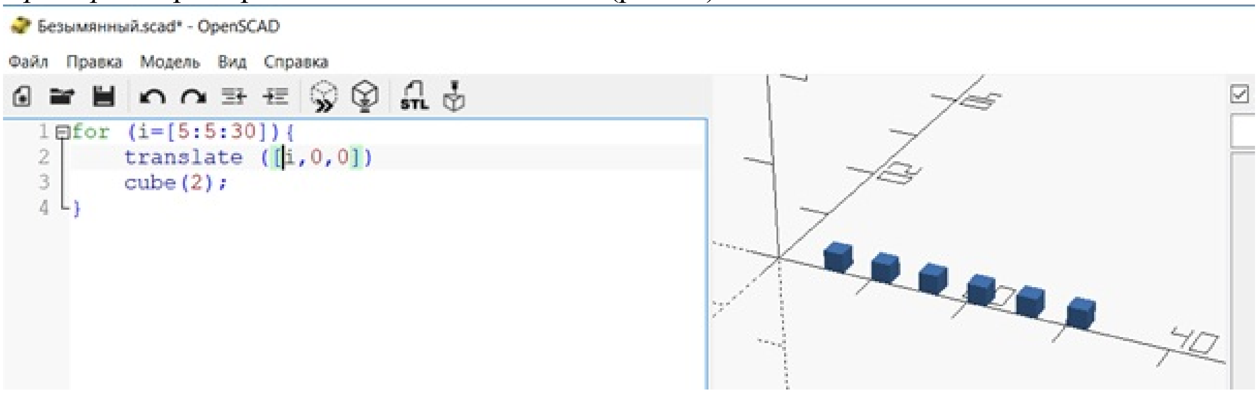
Можно подойти к заданию творчески и несколько изменить внешний вид. При это должно остаться отверстие и надпись.

Для успешного освоения программирования важно сформировать представление о том, что любая программа строится из трёх базовых управляющих структур: последовательность, ветвление, цикл. Кроме того, используются подпрограммы (в OpenSCAD это модули). Разработка программы ведется пошагово, методом «сверху вниз». Так как в OpenSCAD создают геометрические тела, имеющие строгие размеры, то для этих целей вполне хватает одного вида циклов – циклов со счётчиком.

Цикл со счётчиком – цикл, в котором некоторая переменная, называемая счётчиком, изменяет своё значение от заданного начального до конечного с некоторым шагом, и для каждого значения этой переменной тело цикла выполняется один раз. Цикл со счетчиком реализуется следующим образом:

for (счётчик = [начало : шаг : конец]) {….}

Пример 5: Пример использования цикла for (рис.10).



С помощью одного цикла можно выполнять перемещение только по одной из осей.

Рис. 10. Фрагмент кода с использованием цикла for

Для того, чтобы перемещать объект на плоскости, нужны два цикла.

Пример 6: Вложенные циклы (рис.11).

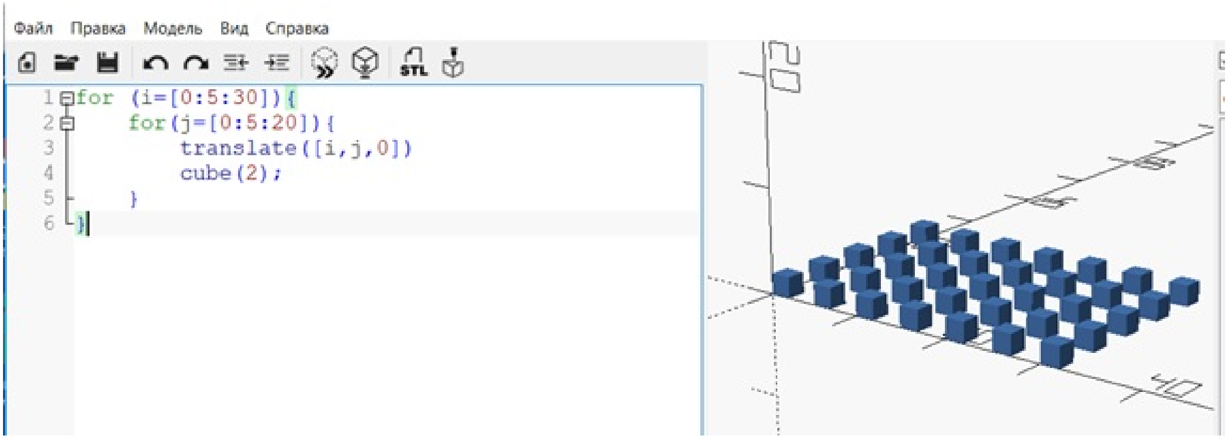


Рис. 11. Фрагмент кода с использованием вложенных циклов

Использование циклов позволяет создать хорошую визуализацию понятия «массив элементов».

Импорт STL-файлов. Использование библиотек

OpenSCAD может импортировать STL-файлы. Например, с сайта https://www.thingiverse.com/ можно скачать любой понравившийся проект, добавить необходимые вам улучшения и печатать.

В OpenSCAD можно пользоваться уже созданными библиотеками, в которых собраны сотни и тысячи готовых деталей. Например, библиотека MCAD, которая доступна в OpenSCAD, обладает функциональными готовыми деталями.

Таким образом, язык описательного программирования OpenSCAD используется, чтобы помочь студентам развивать способности пространственного мышления, поскольку они учатся переводить, вращать, масштабировать и комбинировать трехмерные и двухмерные геометрические фигуры, одновременно изучая, как повторять фигуры с помощью циклов for, использовать модули для определять новые формы и вводить в дизайн динамические элементы с помощью операторов условия, а также совершенствовать навыки в области программирования. Программное обеспечение OpenSCAD может быть использовано для разработки и проектирования сложных объектов, конструирования и прототипирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 3D-моделирование и прототипирование. Уровень 1: учебное пособие/ Д. Г. Копосов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.
2. 3D-моделирование и прототипирование. Уровень 2: учебное пособие/ Д. Г. Копосов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.

К ПРОБЛЕМЕ ИНТЕРНЕТ-ЗАВИСИМОСТИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ

О.Б. Голубев

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: golubevob@vogu35.ru

Аннотация. В статье поднимается проблема интернет-зависимости у современных учащихся, приведены виды интернет-зависимостей и их проявления. В статье уделяется внимание профилактике интернет-зависимости, а также сервисам, которые можно применять для защиты от нежелательного контента в сети интернет.

Ключевые слова: цифровизация образования, цифровое образование, интернет-зависимость.

Цифровизация образования – качественно новый этап информатизации образования в условиях смены технологического уклада общества, перехода к цифровой экономике. Основными задачами цифровизации образования являются: развитие цифровых умений и компетенций, а также индивидуализация обучения. Цифровизация образования связана с рядом проблемных и кризисных аспектов: социальная адаптация личности к цифровой среде, изменение инфраструктуры и инструментария образовательной и профессиональной деятельности, динамическое изменение в перечне профессий, информационный стресс, девиантное поведение в цифровой среде. Цифровое образование расширяет спектр человеческих ценностей, обогащая их идеями непрерывного образования, ценностями глобальной сетевой культуры, ответственного использования информационных ресурсов. В цифровой среде современный человек является не только наблюдателем, но в первую очередь активным деятелем, создателем в формате digital-технологий. Однако, вместе с этим появилось и ряд проблем, одной из которых является интернет-зависимость учащихся. К основным видам интернет-зависимости относятся:

Коммуникационная зависимость – это поведенческое расстройство, связанное с необходимостью постоянного общения с другими людьми, даже в том случае, когда в этом общении нет никакой необходимости.

Зависимость от социальных сетей – это зависимость человека от постоянного обновления и контроля над страницей в социальной сети. Корреляция между использованием социальных сетей и снижением числа офлайновых социальных отношений является сложной проблемой, зависящей не только от времени, потраченного на них, но и от мотивации их использования.

Выделяют шесть основных типов интернет-зависимости (Дрепа М.И.):

1. Навязчивый веб-серфинг (информационная перегрузка) – очень частые путешествия в сети интернет.
2. Пристрастие к виртуальному общению и виртуальным знакомствам – бесконечная переписка в мессенджерах с большим количеством виртуальных друзей.
3. Игровая зависимость – слишком навязчивое увлечение компьютерными играми по сети.
4. Навязчивая финансовая потребность – постоянные покупки в интернет-магазинах или участие в интернет-аукционах.
5. Киберсексуальная зависимость – влечение к посещению сайтов с контентом 18+.
6. Пристрастие к просмотру мультфильмов и фильмов через Интернет [1, 5].

Вероятность развития депрессивных симптомов у учащихся с интернет-зависимостью выше, чем у других людей. Физиологические симптомы включают ослабленную иммунную систему, в т. ч. из-за недостатка сна, потери физической активности, а также напряжение глаз и спины. Симптомы интернет-зависимости могут включать волнение, депрессию, гнев и беспокойство, когда индивид вынуждено перестает использовать технологические средства. Интернет-зависимые теряют контроль над собственным временем, что приводит к изменению его участия в общественной жизни, включая академическую, профессиональную деятельность и распорядок дня.

Формировать культуру ответственного, этичного и безопасного использования информационных технологий у учащихся необходимо еще в младшем школьном возрасте. Педагогам необходимо учить школьников управлять интернетом, а не наоборот: знать с какими массивами информации можно работать, а с какими нельзя. Безусловно, учащиеся должны находиться в уравновешенном состоянии, чтобы ответственно использовать ресурсы сети Интернет.

К принципам использования интернет можно отнести: естественность (количество времени, проведенного в информационном пространстве должно быть полезным для человека), сосредоточенность (должны четко знать с какой целью в данное время используем сеть интернета). Когда нарушается равновесие, это всегда неблагополучно для человека: все хорошо в меру. Необходимо грамотно соблюдать баланс живого и виртуального общения, чтобы не столкнуться с синдромом информационной интоксикации. Для того, чтобы понять сколько можно пользоваться интернетом необходимо научиться перезагружаться, а также выработать навык прислушивания к себе. В школьном возрасте может возникнуть у учащихся экранная зависимость, в результате чего происходит изменение восприятия: если человек живет через экран, то он уже не создатель, а наблюдатель собственной жизни. Информационная безопасность – это составляющая безопасности современного ребенка. Вопросам информационной безопасности и сетевого этикета необходимо уделять внимание не только на уроках информатики, но и на внеурочных занятиях со школьниками. Сегодня имеется целый ряд программных средств и сервисов для обеспечения безопасного использования детьми компьютеров и мобильных устройств, а также для обеспечения родительского контроля за использованием детьми сети Интернет. К таким программным продуктам относится многоплатформенное решение для защиты детей в интернете Kaspersky Safe Kids. Данный программный продукт дает возможность отслеживать работу программ на компьютере и мобильных устройствах, ограничивает время на использование гаджетов, позволяет получить статистику о действиях детей в сети интернет [2,3].

Также защищает детей при работе в сети Интернет программный продукт Eset nod32 Parental Control для Android. С помощью этого приложения можно провести мониторинг посещенных ребенком сайтов. Также приложение позволяет блокировать все сайты с недетским контентом и по GPRS находить месторасположение детей. Таймер позволяет контролировать время, отведенное ребенку на игры. Сервис Yandex.DNS позволяет защититься от мошеннических сайтов и заблокировать нежелательный контент. Имеются и другие сервисы родительского контроля, однако лучшей защитой детей от нежелательной информации в сети интернет является личный пример самих родителей, а также насколько грамотно они прививают детям культуру работы в сети Интернет [4].

Существует целый ряд потенциальных угроз от информации на смартфонах: смс о выигрышах от мобильных мошенников, рассылка поздравительных открыток (мошенники любят рассылать смс с поздравительными открытками или ссылками на фотографии, ни в коем случае не рекомендуется открывать вложенные файлы и переходить по ссылкам внутри сообщения), выманивание паролей у пользователей, ошибочные платежи (мошенники под видом ошибочных платежей просят вас вернуть им деньги). Операторы сотовой связи советуют не переходить по сомнительным ссылкам, не загружать и не открывать сомнительные файлы, не перезванивать на непринятые вызовы, если номер неизвестен.

Сотовые операторы сегодня также предоставляют целый ряд услуг для защиты детей. Известно, что дети могут подключить нежелательную мобильную подписку. У операторов сотовой связи есть возможность проверить наличие мобильных подписок и легко отключить ненужные подписки. Не стоит забывать, что детям до 7 лет не рекомендовано постоянно пользоваться мобильными устройствами и гаджетами. Услуга «Радар» от операторов сотовой связи позволит всегда знать родителям, где находится ваш ребенок.

Нежелательная информация может привести к агрессии, приему алкоголя, психотропных средств, суициду, азартным играм, противоправному поведению и т.д. Даже у взрослого человека, который очень много времени проводит за компьютерными играми, находясь в виртуальном мире, может меняться характер функционирования сознания, меняться ощущения внешнего пространства, человек иначе (неадекватно) оценивает себя и свои возможности, у него, например, может появиться чувство своего могущества или бессилия. Практические и теоретические занятия по компьютерной безопасности для учащихся, родителей и педагогов являются отличным способом профилактики от всевозможных негативных последствий при работе за компьютером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цифровое образование в терминах: учебно-методическое пособие / под ред. Е.В. Барановой. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена. 2020.164 с.
2. Голубев О.Б., Горохова Ю.А. Безопасное использование сети Интернет поколением I // Научное обозрение: гуманитарные исследования. 2016. №5. – С.76-80.
3. Никифоров О.Ю., Голубев О.Б. К вопросу о содержательном аспекте подготовки будущих учителей информатики в контексте организации безопасного информационного пространства // Современные проблемы науки и образования. 2015. №3. – С.319.
4. Голубев О.Б., Никифоров О.Ю. Организация безопасного информационного пространства школьников в сети //Интернет-вестник ВолгГАСУ. 2014. №8-2 (40). – С. 161.
5. Тестов В.А., Голубев О.Б. Образование в информационном обществе: переход к новой парадигме. Вологда. 2016.

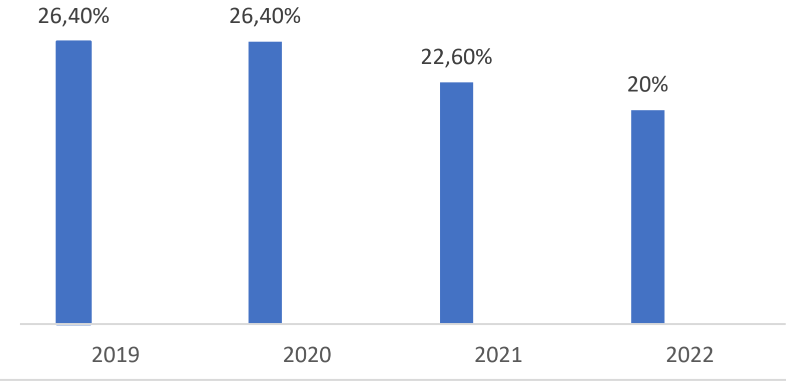
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ В ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ ЗА ПЕРИОД 2019-2022 ГОДЫ

Н.Б. Розова, Е.Б. Якимова
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
e-mail: rozova-natali@mail.ru, voro@inbox.ru

Аннотация. В статье представлен сравнительный анализ результатов ЕГЭ по физике в Вологодской области за период с 2019 по 2022 годы, выявлены основные тенденции преподавания физики в средней школе.
Ключевые слова: ЕГЭ по физике, динамика результатов.

В 2022 году в Вологодской области ЕГЭ по физике сдавали 913 человек, в том числе выпускников текущего года 864. Количество участников ЕГЭ по физике в процентном соотношении от общего числа участников составило 20%, для сравнения: в 2021 году – 1171 участник (22,6%); в 2020 году – 1272 участников (26,4%), в 2019 году –1446 участников (26,4%). В течение последних четырех лет наблюдается тенденция уменьшения количества участников как в абсолютных показателях, так и в относительных. За этот период число выпускников, писавших экзамен по физике, уменьшилось на 533 человека.

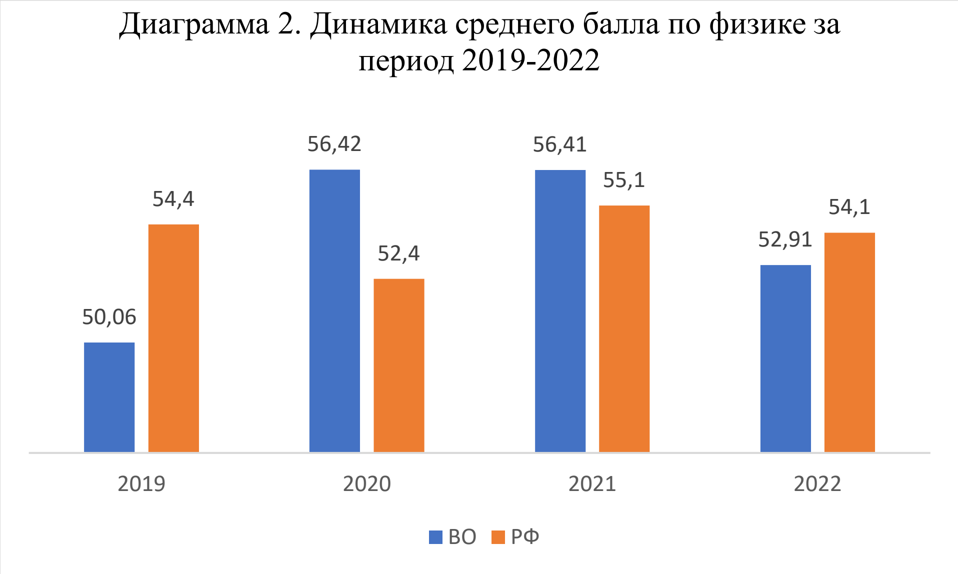
Диаграмма 1. Количество участников (%) ЕГЭ по физике за период 2019-2022



Снижение количества школьников, выбравших физику, во многом обусловлено общим снижением интереса к естественным предметам, как наиболее сложных для изучения. Однако, сказывается и наметившаяся тенденция замены экзамена по физике на экзамен по информатике при поступлении в вузы на технические и IT− специальности.

За последние 4 года количество участников экзамена по физике, не набравших минимального балла, почти не изменилось (4-6%). Обычно к этой группе относятся учащиеся общеобразовательного или гуманитарного профиля. Для групп, представленных учащимися профильных физико-математических и инженерных классов, результаты обучения физике изменились. Процент участников, набравших от 61 до 80 баллов понизился с 24,42% до 16%. Также снизился процент участников с высокими баллами - с 9,93% до 6%. Это привело к снижению среднего тестового балла по Вологодской области с 56,09 до 52,91.

Если сравнивать со средними результатами по стране, то результаты выпускников ВО в 2022 году чуть ниже средних баллов по РФ (диаграмма 2).



Одной из возможных причин общего снижения результатов является переход в условиях распространения COVID-19 в течение 2020-2021 учебного года на дистанционное обучение при сохранении очной формы обучения и отмена ОГЭ, что повлияло на качество проведения лабораторных работ и практических занятий и приобретения опыта работы с экзаменационными заданиями.

Традиционно наиболее успешно сдают экзамен участники из городских округов Вологды и Череповца. Наиболее высокие результаты ЕГЭ по физике (от 81 до 100 баллов) на протяжении четырех последних лет демонстрируют выпускники следующих ОО: БОУ ВО «Вологодский многопрофильный лицей», МАОУ «Общеобразовательный лицей «АМТЭК» (г. Череповец), МАОУ «СОШ № 10» (г. Череповец), МОУ «Лицей № 32» (г. Вологда). В данных ОО учебный предмет «Физика» изучается на углубленном уровне в рамках соответствующих профилей обучения.

Экзаменационная работа традиционно содержит задания трех уровней сложности: базового, повышенного и высокого. Задания базового уровня представлены только в части 1 работы. Эти задания проверяли усвоение наиболее важных физических понятий, моделей, явлений и законов. Задания повышенного уровня включены и в первую и во вторую части. Эти задания направлены на проверку умения использовать понятия и законы физики для анализа различных процессов и явлений, а также умения решать задачи на применение одного-двух законов (формул) по механике и квантовой физике. Задания части 2 являются заданиями высокого уровня сложности и проверяют умение использовать законы и теории физики в измененной или новой ситуации, а также обосновывать свой выбор использования законов и формул для решения данной задачи. В таблице 1 представлена динамика усвоения обучающими основных разделов физики.

Таблица 1- Динамика усвоения обучающими разделов физики

Раздел школьного курса физики	Средний процент выполнения задания			
	2019	2020	2021	2022

Механика	63,39	61,39	63,21	56,22
МКТ и термодинамика	61,38	63,38	57,44	60,30
Электродинамика	52,76	49,76	55,74	43,62
Квантовая, атомная, ядерная физика	44, 43	54, 43	46,84	57,36

Таким образом, можно констатировать, что основные элементы содержания механики, молекулярной физики и термодинамики усвоены достаточно хорошо, с ними справляются около 60% экзаменуемых. Процент выполнения заданий по электродинамике ниже 60%, именно в этом разделе большинство заданий вызывают значительные затруднения. Наблюдается положительная динамика в усвоении элементов квантовой, атомной и ядерной физики.

При анализе результатов выполнения работы по группам заданий разных уровней сложности можно отметить, что средний процент выполнения заданий базового уровня сложности стабильно превышает 60%, заданий повышенного уровня сложности – больше 40%, но наблюдается тенденция к снижению, задания высокого уровня решают менее 20% выпускников (Таблица 2). Таким образом, учащиеся удовлетворительно справляются с заданиями базового и повышенного уровня, но при решении заданий высокого уровня испытывают значительные затруднения.

Таблица 2- Динамика результатов выполнения работы по группам заданий разных уровней сложности

Уровень сложности заданий	Средний процент выполнения задания			
	2019 г	2020 г	2021 г	2022 г
базовый	65,63	67,24	67,85	63,67
повышенный	52,21	51,42	48,46	42,21
высокий	16,32	14,7	17,25	14,33

При анализе результатов выполнения групп заданий, направленных на оценку различных способов действий, формируемых в процессе обучения физике, выделяют следующие умения:

– знать/понимать смысл физических понятий, величин, законов, принципов, постулатов;

– уметь описывать и объяснять физические явления и свойства тел (включая космические объекты), результаты экспериментов … приводить примеры практического использования физических знаний;

– отличать гипотезы от научной теории, делать выводы на основе эксперимента и т.д.;

– уметь применять полученные знания при решении физических задач;

– использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Чаще всего в заданиях первой части первая и вторая группа умений объединены.

Таблица 3- Динамика результатов выполнения групп заданий, направленных на оценку различных способов действий

Способы действий	Средний процент выполнения задания			
	2019 г	2020 г	2021 г	2022 г
Применение законов и формул в типовых учебных ситуациях, анализ и объяснение явлений и процессов	63,06	66,88	67,66	62
Методологические умения	64,84	79,64	76,65	77
Решение задач	26,08	25	26,16	20

Анализ результатов (Таблица 3) показывает, что учащиеся хорошо овладели методологическими умениями, которые формируются при широком использовании демонстрационного и лабораторного экспериментов. Могут применять на базовом уровне физические законы и формулы, анализировать и объяснять физические явления. При этом наиболее успешно школьники справляются с заданиями, представленными в виде традиционной текстовой задачи, но имеют проблемы с интерпретацией текстовой и графической информации. При решении заданий высокого уровня большинство экзаменуемых испытывают значительные затруднения. И здесь очень важно научить не только механически использовать отработанные алгоритмы решений, а на основе комплексного анализа всех данных условия строить модель явления или процесса и устанавливать зависимости между ее параметрами.

Принципиальным для качественной подготовки обучающихся по физике является профессиональная компетентность учителя, которая проявляется как в степени владения теоретическими основами физики, обеспечивающими возможность грамотного отбора тренировочных заданий, конструировании разнообразных типов заданий, адекватных целям подготовки и обязательном анализе ошибок и неточностей, допускаемых обучающимися при выполнении задания, так и во владении методикой организации познавательной деятельности школьников, учитывающей их индивидуальные потребности и возможности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационная справка о результатах ЕГЭ выпускников общеобразовательных организаций Вологодской области в 2019 году. – URL: https://u12.edu35.ru/attachments/article/911/%D0%98%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BA%D0%B0%20%D0%BE%20%D1%80%D0%B5%D0%B7%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B0%D1%85%20%D0%95%D0%93%D0%AD_2019.pdf (дата обращения: 01.06.2023). – Текст: электронный.
2. Статистико-аналитические отчеты ГИА 2020 – URL: https://vgapkro.ru/wp-content/uploads/2020/09/Volgogradskaya_SAO-11-2020-fizika.pdf (дата обращения: 01.06.2023). – Текст: электронный.
3. Статистико-аналитические отчеты ГИА 2021 – URL: https://viro.edu.ru/?page_id=11974 (дата обращения: 01.06.2023). – Текст: электронный.
4. Статистико-аналитические отчеты ГИА 2022 – URL: https://viro.edu.ru/?page_id=6234 дата обращения: 01.06.2023). – Текст: электронный.

ЦИФРОВИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ В ВУЗЕ СТУДЕНТОВ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОВЗ

О.Ю. Штрекерт

Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

e-mail: strekert@mail.ru

Аннотация. В статье описаны особенности процесса цифровой трансформации образования на примере дисциплины физики. Особое внимание уделено проблеме обучения студентов с инвалидность и ОВЗ. Рассмотрены эффективные методики обучения физике студентов данной категории.

Ключевые слова. Цифровая трансформация, физика, студенты с инвалидностью и ОВЗ, дистанционное обучение.

В последние годы цифровая трансформация выходит на первый план среди всего комплекса проблем обучения, воспитания и образования. При этом неверно ставить знак равенства между процессами цифровизации образования и дистанционного онлайн-обучения. Первая категория гораздо шире и включает в себя вторую категорию.

Цифровизация включает в себя не только дистанционное онлайн-обучение, но и непосредственно обучение в вузе (школе), создание и образование электронных курсов, сообществ, внедрение новых педагогических технологий в цифровой среде и т.д.

Конечно же, наиболее сильным стимулом к внедрению различных процессов цифровизации (а именно, дистанционных технологий обучения) послужил период пандемии. И в школах, и в вузах, да и на предприятиях практически всем пришлось столкнуться с данной проблемой. И от того насколько успешно (затруднительно) был преодолен данный рубеж, мы видим сегодня дальнейшие возможности развития и внедрения всех процессов цифрового обучения.

При этом возможности обучения физике и смежным дисциплинам (математике, информатике и т.д.) в период пандемии расширились и претерпевают в настоящее время большие изменения. Элементы цифровизации вошли уже сегодня в курс построения физики (в частности, остались элементы дистанционных онлайн-курсов). Но при этом дисциплина сохраняет свою основу в традиционном обучении [1].

Проблема преподавания в курсе физики в основном состоит в том, что за последние годы сократилось количество часов, выделяемых для данной дисциплины (особенно как базовой дисциплины всех технических направлений подготовки). Кроме этого, большое количество часов из контактной (аудиторной) работы со студентами выведено на самостоятельное освоение дисциплины. При этом если говорить о заочном обучении и обучении с сокращенными сроками, то студентам данных категорий выделено еще меньше времени для освоения курса физики, чем категории очных обучающихся.

В последние годы наметились существенные сдвиги в получении профессионального и высшего обучения для людей с инвалидностью и людей с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ). При этом в правилах приема в вуз произошли большие изменения. В том числе для данных категорий абитуриентов выделяется определенная доля мест в вузе. Так как в последующие годы количество данной категории абитуриентов, возможно, будет увеличиваться, то необходимо не только учитывать индивидуальную программу обучения, но и вносить изменения в процессы обучения. При этом для данной категории студентов должны быть созданы все необходимые условия образовательного процесса. При этом большое внимание необходимо уделять разработке цифрового обеспечения обучения (в том числе и дистанционное онлайн-обучение). При этом к таким студентам относят следующие категории, которые могут обучаться в вузе:

- лица с нарушениями слуха (глухие, слабослышащие, позднооглохшие);
- лица с нарушениями речи;
- лица с нарушениями зрения (слепые, слабовидящие);
- лица с нарушениями опорно-двигательного аппарата (ДЦП);
- лица с нарушениями интеллекта (умственно отсталые дети);
- лица с задержкой психического развития (ЗПР);
- лица с нарушениями эмоционально-волевой сферы;
- лица с множественными нарушениями (сочетание 2-х или 3-х нарушений).

Таблица

Численность детей по возрастам с инвалидностью на 01.06.2023 [2]

Территория	Всего	0 – 3 лет		4-7 лет		8 – 14 лет		15- 17 лет	
		Чел.	Доля, %	Чел.	Доля, %	Чел.	Доля, %	Чел.	Доля, %
Северо-Западный федеральный округ	*55 265*	*3 739*	*6,77*	*12 162*	*22,01*	*27 960*	*50,59*	*11 404*	*20,64*
Республика Карелия	2 904	222	7,64	643	22,14	1 446	49,79	593	20,42
Республика Коми	3 546	251	7,08	794	22,39	1 760	49,63	741	20,90
Архангельская область	4 802	322	6,71	932	19,41	2 501	52,08	1 047	21,80
Ненецкий автономный округ	226	13	5,75	50	22,12	115	50,88	48	21,24
Вологодская область	**5 474**	**403**	**7,36**	**1 159**	**21,17**	**2 733**	**49,93**	**1 179**	**21,54**
Калининградская область	4 136	297	7,18	847	20,48	2 083	50,36	909	21,98
город Санкт-Петербург	24 017	1 668	6,95	5 814	24,21	12 022	50,06	4 513	18,79
Ленинградская область	1 769	13	0,73	169	9,55	1 049	59,30	538	30,41
Мурманская область	3 088	234	7,58	666	21,57	1 546	50,06	642	20,79
Новгородская область	2 406	136	5,65	509	21,16	1 220	50,71	541	22,49
Псковская область	2 897	180	6,21	579	19,99	1 485	51,26	653	22,54

В таблице приведена численность детей-инвалидов по возрастам по Северо-Западному Федеральному округу. При этом Вологодская область по количеству детей-инвалидов находится на втором месте после города Санкт-Петербурга. При этом 1179 детей-инвалидов приходится на возраст 15-17 лет. Данная группа детей уже должна быть ориентирована на дальнейшее получение профессионального или высшего образования. Таким образом, необходимо разрабатывать (или перерабатывать) программы обучения данной группы абитуриентов. Особое внимание необходимо уделить процессу цифровизации программ детей с инвалидностью. Обязательно необходимо составлять программу с учетом индивидуальных возможностей обучающегося и с большим количеством элементов дистанционного образования.

Особенно остро вопрос обучения студентов с инвалидность и ОВЗ стоит в технических направлениях подготовки. Дисциплина «Физика» (а также, и математика, информатика и т.д.) как базовая дисциплина технических направлений подготовки должна быть эффективно встроена процесс обучения данной категории студентов.

В настоящее время уже разработаны достаточно эффективные программы обучения физике студентов с инвалидностью и ОВЗ. Например, коллективом кафедры «Физика» совместно со специалистами ГУИМЦ МГТУ им. Н.Э. Баумана разработан курс «Когнитивные технологии сопровождения дисциплины физика». Дальнейшее развитие применения вспомогательной дисциплины КТСД-физика в учебном процессе связано с использованием программ «искусственного интеллекта» [3].

Таким образом, на базе Вологодского государственного университета необходимо создать комплекс дисциплин естественнонаучного и базового цикла адаптационного характера. При этом среди них особую роль необходимо отвести математике, физике и информатике.

На кафедре физики уже представлено множество курсов различного объема часов и для различных направлений подготовки в среде Moodle. Все занятия могут проходить как в дистанционном формате, так и с элементами цифровизации курса физики.

Прежде всего, для студентов с инвалидность и ОВЗ необходимо подготовить отдельный вводный спецкурс по физике, включающий в себя входное тестирование не только по проверке знаний, но и по проверке когнитивных возможностей студентов. Также необходимо создать и внедрять адаптационные программы (включающие вопросы всего курса физики) для студентов с инвалидностью и ОВЗ. Большое внимание нужно уделить обучению и переподготовке профессорского-преподавательского состава по программе взаимодействия с людьми с инвалидностью и ОВЗ.

В настоящее время процент поступающих абитуриентов с инвалидностью и ОВЗ очень мал. Но и сейчас выявилась следующая проблема. Многие студенты скрывают (по разным причинам) свою индивидуальную особенность. В результате поступления и обучения в общем потоке они не редко не могут освоить (или осваивают программу с большими затруднениями) программу обучения. При этом начинают испытывать не только трудности при прохождении экзаменационной сессии, но и затруднения в психологическом плане. Часто студенты не могут включиться не только в процесс обучения, но и испытывают затруднения при общении в группе. Поэтому таким студентам необходимо обеспечить особую адаптированную программу обучения, наладить эффективную работу с куратором и семьей. Наиболее эффективным будет обучение с элементами дистанционного образования. Если таких студентов несколько, то можно обучение построить в мини группах.

Стоит отметить, что использование цифровых инструментов в обучении студентов в общем потоке и студентов с инвалидностью и ОВЗ стало насущной необходимостью. Это расширяет возможности образования и выводит обучение на новый уровень.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штрекерт О.Ю. О взаимодействии преподавателя и студента в вузе // Стратегические ориентиры развития высшей школы. Сборник научных трудов участников Национальной научно-практической конференции, 2019. – С. 157-161.
2. Численность детей-инвалидов по возрастным группам в разрезе субъектов РФ //Федеральный реестр инвалидов [сайт]. – 2023. – URL: https://sfri.ru/o-fri (дата обращения: 18.06.2023).
3. Мысик С.В. Критерии развития когнитивного потенциала студентов с ограниченными возможностями здоровья в рамках изучения общего курса физики / Мысик С.В., Дементьева О.Ю. // Всероссийская конференции по вопросам доступности профессионального образования для лиц с ограниченными возможностями здоровья в инженерной области. – 2022. – URL: https://inclusion.bmstu.press/preprints/7900/ (дата обращения: 1806.2023).