М. В. Мещеряков, Классификация упругих вещественных неприводимых линейных представлений компактных связных групп Ли, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 1, 40–50

Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №1

КЛАССИФИКАЦИЯ УПРУГИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПАКТНЫХ СВЯЗНЫХ ГРУПП ЛИ

© М. В. МЕЩЕРЯКОВ

Статья посвящена классификации вещественных неприводимых линейных представлений некоммутативных связных компактных групп Ли G, все морсовские матричные элементы которых имеют минимально возможное число критических точек, допускаемых топологией группы G.

§1. Введение

Основная цель данной работы состоит в некоторой классификации вещественных неприводимых представлений компактных связных некоммутативных групп Ли G по топологическим свойствам их матричных элементов на основе дифференциально-геометрического подхода, связанного с рассмотрением *упругих погружений* замкнутых конечномерных многообразий. Задача об упругих погружениях замкнутых многообразий в евклидовы пространства восходит к работам Чженя и Лашофа [1], Н. Кейпера [2] и которая затем изучалась в ряде последующих работ [3, 4, 5]. Напомним, что погружение $f\colon M \to \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ называется *упругим* (taut) *погружением*, если все морсовские функции высоты $h_v(x) = \langle v, f(x)\rangle$, где $v \in \mathbb{R}^N$, $x \in M$ и $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — евклидово произведение, являются функциями Морса, у которых числа критических точек различных индексов равны соответствующим числам Морса $\mu_k(M)$, $k = 0, 1, \ldots, m = \dim M$ многообразия M. В силу известных в топологии неравенств Морса между числами критических точек функций Морса и числами Бетти $\beta_k(M, F)$ многообразия M относительно поля коэффициентов F к упругим погружениям принадлежат погружения, для которых

Ключевые слова: компактная группа Ли, неприводимое вещественное линейное представление, матричные элементы, функция Морса, упругие погружения гладких многообразий.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Мордовия в рамках научного проекта №18-41-130004.

числа критических точек равны соответствующим числам Бетти многообразия M. Из неравенств Морса вытекает, что, если числа критических точек различных индексов морсовских функций высоты некоторого погружения многообразия M равны его соответствующим числам Бетти относительно поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, то гомологии M не имеют кручения.

Функции Морса с минимальным возможным числом критических точек возникают не только в задаче об упругих погружениях. Нетривиальные примеры однородных многообразий с такими функциями Морса исследовали Р. Ботт и Г. Самельсон в работе [7] среди орбит представлений изотропии римановых симметрических пространств и, в частности, среди орбит присоединенного представления полупростых компактных групп Ли. Вложения перечисленных орбит являются особо интересными примерами упругих погружений однородных пространств компактных групп Ли. Задача полной классификации тех замкнутых многообразий, которые допускают упругие погружения, в настоящее время пока не решена. Ряд топологических препятствий к существованию упругих погружений компактных многообразий был найден Г. Торбергсоном (см. [8]).

Взаимосвязям теории Морса с теорией интегрируемых динамических систем посвящена работа А. П. Веселова и И. А. Дынникова [6], где свойство упругости стандартных вложений классических матричных компактных групп $O(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$ используется для анализа и построения интегрируемых градиентных потоков на них.

Другим источником минимальных функций Морса служит геометрия компактных симплектических многообразий с гамильтоновым действием компактных торов и теория гамильтоновых систем. Важная теорема Атьи–Стернберга–Гийемина о выпуклости образа отображения моментов гамильтонова действия тора эквивалентна утверждению о том, что морсовские компоненты отображения моментов являются минимальными функциями Морса без критических точек нечетных индексов на компактном симплектическом многообразии (см. [9]).

В работе [10] Г. Торбергсон и К. Городски классифицировали упругие линейные вещественные неприводимые представления компактных связных групп Ли G, определяя их как линейные представления, все орбиты которых в пространстве представления являются упругими подмногообразиями этого пространства. В терминах матричных элементов таких представлений свойство упругости означает, что матричные элементы как функции на самой группе G оказываются минимальными функциями Морса–Ботта, критические точки которых образуют невырожденные подмногообразия ненулевой размерности. К рассмотренным ранее Р. Боттом и Г. Самельсоном представлениям изотропии римановых пространств эта классификация добавила еще только три новых представления. Среди всех матричных элементов указанных представлений этот класс функций Морса–Ботта на групповом многообразии параметризуется матрицами ранга 1 и имеет большую коразмерность в пространстве матричных элементов.

С другой стороны, около 15 лет назад В. И. Арнольд инициировал программу топологической классификации некоторых классов специальных функций как обобщенный аналог 16-ой проблемы Гильберта [11, 12]. Отметим, что вопрос об анализе дифференциально-топологических свойств задаваемых некоторыми общими формулами матричных элементов неприводимых представлений ставился еще ранее Д. П. Желобенко в его книге по теории представлений компактных групп Ли [13] и восходит к классической работе Л. С. Понтрягина [14].

В настоящей работе, следуя описанному выше дифференциально-геометрическому подходу, будут найдены все те линейные вещественные неприводимые представления

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$$

некоммутативных компактных связных групп Ли, для которых подмногообразие $\rho(G)$ упруго вложено в пространство линейных операторов $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Несмотря на некоторое отличие этой формулировки от определения работы [10], мы будем называть такие представления *упругими представлениями* группы G. Наш основной результат — следующее утверждение.

Теорема. *Стандартные представления классических матричных групп $SO(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$ являются единственными упругими линейными вещественными неприводимыми представлениями среди всех линейных вещественных неприводимых локально точных представлений связных компактных групп Ли.*

Анонс этого результата был сделан в тезисах доклада на четвертой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» [16].

В работе К. Городски [17] было отмечено, что, если приводимое вещественное представление компактной связной группы Ли упругое, то и каждая его неприводимая компонента сама является упругим представлением. Но прямая сумма упругих неприводимых вещественных представлений не всегда оказывается упругим представлением. Некоторые примеры в связи с этим в случае абелевых групп также были указаны в [17]. Поэтому далее мы ограничиваемся рассмотрением неприводимых вещественных представлений указанных групп.

Тем не менее, поскольку свойство упругости представления ρ формулируется в терминах морсовских свойств функций из пространства матричных элементов $\mathrm{M}(\rho)$, нетрудно указать некоторые конструкции упругих приводимых вещественных представлений.

Предложение 1. 1) *Если* $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ *— упругое неприводимое вещественное представление компактной связной группы Ли* G, *то* n*-кратная прямая сумма* $n\rho$ *также является упругим представлением* G.

2) *Если* $\rho_j\colon G_j \to \mathrm{Aut}(V_j)$, $j = 1, 2$ *— два упругих неприводимых вещественных представления связных компактных групп Ли* G_j, *то представление*

$$\rho\colon G_1 \times G_2 \to \mathrm{Aut}(V_1 \oplus V_2),$$

которое задается равенством

$$\rho(g_1, g_2)(v_1, v_2) = (\rho_1(g_1)v_1, \rho_2(g_2)v_2),$$

где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, *является упругим вещественным приводимым представлением группы Ли* $G_1 \times G_2$.

Доказательство. Для доказательства 1) достаточно заметить, что

$$\mathrm{M}(\rho) = \mathrm{M}(n\rho).$$

Что касается утверждения 2), то

$$\mathrm{M}(\rho) = \mathrm{M}(\rho_1) \oplus \mathrm{M}(\rho_2)$$

в пространстве функций $C^\infty(G_1 \times G_2)$, а

$$\mathrm{M}(\rho_j) \subset C^\infty(G_j) \subset C^\infty(G_1 \times G_2), \quad j = 1, 2.$$

Отсюда следуют свойства упругости рассматриваемых приводимых представлений. Ясно, что группа $G_1 \times G_2$ уже не является простой группой Ли, если группы G_1 и G_2 были простыми группами Ли. □

Из основного результата следует, что у остальных вещественных неприводимых линейных представлений связных компактных полупростых групп Ли, включая особые простые группы Ли, числа Морса пространств матричных элементов всегда больше чисел Морса или чисел Бетти соответствующих групповых многообразий. Фактически, с точки зрения спектральной теории оператора Лапласа Δ, отвечающего римановой метрике Картана–Киллинга на компактной связной группе Ли G, в теореме выделены те компактные связные группы Ли и их неприводимые представления, которые приводят к морсовским собственным функциям оператора Лапласа с минимальным числом критических точек.

Оценки или нахождение точных значений чисел Морса пространств матричных элементов других вещественных неприводимых представлений в терминах картановской теории старших весов неприводимых представлений и геометрических свойств связных простых компактных связных групп Ли можно рассматривать как первые шаги в рамках программы топологической классификации функций Морса инициированной В. И. Арнольдом.

Наконец, отметим, что по существу в приводимом далее доказательстве нашего основного результата будет использоваться только так называемое свойство 0-упругости представления группы. Именно, достаточно потребовать, чтобы морсовские матричные элементы как функции на группе имели единственную точку локального максимума или минимума. Ясно, что свойство 0-упругости (0-taut) погружения $f\colon M \to \mathbb{R}^N$ равносильно тому, что любая гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^N$ делит подмногообразие $f(M)$ на не более чем две компоненты связности. Такое свойство является своеобразным слабым аналогом свойства выпуклости подмногообразия. В случае групповых подмногообразий $\rho(G)$ линейного пространства $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ оно также тесно связано с нодальными свойствами собственных функций операторов Лапласа. Кроме того, отметим, что, как известно, выпуклая оболочка ортогональной группы $O(n)$ или унитарной группы $U(n)$ является единичным шаром конечномерной операторной нормы, причем сама группа $O(n)$ или $U(n)$ совпадает с множеством крайних точек шара.

§2. Предварительные утверждения и доказательство основной теоремы

Свойство упругости стандартных представлений классических матричных компактных групп $O(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$ было предположено Н. Кейпером и впервые доказано в работе Уилсона [3]. Затем в связи с задачей построения интегрируемых градиентных потоков на группах Ли это свойство было независимо доказано в работе [6].

Чтобы доказать основную теорему, напомним некоторые сведения о вещественных представлениях компактных связных групп Ли и пространствах матричных элементов этих представлений.

Пусть G — компактная связная группа Ли и пусть $C^\infty(G)$ — пространство гладких вещественно-значных функций на ней, снабженное линейным действием G по правилу

$$g \cdot \varphi(x) = \varphi(x \cdot g^{-1}),$$

где $g, x \in G$ и $\varphi \in C^\infty(G)$. Это действие сохраняет стандартное L^2-скалярное произведение на $C^\infty(G)$, возникающее из биинвариантной меры Хаара на G.

Каждое вещественное представление $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ на вещественном векторном пространстве V ортогонально относительно некоторого G-инвариантного евклидова скалярного произведения и поэтому верно включение $\rho(G) \subset O(V)$ в ортогональную группу $O(V)$. Пусть $\mathrm{End}(V)$ пространство всех линейных операторов на пространстве V. Из цепочки вложений $\rho(G) \subset O(V) \subset \mathrm{End}(V)$ ясно, что подгруппа $\rho(G)$ есть подмногообразие пространства $\mathrm{End}(V)$, снабженного евклидовым скалярным произведением $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$, где Tr — след оператора и B^* — сопряженный оператор к линейному оператору $B \in \mathrm{End}(V)$. Назовем подмногообразие $\rho(G) \subset \mathrm{End}(V)$ *объемным*, если оно не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\mathrm{End}(V)$. Функции $f_A(g) = \mathrm{Tr}(A\rho(g))$, где $A \in \mathrm{End}(V)$ и $g \in G$ суть функции высоты на подмногообразии $\rho(G)$, принадлежат пространству $C^\infty(G)$ и называются *матричными элементами* представления ρ. Обозначим через $\mathrm{M}(\rho) \subset C^\infty(G)$ линейное пространство всех матричных элементов f_A представления ρ. Как G-пространство оно есть подпредставление левого регулярного представления группы G на $C^\infty(G)$.

Удобно, положив $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, обозначить *классические компактные матричные группы* как $U(n,k)$. Унитарная группа матриц $U(n,k)$, где $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, действует линейно на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ или на $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ соответственно, сохраняя (эрмитово) скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{H}^n$ и «уважая» комплексную или кватернионную структуру на них. В этих примерах имеем: $\mathrm{M}(\rho) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ для поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, $\mathrm{M}(\rho) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ для поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\mathrm{M}(\rho) \cong \mathbb{H}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{4n^2}$ для тела кватернионов $\mathbb{H}$. Во всех случаях вложения

$$U(n,k) \subset \mathrm{Mat}(n,k) \cong \mathrm{M}(\rho)$$

являются объемными. Эти примеры суть примеры неприводимых вещественных представлений вещественного, комплексного и кватернионного типов соответственно.

Чтобы доказать основную теорему нам потребуется ряд известных утверждений о свойствах неприводимых вещественных представлений компактных связных групп Ли G.

Предложение 2. *Любое вещественное неприводимое представление ρ компактной связной группы Ли G относится к одному из трех типов*:

А) *вещественный тип, где пространство матричных элементов $\mathrm{M}(\rho) \subset C^\infty(G)$ и $\dim_R \mathrm{M}(\rho) = d_\rho^2$, d_ρ — вещественная размерность представления ρ*;

Б) *комплексный тип, где $\mathrm{M}(\rho) \subset C^\infty(G)$ и $\dim_R \mathrm{M}(\rho) = \frac{1}{2}d_\rho^2$, d_ρ — вещественная размерность представления ρ*;

В) *кватернионный тип, где* $\mathrm{M}(\rho) \subset C^\infty(G)$ *и* $\dim_R \mathrm{M}(\rho) = \frac{1}{4}d_\rho^2$, d_ρ — *вещественная размерность представления* ρ.

В случаях Б) и В) вещественная размерность линейного представления ρ кратна 2 и 4 соответственно.

Известное нам изложение доказательства предложения 2 имеется в книге Адамса [16].

Предложение 3. *Погружение* $\rho(G) \subset \mathrm{M}(\rho)$ *компактной связной группы Ли* G *в пространство матричных элементов* $\mathrm{M}(\rho)$ *вещественного неприводимого представления* ρ *реализует* $\rho(G)$ *как объемное подмногообразие.*

Доказательство. Доказательство предложения 3 опирается на известный в теории представлений факт, состоящий в том, что ненулевые матричные элементы из $\mathrm{M}(\rho)$ являются собственными функциями оператора Лапласа Δ биинвариантной римановой метрики на G, принадлежащими отличным от нуля точкам спектра оператора Δ. Постоянные матричные элементы относятся только к нулевому собственному значению Δ. В силу этого погружение будет объемным. Итак, любое вещественное неприводимое представление ρ размерности d задает неприводимую линейную компактную подгруппу $\rho(G)$ объемно расположенную либо в $\mathbb{R}^{d^2}$, либо в $\mathbb{R}^{2d^2}$, либо в $\mathbb{R}^{4d^2}$ в зависимости от типа представления. □

Для доказательства основного результат весьма существенны следующая теорема Кейпера–Келли (см. [2, 4]) и её следствие.

Предложение 4. *Пусть* $f\colon M \to \mathbb{R}^N$ *0-упругое и объемное погружение связного замкнутого многообразия* M. *Тогда найдется открытое подмножество* $U \subset M$ *такое, что* $\alpha\colon T_mM \times T_mM \to N_mM$ *есть отображение на нормальное пространство* N_mM *погружения в любой точке* $m \in U$. *Здесь* α *— вторая квадратичная форма погружения в точке* m *и* T_mM *— касательное пространство в точке* m *многообразия* M.

Следствие. *В условиях предложения* 4 *выполняется неравенство Кейпера* $N \leqslant \frac{1}{2}m(m+3)$, $m = \dim M$.

Эта оценка размерности пространства упругого погружения существенна для доказательства основного результата данной работы. Чтобы её применить нам потребуется

Предложение 5. *Вторая квадратичная форма* α *вложений*

$$U(n,k) \subset \mathrm{Mat}(n,k)$$

задается на алгебре Ли $u(n,k)$ *группы* $U(n,k)$ *формулой* $\alpha(X,X) = X^2$, $X \in u(n,k)$ *и определяет билинейное отображение пространства* $u(n,k) \times u(n,k)$ *на нормальное подпространство* $u(n,k)^\perp$.

Указанная в предложении 5 формула для второй квадратичной формы есть следствие того, что однопараметрические подгруппы $g(t) = \exp(tX)$ суть геодезические биинвариантной римановой метрики на $U(n,k)$, индуцированной вложением $U(n,k) \subset \mathrm{Mat}(n,k)$. Кроме того, хорошо известно из теории симметрических пространств, что все компактные подгруппы классических компактных матричных групп являются как римановы многоообразия их вполне геодезическими подмногообразиями.

Алгебра Ли $u(n,k)$ группы $U(n,k)$ состоит из матриц X с элементами из поля k, удовлетворяющих условию $X^* = -X$. Здесь

$$X^* = \overline{X}^T,$$

а черта сверху означает комплексное или кватернионное сопряжение. Нормальное пространство $u(n,k)^\perp$ к касательному пространству $u(n,k)$ состоит из всех матриц $Y \in \mathrm{Mat}(n,k)$ таких, что $Y^* = Y$. Сюръективность отображения α можно проверить непосредственно вычислением с матрицами, но она также есть следствие предложения 4 и упругости стандартных представлений классических компактных матричных групп, установленной Уилсоном, а также А. П. Веселовым и И. А. Дынниковым.

Условие 0-упругости локально точного представления $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ влечет инъективность отображения ρ, превращая его в точное представление.

Предложение 6. *Локально точное представление $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ компактной связной группы Ли G, обладающее свойством 0-упругости, является точным представлением.*

Доказательство. В самом деле, допустим, что линейное представление оказалось не точным и пусть g_0 отличный от единичного элемента элемент ядра ρ. Рассмотрим морсовский матричный элемент $f_A(g) = \mathrm{Tr}(A\rho(g))$, где $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in G$. Пусть g_1 — точка единственного максимума функции f_A на группе G. Поскольку левые сдвиги L_g — диффеоморфизмы группы G на себя, то матричный элемент $f_B(g) = \mathrm{Tr}(B\rho(g))$, где $B = A\rho(g_1)$, будет морсовским матричным элементом, имеющим на группе G максимумы в двух различных точках e и g_0. Отсюда ясно, что ядро упругого представления тривиально. □

Обратимся теперь непосредственно к доказательству основной теоремы данной работы. Пусть $\rho\colon G \to U(n,k)$ — точное 0-упругое вещественное неприводимое представление соответствующего типа компактной связной группы Ли G и n — размерность представления над телом k. Дифференциал $d\rho\colon \mathcal{G} \to u(n,k)$ представления ρ есть точное представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G. Его образ $d\rho(\mathcal{G})$ есть матричная подалгебра Ли алгебры

Ли $u(n,k)$. В силу полной геодезичности подмногообразия $\rho(G)$ в группе $U(n,k)$, вторая квадратичная форма подгруппы $\rho(G)$ относительно её вложения в $\mathrm{Mat}(n,k)$ совпадает с ограничением вычисленной в предложении 5 формы α на подалгебру Ли $d\rho(\mathcal{G})$. С другой стороны, нормальное подпространство к подалгебре $d\rho(\mathcal{G})$ в $\mathrm{Mat}(n,k)$ можно представить в виде прямой суммы пространства $u(n,k)^{\perp}$ и ортогонального дополнения $d\rho(\mathcal{G})^{\perp}$ к подалгебре Ли $d\rho(\mathcal{G})$ внутри алгебры Ли $u(n,k)$. Отсюда ясно, что билинейное отображение $\alpha\colon d\rho(\mathcal{G})\times d\rho(\mathcal{G})\to u(n,k)^{\perp}\oplus d\rho(\mathcal{G})^{\perp}$ не будет сюръективным отображением, если пространство $d\rho(\mathcal{G})^{\perp}$ нетривиально. Сказанное, в силу предложения 4, означает, что если представление ρ является 0-упругим, то подалгебра Ли $d\rho(\mathcal{G})$ совпадает со всей алгеброй Ли $u(n,k)$. Следовательно, $\rho(G)=U(n,k)$. Это завершает доказательство основной теоремы.

§3. Заключение

Доказанная теорема показывает, например, что все точные неприводимые вещественные представления простых особых компактных групп Ли G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 не являются упругими вложениями. В связи с этим вычисление чисел Морса морсовских матричных элементов неприводимых вещественных представлений компактных простых групп Ли представляется содержательной дифференциально–топологической задачей, ожидающей своего решения и тесно связанной с геометрическими свойствами собственных функций биинвариантного оператора Лапласа.

В работе [8] Г. Торбергсон получил довольно сильные необходимые условия на гомологические свойства упругих подмногообразий евклидовых пространств. Например, эти условия не выполняются для замкнутых многообразий с фундаментальной группой, изоморфной циклической группе $\mathbb{Z}_n$ при $n>2$. Поскольку центры простых компактных групп Ли $SU(n)$ и E_6 суть соответственно $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_3$, то присоединенные группы $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ и $E_6/\mathbb{Z}_3$ не допускают упругих вложений в евклидовы пространства, а, следовательно, и упругих представлений.

Отметим, что Г. Торбергсон и К. Городски в работах [10, 17] определяют упругие представления компактных групп Ли как линейные представления, все орбиты, которых являются упругими подмногообразиями пространства представления. Они доказали, что все неприводимые представления в смысле такого определения суть либо известные полярные представления, либо три явно описанных изолированных представления. Что касается приводимых представлений, то К. Городски в [17] описал некоторый класс упругих приводимых представлений. Определение упругого представления, использованное в данной работе, имело в качестве своей мотивации вопрос о том, когда матричные элементы, включая и характеры представлений, являются функциями Морса на групповом многообразии. Матричные элементы вещественных неприводимых представлений связных компактных групп Ли, как уже отмечалось ранее, являются собственными функциями оператора Лапласа на группе. Согласно теореме Куранта о нодальных свойствах собственных функций операторов Лапласа на произвольных замкнутых римановых многообразиях, число компонент связности дополнения к множеству нулей собственной функции, отвечающей заданному собственному значению λ_k, $k = 0, 1, \dots$, не превосходит номера k. В связи с теоремой Куранта ясно, что 0-упругие представления связных компактных групп Ли приводят к собственным функциям оператора Лапласа на группах $U(n, k)$ с первым отличным от нуля собственным значением. Но свойство 0-упругости погружений накладывает на функции высоты погружения более жесткие условия, чем нодальные свойства собственных функций, даваемые теоремой Куранта. На упомянутых выше особых простых группах G нодальное свойство выполняется для матричных элементов представлений, приводящих к первому отличному от нуля собственному значению. Тем не менее, в силу основного результата данной работы, среди морсовских матричных элементов f_A существуют такие элементы, что некоторые их гиперплоскости ненулевого уровня разделяют подмногообразие $\rho(G)$ на более чем две компоненты связности.

Следует отметить,что вне класса упругих представлений из 0-упругости погружения, вообще говоря, не следует свойство упругости этого же погружения. Н. Кейпер указал следующий пример 0-упругого вложения трехмерной сферы, не являющегося упругим вложением в $\mathbb{R}^4$: уравнение

$$\frac{1}{16}(u^2 + v^2) + y^2 + [z - (u^2 + v^2)]^2 = 1$$

определяет невыпуклую гиперповерхность в $\mathbb{R}^4$, обладающую свойством 0-упругости. Наличие у нее свойства упругости вложения, согласно работе Чженя и Лашофа [1], делало бы её выпуклой гиперповерхностью.

Что касается дифференциально-топологических свойств тех матричных элементов упругих вещественных неприводимых линейных представлений, не являющихся функциями Морса, то согласно теореме Т. Озавы [18], все функции высоты упругих погружений оказываются функциями Морса–Ботта с невырожденными критическими подмногообразиями, которые также упруго вложены. Характеры упругих представлений являются такими функциями и в работе А. П. Веселова и И. А. Дынникова [6] эти свойства характеров применяются с целью построения нетривиальных примеров конечномерных интегрируемых динамических систем.

Список литературы

[1] Chern S., Lashof R. K., *On the total curvature of immersed manifolds* II, Michigan J. Math. **5** (1958), 5–12.
[2] Kuiper N. H., *Immersions with minimal total absolute curvature*, Colloque Geom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), CBRM, Louvain, 1958, pp. 75–88.
[3] Wilson J. P., *Some minimal imbeddings of homogeneous spaces*, J. London Math. Soc. (2) **1** (1969), 335–340.
[4] Kelly E., *Tight equivariant imbeddings of symmetric spaces*, J. Differential Geom. **7** (1972), 535–548.
[5] Кёйпер Н., *Минимальная тотальная кривизна. Взгляд на старые и новые результаты*, Успехи мат. наук **40** (1985), №4, 49–55.
[6] Веселов А. П., Дынников И. А., *Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса*, Алгебра и анализ **8** (1996), №3, 78–103.
[7] Bott R., Samelson H., *Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.
[8] Thorbergsson G., *Homogeneous spaces without taut embeddings*, Duke Math. J. **57** (1988), no. 1, 347–355.
[9] Atiyah M. F., *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.
[10] Gorodski C., Thorbergsson G., *The classification of taut irreducible representations*, J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 187–235.
[11] Арнольд В. И. *Топологическая классификация многочленов Морса*, Тр. Мат. ин-та РАН **268** (2010), 40–55.
[12] Arnold V. I., *opological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert's* 16*th problem*, Math. Phys. Anal. Geom. **10** (2007), no. 3, 227–236.
[13] Желобенко Д. П., *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970.
[14] Понтрягин Л. С., *Homologies in compact Lie groups*, Мат. сб. **6** (1939), №3, 389–422.
[15] Мещеряков М. В. *Классификация упругих линейных неприводимых представлений компактных связных групп Ли*, Четвертая школа-конф. «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Тезисы докл., Изд-во МГУ, М., 2014, с. 29.
[16] Адамс Дж., *Лекции по группам Ли*, Наука, М., 1979.
[17] Gorodski C., *Taut representations of compact simple Lie groups*, Illinois J. Math. **52** (2008), no. 1, 121–143.
[18] Ozawa T., *On the critical sets of distance functions to a taut submanifolds*, Math. Ann. **276** (1986), no. 1, 91–96.

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва,
факультет математики
и информационных технологий
430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1
E-mail: mesh@math.mrsu.ru

Поступило 04 марта 2019 г.