

## ДВА ПУТИ ОБОБЩЕНИЯ ВОЛН ГЕРСТНЕРА В ТЕОРИИ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

А. А. Абрашкин<sup>1,2</sup> \*, Е. Н. Пелиновский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Высшая школа экономики;

<sup>2</sup> Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Традиционно волны на воде изучают в предположении их потенциальности. Но в натуральных условиях это приближение не всегда справедливо. Завихренность приносят сдвиговые течения, повсеместно присутствующие в океане. Она также генерируется в приповерхностном слое жидкости в результате действия ветра. При учёте этих факторов модели, разработанные для потенциальных волн, требуют уточнения и обобщения. Настоящая работа посвящена обзору достижений в области аналитического описания поверхностных волн на глубокой воде с учётом завихренности. За основу изложения выбран лагранжев подход. В центре внимания — волна Герстнера — частное точное решение уравнения Эйлера. Обсуждаются два способа её обобщения. Первый предполагает рассмотрение слабонелинейных стационарных волн с более общим, чем в герстнеровской волне, распределением завихренности (волны Гуйона). Второй способ — это построение точных решений для волн с неоднородным и нестационарным распределением давления на свободной поверхности (обобщённые волны Герстнера).

### ВВЕДЕНИЕ

Рождение науки о нелинейных волнах традиционно связывают с первыми экспериментами С. Рассела, который в 1830–1840-х годах впервые наблюдал солитоны, бегущие по поверхности мелководного канала [1]. В 1895 году Кортевег и де Вриз дали математическое описание этого явления на основе уравнения, которое впоследствии было названо их именами [2]. Но вне поля зрения для многих исследователей осталось (и до сих пор остаётся) исторически первое аналитическое представление для нелинейной волны, опубликованное Ф. Й. Герстнером в начале XIX века и описывающее стационарную волну на глубокой воде с профилем в виде трохойды [3, 4]. В силу ряда обстоятельств, и о них ниже пойдёт речь, на долю волны Герстнера не выпало и «тысячной» доли того внимания, которое было обращено к солитонам Кортевега–де Вриза. Но факт остаётся фактом: вначале была волна Герстнера.

Большую известность и существенно большее внимание по сравнению с ней привлекла также слабонелинейная волна Стокса [5]. Это обстоятельство, на первый взгляд, выглядит ещё более удивительным, поскольку решение Стокса записывается в виде ряда по малому параметру крутизны волны. Такое представление для периодической поверхностной волны оказалось более практически важным, чем точное решение. Причина этого заключается в проблеме реализации волны Герстнера. В отличие от волны Стокса, она является вихревой и не может возникнуть в природе под действием потенциальных сил (теорема Лагранжа). Для реализации волны Герстнера необходимо либо действие внешних непотенциальных сил, либо особые начальные условия. Так, Г. Ламб предположил, что волна Герстнера может родиться из сдвигового потока, обладающего той же завихренностью, что и волна [4]. При этом поступательное движение жидких частиц в потоке должно трансформироваться во вращение по окружности (в волне Герстнера отсутствует дрейфовое течение). Специфичность такого сценария явно не способствовала популяризации герстнеровского решения и его широкого применения для практических расчётов. Тем не менее, А. Н. Крылов на основе формул Герстнера построил теорию качки кораблей на волнении [6],

\* aabrashkin@hse.ru

нашедшую большое приложение в судостроении [7]. Дюбреиль–Жакотэн показала, что волны Герстнера могут существовать в жидкости с произвольной стратификацией [8].

Открытие механизма модуляционной неустойчивости для потенциальных волн на воде [9], казалось бы, окончательно превратило теорию Герстнера в гидродинамический артефакт — красивое точное решение, нереализуемое в природе, но неожиданно примерно с этого же времени стали появляться примеры его новых приложений. Поллард модифицировал герстнеровское решение для волн во вращающейся жидкости в приближении  $f$ -плоскости [10]. Ийа [11], Молло–Кристенсен [12, 13] и в более полном виде Константин [14] применили решение Герстнера для описания краевых волн, распространяющихся вдоль наклонного берега (в этих работах показано, что результаты для однородной жидкости удаётся обобщить на случай стратификации и вращения жидкости). В дополнение к этому Молло–Кристенсен дал описание валов герстнеровских волн (облаков трохoidalной формы) в стратифицированной атмосфере [15], а авторы [16] и [17] нашли цилиндрический аналог волн Герстнера — эпициклоидальные волны, бегущие вдоль свободной поверхности полости в однородно вращающейся жидкости.

Данные достижения в значительной степени повысили статус решения Герстнера, но вопрос его физической реализации всё ещё оставался открытым. Эту застарелую проблему, однако, смогли разрешить Монисмит с соавторами [18], которым удалось создать волну Герстнера в лабораторных условиях. Принцип эксперимента состоял в следующем. В волне Герстнера жидкие частицы движутся по окружности, и потому в ней отсутствует дрейфовое течение. Это отличает её от волны Стокса, распространение которой сопровождается переносом частиц (стоксовым дрейфом). Этот дрейф направлен в сторону движения волны, поэтому при генерации волны Герстнера создавалось течение, направленное против неё. Отсутствие дрейфа жидких частиц при наблюдении отдельной реализации свидетельствовало в пользу регистрации в эксперименте волны Герстнера. Необходимо подчеркнуть особую тщательность, с которой авторы [18] формулировали свои выводы. Для их дополнительной проверки они обратились к аналогичным экспериментам, проводившимся в других лабораториях, и показали, что ещё в трёх из них волны Герстнера наблюдались ранее [19–21].

Все эти результаты были получены в ограниченных каналах с искусственно (механически) генерируемыми волнами. Но, как отмечают авторы работы [18], аналогичные наблюдения (т. е. отсутствие дрейфа жидких частиц) фиксировались и для волн в открытом океане [22]. Тем самым, существование волн Герстнера было подтверждено также и натурными наблюдениями. Правда, при крутизне, превышающей  $1/3$ , волны Герстнера неустойчивы к трёхмерным возмущениям [23], но о них теперь стало возможно говорить как о реальных физических колебаниях. В свою очередь, Вебер указал, что при учёте вязкости и поверхностных плёнок в волне Герстнера возникает дрейфовое течение [24]. Такого рода волновые колебания, по его мнению, вполне могли (без осознания этого факта и привязки к волнам Герстнера) с давних пор наблюдаться экспериментаторами в лабораторных бассейнах.

В данной статье рассмотрены два пути обобщения волн Герстнера. Первый связан с описанием слабонелинейных стационарных волн с более общим распределением завихренности, которая задаётся в виде ряда по малому параметру крутизны волны. Второй путь предполагает построение семейства точных решений, для которых давление на свободной поверхности уже не является постоянным и задаётся неоднородной по горизонтальной координате, гармонически изменяющейся во времени функцией. Оба подхода, равно как и само решение Герстнера, основаны на использовании переменных Лагранжа, что позволяет представить их в едином математическом контексте.

### 1. ВОЛНЫ ГЕРСТНЕРА

Будем рассматривать гравитационные поверхностные волны в однородной жидкости. На рис. 1 представлена геометрия задачи и указаны возможные граничные условия на свободной поверхности в лагранжевой постановке.

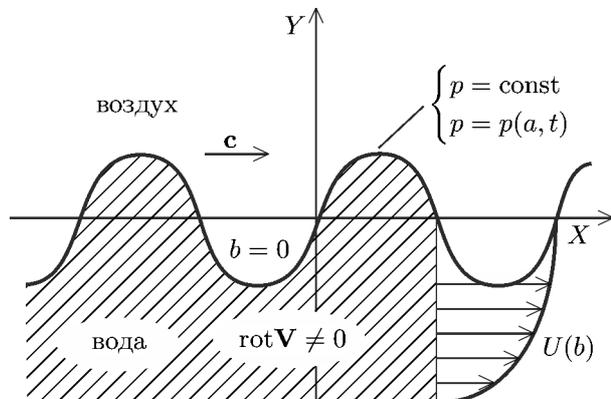


Рис. 1. Геометрия задачи для вихревых волн на границе «вода–воздух»;  $a, b$  — лагранжевы переменные;  $U(b)$  — неоднородный по вертикали дрейф жидких частиц;  $c$  — скорость волны; давление на свободной поверхности может задаваться как постоянным, так и неоднородным и нестационарным (моделирование действия ветра)

Уравнения двумерной гидродинамики в переменных Лагранжа  $a, b$  в поле тяжести имеют следующий вид [4, 25, 26]:

$$\begin{aligned} \frac{D(X, Y)}{D(a, b)} &= D_0(a, b); \\ X_{tt}X_a + (Y_{tt} + g)Y_a &= -\frac{1}{\rho}p_a, \\ X_{tt}X_b + (Y_{tt} + g)Y_b &= -\frac{1}{\rho}p_b. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $X(a, b, t), Y(a, b, t)$  — координаты траектории жидкой частицы,  $t$  — время,  $g$  — ускорение свободного падения,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность, нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной. Функция  $D_0$  зависит от того, как маркированы частицы; ось  $b$  направлена вверх, и  $b = 0$  соответствует свободной поверхности. В системе уравнений (1) первое уравнение — это уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости, а два других — уравнения движения.

Используя перекрёстное дифференцирование, исключим давление из уравнений движения [4, 26, 27]:

$$X_{ta}X_b - X_{tb}X_a + Y_{ta}Y_b - Y_{tb}Y_a = D_0\Omega(a, b). \tag{2}$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям движения жидкости, но оно включает завихренность  $\Omega = (\partial Y_t / \partial X) - (\partial X_t / \partial Y)$ , которая для двумерных течений является функцией только переменных Лагранжа. Герстнер указал, что уравнениям (1), (2) удовлетворяет следующая пара соотношений [3]:

$$X = a - A \exp(kb) \sin(ka - \omega t); \quad Y = b + A \exp(kb) \cos(ka - \omega t); \quad b \leq 0. \tag{3}$$

Они описывают гравитационную волну на поверхности жидкости с амплитудой  $A$ , волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ , бегущую с постоянной скоростью  $c = \omega/k$  вправо. На дне ( $b \rightarrow \infty$ ) колебания частиц отсутствуют. Подставляя (3) в уравнения движения, найдём распределение давления в волне:

$$p = p_0 - pgb - p/2\omega^2 A^2 [1 - \exp(2kb)].$$

На свободной поверхности давление равно постоянной величине  $p_0$ . Из условия независимости давления от времени следует также, что должно выполняться условие  $\omega^2 = gk$  (дисперсионное соотношение волны); оно точно такое же, как и для линейных потенциальных волн. Координаты траектории отдельной частицы удовлетворяют соотношению  $(X - a)^2 + (Y - b)^2 = A^2 \exp(2kb)$ , из которого следует, что в неподвижной системе отсчёта каждая частица движется по окружности радиуса  $A \exp(kb)$ , как и в линейных волнах Стокса. Профилем волны Герстнера служит

трохоида. При значении  $A = k^{-1}$  (предельная величина амплитуды) волна имеет заострение в вершине, а её форма описывается циклоидой. Угол при вершине предельной волны Герстнера равен нулю [4, 7, 25].

В 60-х годах XIX века решение (3) переоткрыли сразу три автора — Фруд [28], Рэнкин [29] и Рич [30]. Более полувека классический результат Герстнера оставался незамеченным. И это характеризует Герстнера как выдающегося учёного, опередившего своё время.

Волна Герстнера обладает завихренностью (см. (2)):

$$\Omega_G = \frac{2k^3 A^2 c \exp(2kb)}{1 - k^2 A^2 \exp(2kb)}.$$

Разложим это выражение в ряд по малому параметру крутизны волны  $\varepsilon = kA$ :

$$\Omega_G = 2k^3 A^2 c \exp(2kb) [1 + k^2 A^2 \exp(2kb)] = \Omega_{G2} + O[(kA)^4]. \quad (4)$$

Здесь  $\Omega_{G2} = 2k^3 A^2 c \exp(2kb)$  — завихренность волны Герстнера в квадратичном приближении. В линейном приближении волна Герстнера незавихренная и эквивалентна линейной волне Стокса.

Продолжим сравнение двух типов волн. Решение Стокса во втором порядке теории возмущений можно записать как [31]

$$\begin{aligned} X &= a - \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \sin k(a - ct) + \varepsilon^2 ct \exp(2kb); \\ Y &= b + \varepsilon k^{-1} \exp(kb) \cos k(a - ct). \end{aligned} \quad (5)$$

Движение жидких частиц представляет сумму колебательной и дрейфовой составляющих. Если считать амплитуду волны Герстнера малой, то колебательные движения жидких частиц в выражениях (3) и (5) будут совпадать. Отличие между волной Стокса и волной Герстнера в квадратичном приближении связано с наличием дрейфового слагаемого в потенциальной волне (дрейфа Стокса). Завихренность волны Герстнера в этом приближении равна  $\Omega_{G2}$  (см. (4)), а завихренность дрейфа Стокса определяется формулой

$$\Omega_{Sd} = -2kc\varepsilon^2 \exp(2kb) = -\Omega_{G2}.$$

Движение жидких частиц в волне Стокса состоит из наложения двух потоков: вращательного по окружности («герстнеровского») и сдвигового (дрейфа Стокса). Каждый из потоков обладает завихренностью, но их суммарная завихренность равна нулю.

Решение (5) было получено Стоксом [5], однако ни сам Стокс, ни другие исследователи, воспроизводившие его результат, не соотносили колебательную часть решения с волной Герстнера. В символической форме результат Стокса можно записать в таком виде [32]:

$$\text{волна Стокса} = \text{волна Герстнера} + \text{дрейф Стокса}.$$

Несмотря на всю очевидность, данный результат в явном виде не формулировался в литературе. По всей видимости, это связано с тем, что решение для потенциала волны Стокса, как правило, записывается в переменных Эйлера. Решения Стокса в переменных Лагранжа, напротив, высвечивает нашу символическую формулу. Подчеркнём, во-первых, её неочевидность, а во-вторых, нетривиальность: в нелинейном приближении работает принцип суперпозиции течений. Интересно добавить, что вплоть до кубичного приближения по малому параметру крутизны профили волн Стокса и Герстнера совпадают [7]. Только в четвёртом порядке теории возмущений между ними наблюдается различие.

И ещё об одном различии этих волн. Дисперсионное уравнение для волны Герстнера не содержит амплитуды, и потому в силу критерия Лайтхилла [33] эффект модуляционной неустойчивости в кубичном приближении для неё отсутствует. В нелинейном уравнении Шредингера для слабонелинейной волны Герстнера коэффициент при нелинейности обращается в нуль [34]. Это является следствием вполне определённого распределения завихренности в ней. В связи с этим вполне естественно возникает вопрос о вихревых волнах с более общим видом завихренности.

## 2. ВОЛНЫ ГУЙОНА

При разложении  $\Omega_G$  по малому параметру крутизны волны отличны от нуля только члены с чётными степенями  $\varepsilon$  (см. (4)). При этом множителями при степенях параметра являются вполне определённые функции координаты  $b$ . Но при описании стационарного течения завихренность может произвольно зависеть от переменной  $b$ . Поэтому естественным обобщением волны Герстнера будут стационарные волны с завихренностью вида

$$\Omega_*(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n(b), \quad (6)$$

где завихренности  $n$ -го приближения  $\Omega_n$  могут выбираться произвольно. Впервые данный вопрос изучала Дюбреиль–Жакотэн [35], но в более полной форме его рассмотрел Гуйон [7, 36]. Оба исследователя использовали эйлеровы координаты (при этом в формуле (6) вместо переменной  $b$  следует писать функцию тока). Гуйон, рассмотрев задачу вплоть до квадратичного приближения, нашёл пропорциональную  $\varepsilon$  поправку к скорости распространения линейной волны. Будем называть колебания жидкости с завихренностью (6) волнами Гуйона. Ниже результат Гуйона будет воспроизведён в переменных Лагранжа и обобщён для кубического приближения.

Рассмотрим стационарную плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси  $X$ . Уравнения двумерной гидродинамики (1) запишем в следующем виде:

$$X_a Y_b - X_b Y_a = 1, \quad (7)$$

$$X_{tt} = -H_a Y_b + H_b Y_a; \quad Y_{tt} = -H_b X_a + H_a X_b; \quad H = p/\rho + gY. \quad (8)$$

Теперь лагранжевы координаты совпадают с начальным положением жидких частиц, и  $D_0 = 1$ . Для анализа движения удобно перейти в систему отсчёта, движущуюся со скоростью волны  $c$ , где течение стационарно (см. рис. 2). В переменных Лагранжа двумерное стационарное движение представляется как [26, 37]

$$X = X(q, b), \quad Y = Y(q, b), \quad q = a + \sigma(b)t, \quad (9)$$

где  $\sigma(b)$  — некоторая функция. Простейший способ убедиться в этом — записать поле скорости (9) в переменных Эйлера. Компоненты скорости в лагранжевом представлении  $X_t = \sigma X_q$ ,  $Y_t = \sigma Y_q$ , как и сами функции  $X$ ,  $Y$ , зависят только от переменных  $q$  и  $b$ , поэтому эйлерово поле скорости  $X_t(X, Y)$ ,  $Y_t(X, Y)$  не зависит от времени. Подчёркнём, что координата  $q$  не является маркером жидкой частицы, а значит, данный подход уже не является лагранжевым. Связь между функцией  $\sigma(b)$  и скоростью волны указана на рис. 2 и будет объяснена ниже. Координаты  $q$ ,  $b$  были впервые введены в работе [37] и названы модифицированными лагранжевыми координатами [26].

В новых переменных система (7), (8) принимает вид

$$X_q Y_b - X_b Y_q = 1, \quad (10)$$

$$\sigma^2 X_{qq} = -H_q Y_b + H_b Y_q; \quad \sigma^2 Y_{qq} = -H_b X_q + H_q X_b. \quad (11)$$

Положим, что  $X = q + \xi$ ,  $Y = b + \eta$ , где функции  $\xi$ ,  $\eta$  имеют смысл периодических отклонений координат траектории жидкой частицы от модифицированных лагранжевых координат. Уравнения (10), (11) переписутся как

$$\xi_q + \eta_b = -\frac{D(\xi, \eta)}{D(q, b)}, \quad \sigma^2 \xi_{qq} = -H_q + \frac{D(\eta, H)}{D(q, b)}, \quad \sigma^2 \eta_{qq} = -H_b - \frac{D(\xi, H)}{D(q, b)}. \quad (12)$$

Уравнения (12) дополняют следующие граничные условия. На дне вертикальная скорость обращается в нуль:

$$Y_t = \sigma Y_q = \sigma \eta_q \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad b \rightarrow -\infty;$$

на свободной поверхности давление постоянно:

$$H(q, 0) - g\eta(q, 0) = p_0/\rho = \text{const};$$

положение среднего уровня жидкости на горизонте  $Y = 0$  неизменно:

$$\int_0^\lambda Y dX \Big|_{b=0} = \int_0^\lambda \eta(1 + \xi_q) dq \Big|_{b=0} = 0,$$

где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны. Поскольку жидкость глубокая, естественно считать, что вблизи дна нет волновых возмущений и горизонтальная скорость также отсутствует. В этом случае течение описывается выражениями  $X = q$ ,  $Y = b$ , которые задают сдвиговый поток с профилем скорости  $\sigma(b)$ . Её величина на дне тогда равна скорости волны с обратным знаком:  $\sigma(-\infty) = -c$ . Это означает, что в лабораторной системе отсчёта скорость на дне равна нулю. Отличие между скоростью сдвигового потока и скоростью на дне определяет дрейф жидких частиц

$$u(b) = \sigma(b) - \sigma(-\infty) = \sigma(b) + c.$$

Выражение для завихренности с учётом уравнения (7) представляется как

$$\Omega = \frac{\partial Y_t}{\partial X} - \frac{\partial X_t}{\partial Y} = \frac{D(X_t, X)}{D(X, Y)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(X, Y)} = \frac{D(X_t, X)}{D(a, b)} + \frac{D(Y_t, Y)}{D(a, b)} = \frac{D(\sigma X_q, X)}{D(q, b)} + \frac{D(\sigma Y_q, Y)}{D(q, b)},$$

или после перехода к функциям  $\xi$ ,  $\eta$  как

$$\Omega = -\sigma'(1 + 2\xi_q) + \sigma(\eta_{qq} - \xi_{qb}) + \frac{D(\sigma \xi_q, \xi)}{D(q, b)} + \frac{D(\sigma \eta_q, \eta)}{D(q, b)}. \quad (13)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функции по ее аргументу. Для стационарного течения (9) завихренность зависит только от координаты  $b$ .

Будем интересоваться слабонелинейными волновыми движениями. Введём разложения искомым функций и величин в ряд по малому параметру крутизны:

$$\{\xi, \eta, u, H\} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \{\varepsilon_n, \eta_n, u_n, H_n\}; \quad c = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_n; \quad \sigma = \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_n$$

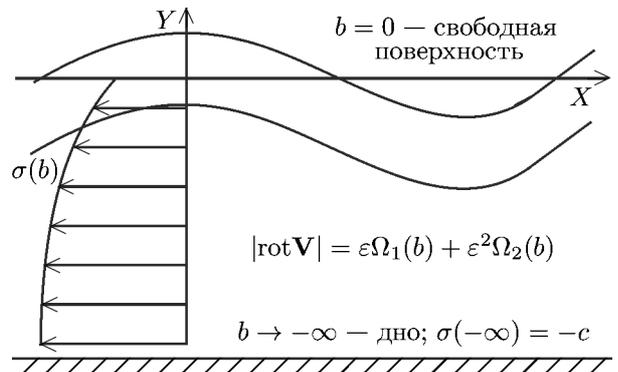


Рис. 2. Картина стационарного течения в системе отсчёта, связанной с волной: периодические возмущения потока с профилем  $\sigma(b)$

и подставим в уравнения (12). В статье [38] изучены свойства волн Гуйона для первых трёх приближений.

Координаты траекторий жидких частиц в линейной волне Гуйона в лагранжевых переменных записываются как

$$\begin{aligned} X &= a - c_0 t + \varepsilon \sigma_1(b) t - \varepsilon(1/k) \exp(kb) \sin k[a - c_0 t + \varepsilon \sigma_1(b) t]; \\ Y &= b + \varepsilon(1/k) \exp(kb) \cos k[a - c_0 t + \varepsilon \sigma_1(b) t], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $c_0 = \sqrt{g/k} = \sigma_0$ . Скорость распространения волны  $c_0$  совпадает с фазовой скоростью линейных потенциальных волн. В дополнение к колебательному движению частицы участвуют в неоднородном дрейфе, определяемом видом функции  $\sigma_1(b)$ . Из (13) следует, что  $\sigma_1' = -\Omega_1$ , а значит,

$$\sigma_1(b) = \sigma_1(-\infty) - \int_{-\infty}^b \Omega_1(b) db = -c_1 - \int_{-\infty}^b \Omega_1(b) db. \quad (15)$$

Как видно, завихренность  $\Omega_1(b)$  не определяет полностью функцию  $\sigma_1(b)$ . В первом приближении она находится с точностью до постоянной (линейной поправки к  $c_0$ , взятой с обратным знаком). Её величина устанавливается в следующем приближении. Эта особенность сохранится и для поправок более высокого порядка. Интегральный член в (15) соответствует дрейфовой скорости жидких частиц

$$u_1(b) = \sigma_1(b) + c_1 = - \int_{-\infty}^b \Omega_1(b) db.$$

В каждом из приближений завихренность определяет дрейфовое движение частиц, но поправка к скорости распространения должна находиться из уравнений следующего порядка теории возмущений.

В лабораторной системе отсчёта решение линейной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} X &= a + \varepsilon[\sigma_1(b) + c_1] t - \varepsilon(1/k) \exp(kb) \sin k[a - c_0 t + \varepsilon \sigma_1(b) t]; \\ Y &= b + \varepsilon(1/k) \exp(kb) \cos k[a - c_0 t + \varepsilon \sigma_1(b) t]. \end{aligned} \quad (16)$$

Волна бежит вправо со скоростью  $c_0 + \varepsilon c_1$ . При  $\sigma_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$  (завихренность отсутствует) выражения (16) описывают линейную волну Стокса и волну Герстнера малой крутизны.

Для волны Гуйона  $\sigma_1(b) \neq 0$  (и не постоянная), поэтому жидкие частицы, наряду с вращением по окружности, участвуют в неоднородном по глубине дрейфе, так что их траектории представляют петлеобразные линии. Если  $\sigma_1(b) + c_1 > 0$ , частицы движутся в направлении распространения волны, а если знак неравенства обратный, то против волны. В табл. 1 проведено сопоставление свойств триады волны в линейном пределе. Отличия между волнами Гуйона и двумя другими моделями очевидно.

Таблица 1. Свойства рассмотренной триады волн в линейном приближении. Знак  $-$  обозначает отсутствие соответствующей характеристики, знак  $+$  — её наличие

Характеристика	волна Стокса	волна Герстнера	волна Гуйона
завихренность	$-$	$-$	$+$
дрейфовое течение	$-$	$-$	$+$
траектории частиц в лабораторной системе	окружности	окружности	петлеобразные линии

Функция  $\sigma_1(b)$  в решении (16) описывает сдвиговый поток. В силу произвольности в выборе  $\Omega_1(b)$  профиль этого потока тоже может быть произвольным. В частности, профиль  $\sigma_1(b)$  может иметь точку перегиба. Как известно, линейные волны на поверхности потока  $\sigma_0(b)$ , имеющего точку перегиба, неустойчивы [39]. В нашем случае  $\sigma_0 = \text{const}$ , а профиль  $\sigma_1(b)$  может быть любым. Например, выберем его в виде

$$\sigma_1(b) + c_1 = \alpha(b + b_*) \exp(\beta b), \quad b_* > 0,$$

где константа  $\alpha$  имеет размерность скорости, а константа  $\beta$  — размерность обратной длины ( $\alpha, \beta > 0$ ). Поток направлен вдоль оси  $X$  для частиц с координатами  $b > -b_*$  и против оси в случае обратного неравенства. В точке  $b = -b_* - 2/\beta$  профиль имеет точку перегиба (рис. 3). В лабораторной системе отсчёта частицы, находящиеся на горизонте  $b = -b_*$ , движутся по окружности, а на более высоких и более низких горизонтах — по петлеобразным линиям, причём направления дрейфа частиц относительно этого горизонта разные.

В результате решения в квадратичном и кубичном приближениях получены следующие поправки к скорости волны [38]:

$$c_1 = - \int_{-\infty}^0 [1 - \exp(2kb)] \Omega_1(b) db;$$

$$c_2 = \frac{1}{2} c_0 - \int_{-\infty}^0 [1 - \exp(2kb)] \Omega_2(b) db. \tag{17}$$

Выражение (17) ранее получил Гуйон в переменных Эйлера [7, 36]. Наши вычисления обобщают результат Гуйона. Примечательно, что квадратичная поправка к линейной скорости распространения зависит только от квадратичной завихренности  $\Omega_2$ . При  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  получаем результат Стокса, а при  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \Omega_{G2}$  (см. (4)) — результат Герстнера. В случае  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 \neq 0$  для пакета волн Гуйона можно вывести нелинейное уравнение Шредингера [38].

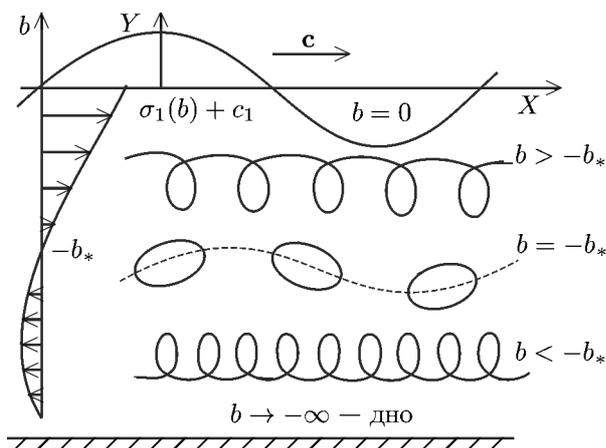


Рис. 3. Траектории жидких частиц в линейной волне Гуйона в лабораторной системе отсчёта для потока с профилем  $\sigma_1(b) + c_1 = \alpha(b + b_*) \exp(\beta b)$ ,  $b_* > 0$

### 3. ОБОБЩЁННЫЕ ВОЛНЫ ГЕРСТНЕРА

Традиционно в теории волн на воде давление на свободной поверхности полагают постоянным. Однако это условие может быть нарушено при наличии ветра. Эффект его влияния может быть учтён как действие неоднородного и нестационарного давления на свободной поверхности.

Рассмотрим движение жидкости в плоскости  $XY$ . Введём комплексные координаты траектории жидкой частицы  $W = X + iY$ ,  $\bar{W} = X - iY$  и комплексные лагранжевы координаты  $\chi = a + ib$ ,  $\bar{\chi} = a - ib$ . В таком случае система уравнений (1), (4) может быть записана как условие независимости от времени двух якобианов [26, 40, 41]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{D(W, \bar{W})}{D(\chi, \bar{\chi})} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{D(W_t, \bar{W})}{D(\chi, \bar{\chi})} = 0. \quad (18)$$

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$W = G(\chi) \exp(i\lambda t) + F(\bar{\chi}) \exp(i\mu t), \quad (19)$$

где  $G$ ,  $F$  — аналитические функции, а  $\lambda$  и  $\mu$  — действительные числа, есть точное решение системы (18). Функции  $G$  и  $F$  в значительной степени произвольные, поскольку единственным ограничением на их выбор служит требование, чтобы в области течения выражение  $|G'|^2 - |F'|^2$  не обращалось в ноль.

В течениях (19) частица движется по окружности радиуса  $|F|$ , центр которой вращается по окружности радиуса  $|G|$ . Если отношение частот  $\mu$  и  $\lambda$  положительное, то траекторией частицы является эпициклоида, а если отрицательное, то гипоциклоида; число петель на кривой зависит от соотношения частот. По таким орбитам двигались планеты в Птолемеевой картине мира, поэтому данные течения были названы птолемеевскими [40, 41].

Волна Герстнера принадлежит к классу птолемеевских течений. Она описывается выражением  $W = \chi + iA \exp[i(k\bar{\chi} - \omega t)]$ ;  $\text{Im}\chi \leq 0$ . Давление на профиле волны Герстнера постоянно. Однако при наличии ветра это условие может нарушаться. Эффект его воздействия можно моделировать заданием неоднородного и нестационарного распределения давления на свободной поверхности. Тем самым проблема сводится к изучению влияния граничных условий такого типа на эволюцию волны.

В рамках данного подхода рассмотрим обобщения волн Герстнера. Будем полагать, что области течения в лагранжевых переменных соответствует нижняя полуплоскость, и оно описывается выражением

$$W = G(\chi) + F(\bar{\chi}) \exp(-i\omega t). \quad (20)$$

Это движение принадлежит к семейству птолемеевских течений, но, в отличие от волны Герстнера, функция  $G$  может отличаться от линейной, а функция  $F$  — от экспоненты. Функция  $G$  задаёт уровень, относительно которого вращаются частицы свободной поверхности, а модуль функции  $F$  определяет радиус их кругового вращения (амплитуду волны). На глубине жидкость покоится, поэтому соответствующее условие выглядит как

$$|F| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad b \rightarrow -\infty.$$

Поскольку функция аналитическая, она достигает максимума на свободной поверхности. Отсюда следует, что частицы, находящиеся на ней, имеют наибольшую амплитуду колебаний.

Волновому решению (20) соответствует распределение давления [26]

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -g \text{Im}[G + F \exp(-i\omega t)] + \frac{1}{2} \omega^2 |F|^2 + \text{Re}[\exp(i\omega t) \int \omega^2 G' \bar{F} d\chi].$$

Таблица 2. Примеры обобщённых волн Герстнера ( $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные, различные для разных случаев)

Волновая модель	$G(\chi)$	$F(\bar{\chi})$	Ссылка
осциллирующий стоячий солитон	$\chi$	$\frac{\beta}{(\bar{\chi} + i)^n}; \quad \beta > 0, \quad n \geq 2$	[42]
колеблющийся солитон на фоне волны Герстнера	$\chi$	$iA \exp(ik\bar{\chi}) + \frac{\beta}{(\chi + i)^n}$	[42]
обрушение бризера на спокойной воде	$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - i)^2}$	$\frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i)^2}$	[43]
нестационарные волны Герстнера	$\chi + \frac{\beta}{\chi - i\alpha}$	$iA \exp(ik\bar{\chi})$	[44]
волна-убийца внутри пакета волн Герстнера	$\chi + \frac{i}{k} \ln[1 + P(\chi/\alpha)];$ $P(\chi/\alpha) = \frac{i\beta}{i\alpha - \chi}$	$iA[1 + \overline{P(\chi/\alpha)}] \exp(ik\bar{\chi})$	[45]
волна-убийца на фоне волны Герстнера	$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - i\alpha)^2}$	$-iA \exp(ik\bar{\chi}) + \frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i\alpha)^2}$	[46]

В общем случае давление изменяется периодически со временем и неоднородно вдоль поверхности  $\text{Im}\chi = 0$ . В сущности, мы нашли целый класс точных решений, которые описывают сложную динамику свободной границы в случае неоднородного и гармонически изменяющегося давления на ней. Завихренность волн (35) задаётся соотношением  $\Omega = 2\omega |F'|^2 / (|F'|^2 - |G'|^2)$ . В общем случае это сложная функция переменных Лагранжа.

Различные примеры обобщённых волн Герстнера (19) изучены в серии работ [42–46]. Их характеристики представлены в табл. 2. Птолемеевские решения позволяют проанализировать целый ряд нестационарных явлений. Мы рассмотрим два примера.

### 3.1. Обрушение бризера [43]

Динамика бризера на спокойной воде представлена на рис. 4. Решение (19) с функциями  $G$ ,  $F$ , соответствующими третьей строке таб. 2, эволюционирует по-разному в зависимости от величины  $\beta$ . Начнём анализ с  $t_0 = \pi/\omega$ . В этот момент форма свободной границы симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку максимального отклонения (рис. 4а). Его высота равна  $2\beta$  (или  $2\alpha\beta$  в размерной форме). Для отрицательного  $\beta$  свободная поверхность имеет впадину. Когда  $\beta > 0$ , профиль имеет гребень.

Рисунок 4 показывает эволюцию бризера в течение одного периода осцилляций. Возмущение свободной поверхности изменяет форму, но не движется как целое. Поэтому мы можем называть его бризером. Со временем профиль бризера изменяется. Возможны два качественно разных режима: для  $\beta = -0,25$  или  $\beta = 0,50$  профиль не имеет точек перегиба, а для  $\beta = 0,85$  профиль имеет точки перегиба и наблюдается опрокидывание бризера.

Будем интересоваться профилем с  $\beta = 0,85$  (толстые линии на рис. 4). С течением времени крутизна переднего фронта возрастает, и при  $t_1 = 4,25\pi/\omega$  (рис. 4б) точка перегиба появляется первый раз. Эта точка характеризуется вертикальной касательной к профилю, изображённой пунктирной линией. Далее, профиль имеет две точки перегиба вплоть до момента  $t_3 = 5,9\pi/\omega$ , когда они сливаются, и затем точка перегиба исчезает. В момент  $t = 2\pi/\omega$  свободная поверхность становится плоской.

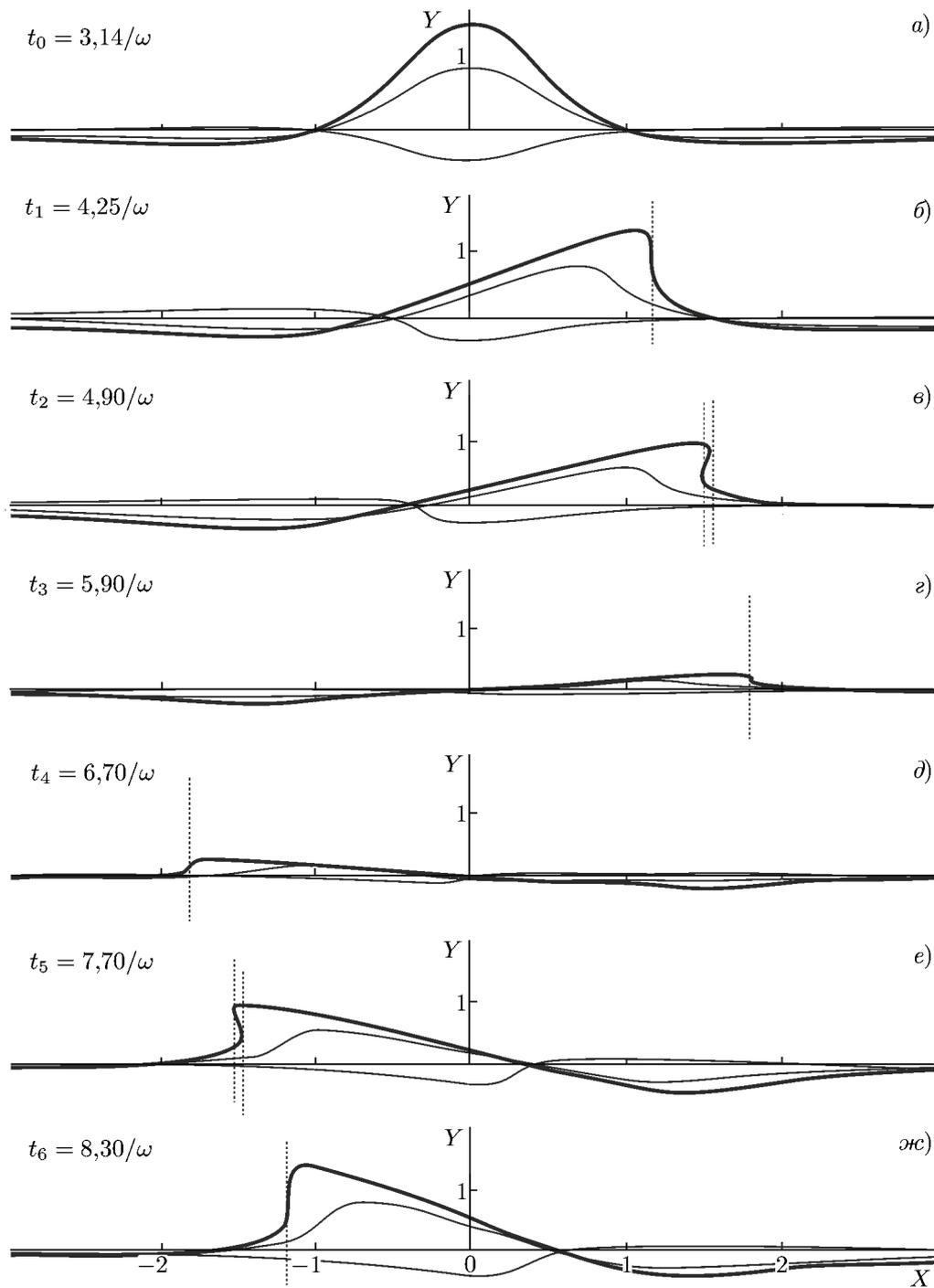


Рис. 4. Эволюция профиля бризера для различных величин  $\beta$ . Толстые линии соответствуют  $\beta = 0,85$ , чёрные тонкие линии —  $\beta = 0,5$  и серые тонкие линии —  $\beta = -0,25$ . Координаты  $X$  и  $Y$  нормированы на величину  $\alpha$

В течение следующего полуцикла все стадии эволюции повторяются симметрично (рис. 4д–жс), но точки перегиба формируются на левом склоне бризера. Точка перегиба возникает при  $t_4 = 6,7/\omega$ , когда крутизна достаточно мала. Наблюдать такую ситуацию в натуральных условиях едва ли возможно. Но динамика бризера в течение первого полуцикла очень схожа с опрокидыванием

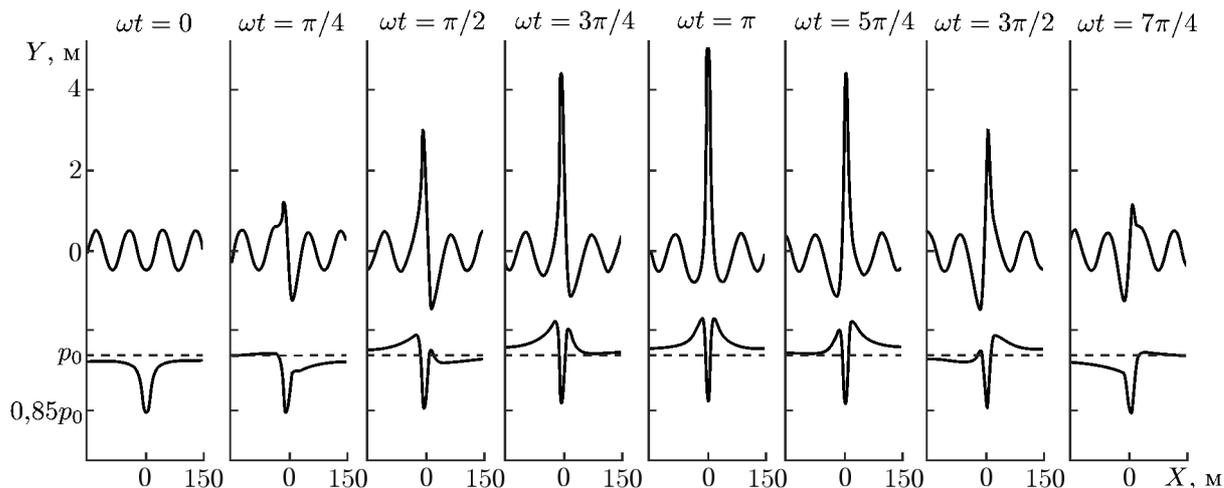


Рис. 5. Образование волны-убийцы на фоне волны Герстнера

океанских волн. Ближе к моменту появления вертикальной касательной у профиля необходимо учитывать уже влияние вязкости, которая разрушит рассматриваемое решение в некоторый момент  $t_* > t_1$ . Таким образом, выражение (20) описывает опрокидывание волны в интервале  $(t_0, t_*)$ . Например, можно выбрать  $t_* = t_2$ .

Стоит напомнить и подчеркнуть, что выражение (20) соответствует неоднородному и нестационарному распределению давления на свободной поверхности. Давление осциллирует в противофазе с колебаниями профиля.

### 3.2. Волна-убийца на фоне волны Герстнера [46]

На рис. 5 изображена динамика волновой поверхности для выражения (20) с функциями  $G$  и  $F$ , соответствующими формулам в последней строке табл. 2. Расчёт проводился для случая  $A = 0,5$  м;  $k = 0,074$  м<sup>-1</sup>,  $\alpha = 12$  м,  $\beta = 328$  м<sup>3</sup>;  $\omega = \sqrt{gk} = 0,85$  с<sup>-1</sup>,  $\lambda = 84,9$  м. В начальный момент ( $t = 0$ ) форма свободной поверхности (верхняя кривая) в точности совпадает с профилем волны Герстнера. В дальнейшем на профиле начинает расти пик, который в момент  $t = \pi/\omega$  достигает максимальной величины, а впоследствии уменьшается и исчезает к концу периода. Наибольшая высота пика  $h = (2\beta/\alpha^2) + A \approx 5,1$  м. Это значение превышает амплитуду волны Герстнера  $A$  в восемь раз. Поэтому формирование пика может рассматриваться как образование волны-убийцы (подробнее о феномене волн-убийц см. [47]). Причиной тому служит действующее на границе давление. Нижняя кривая на рис. 5 изображает отклонение давления на свободной поверхности от атмосферного давления  $p_0$ . В каждой точке поверхности оно изменяется со временем, но его отрицательный перепад в районе пика волны составляет около 100 мм. рт. ст.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дан обзор аналитических результатов лагранжевого описания вихревых гравитационных поверхностных волн. Обсуждается теория стационарных слабозавихренных волн на глубокой воде (волн Гуйона). Проведено их сопоставление с волной Герстнера и волной Стокса. Приведён вывод точных решений в переменных Лагранжа (птолемеевских течений), демонстрирующих сложную динамику нелинейных вихревых волн под действием внешнего давления на свободной поверхности. В качестве примеров анализируются эволюция одиночного бризера на спокойной воде

и формирование волны-убийцы на фоне волны Герстнера.

Работа Е. Н. Пелиновского поддержана Российским научным фондом (проект 19–12–00253).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Russell J. S. // Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. London : John Murray, 1844. P. 311–390.
2. Korteweg D. J., de Vries G. // Phil. Mag. 1895. V. 39. P. 422–443.
3. Gerstner F. // Ann. Phys. Lpz. 1809. V. 32, No. 2. P. 412–415.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л. : ОГИЗ, 1947. 929 с.
5. Stokes G. G. // Cambridge Trans. 1847. V. 8. P. 441–473.
6. Kriloff A. N. // Trans. Inst. Naval. Archit. 1898. V. 40. P. 135–196.
7. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М. : Наука, 1977. 815 с.
8. Dubreil-Jacotin M. L. // Atti. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1932. V. 6, No. 15. P. 814–819.
9. Benjamin T. B. // J. Fluid Mech. 1967. V. 27, No. 3. P. 417–430.  
<https://doi.org/10.1017/S002211206700045X>
10. Pollard R. T. // J. Geophys. Res. 1970. V. 75, No. 30. P. 5 895–5 898.  
<https://doi.org/10.1029/JC075i030p05895>
11. Yih C.-S. // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 765–767. <https://doi.org/10.1017/S0022112066000983>
12. Mollo-Christensen E. // Phys. Fluids. 1982. V. 25, No. 4. P. 586–587.  
<https://doi.org/10.1063/1.863802>
13. Mollo-Christensen E. // J. Phys. Ocean. 1978. V. 9, No. 1. P. 226–229.  
[https://doi.org/10.1175/15200485\(1979\)009<0226:EWIARS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/15200485(1979)009<0226:EWIARS>2.0.CO;2)
14. Constantin A. // J. Phys. A: Maths. Gen. 2001. V. 34, No. 45. P. 9 723–9 731.  
<https://doi.org/10.1088/03054470/34/45/311>
15. Mollo-Christensen E. // J. Atm. Sci. 1978. V. 35, No. 8. P. 1 395–1 398.  
[https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1978\)035<1395:GAGBSE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1978)035<1395:GAGBSE>2.0.CO;2)
16. Иногамов Н. А. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 1. С. 57–61.
17. Абрашкин А. А. // Прикл. мех. и техн. физ. 1984. № 3. С. 86–88.
18. Monismith S. G., Cowen E. A., Nepf H. M., et al. // J. Fluid Mech. 2007. V. 573. P. 131–147.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112006003594>
19. Swan C. // Proc. 22nd Intl Coastal Engng Conf. 2–6 July 1990, Delft, The Netherlands. P. 489–502.
20. Jiang J. Y., Street R. L. S. // J. Geophys. Res. Oceans. 1991. V. 96, No. C2. P. 2 711–2 721.  
<https://doi.org/10.1029/90JC02259>
21. Thais L. Contribution a l'étude du mouvement turbulent sous des vagues de surface cisailées par le vent. Toulouse. Thèse Inst. Nat. Polytech. 1994. 305 p.
22. Smith J. A. // J. Phys. Oceanogr. 2006. V. 36, No. 7. P. 1 381–1 402.  
<https://doi.org/10.1175/JPO2910.1>
23. Leblanc S. // J. Fluid Mech. 2004. V. 506. P. 245–254. <https://doi.org/10.1017/S0022112004008444>
24. Weber J. E. H. // Wave motion. 2011. V. 48, No. 4. P. 301–309.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2010.11.005>
25. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М. : Физматлит, 1963. 584 с.
26. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. М. : Физматлит, 2006. 176 с.

27. Bennett A. Lagrangian fluid dynamics. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. 286 p.
28. Froude W. // Trans. Inst. Naval. Arch. 1862. V. 3. P. 45–62.
29. Rankine W. J. M. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1863. V. 153. P. 127–138.
30. Reech F. C. R. // Acad. Sci. Paris. 1869. V. 68. P. 1 099–1 101.
31. Clamond D. // J. Fluid Mech. 2007. V. 589. P. 433–454.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112007007811>
32. Абрашкин А. А., Пелиновский Е. Н. // Успехи физ. наук. 2018. Т. 188, № 3. С. 329–334.  
<https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038089>
33. Lighthill M. J. J. // Inst. Math. Appl. 1965. V. 1, No. 3. P. 269–306.
34. Abrashkin A., Pelinovsky E. // Nonl. Proc. Geoph. 2017. V. 24, No. 2. P. 255–264.  
<https://doi.org/10.5194/npg24-255-2017>
35. Dubreil-Jacotin M. L. // J. Math. Pures Appl. Ser. 9. 1934. V. 13. P. 217–291.
36. Gouyon R. // Ann. de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Ser. 4. 1958. V. 22. P. 1–55.
37. Абрашкин А. А., Зенькович Д. А. // Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана. 1990. Т. 26, № 1. С. 35–45.
38. Abrashkin A. A., Pelinovsky E. N. // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. V. 54, Art. no. 395701.  
<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac1f3e>
39. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М. : Физматлит, 2005. 288 с.
40. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 1. С. 76–78.
41. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. // Прикл. мех. и техн. физ. 1985. № 2. С. 57–64.
42. Абрашкин А. А., Соловьев А. Г. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 5. С. 125–133.
43. Abrashkin A., Oshmarina O. // Phys. Lett. A. 2014. V. 378. P. 2 866–2 871.  
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.08.009>
44. Abrashkin A. A. // Chaos Solit. Fractals. 2019. V. 118. P. 152–158.  
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.007>
45. Abrashkin A. A., Oshmarina O. E. // Commun. Nonl. Sci. Num. Simul. 2016. V. 34. P. 66–76.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.10.006>
46. Abrashkin A. A., Soloviev A. // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110, Art. no. 014501.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.014501>
47. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue waves in the ocean. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. 216 p.

Поступила в редакцию 22 декабря 2022 г.; принята в печать 31 марта 2023 г.

## TWO WAYS TO GENERALIZE GERSTNER WAVES IN THE THEORY OF WAVES IN DEEP WATER

*A. A. Abrashkin and E. N. Pelinovsky*

By tradition, water waves are studied under the assumption of their potentiality. This approximation is not always valid in natural conditions. The vorticity is introduced by shear currents, which are ubiquitous in the ocean. It is also generated in the near-surface layer as a result of wind action. When these factors are taken into account, the models developed for potential waves require refinement and generalization. This paper is devoted to a review of advances in the field of analytical description of surface vortical waves in deep water. The presentation is based on the Lagrangian approach. The focus

*A. A. Абрашкин, Е. Н. Пелиновский*

is on the Gerstner wave, a particular exact solution of the Euler equation. Two ways of its generalization are discussed. The first suggests consideration of weakly nonlinear steady waves with a more general vorticity distribution (Gouyon waves). The second way is to construct exact solutions for waves with inhomogeneous and non-stationary pressure distribution on a free surface (generalized Gerstner waves).