УДК 515.142.426

Т. Е. Панов, Г. С. Черных

SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов

Изучены SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и доказано, что все они порождаются известными геометрическими операциями ∂_i. Для теории c_1-сферических бордизмов W описаны все SU-линейные умножения на W и проекторы $MU \to W$. Кроме того, исследованы комплексные ориентации на W и соответствующие им формальные группы F_W. Связь между формальными группами F_W и кольцом коэффициентов W_* теории W изучалась В. М. Бухштабером в 1972 г. В качестве обобщения этих результатов доказано, что для любых SU-линейного умножения и ориентации на W коэффициенты соответствующей формальной группы F_W не порождают все кольцо W_*, в отличие от случая комплексных кобордизмов.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: комплексные бордизмы, SU-бордизмы, когомологические операции, формальные группы.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9334

Введение

Комплексные бордизмы, или *U-бордизмы*, – это теория бордизмов стабильно комплексных многообразий. Геометрически, стабильно комплексная структура (U-структура) на многообразии M представляет собой комплексную структуру на стабильном касательном расслоении, т. е. редукцию структурной группы стабильного касательного расслоения к группе $U = U(\infty)$. Гомотопически, стабильно комплексная структура задается гомотопическим классом поднятия отображения $M \to BO$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BU$. Классы бордизма стабильно комплексных многообразий образуют градуированное кольцо по отношению к операциям дизъюнктного объединения и прямого произведения, называемое *кольцом комплексных бордизмов* и обозначаемое через MU_*. Это кольцо коэффициентов *теории комплексных бордизмов*, обобщенной теории (ко)гомологий, определяемой *спектром Тома* $MU = \{MU(n)\}$, где $MU(n)$ – пространство Тома универсального $U(n)$-расслоения $EU(n) \to BU(n)$. Для CW-пары (X, A) ее группы

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и при поддержке РФФИ (грант № 20-01-00675). Исследование Г.С. Черных выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-265). Г. С. Черных также поддержан Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”.

бордизмов и кобордизмов определяются как

$$
\begin{aligned}
&MU_n(X,A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\big((X/A)\wedge MU(k)\big),\\
&MU^n(X,A) = \lim_{k\to\infty} \big[\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)\big] \quad \text{для конечной } CW\text{-пары } (X,A).
\end{aligned}
$$

В частности, $MU_* = \pi_*(MU) = MU_*(pt) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+*}\big(MU(k)\big)$. Мы будем также обозначать $MU^* = MU^*(pt)$ — *кольцо комплексных кобордизмов*, градуированное неположительно.

SU-бордизмы – это теория бордизмов гладких многообразий со специальной унитарной структурой в стабильном касательном расслоении. Геометрически, SU-структура на многообразии M определяется редукцией структурной группы стабильного касательного расслоения на M к группе $SU(N)$. Гомотопически, SU-структура – это гомотопический класс поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BSU(N)$. Многообразие M допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда оно допускает стабильно комплексную структуру с $c_1(\mathcal{T}M)=0$. *Кольцо SU-бордизмов* $MSU_* = \pi_*(MSU)$ является кольцом коэффициентов *теории SU-бордизмов*, определяемой спектром Тома $MSU = \{MSU(n)\}$.

Детали построения теории SU-бордизмов и описание ее кольца коэффициентов MSU_* можно найти в [1]–[3].

(Стабильной) *операцией* f степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$f\colon MU^k(X,A) \to MU^{k+n}(X,A),$$

функториальных по (X,A) и коммутирующих с изоморфизмами надстройки. Множество всех операций образует MU^*-алгебру, обозначаемую A^U. Ее можно отождествить с множеством отображений спектра MU в себя:

$$A^U \cong [MU, MU]_* = MU^*(MU) = \varprojlim MU^{*+2N}(MU(N)).$$

Имеется изоморфизм левых MU^*-модулей

$$A^U \cong MU^* \mathbin{\widehat{\otimes}} S,$$

где S – *алгебра Ландвебера–Новикова*, порожденная операциями $S_\omega = \varphi^*(s^U_\omega)$, являющимися образами при изоморфизме Тома φ^* универсальных характеристических классов $s^U_\omega \in MU^*(BU)$, соответствующих симметризациям мономов $t_1^{i_1}\cdots t_k^{i_k}$, индексированных всевозможными разбиениями $\omega = (i_1,\dots,i_k)$. Таким образом, любой элемент $a \in A^U$ может быть единственным образом записан в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in MU^*$. Структура алгебры Хопфа на S была описана в [4] и [1, § 5].

Забывающий морфизм $MSU \to MU$ снабжает спектр MU естественной структурой MSU-модуля, и операция $f\colon MU \to MU$ называется *MSU-линейной*, если она является отображением MSU-модулей. Из стандартных свойств спектров, не имеющих кручения в гомологиях и гомотопических группах, вытекает, что MSU-линейность операции $f\colon MU \to MU$ достаточно проверять лишь на гомотопических группах $MU_* = \pi_*(MU)$. Точнее говоря, операция f

является SU-линейной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $f(ab) = af(b)$ для любых элементов $a \in MSU_*$, $b \in MU_*$ (см. теорему 1.1).

В работе [5] Коннером и Флойдом были определены геометрические операции $\partial_i \in [MU, MU]_{-2i} = [MU, \Sigma^{2i} MU]$, впоследствии изученные С. П. Новиковым [1]. Операция ∂_i сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M] \in MU_{2n}$ класс бордизма подмногообразия $M_i \subset M$, двойственного к $(\det \mathcal{T}M)^{\oplus i}$ (i-кратная прямая сумма детерминанта касательного расслоения). В частности, $\partial_1 = \partial\colon MU_{2n} \to MU_{2n-2}$ представляет собой “граничный оператор”, отправляющий $[M]$ в класс бордизма подмногообразия, двойственного к $c_1(\mathcal{T}M)$. Ясно, что $\partial[M]$ лежит в образе забывающего отображения $MSU_* \to MU_*$. Более того, можно убедиться, что операции ∂_i являются SU-линейными.

В § 1 мы описываем алгебру всех SU-линейных операций в комплексных кобордизмах. Мы показываем, что операции ∂_i, $i = 1, 2, \dots$, образуют топологический базис левого MU^*-модуля SU-линейных операций. Таким образом, любая SU-линейная операция $f \in [MU, MU]_{MSU,*}$ единственным образом записывается в виде ряда $f = \sum_{i \geqslant 0} \mu_i\, \partial_i$ с $\mu_i \in MU^{-2i-*}$ (см. теорему 1.2). В теореме 1.4 мы описываем мультипликативную структуру кольца SU-линейных операций относительно композиции в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов.

Коннер и Флойд [5] и Стонг [2] определили c_1-*сферические бордизмы* W, промежуточную теорию между SU- и U-бордизмами, следуя аналогичной конструкции Уолла для ориентированных бордизмов. Теория W была ключевым техническим средством для вычисления Коннера и Флойда кручения в SU-бордизмах. В обеих работах [5] и [2] мультипликативная структура на W определяется с помощью некоторого SU-линейного проектора $\pi\colon MU \to W$. Стонг [2] показал, что кольцо коэффициентов теории W полиномиально по отношению к умножению, заданному с помощью используемого им проектора. Хотя Коннер–Флойд и Стонг определили свои проекторы различным образом, в последующей литературе, касающейся SU- и c_1-сферических бордизмов, эти два проектора использовались взаимозаменяемо, так как неявно предполагалось, что они совпадают. Как показано в [3, § 6], проекторы Коннера–Флойда и Стонга различны, несмотря на то что они определяют одно и то же умножение на W (см. пример 2.1).

В § 2 мы приводим несколько описаний проекторов $\pi\colon MU \to W$ и указываем условия, характеризующие SU-линейные проекторы. Мы выражаем SU-линейный проектор Стонга $\pi_0\colon MU \to W$ в виде ряда от операций ∂_i в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов (предложение 2.7) и показываем, что любой другой проектор $\pi\colon MU \to W$ имеет вид $\pi_0(1 + f\varDelta)$ для некоторой операции $f \in [MU, \Sigma^{-4} MU]$ (теорема 2.1), где $\varDelta \in [MU, \Sigma^4 MU]$ – операция Коннера–Флойда, удовлетворяющая $W = \operatorname{Ker} \varDelta$. В этих терминах SU-линейные проекторы соответствуют SU-линейным операциям f. В теореме 2.3 мы описываем все SU-линейные умножения в теории c_1-сферических бордизмов W и приводим условие, выделяющее умножения, задаваемые SU-линейными проекторами.

В § 3 мы изучаем комплексные ориентации теории W и соответствующие им формальные группы. Любая комплексная ориентация $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$

получается с помощью SU-линейного проектора из некоторой ориентации $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в комплексных кобордизмах (предложение 3.1). Умножение на W вместе с комплексной ориентацией w определяют формальную группу $F_W \in W_*[[u,v]]$. Эта формальная группа изучалась В. М. Бухштабером в [6], где приведено утверждение о том, что коэффициенты F_W не порождают всего кольца W_*, в отличие от случая комплексных кобордизмов. Мы приводим полное доказательство этого утверждения в теореме 3.2. Показано, что коэффициенты F_W не порождают W_* ни для каких умножения и комплексной ориентации на W, а не только для стандартных, определяемых проектором Стонга. Мы также доказываем другое утверждение из [6]: для некоторой ориентации w кольцо, порожденное коэффициентами F_W, после обращения 2 совпадает с $W_*[1/2]$ (теорема 3.3).

Представляет интерес геометрическое описание мультипликативного преобразования (рода) $MU \to W$, классифицирующего формальную группу F_W, например, в терминах геометрических порождающих колец W_* и $MSU_*[1/2]$, описанных в [3, ч. II]. Похожая конструкция полиномиальных образующих кольца $MSU_*[1/2]$, связанных с классифицирующим отображением для формальных групп Абеля, Бухштабера и Кричевера, была недавно предъявлена М. Бакурадзе [7] (формальная группа Кричевера приводит к комплексному эллиптическому роду Кричевера–Хона).

§ 1. SU-линейные операции в комплексных кобордизмах

1.1. Эквивалентные определения SU-линейности. Мы изучаем когомологические операции и их свойствами линейности по отношению к модульным спариваниям в теориях когомологий. Поэтому мы работаем в стабильной гомотопической категории (см. [8]–[12]) и не используем никакие строгие модели для спектров. Все модули, кольца и свойства линейности (как в определении 1.1) далее рассматриваются в гомотопическом смысле. Мы для этого используем только моноидальную структуру стабильной гомотопической категории и не используем никаких строгих моноидальных модельных категорий спектров (см., однако, замечание после предложения 1.3). Везде далее, когда мы говорим спектр или отображение (между спектрами), имеются в виду объекты и морфизмы в стабильной гомотопической категории.

Для спектров X и Y обозначаем через $[X,Y]$ множество морфизмов (в стабильной гомотопической категории) между ними, являющееся абелевой группой, а через $\pi_*(X)$ обозначаем гомотопические группы спектра X.

Определение 1.1. Пусть R – коммутативный кольцевой спектр, а E и F – R-модули. Рассмотрим следующие условия на морфизм $f \in [E,F]$:

а) *R-линейность*, т. е. коммутативность квадрата (в стабильной гомотопической категории)

$$\begin{tikzcd} R \wedge E \arrow[r, "1\wedge f"] \arrow[d] & R \wedge F \arrow[d] \\ E \arrow[r, "f"] & F; \end{tikzcd}$$

b) *линейность относительно умножения на элементы* $\pi_*(R)$, т. е. коммутативность (в стабильной гомотопической категории) диаграммы для любого $r \in \pi_k(R)$

$$\begin{tikzcd} \Sigma^k E \arrow[r, "r\cdot"] \arrow[d, "\Sigma^k f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Sigma^k F \arrow[r, "r\cdot"] & F; \end{tikzcd}$$

c) $\pi_*(R)$-*линейность* гомоморфизма $\pi_*(f) \in \mathrm{Hom}(\pi_*(E), \pi_*(F))$.

Предложение 1.1. *Из свойства* a) *следует свойство* b), *а из свойства* b) *следует свойство* c).

Доказательство. a) $\Rightarrow$ b). Диаграмму из пункта b) можно более подробно переписать в виде

$$\begin{tikzcd} S^k \wedge E \arrow[r, "r\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge f"'] & R \wedge E \arrow[r] \arrow[d, "1\wedge f"] & E \arrow[d, "f"] \\ S^k \wedge F \arrow[r, "r\wedge 1"] & R \wedge F \arrow[r] & F. \end{tikzcd}$$

Левый квадрат коммутативен, а коммутативность правого квадрата есть в точности условие a). Коммутативность внешней диаграммы и означает выполнение свойства b).

b) $\Rightarrow$ c). Для $r \in \pi_k(R)$ и $a \in \pi_n(E)$ условие $\pi_*(f)(ra) = r\pi_*(f)(a)$ выражается в коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & R \wedge E \arrow[r] & E \arrow[dr, "f"] & \\ S^k \wedge S^n \arrow[ur, "r\wedge a"] \arrow[dr, "1\wedge a"'] & & & F \\ & S^k \wedge E \arrow[uu, "r\wedge 1"'] \arrow[r, "r\wedge f"] & R \wedge F. \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Левый треугольник здесь коммутативен, а коммутативность правой части как раз и утверждается в b).

Предложение 1.1 доказано.

Наряду с $[E, F]$ будем также рассматривать соответствующую градуированную абелеву группу $[E, F]_*$ с градуированными компонентами $[E, F]_k = [\Sigma^k E, F] = [E, \Sigma^{-k} F] = F^{-k}(E)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Мы интересуемся SU-линейными операциями $f \in [MU, MU]_*$ в комплексных кобордизмах, что соответствует $R = MSU$, $E = MU$ и $F = \Sigma^k MU$ в обозначениях определения 1.1. Оказывается, что этом случае три определения SU-линейности совпадают.

Теорема 1.1. *Для случая SU-линейных операций $f \in [MU, MU]_*$ в комплексных кобордизмах все три условия из определения 1.1 эквивалентны.*

Доказательство этого факта будет состоять из трех лемм. Во-первых, мы имеем следующий полезный результат, связывающий морфизмы между спектрами с их действием на гомотопических группах.

Лемма 1.1 (см. [11, лемма VII.3.2]). *Пусть E и F – связные спектры конечного типа такие, что $H_*(E)$ и $\pi_*(F)$ не имеют кручения. Тогда естественное отображение*

$$p\colon [E,F]\to \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E),\pi_*(F)\bigr)$$

инъективно.

Лемма 1.1 обобщается на морфизмы, включающие три спектра. Для любых спектров E, F, G существует естественное отображение $q\colon [E\wedge F,G]\to \operatorname{Hom}(\pi_*(E)\otimes\pi_*(F),\pi_*(G))$, определяемое следующим образом: для $f\in[E\wedge F,G]$ и $a\in\pi_k(E)$, $b\in\pi_n(F)$ элемент $q(f)(a,b)\in\pi_{k+n}(G)$ представляется отображением $S^k\wedge S^n\xrightarrow{a\wedge b}E\wedge F\xrightarrow{f}G$.

Лемма 1.2. *Пусть E, F и G – связные спектры конечного типа такие, что $H_*(E)$, $H_*(F)$ и $\pi_*(G)$ не имеют кручения. Тогда естественное отображение*

$$q\colon [E\wedge F,G]\to \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E)\otimes\pi_*(F),\pi_*(G)\bigr)$$

инъективно.

Доказательство. Применяя лемму 1.1 к спектрам $E\wedge F$ и G, получаем, что отображение

$$[E\wedge F,G]\to \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G)\bigr)$$

инъективно. Следовательно, достаточно доказать инъективность отображения

$$\operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G)\bigr)\to \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E)\otimes\pi_*(F),\pi_*(G)\bigr),$$

индуцированного естественным отображением $\pi_*(E)\otimes\pi_*(F)\to\pi_*(E\wedge F)$.

Мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G)\bigr) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E)\otimes\pi_*(F),\pi_*(G)\bigr) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E\wedge F)\otimes\mathbb{Q},\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q}\bigr) \arrow[r] & \operatorname{Hom}\bigl(\pi_*(E)\otimes\pi_*(F)\otimes\mathbb{Q},\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q}\bigr).
\end{tikzcd}$$

Здесь левая стрелка представляется в виде композиции отображения $\operatorname{Hom}(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G))\to\operatorname{Hom}(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q})$, индуцированного гомоморфизмом $\pi_*(G)\to\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q}$, который инъективен, так как $\pi_*(G)$ не имеет кручения, и естественного изоморфизма $\operatorname{Hom}(\pi_*(E\wedge F),\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q})\cong\operatorname{Hom}(\pi_*(E\wedge F)\otimes\mathbb{Q},\pi_*(G)\otimes\mathbb{Q})$. Следовательно, левая стрелка в диаграмме инъективна.

Далее, нижняя стрелка индуцирована отображением $\pi_*(E)\otimes\pi_*(F)\otimes\mathbb{Q}\to\pi_*(E\wedge F)\otimes\mathbb{Q}$, которое является изоморфизмом. Действительно, это естественное преобразование теорий гомологий $\pi_*(-)\otimes\pi_*(F)\otimes\mathbb{Q}$ и $\pi_*(-\wedge F)\otimes\mathbb{Q}$, которое является изоморфизмом на спектре сфер. Значит, нижняя стрелка в диаграмме выше является изоморфизмом.

Отсюда следует, что верхняя стрелка в коммутативном квадрате инъективна, что и требовалось.

Замечание. С помощью индукции утверждение леммы 1.2 обобщается на случай смеш-произведения любого количества спектров.

Лемма 1.3. *В обозначениях определения 1.1 пусть R, E и F – связные спектры конечного типа такие, что $H_*(R)$, $H_*(E)$ и $\pi_*(F)$ не имеют кручения. Тогда из свойства* b) *следует свойство* a).

Доказательство. Предположим, что $f \in [E, F]$ удовлетворяет условию c) из определения 1.1. Рассмотрим морфизмы $\varphi_1\colon R \wedge E \xrightarrow{1\wedge f} R \wedge F \to F$, $\varphi_2\colon R \wedge E \to E \xrightarrow{f} F$ и положим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Надо доказать, что $\varphi = 0$.

Применяя отображение $q\colon [R \wedge E, F] \to \operatorname{Hom}(\pi_*(R) \otimes \pi_*(E), \pi_*(F))$ к $\varphi\colon R \wedge E \to F$, получаем $q(\varphi)(r, a) = rf_*(a) - f_*(ra)$, что равняется нулю для любых $r \in \pi_*(R)$, $a \in \pi_*(E)$ в силу свойства b). Тогда из леммы 1.2 вытекает, что $\varphi = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Утверждение вытекает из леммы 1.3 для спектров $R = MSU$, $E = MU$ и $F = \Sigma^k MU$.

1.2. Описание SU-линейных операций в комплексных кобордизмах. Следующее утверждение неявно содержится в работе Коннера и Флойда [5, гл. III] и для вещественного случая восходит к работе Атья [13].

Предложение 1.2. *Имеется эквивалентность MSU-модулей*

$$MU \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty.$$

Доказательство. Так как $\mathbb{C}P^\infty = MU(1)$, мы имеем отображение MSU-модулей

$$MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty = MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \to MU.$$

Это отображение спектров Тома, индуцированное отображением пространств

$$BSU \times BU(1) \to BU \times BU \xrightarrow{\oplus} BU.$$

Данная композиция отображений является гомотопической эквивалентностью со следующим гомотопически обратным:

$$BU \to BSU \times BU(1), \qquad \eta \mapsto (\eta - \det \eta) \times \det \eta.$$

Поэтому она индуцирует эквивалентность соответствующих спектров Тома. Предложение 1.2 доказано.

Для R-модулей E, F обозначим через $[E, F]_R$ абелеву группу R-линейных морфизмов. Для свободного R-модуля $R \wedge X$ имеется естественный изоморфизм абелевых групп $[R \wedge X, F]_R \cong [X, F]$, определяемый следующим образом. Морфизм $X \xrightarrow{f} F$ соответствует R-линейному морфизму $R \wedge X \xrightarrow{1\wedge f} R \wedge F \to F$. Обратно, R-линейный морфизм $R \wedge X \xrightarrow{g} F$ соответствует морфизму $X \simeq S \wedge X \xrightarrow{e\wedge 1} R \wedge X \xrightarrow{g} F$, где $e\colon S \to R$ – единица спектра R.

Мы имеем $MU^*(\mathbb{C}P^\infty) = MU^*[[u]]$, где $MU^* = MU^*(pt)$ – кольцо кобордизмов точки, $u = c_1^U \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – каноническая ориентация (универсальный первый класс Коннера–Флойда), определяемая гиперплоским сечением $\mathbb{C}P^{\infty-1} \subset \mathbb{C}P^\infty$. Элементы $\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ представляются степенными рядами $f(u)$ от u с нулевым постоянным членом.

Предложение 1.3. *Абелева группа SU-линейных операций $[MU, MU]_{MSU,k}$ изоморфна $\widetilde{MU}^{2-k}(\mathbb{C}P^\infty)$. Точнее говоря, если $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – каноническая ориентация в комплексных кобордизмах, то отображение*

$$[MU, MU]_* \to \widetilde{MU}^{2-*}(\mathbb{C}P^\infty), \qquad f \mapsto f(u),$$

становится изоморфизмом при ограничении на подгруппу $[MU, MU]_{MSU,*}$.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}[MU, MU]_{MSU,*} &\simeq [MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1), MU]_{MSU,*} \\ &\simeq [\Sigma^{-2}MU(1), MU]_* = \widetilde{MU}^{2-*}(\mathbb{C}P^\infty),\end{aligned}$$

где первый изоморфизм следует из предложения 1.2, а второй – из обсуждения перед предложением 1.3. Под действием этих изоморфизмов SU-линейная операция $f\colon MU \to \Sigma^{-k}MU$ переходит в композицию

$$\begin{aligned}\Sigma^{-2}MU(1) \simeq S \wedge \Sigma^{-2}MU(1) &\xrightarrow{e\wedge 1} MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \\ &\xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \to MU \xrightarrow{f} \Sigma^{-k}MU.\end{aligned}$$

Поскольку f является SU-линейной, мы можем заменить в этой композиции два последних члена следующим образом:

$$\begin{aligned}S \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{e\wedge 1} MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) &\xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \\ &\xrightarrow{1\wedge f} MSU \wedge \Sigma^{-k}MU \to \Sigma^{-k}MU.\end{aligned}$$

Так как e – единица, композиция выше совпадает с $\Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{i} MU \xrightarrow{f} \Sigma^{-k}MU$. Но отображение $\Sigma^{-2}MU(1) \xrightarrow{i} MU$ представляет каноническую ориентацию $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, и, следовательно, вся композиция представляет $f(u) \in \widetilde{MU}^{2-k}(\mathbb{C}P^\infty)$, что и требовалось.

Замечание. Хотя мы работаем в стабильной гомотопической категории, спектры бордизмов, такие как MU и MSU, имеют строго коммутативные модели. Точнее говоря, существуют симметрическая моноидальная категория строгих MSU-модулей $\mathcal{M}_{MSU}$ и ее гомотопическая (производная) категория $\mathcal{D}_{MSU}$ (см. [14]). Те же рассуждения, что и в предложении 1.2, показывают, что существует эквивалентность строгих MSU-модулей $MU \cong MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty$, которая вместе с изоморфизмом сопряжения из [14, утверждение III.4.1] дает эквивалентность

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{MSU}(MU,MU) &\cong \mathcal{D}_{MSU}(MSU\wedge\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty, MU)\\ &\cong \mathcal{D}_S(\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty, MU)=[\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty, MU].\end{aligned}$$

Следовательно, предложение 1.3 справедливо и для множества гомотопических классов строгих MSU-модульных эндоморфизмов MU. Тем не менее, так как нашей основной мотивацией является изучение когомологических операций SU-линейных в смысле спариваний в теориях когомологий, мы рассматриваем именно отображения MU в себя, которые SU-линейны лишь с точностью до гомотопии.

Согласно предложению 1.3 ряд $f(u)\in\widetilde{MU}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ однозначно определяет SU-линейную операцию f. Следовательно, для окончательного описания SU-линейных операций в комплексных кобордизмах нам нужно предъявить SU-линейные операции, действующие на $MU^*(\mathbb{C}P^\infty)$ как $u\mapsto\sum_{i\geqslant0}\lambda_iu^{i+1}$, где $\sum_{i\geqslant0}\lambda_iu^{i+1}\in\widetilde{MU}^{2-2k}(\mathbb{C}P^\infty)$ – произвольный степенной ряд с $\lambda_i\in MU^{-2i-2k}$. Требуемые операции были построены С. П. Новиковым в [1]. Напомним их определение, следуя [3].

Стабильный изоморфизм Тома

$$\varphi^*\colon MU^n(BU)\xrightarrow{\cong}MU^n(MU)=[MU,MU]_{-n}$$

отождествляет универсальные характеристические классы и когомологические операции в комплексных кобордизмах.

Для двух комплексных одномерных расслоений ξ, η с $u=c_1^U(\xi)$, $v=c_1^U(\eta)$ первый класс Коннера–Флойда их тензорного произведения выражается в виде степенного ряда от u,v с коэффициентами из MU^*, который называется *формальной группой геометрических кобордизмов* [1], [15] или просто *формальной группой в комплексных кобордизмах*:

$$F_U(u,v)=c_1^U(\xi\otimes\eta)=u+v+\sum_{i\geqslant1,\,j\geqslant1}\alpha_{ij}u^iv^j,\qquad \alpha_{ij}\in MU^{-2(i+j-1)}.\tag{1.1}$$

Обозначим через $\overline{u}$ обратный ряд к u по отношению к F_U; он определяется условием $F_U(u,\overline{u})=0$.

Конструкция 1.1 (операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$). Рассмотрим универсальный характеристический класс $d^U\in MU^2(BU)$, определяемый как $d^U(\xi)=c_1^U(\det\xi)$. Рассмотрим также класс $\overline{d}^U=c_1^U(\overline{\det\xi})$, который удовлетворяет соотношению $F_U(d^U,\overline{d}^U)=0$.

Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 определим операцию

$$\Delta_{(k_1,k_2)}=\varphi^*\bigl((\overline{d}^U)^{k_1}(d^U)^{k_2}\bigr)\in[MU,MU]_{-2(k_1+k_2)}.$$

Геометрически операция $\Delta_{(k_1,k_2)}$ отображает класс бордизма $[M]\in MU_*$ в класс $[M_{k_1,k_2}]$ подмногообразия, двойственного к $(\det\mathcal{T}M)^{\oplus k_1}\oplus(\overline{\det\mathcal{T}M})^{\oplus k_2}$.

Действие $\Delta_{(k_1,k_2)}$ на канонической ориентации $u\in\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ имеет вид

$$\Delta_{(k_1,k_2)}u=u\overline{u}^{k_1}u^{k_2}.\tag{1.2}$$

Предложение 1.4. *Операции* $\varDelta_{(k_1,k_2)}$ *являются* SU*-линейными.*

Доказательство. Согласно теореме 1.1 достаточно проверить SU-линейность действия $\varDelta_{(k_1,k_2)}$ на гомотопических группах $\pi_*(MU) = MU_*$. Пусть $[M] \in MU_m$, $[N] \in MSU_n$. Докажем, что $\varDelta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = [N] \cdot \varDelta_{(k_1,k_2)}([M])$. Из определения следует, что

$$\varDelta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\Bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}(N \times M))\bigr)^{k_1}\bigl(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(N \times M)})\bigr)^{k_2}\Bigr),$$

где $D_U\colon MU^*(N \times M) \xrightarrow{\simeq} MU_{n+m-*}(N \times M)$ – оператор двойственности Пуанкаре–Атья, а $\varepsilon\colon MU_*(N \times M) \to MU_*(pt)$ – аугментация. Мы имеем $\det \mathcal{T}(N \times M) = \det \mathcal{T}N \otimes \det \mathcal{T}M = \det \mathcal{T}M$, так как N есть SU-многообразие. Следовательно,

$$\varDelta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\Bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}(M))\bigr)^{k_1}\bigl(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(M)})\bigr)^{k_2}\Bigr).$$

Ясно, что в произведении $N \times M$ подмногообразием, двойственным к классу $\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}(M))\bigr)^{k_1}\bigl(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(M)})\bigr)^{k_2}$, является $N \times \Delta_{(k_1,k_2)}([M])$, откуда следует доказываемое утверждение. Предложение доказано.

Обозначим

$$\varDelta = \varDelta_{(1,1)}, \qquad \partial_k = \varDelta_{(k,0)}, \qquad \partial = \partial_1, \qquad \overline{\partial}_k = \varDelta_{(0,k)}.$$

Заметим, что ∂_0 есть тождественный оператор. Из определения следует, что все операции $\varDelta_{(k_1,k_2)}$ выражаются в виде ряда от ∂_k (равно как и от $\overline{\partial}_k$).

Лемма 1.4. *Степенной ряд* $\sum_{i\geqslant 0} \lambda_i u^{i+1} \in \widetilde{MU}^{2-2k}(\mathbb{C}P^\infty)$ *соответствует операции* $\sum_{i\geqslant 0} \lambda_i\, \overline{\partial}_i$, $\lambda_i \in MU^{-2i-2k}$, *при изоморфизме из предложения* 1.3.

Доказательство. Действительно, $\sum \lambda_i\, \overline{\partial}_i(u) = \sum \lambda_i u^{i+1}$ по формуле (1.2).

Теперь мы можем сформулировать главный результат § 1.

Теорема 1.2. *Любая* SU*-линейная операция* $f \in [MU, MU]_{MSU,*}$ *единственным образом выражается в виде ряда* $f = \sum_{i\geqslant 0} \mu_i\, \partial_i$, *где* $\mu_i \in MU^{-2i-*}$.

Доказательство. Из предложения 1.3 и леммы 1.4 следует, что любая SU-линейная операция f может быть представлена в виде ряда $\sum \lambda_i\, \overline{\partial}_i$. Так как операции $\overline{\partial}_i$ сами выражаются в виде ряда от ∂_i, мы также можем переписать f как ряд $\sum \mu_i\, \partial_i$. Коэффициенты λ_i и μ_i определяются однозначно из действия f на канонической ориентации $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$. А именно, $f(u) = \sum_{i\geqslant 0} \lambda_i u^{i+1} = \sum_{i\geqslant 0} \mu_i u \overline{u}^i$ согласно формуле (1.2). Теорема доказана.

Теорема 1.2 легко переносится на случай SU-мультилинейных операций.

Теорема 1.3. *Любая* SU*-мультилинейная операция в комплексных кобордизмах единственным образом выражается в виде ряда* $\sum \mu_{i_1,\dots,i_k} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}$.

Мы используем этот результат, когда будем изучать SU-билинейные умножения в п. 2.3.

Мультипликативная структура (по отношению к композиции) кольца SU-линейных операций $f = \sum_{i\geqslant 0} \beta_i\, \partial_i$ может быть описана в терминах коэффициентов формальной группы комплексных кобордизмов, как показано ниже.

Для произвольного целого числа $k \in \mathbb{Z}$ ряд *k-й степени* $[k](u)$ по отношению к формальной группе F_U определяется индуктивно следующим образом:

$$[0](u) = 0, \qquad [k](u) = \begin{cases} F([k-1](u), u), & k > 0, \\ F([k+1](u), \overline{u}), & k < 0. \end{cases}$$

Мы имеем $[k](c_1^U(\xi)) = c_1^U(\xi^{\otimes k})$ и $[-k](c_1^U(\xi)) = c_1^U(\overline{\xi}^{\otimes k})$, $k \geqslant 0$, для комплексного одномерного расслоения ξ.

Теперь опишем мультипликативную структуру кольца SU-линейных операций.

Теорема 1.4. *Для неотрицательных целых чисел k, m рассмотрим два степенных ряда*

$$(F(u,v))^k = \sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{ij}^{(k)} u^i v^j, \qquad ([1-m](u))^k u^m = \sum_{i\geqslant 0} \beta_i^{(k,m)} u^i.$$

Тогда

$$\partial_k(a\cdot b) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)}\, \partial_i a \cdot \partial_j b, \qquad \partial_k\, \partial_m = \sum_i \beta_i^{(k,m)}\, \partial_i, \tag{1.3}$$

где $a, b \in [MU, MU]_*$ – произвольные операции, а $a\cdot b \in [MU\wedge MU, MU]_*$ обозначает их внешнее произведение.

Доказательство. Согласно леммам 1.1 и 1.2 указанные тождества достаточно проверить на гомотопических группах спектра MU, т. е. на элементах из $MU_* = \pi_*(MU)$.

Пусть $a = [M]$, $b = [N] \in MU_*$. Обозначим $u = c_1^U(\det \mathcal{T}M)$, $v = c_1^U(\det \mathcal{T}N)$. Тогда первое тождество вытекает из выкладки

$$\begin{aligned}\partial_k([M\times N]) &= \varepsilon D_U\bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}(M\times N))\bigr)^k\bigr) = \varepsilon D_U\bigl(\bigl(c_1^U(\det \mathcal{T}M \otimes \det \mathcal{T}N)\bigr)^k\bigr) \\ &= \varepsilon D_U\bigl((F(u,v))^k\bigr) = \varepsilon D_U\Biggl(\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)} u^i v^j\Biggr) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(k)}\, \partial_i([M])\, \partial_j([N]),\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из того, что подмногообразие $\partial_i(M)\times\partial_j(N)$ двойственно к $u^i v^j$ в произведении $M\times N$.

Для второго тождества обозначим $\partial_m([M]) = [N]$, где $i\colon N \hookrightarrow M$ – соответствующее вложение. Нормальное расслоение к N изоморфно ограничению $i^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus m}$, следовательно,

$$\det \mathcal{T}N \otimes i^*(\det \mathcal{T}M)^{\otimes m} = \det\bigl(\mathcal{T}N \oplus i^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus m}\bigr) \cong i^* \det \mathcal{T}M.$$

Значит, $\det \mathcal{T}N = i^*(\overline{\det \mathcal{T}M})^{\otimes(m-1)}$. Положим $u = c_1^U(\det \mathcal{T}M)$, тогда имеем $c_1^U(\det \mathcal{T}N) = i^*[1-m](u)$. С другой стороны, подмногообразие N двойственно к u^m, т. е. $i_*[N] = D_U(u^m) = u^m \frown [M]$. Тогда следующая выкладка доказывает второе тождество:

$$\begin{aligned}\partial_k[N] &= \big\langle \big(c_1^U(\det \mathcal{T}N)\big)^k, [N]\big\rangle = \big\langle i^*\big([1-m](u)\big)^k, [N]\big\rangle \\ &= \big\langle \big([1-m](u)\big)^k, i_*[N]\big\rangle = \big\langle \big([1-m](u)\big)^k, u^m \frown [M]\big\rangle \\ &= \big\langle \big([1-m](u)\big)^k u^m, [M]\big\rangle = \sum_i \beta_i^{(k,m)} \partial_i([M]).\end{aligned}$$

Теорема 1.4 доказана.

Из второго соотношения в (1.3) следует, что $\partial_k \partial = 0$, так как все $\beta_i^{(k,1)} = 0$. Впрочем, равенство $\partial_k \partial = 0$ следует и из геометрического описания операций ∂_k.

С помощью соотношений (1.3) можно уже записать произвольную композицию операций $f = \sum_i \lambda_i \partial_i$ в таком же виде.

§ 2. c_1-сферические бордизмы W, проекторы и умножения

Здесь мы рассматриваем теорию c_1-сферических бордизмов W, описываем SU-линейные умножения на ней и SU-линейные проекторы $MU \to W$.

2.1. Определение и MSU-модульная структура. Геометрически теория c_1-сферических бордизмов W определяется следующим образом [2, гл. VIII]. Рассматриваются замкнутые многообразия M с c_1-*сферической структурой*, состоящей из

– стабильно комплексной структуры на касательном расслоении $\mathcal{T}M$;

– $\mathbb{C}P^1$-*редукции* детерминантного расслоения, т. е. отображения $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ и эквивалентности $f^*(\eta) \cong \det \mathcal{T}M$, где η – тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

Это естественное обобщение SU-структуры, которая задается “$\mathbb{C}P^0$-редукцией”, т. е. тривиализацией детерминантного расслоения. Соответствующая теория бордизмов называется c_1-*сферическими бордизмами* и обозначается W.

Как и в случае стабильно комплексной структуры, задание c_1-сферической комплексной структуры на стабильном касательном расслоении эквивалентно ее заданию на стабильном нормальном расслоении. Существуют естественные забывающие преобразования $MSU \to W \to MU$.

Гомотопически, c_1-сферическая структура на стабильно комплексном расслоении $\xi\colon M \to BU$ задается поднятием до отображения $M \to X$, где X замыкает (гомотопический) декартов квадрат:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "i"] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}P^\infty. \end{tikzcd}$$

Так как $\mathbb{C}P^\infty$ является топологической абелевой группой, декартов квадрат в этой диаграмме можно заменить на следующий:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det - i"] & \mathbb{C}P^\infty. \end{tikzcd}$$

Спектр Тома, соответствующий отображению $X \to BU$, определяет теорию бордизмов многообразий с $\mathbb{C}P^1$-редукцией в стабильном нормальном расслоении, т. е. теорию W. Мы будем обозначать этот спектр также через W.

Замечание. Чтобы получить $\mathbb{C}P^1$-редукцию в стабильном касательном расслоении, необходимо заменить в декартовом квадрате выше вложение $i\colon \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ на $-i$. Заменяя при этом включение отмеченной точки $* \to \mathbb{C}P^\infty$ на расслоение $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$, мы получаем определение, данное в [2, гл. 8]:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & S^\infty \arrow[d] \\ BU \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det + i"] & \mathbb{C}P^\infty. \end{tikzcd}$$

Спектр W обладает естественной структурой MSU-модуля. Забывающие морфизмы $MSU \to W \to MU$ являются отображениями MSU-модулей. Следующее описание структуры MSU-модуля W неявно содержится в работах Коннера и Флойда [5] и Стонга [2] и восходит к работе Атья [13] (ср. с предложением 1.2).

Предложение 2.1. *Существует эквивалентность MSU-модулей*

$$W \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2.$$

При этом забывающие отображения $MSU \to W \to MU$ отождествляются с отображениями свободных MSU-модулей

$$MSU = MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^1 \to MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2 \to MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} BSU \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "i"] \\ BSU \arrow[r] & BU \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}P^\infty, \end{tikzcd}$$

где строки являются расслоениями, а правый квадрат декартов. Нижнее расслоение расщепляется (см. предложение 1.2). Следовательно, верхнее расслоение также расщепляется, и мы получаем гомотопическую эквивалентность $X \simeq BSU \times \mathbb{C}P^1$. Отображение $X \to BU$ при этом отождествляется с $\mathrm{id} \times i\colon BSU \times \mathbb{C}P^1 \to BSU \times \mathbb{C}P^\infty$. Оно индуцирует эквивалентность соответствующих спектров Тома $W \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$, где $\mathbb{C}P^2$ отождествляется с пространством Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^1$. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Спектр W эквивалентен кослою умножения $\Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU$ на нетривиальный элемент $\theta \in MSU_1 \cong \mathbb{Z}_2$. Правое отображение в соответствующей последовательности корасслоения*

$$\Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU \to W$$

совпадает с забывающим отображением.

Доказательство. Элемент θ задается отображением Хопфа $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 = MSU(1)$. Умножению на θ соответствует отображение

$$MSU \wedge \Sigma^{-2} S^3 \xrightarrow{1\wedge\Sigma^{-2}\eta} MSU \wedge \Sigma^{-2} S^2.$$

Кослоем отображения $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$ является $\mathbb{C}P^2$. Следовательно, кослоем отображения выше является $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$, что совпадает со спектром W в силу предложения 2.1. Предложение доказано.

Предложение 2.3. *Спектры W и MSU эквивалентны по Боусфилду, т. е. условие $MSU_*(X) = 0$ равносильно $W_*(X) = 0$, и отображение $X \to Y$ индуцирует изоморфизм $MSU_*(X) \xrightarrow{\cong} MSU_*(Y)$ тогда и только тогда, когда оно индуцирует изоморфизм $W_*(X) \xrightarrow{\cong} W_*(Y)$.*

Доказательство. Это хорошо известное свойство кослоя нильпотентного отображения (см., например, аналогичное рассуждение в [16, теорема 8.14] для случая K-теории). Из корасслоения предложения 2.2 получаем следующую длинную точною последовательность:

$$\begin{aligned}\cdots \to MSU_{*-1}(X) &\xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X) \to W_*(X)\\ \to MSU_{*-2}(X) &\xrightarrow{\cdot\theta} MSU_{*-1}(X) \to \cdots.\end{aligned}$$

Ясно, что из $MSU_*(X) = 0$ вытекает $W_*(X) = 0$. Обратно, если $W_*(X) = 0$, то $MSU_{*-1}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X)$ – изоморфизм. Так как $\theta^3 \in MSU_3 = 0$ (см., например, [3, пример 5.7]), получаем, что $MSU_*(X) = 0$.

Второе утверждение (об изоморфизмах в гомологиях) следует из первого с помощью рассмотрения гомологической длинной точной последовательности отображения $X \to Y$. Предложение доказано.

Предложение 2.4. *Целочисленные гомологии $H_*(W)$ сконцентрированы в четных размерностях, и имеются короткие точные последовательности*

$$0 \to H_{2k}(MSU) \to H_{2k}(W) \to H_{2k-2}(MSU) \to 0.$$

В частности, гомологии $H_*(W)$ не имеют кручения.

Доказательство. Рассмотрим длинную точную последовательность в целочисленных гомологиях корасслоения из предложения 2.2:

$$\begin{aligned}\ldots \to H_{2k-1}(MSU) &\to H_{2k}(MSU) \to H_{2k}(W)\\ \to H_{2k-2}(MSU) &\to H_{2k-1}(MSU) \to \cdots.\end{aligned}$$

Так как гомологии $H_*(MSU)$ сконцентрированы в четных размерностях и не имеют кручения, то же верно и для W, а длинная точная последовательность распадается на указанные короткие. Предложение 2.4 доказано.

Напомним, что в § 1 мы рассмотрели операцию $\partial\colon MU \to \Sigma^2 MU$, сопоставляющую классу бордизмов $[M] \in MU_*$ класс подмногообразия, двойственного к $c_1(M)$.

Предложение 2.5. *Композиция*

$$W \xrightarrow{\partial'} \Sigma^2 MSU \to \Sigma^2 MU$$

связывающего отображения последовательности корасслоения из предложения 2.2 с забывающим отображением совпадает с $-\partial\colon W \to \Sigma^2 MU$.

Доказательство. Согласно лемме 1.1 достаточно проверить требуемое равенство на гомотопических группах спектров, т. е. доказать, что $W_{2n} \xrightarrow{\partial'} MSU_{2n-2} \to MU_{2n-2}$ совпадает с $-\partial$. Это доказано в [5, (17.3)] (Коннер и Флойд определяют W_* как $\ker \varDelta$, см. по этому поводу предложение 2.8 ниже).

Объединяя предложение 2.2 и предложение 2.5, мы получаем точную последовательность

$$\cdots \to \Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU \to W \xrightarrow{\partial'} \Sigma^2 MSU \xrightarrow{\cdot\theta} \Sigma MSU \to \cdots$$

Коннера и Флойда [5]. На гомотопических группах получаем пятичленную точную последовательность [5, (18.1)]

$$0 \to MSU_{2n-1} \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_{2n} \to W_{2n} \xrightarrow{\partial'} MSU_{2n-2} \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_{2n-1} \to 0.$$

2.2. Связь с операцией $\varDelta$. Напомним, что $W_* = \pi_*(W)$ обозначает гомотопические группы (коэффициенты) спектра W.

Конструкция 2.1 (см. [2, гл. VIII]). Определим гомоморфизм $\pi_0\colon MU_* \to W_*$, отображающий класс бордизмов $[M]$ в класс подмногообразия $N \subset \mathbb{C}P^1 \times M$, двойственного к $\overline{\eta} \otimes \det \mathcal{T}M$. Мы имеем $\det \mathcal{T}N \cong i^*\overline{\eta}$, где i – вложение $N \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times M$, следовательно, N имеет естественную c_1-сферическую стабильно комплексную структуру.

Предложение 2.6 (см. [2, гл. VIII]). *Композиция* $W_* \to MU_* \xrightarrow{\pi_0} W_*$ *является тождественным отображением. В частности, образ забывающего гомоморфизма* $W_* \to MU_*$ *является прямым слагаемым в* MU_*.

Следствие 2.1. *Группы* W_* *сосредоточены в четных размерностях и не имеют кручения.*

Мы можем также рассматривать π_0 как идемпотентный гомоморфизм абелевых групп $MU_* \to MU_*$, который будем называть *проектором Стонга*.

Предложение 2.7. *Для любого* $a \in MU_*$ *имеет место формула*

$$\pi_0(a) = a + \sum_{k\geqslant 2} \alpha_{1k}\, \partial_k a, \tag{2.1}$$

где α_{1k} – коэффициенты формальной группы F_U в комплексных кобордизмах (1.1). *Более того,*
$$\partial\pi_0 = \pi_0\,\partial = \partial.$$

Замечание. Согласно лемме 1.1 формула (2.1) единственным образом продолжает π_0 до когомологической операции из $[MU, MU]$.

Доказательство предложения 2.7. Пусть $a = [M]$. Из определения π_0 следует, что
$$\pi_0(a) = \varepsilon D_U\bigl(c_1^U(\overline{\eta}\otimes\det\mathcal{T}M)\bigr),$$
где $D_U\colon MU^2(\mathbb{C}P^1\times M^n)\xrightarrow{\cong} MU_n(\mathbb{C}P^1\times M^n)$ – изоморфизм двойственности Пуанкаре–Атья, и $\varepsilon\colon MU_*(X)\to MU_*(pt)$ – аугментация.

Обозначим $u = c_1^U(\overline{\eta})$, $v = c_1^U(\det\mathcal{T}M)\in MU^2(\mathbb{C}P^1\times M)$. Тогда
$$\begin{aligned}\varepsilon D_U\bigl(c_1^U(\overline{\eta}\otimes\det\mathcal{T}M)\bigr) &= \varepsilon D_U(F(u,v)) = \varepsilon D_U(u)+\varepsilon D_U(v)+\sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij}\varepsilon D_U(u^iv^j)\\ &= [M]+[\mathbb{C}P^1]\,\partial[M]+\sum_{j\geqslant 1}\alpha_{1j}\,\partial_j[M],\end{aligned}$$
где мы использовали равенства $u^2=0$, $\varepsilon D_U(uv^j)=\partial_j[M]$ и $\varepsilon D_U(v)=[\mathbb{C}P^1]\,\partial[M]$. Для доказательства формулы (2.1) теперь достаточно заметить, что $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$.

Равенство $\pi_0\,\partial = \partial$ получается применением формулы (2.1) к ∂a в силу тождеств $\partial_k\,\partial = 0$.

Осталось доказать, что $\partial\pi_0 = \partial$. Пусть $\pi_0[M]=[N]$. Нужно проверить, что $\partial[N]=\partial[M]$. Мы имеем $\det\mathcal{T}N = i^*\overline{\eta}$, где $i\colon N\hookrightarrow\mathbb{C}P^1\times M$, и
$$i_*[N] = D_U\bigl(c_1^U(\overline{\eta}\otimes\det(\mathcal{T}M))\bigr) = D_U(F_U(u,v)) = F_U(u,v)\frown[M\times\mathbb{C}P^1].$$
Тогда следующая выкладка доказывает требуемое равенство:
$$\begin{aligned}\partial[N] &= \varepsilon D_U\bigl(c_1^U(\det\mathcal{T}N)\bigr) = \varepsilon D_U(i^*u) = \langle i^*u,[N]\rangle = \langle u, i_*[N]\rangle\\ &= \langle u, F_U(u,v)\frown[M\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle uF_U(u,v),[M\times\mathbb{C}P^1]\rangle\\ &= \langle uv,[M\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \partial[M].\end{aligned}$$
Предложение доказано.

Замечание. Из формулы (2.1) следует, что проектор π_0 является SU-линейным, что, впрочем, ясно и из его геометрического определения.

Предложение 2.8. *Образ забывающего гомоморфизма $W_*\to MU_*$ совпадает с* $\ker\varDelta$.

Доказательство. Операция $\varDelta$ отображает класс бордизмов $[M]$ в класс подмногообразия $[N]$, двойственного к $\det\mathcal{T}M\oplus\overline{\det\mathcal{T}M}$. Для c_1-сферического многообразия M расслоение $\det\mathcal{T}M$ индуцируется из тавтологического расслоения η над $\mathbb{C}P^1$. Так как $\eta\oplus\overline{\eta}$ тривиально над $\mathbb{C}P^1$, мы получаем, что операция $\varDelta$ обращается в нуль на образе гомоморфизма $W_*\to MU_*$.

Обратно, пусть $a \in \ker \Delta$. Согласно [3, следствие 6.4] $\partial_k a = 0$ для $k \geqslant 2$. Тогда из (2.1) следует, что $\pi_0(a) = a$, т.е. a лежит в образе забывания $W_* \to MU_*$.

Предложение доказано.

Замечание. Группа коэффициентов W_* была впервые рассмотрена Коннером и Флойдом [5] именно как $\ker \Delta$.

Имеется следующее гомотопическое описание спектра W.

Предложение 2.9. *Спектр W совпадает со слоем отображения $MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемый слой через F. Мы имеем длинную точную последовательность гомотопических групп

$$\cdots \to \pi_{*-3}(MU) \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to \pi_{*-1}(F) \to \cdots .$$

Операция Δ имеет правую обратную (см. [3, лемма 4.3] и пример 2.1 ниже), следовательно, она сюръективна. Тогда длинная точная последовательность выше расщепляется:

$$0 \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to 0.$$

Из предложения 2.8 следует, что аналогичные короткие точные последовательности есть и для W_*:

$$0 \to \pi_*(W) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta} \pi_{*-4}(MU) \to 0.$$

Из этой короткой точной последовательности, того факта, что $H_*(W)$ не имеют кручения, и леммы 1.1 следует, что композиция $W \to MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$ гомотопна нулю. Следовательно, существует морфизм $W \to F$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*(W) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*(F) \arrow[r] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta"] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Значит, отображение $W \to F$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп, и следовательно, является эквивалентностью спектров. Предложение доказано.

Предложение 2.10. *Для произвольного пространства (или спектра) X забывающее отображение $W_*(X) \to MU_*(X)$ инъективно и его образ совпадает с $\ker \Delta$. Аналогичное утверждение верно и для $W^*(X)$.*

Доказательство. Из предложения 2.9 мы получаем длинную точную последовательность

$$\cdots \to W_*(X) \to MU_*(X) \xrightarrow{\Delta} MU_{*-4}(X) \to \cdots .$$

Так как операция $\varDelta$ имеет правую обратную, эта длинная точная последовательность расщепляется на короткие:

$$0 \to W_*(X) \to MU_*(X) \xrightarrow{\varDelta} MU_{*-4}(X) \to 0.$$

Предложение 2.10 доказано.

В [2, гл. VIII] предложения 2.8 и 2.10 доказаны геометрическими методами.

Замечание. Из предложения 2.9 также следует, что проектор Стонга $\pi_0 \in [MU, MU]$ единственным образом поднимается до операции $\pi_0 \in [MU, W]$.

2.3. SU-линейные проекторы на W и SU-линейные умножения. Будем называть морфизм $MU \to W$ *проектором на* W, если он тождествен на W, где W рассматривается как подмодуль в MU посредством забывающего морфизма $W \to MU$. Мы часто будем рассматривать такие проекторы как идемпотентные морфизмы $MU \to MU$ с образом W. Примером служит проектор Стонга $\pi_0\colon MU \to W$.

Каждый такой проектор выделяет в $MU_*(X)$ прямое слагаемое $W_*(X) = \ker \varDelta$ (и аналогично для $W^*(X)$). Более того, из предложения 2.9 следует, что каждый такой проектор задает расщепление спектра комплексных кобордизмов $MU \simeq W \vee \Sigma^4 MU$, и точная последовательность расслоения из предложения 2.9 также расщепляется.

Проектор Стонга SU-линеен и, следовательно, может быть представлен в виде ряда от ∂_k. Коэффициенты этого ряда даются формулой (2.1). Мы имеем следующее предложение.

Предложение 2.11. *Любой SU-линейный проектор $MU \to W$ имеет вид $\pi = 1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i\,\partial_i$ с $\lambda_i \in MU^{-2i}$.*

Доказательство. По теореме 1.2 мы можем записать $\pi = \sum_{i\geqslant 0} \lambda_i\,\partial_i$. Тогда $\pi(1) = 1$ и $\pi([\mathbb{C}P^1]) = [\mathbb{C}P^1]$, так как $[\mathbb{C}P^1] \in W_2$. Поскольку $\partial[\mathbb{C}P^1] = 2$ и $\partial_i[\mathbb{C}P^1] = 0$ при $i \geqslant 2$, получаем $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_1 = 0$, что и требовалось.

Теорема 2.1. *Пусть $\pi\colon MU \to W$ – произвольный проектор на W. Тогда любой другой проектор $MU \to W$ имеет вид $\pi(1+f\varDelta)$ для некоторой операции $f \in [MU, \Sigma^{-4}MU]$. Более того, если π является SU-линейным, то любой другой SU-линейный проектор имеет вид $\pi(1 + f\varDelta)$ для SU-линейной f.*

Доказательство. (Расщепляющаяся) точная последовательность расслоения из предложения 2.9 дает точную последовательность

$$\cdots \leftarrow [\Sigma^3 MU, W] \leftarrow [W, W] \leftarrow [MU, W] \leftarrow [\Sigma^4 MU, W] \leftarrow \cdots .$$

Проекторами $MU \to W$ являются те элементы из $[MU, W]$, которые отображаются в $\mathrm{id} \in [W, W]$. Такие проекторы заведомо существуют, так как $[\Sigma^3 MU, W] = 0$ (гомотопические группы W_* сконцентрированы в четных размерностях). Более того, любые два проектора $MU \to W$ отличаются на образ элемента из $[\Sigma^4 MU, W]$. Следовательно, любой проектор имеет вид $\pi + g\varDelta$, где $g \in [\Sigma^4 MU, W]$. Осталось заметить, что любая операция $g \in [\Sigma^4 MU, W]$ может быть записана в виде πf для $f \in [\Sigma^4 MU, MU]$. Этим завершается доказательство первого утверждения.

Предположим теперь, что π есть SU-линейный проектор. Тогда SU-линейные операции f дают SU-линейные проекторы $\pi(1 + f\varDelta)$. Обратно, если проектор $\pi(1 + f\varDelta)$ SU-линеен, то операция $\pi f \varDelta$ также SU-линейна. Обозначив через $f' \in [\Sigma^4 MU, MU]$ композицию $\pi f \in [\Sigma^4 MU, W]$ и забывающего гомоморфизма $W \to MU$, получаем SU-линейную операцию $f'\varDelta$. Так как операция $\varDelta$ имеют правую обратную, отсюда следует, что сама операция f' также SU-линейна. Но теперь $\pi f' \varDelta = \pi f \varDelta$, так что мы можем заменить в выражении $\pi(1 + f\varDelta)$ операцию f на SU-линейную операцию f'. Теорема доказана.

Лемма 2.1. *Следующие три группы SU-линейных операций совпадают*:
1) *SU-линейные операции, обращающиеся в нуль на W*;
2) *операции, имеющие вид $g\varDelta$ для SU-линейных g*;
3) *операции вида $\sum_{i \geqslant 2} \lambda_i \, \partial_i$, $\lambda_i \in MU_*$.*

Доказательство. Операции вида $g\varDelta$ обращаются в нуль на W по предложению 2.9. С другой стороны, $\sum_{i \geqslant 2} \lambda_i \, \partial_i$ обращаются в нуль на W согласно [3, следствие 6.4].

Обратно, если операция обращается в нуль на W, то согласно тому же предложению 2.9 она имеет вид $g\varDelta$. Если операция $g\varDelta$ является SU-линейной, то g также SU-линейна, так как операция $\varDelta$ имеет правую обратную.

Наконец, по теореме 1.2 любая SU-линейная операция имеет вид $\sum_{i \geqslant 0} \lambda_i \, \partial_i$. Если она обращается в нуль на W, то вычисляя ее на $1 \in \pi_0(W)$ и $[\mathbb{C}P^1] \in \pi_2(W)$, получаем $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Любой проектор $MU \to W$ имеет вид $1 - f\varDelta$, где f – произвольная операция, удовлетворяющая $\varDelta f = 1$. Более того, различным проекторам соответствуют различные операции f, и SU-линейным проекторам соответствуют в точности SU-линейные f.*

Доказательство. Из расщепляющейся точной последовательности расслоения из предложения 2.9 получаем короткую точную последовательность

$$0 \leftarrow [W, MU] \leftarrow [MU, MU] \leftarrow [\Sigma^4 MU, MU] \leftarrow 0.$$

Пусть $p \in [MU, MU]$ – проектор на W. Так как он тождествен на W, он отображается в забывающий морфизм $W \to MU$. Тождественное отображение $1 \in [MU, MU]$ также отображается в забывающий морфизм, откуда получаем $1 - p = f\varDelta$ для некоторой $f \in [\Sigma^4 MU, MU]$, и различным f соответствуют различные p. Следовательно, $p = 1 - f\varDelta$. Эта операция является проектором на W тогда и только тогда, когда $\varDelta(1 - f\varDelta) = 0$. Так как операция $\varDelta$ имеет правую обратную, получаем $1 - \varDelta f = 0$. Обратно, из последнего условия следует $\varDelta(1 - f\varDelta) = 0$. Из существования правой обратной для операции $\varDelta$ также вытекает, что проектор p является SU-линейным тогда и только тогда, когда f является SU-линейной. Теорема 2.2 доказана.

Любой SU-линейный проектор $\pi \colon MU \to W$ определяет SU-билинейное умножение на W по формуле

$$W \wedge W \to MU \wedge MU \xrightarrow{m_{MU}} MU \xrightarrow{\pi} W. \tag{2.2}$$

Так как π – проектор, это умножение имеет единицу, получающуюся из единицы MSU посредством забывающего морфизма.

Для элементов $a, b \in W_*$ обозначим через ab произведение их образов в MU_* при морфизме забывания.

Предложение 2.12. *Умножение* (2.2), *соответствующее* SU*-линейному проектору* $\pi = 1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i \,\partial_i$, *имеет вид*

$$a * b = ab + 2\lambda_2 \,\partial a\, \partial b,$$

Эту формулу можно понимать как тождество на операциях из $[W \wedge W, W]_*$ *или как тождество для произвольных когомологических классов* $a, b \in [E, W]_*$ *для произвольного спектра* E.

В частности, умножение, определяемое проектором Стонга $\pi_0 = 1 + \sum_{k\geqslant 2} \alpha_{1k}\, \partial_k$, *имеет вид*

$$a * b = ab + 2[V]\, \partial a\, \partial b,$$

где $[V] = \alpha_{12} \in MU_4$ – *класс кобордизмов* $[\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$.

Доказательство. Достаточно доказать требуемое равенство на элементах из $W_* = [S, W]_*$. Для этого воспользуемся формулой из теоремы 1.4 и тем фактом, что операции ∂_i обращаются в нуль на W_* при $i \geqslant 2$ (см. [3, следствие 6.4]):

$$a * b = \pi(ab) = ab + \lambda_2\, \partial_2(ab) + \sum_{i\geqslant 3} \lambda_i\, \partial_i(ab) = ab + \lambda_2 \alpha_{11}^{(2)}\, \partial a\, \partial b = ab + 2\lambda_2\, \partial a\, \partial b.$$

Предложение доказано.

Лемма 2.2 (см. [3, лемма 6.5]). *Для любых элементов* $a, b \in W_*$

$$\partial(ab) = a\, \partial b + \partial a\, b - [\mathbb{C}P^1] \partial a\, \partial b, \qquad \varDelta(ab) = -2\, \partial a\, \partial b.$$

Имеется альтернативный способ описания умножений на W, задаваемых SU-линейными проекторами.

Предложение 2.13. *Умножение* (2.2), *соответствующее* SU*-линейному проектору* π, *задается формулой*

$$a * b = ab + 2([V] - \omega)\, \partial a\, \partial b,$$

где $[V] = \alpha_{12} = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$ *и* $\omega = \pi[V] \in W_4$. *Более того, любой элемент из* W_4 *может быть получен в качестве* ω *для некоторого* π.

Доказательство. По теореме 2.1 имеем $\pi = \pi_0 + \pi_0 f \varDelta$ для некоторой SU-линейной операции $f \in [MU, \Sigma^{-4} MU]$. Тогда, используя формулы из предложения 2.12 и леммы 2.2, получаем

$$a * b = \pi_0(ab) + \pi_0 f \varDelta(ab) = ab + 2[V]\, \partial a\, \partial b - 2\pi_0 f(1)\, \partial a\, \partial b.$$

В последнем равенстве мы использовали то, что операция $\pi_0 f$ является SU-линейной. Ясно, что любой $\omega \in W_4$ может быть получен как $\pi_0 f(1)$, что доказывает требуемое равенство. Теперь имеем

$$a * b = \pi(a * b) = \pi(ab) + 2\pi([V] - \omega)\, \partial a\, \partial b = a * b + 2\pi([V] - \omega)\, \partial a\, \partial b.$$

Следовательно, $\pi([V] - \omega) = 0$ и $\pi[V] = \pi(\omega) = \omega$. Предложение доказано.

Пример 2.1. Геометрическое определение правого обратного для операции Δ на группах бордизмов было дано Коннером и Флойдом в [5]. Это определение было расширено С. П. Новиковым [1] до когомологической операции $\Psi \in [\Sigma^4 MU, MU]$ (см. [3, конструкция 4.2]). Таким образом, мы получаем проектор $1 - \Psi\Delta$, который имеет вид, описанный в теореме 2.2, – *проектор Коннера–Флойда*. Как замечено в [3], этот проектор не совпадает с проектором Стонга π_0, хотя эти два проектора и определяют одно и то же умножение на W. Это означает лишь то, что проекторы Стога и Коннера–Флойда имеют один и тот же коэффициент при ∂_2 в их разложениях $1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i\,\partial_i$.

Теорема 2.3. *Любое SU-билинейное умножение на W со стандартной единицей* (*получающейся с помощью забывания из единицы MSU*) *имеет вид*

$$a * b = ab + (2[V] - \omega)\,\partial a\,\partial b$$

для $\omega \in W_4$. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. Более того, из SU-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых $\omega = 2\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} \in W_4$.

Доказательство. Пусть $m(x,y)$ – произвольная SU-билинейная операция на W. Продолжив ее с помощью произвольного SU-линейного проектора $\pi\colon MU \to W$ до SU-билинейной операции $m(\pi(x), \pi(y))$ на MU, а затем взяв композицию с гомоморфизмом забывания $W \to MU$, получим SU-билинейную операцию в комплексных кобордизмах. Согласно теореме 1.3 все такие операции представляются в виде ряда от произведений ∂_i. В силу того, что ∂_i обращается в нуль на W при $i \geqslant 2$, ограничиваясь обратно на W, мы получаем

$$m(a,b) = \alpha ab + \beta\,\partial a\, b + \gamma a\,\partial b + \delta\,\partial a\,\partial b.$$

Из условия $m(a,1) = a$ получаем $\alpha a + \beta\,\partial a = a$. Подставляя $a = 1$ и $a = [\mathbb{C}P^1]$, получаем, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Аналогично, $\gamma = 0$.

Наконец, необходимым и достаточным условием того, чтобы умножение принимало значения в W, является

$$0 = \Delta m(a,b) = \Delta(ab + \delta\,\partial a\,\partial b) = -2\,\partial a\,\partial b + \Delta\delta\,\partial a\,\partial b.$$

Отсюда $\Delta\delta = 2$. Так как $\Delta[V] = 1$, это равносильно $\delta = 2[V] - \omega$, $\omega \in W_4$.

Коммутативность умножения $a * b$ очевидна.

Докажем ассоциативность. Имеем

$$(a*b)*c = (ab + \delta\,\partial a\,\partial b)*c = (ab + \delta\,\partial a\,\partial b)c + \delta\,\partial(ab + \delta\,\partial a\,\partial b)\,\partial c.$$

Из SU-линейности ∂ и того, что эта операция тождественно равна нулю на MU_4, следует, что $\partial(\delta\,\partial a\,\partial b) = \partial\delta\,\partial a\,\partial b = 0$. Мы также имеем $\partial(ab) = a\,\partial b + b\,\partial a - [\mathbb{C}P^1]\,\partial a\,\partial b$ по лемме 2.2. В итоге получаем равенство

$$(a*b)*c = abc + \delta\,\partial a\,\partial b\,c + \delta a\,\partial b\,\partial c + \delta b\,\partial a\,\partial c - \delta[\mathbb{C}P^1]\,\partial a\,\partial b\,\partial c = a*(b*c).$$

Наконец, из предложения 2.13 следует, что у умножений, получающихся из проекторов, коэффициент ω должен делиться на 2. Теорема 2.3 доказана.

Мы отсылаем читателя к [17] для описания общего алгебраического подхода к умножениям в комплексных кобордизмах, получаемых из проекторов.

§ 3. Комплексные ориентации на W и формальные группы

В этом последнем параграфе мы развиваем результаты работы В. М. Бухштабера [6]. Начнем с наблюдения, что теория c_1-сферических бордизмов W комплексно ориентируема для любого умножения (2.2). Более того, любая комплексная ориентация на W получается из некоторой комплексной ориентации на MU с помощью произвольного SU-линейного проектора π. Комплексная ориентация w на W определяет формальную группу $F_W(u,v)$ в теории W. В отличие от случая комплексных кобордизмов, ни для какого выбора w и π коэффициенты формальной группы F_W не порождают всего кольца коэффициентов W_* теории W. Это утверждение вместе с кратким наброском доказательства сформулировано в [6] (где также более детально разобран случай проектора Стонга π_0). Мы приводим полное доказательство, использующее технику, разработанную в предыдущих параграфах.

По теореме 2.3 произвольное SU-билинейное умножение на W задается формулой
$$a*b=ab+\delta\,\partial a\,\partial b, \tag{3.1}$$
где $\delta=2[V]-\omega$, $\omega\in W_4$. Так как $\partial\delta=0$, мы также имеем
$$\partial(a*b)=\partial(ab)=a\,\partial b+b\,\partial a-[\mathbb{C}P^1]\,\partial a\,\partial b. \tag{3.2}$$

Фиксируем некоторое SU-билинейное умножение на W.

Предложение 3.1. *Теория W комплексно ориентируема. Для любых SU-линейного проектора $\pi\colon MU\to W$ и комплексной ориентации $\widetilde{u}\in\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ элемент $\pi(\widetilde{u})\in\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ является комплексной ориентацией для W. Более того, для любых комплексной ориентации w на W и SU-линейного проектора $\pi\colon MU\to W$ существует такая комплексная ориентация $\widetilde{u}\in\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, что $w=\pi(\widetilde{u})$.*

Доказательство. Рассмотрим каноническую ориентацию $u\in\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в комплексных кобордизмах. Тогда $\widetilde{u}|_{\mathbb{C}P^1}=u|_{\mathbb{C}P^1}$. Следовательно, $\pi(\widetilde{u})|_{\mathbb{C}P^1}=\pi(u)|_{\mathbb{C}P^1}=u|_{\mathbb{C}P^1}$ согласно предложению 2.11, так как $\partial_i u|_{\mathbb{C}P^1}=0$ при $i\geqslant 1$. Отсюда следует, что $\pi(\widetilde{u})$ является комплексной ориентацией W.

Обратно, для произвольной ориентации $w\in\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ ее образ при забывающем гомоморфизме $\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)\to\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ является комплексной ориентацией $\widetilde{u}$ для MU. Следовательно, $w=\pi(\widetilde{u})$ для любого SU-линейного проектора $\pi\colon MU\to W$. Предложение доказано.

Замечание. Как видно из доказательства, утверждение верно, поскольку комплексные ориентации в теории когомологий определяются через единицу теории. Забывающее отображение $W\to MU$ и проекторы $MU\to W$ сохраняют стандартную единицу (наследуемую из MSU) и, следовательно, переводят ориентации в ориентации.

Комплексная ориентация $w\in\widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ определяет формальную группу с коэффициентами из W^*, которую мы обозначим $F_W(u,v)$ (она зависит от выбранных умножения и w, но мы не отмечаем это в обозначении). Например, мы можем взять $w = \pi_0(u)$, где $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – каноническая ориентация, а π_0 – проектор Стонга. Формальная группа F_W классифицируется мультипликативным преобразованием $\psi\colon MU \to W$, отправляющим u в w. Однако, даже если $w = \pi_0(u)$, преобразование ψ не совпадает с проектором $\pi_0\colon MU \to W$, так как последний не является мультипликативным. Чтобы изучить формальную группу F_W, мы отображаем W дальше в однопараметрическое расширение U-теории, как описано ниже.

Конструкция 3.1. Следуя [6], рассмотрим мультипликативную теорию когомологий $\mathit{\Gamma}$, определяемую для произвольного CW-комплекса X формулой

$$\mathit{\Gamma}^*(X) = MU^*(X)[t] \,/\, (t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + \delta).$$

Аддитивно, $\mathit{\Gamma}^*(X)$ представляет собой свободный $MU^*(X)$-модуль с базисом $\{1, t\}$, умножение в котором задается соотношением $t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + \delta$.

Рассмотрим естественное преобразование $\varphi\colon W \to \mathit{\Gamma}$, заданное формулой $\varphi(x) = x + t\,\partial x$.

Предложение 3.2 (см. [6, лемма 2]). *Преобразование $\varphi\colon W \to \mathit{\Gamma}$ мультипликативно.*

Доказательство. Для $a, b \in W_*$, используя (3.1) и (3.2), мы получаем

$$\begin{aligned}(a + t\,\partial a)(b + t\,\partial b) &= ab + t(a\,\partial b + b\,\partial a) + t^2\,\partial a\,\partial b \\ &= a * b + t\,\partial(a * b) + (t^2 + t[\mathbb{C}P^1] - \delta)\,\partial a\,\partial b = a * b + t\,\partial(a * b).\end{aligned}$$

Предложение 3.2 доказано.

В теории $\mathit{\Gamma}$ существует каноническая ориентация – образ канонической ориентации $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ при естественном включении $MU \hookrightarrow \mathit{\Gamma}$. Мы также будем обозначать эту ориентацию теории $\mathit{\Gamma}$ через u.

При отображении φ ориентация w переходит в ориентацию $\varphi(w)$ теории $\mathit{\Gamma}$. Следовательно, $\varphi(w)$ выражается в виде степенного ряда $\gamma(u)$ от u с коэффициентами из $\mathit{\Gamma}^* = \mathit{\Gamma}^*(pt)$.

Предложение 3.3 (см. [6, лемма 3]). *Имеет место равенство*

$$\varphi_* F_W(u, v) = \gamma F_U\bigl(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v)\bigr),$$

где $F_U(u, v)$ – формальная группа в комплексных кобордизмах, рассматриваемая как формальная группа над $\mathit{\Gamma}^*$ посредством естественного включения $MU \hookrightarrow \mathit{\Gamma}$.

Доказательство. Так как φ мультипликативно, формальная группа, соответствующая ориентации $\varphi(w)$, равняется $\varphi_* F_W$. Аналогично, так как включение $MU \hookrightarrow \mathit{\Gamma}$ также мультипликативно, формальная группа, соответствующая ориентации u совпадает с F_U, рассматриваемой как формальная группа над $\mathit{\Gamma}^*$. Теперь требуемое тождество вытекает из представления $\varphi(w) = \gamma(u)$. Предложение доказано.

Конструкция 3.2. Обозначим через $J = MU^{<0} \subset MU^*$ идеал элементов ненулевой степени. Тогда J^2 – идеал разложимых элементов в MU^*. Ясно, что $J^2 + tJ$ является идеалом в $\varGamma^*$.

Рассмотрим факторкольцо $R = \varGamma^*/(J^2 + tJ)$. Как градуированная абелева группа, $R = (MU^*/J^2) \oplus \mathbb{Z}\langle t\rangle$, $\deg t = -2$. Умножение на R задается условиями $ab = 0$, $at = 0$ для $a, b \in J/J^2$ и $t^2 = \delta$, так что $t^3 = 0$. Отсюда следует, что $R^{<-2}R^{<0} = 0$.

Запишем

$$F_W(u,v) = u + v + \sum_{i\geqslant 1,\, j\geqslant 1} \omega_{ij} u^i v^j.$$

Для того чтобы сравнить кольцо, порожденное коэффициентами ω_{ij}, со всем кольцом W^*, нам нужно вычислить характеристические s_k-числа элементов ω_{ij}. (Напомним, что s_k – характеристические числа Чженя, соответствующие симметрическим многочленам $t_1^k + \dots + t_n^k$ от корней Чженя; они обращаются в нуль на разложимых элементах из $J^2 \subset MU^*$.)

Мы вычислим формальную группу $\varphi_* F_W(u,v) = u + v + \sum(\omega_{ij} + t\,\partial\omega_{ij})u^i v^j$ над кольцом R (т. е. приведя коэффициенты по модулю $J^2 + tJ$), используя формулу из предложения 3.3. Так как s_k-числа равняются нулю на J^2, таким образом мы получим информацию об s_k-числах коэффициентов формальной группы F_W.

Лемма 3.1. *В кольце $\varGamma^*$ выполнено следующее равенство*:

$$\gamma(u) = u - (\lambda + (2\ell+1)t)u^2 + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_{i+1}u^{i+1} \mod J^2 + tJ,$$

где $\lambda \in MU^{-2} = W^{-2}$, $2\ell = \partial\lambda$, $\ell \in \mathbb{Z}$ и $\gamma_{i+1} = (-1)^i\alpha_{1i} + \omega_i$, $\omega_i \in W^{-2i}$. Более того, любые λ и ω_i получаются из некоторой ориентации $w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Доказательство. По предложению 3.1 каждая комплексная ориентация w имеет вид $\pi_0(\widetilde{u})$ для некоторой ориентации $\widetilde{u}$ на MU. Записав $\widetilde{u} \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ в виде степенного ряда $f(u)$ от стандартной ориентации u и заметив, что $u^{i+1} = \overline{\partial}_i u$, получаем

$$\widetilde{u} = f(u) = u + \sum_{i\geqslant 1}\lambda_i u^{i+1} = \biggl(1 + \sum_{i\geqslant 1}\lambda_i\,\overline{\partial}_i\biggr)u = (1 + \lambda\,\partial + g\varDelta)u. \tag{3.3}$$

В последнем равенстве мы использовали теорему 1.2 и лемму 2.1, чтобы записать SU-линейную операцию $f = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\lambda_i\,\overline{\partial}_i$ в виде $1 + \lambda\,\partial + g\varDelta$ для некоторой SU-линейной операции g. Заметим, что таким образом мы можем получить любые λ и g из некоторой ориентации $\widetilde{u}$.

Теперь можно записать

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \varphi(w) = w + t\,\partial w = \pi_0(\widetilde{u}) + t\,\partial\pi_0(\widetilde{u}) = \pi_0 f(u) + t\,\partial f(u)\\
&= (\pi_0 + t\,\partial)(1 + \lambda\,\partial + g\varDelta)u = \pi_0(u) + \lambda\,\partial u + \pi_0 g\varDelta u + (2\ell+1)t\,\partial u + t\,\partial g\,\varDelta u\\
&= \pi_0(u) + (\lambda + (2\ell+1)t)\,\partial u + \pi_0 g\varDelta u + t\,\partial g\,\varDelta u,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где мы использовали тождество $\partial\pi_0 = \partial$ из предложения 2.7 и равенства $\pi_0(\lambda\,\partial) = \pi_0(\lambda)\,\partial = \lambda\,\partial$, $t\,\partial(\lambda\,\partial) = t(\partial\lambda)\,\partial = 2\ell t\,\partial$, вытекающие из SU-линейности операций π_0 и ∂.

Рассмотрим каждое из четырех слагаемых в правой части (3.4) по отдельности.

Заметим, что $\partial_i u = u\overline{u}^{\,i} = (-1)^i u^{i+1} \mod J$. Тогда, используя формулу из предложения 2.7, получаем

$$\pi_0(u) = u + \sum_{i\geqslant 2}\alpha_{1i}\,\partial_i u = u + \sum_{i\geqslant 2}(-1)^i\alpha_{1i}u^{i+1} \mod J^2. \tag{3.5}$$

Аналогично,

$$(\lambda + (2\ell+1)t)\,\partial u = -(\lambda + (2\ell+1)t)u^2 \mod J^2 + tJ. \tag{3.6}$$

Согласно лемме 2.1 имеем $g\varDelta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\mu_i u^{i+1}$. Отсюда следует, что элемент $g\varDelta(u)$ из $\widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ удовлетворяет $g\varDelta(u)|_{\mathbb{C}P^2} = 0$. Более того, по лемме 2.1 любой элемент $v \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, такой что $v|_{\mathbb{C}P^2} = 0$, имеет вид $g\varDelta(u)$ для некоторой SU-линейной операции g. Применяя проектор π_0, мы также получаем элемент $\pi_0 g\varDelta(u) \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, равный нулю на $\mathbb{C}P^2$. Следовательно, $\pi_0 g\varDelta(u)$ выражается в виде степенного ряда от w без квадратичной части по отношению к умножению $*$:

$$\pi_0 g\varDelta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\omega_i * w^{*(i+1)},$$

где $\omega_i \in W^{-2i}$ могут быть произвольными. Из (3.1) получаем $\omega_i * w = \omega_i w + \delta\,\partial\omega_i\,\partial w = \omega_i w \mod J^2$, где последнее равенство выполнено, так как δ и $\partial\omega_i$ лежат в J для $i \geqslant 2$. Более того,

$$w = \pi_0(\widetilde{u}) = \pi_0(u) + \lambda\,\partial(u) + \pi_0 g\varDelta(u) = u \mod J.$$

Отсюда следует, что

$$\pi_0 g\varDelta(u) = \sum_{i\geqslant 2}\omega_i u^{i+1} \mod J^2. \tag{3.7}$$

Наконец, по лемме 2.1 $\partial g\,\varDelta = \sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\,\partial_i$, где $\lambda_i \in MU^{2-2i} \subset J$. Следовательно, $\partial g\,\varDelta(u) = 0 \mod J$ и $t\,\partial g\,\varDelta(u) = 0 \mod tJ$. Подставляя теперь полученные выражения (3.5)–(3.7) в (3.4), мы получаем требуемое равенство по модулю $J^2 + tJ$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 3.1 получается следующее условие на коэффициенты разложения SU-линейного проектора π в ряд из предложения 2.11.

Предложение 3.4. *Пусть $\pi = 1 + \sum_{i\geqslant 2}\lambda_i\,\partial_i$ – SU-линейный проектор $MU \to W$. Тогда $\lambda_i = \alpha_{1i} + \omega_i$ по модулю разложимых элементов в MU^*, где ω_i могут быть произвольными элементами из W^{-2i}.*

Доказательство. Мы имеем

$$\pi(u) = u + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i\, \partial_i u = u + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i u \overline{u}^i = u + \sum_{i\geqslant 2} (-1)^i \lambda_i u^{i+1} \mod J^2.$$

С другой стороны, используя теорему 2.1, (2.1) и (3.7), получаем

$$\begin{aligned}\pi(u) &= \pi_0(u) + \pi_0 f\varDelta(u) = u + \sum_{i\geqslant 2} \alpha_{1i}\, \partial_i u + \sum_{i\geqslant 2} \omega_i u^{i+1} \\ &= u + \sum_{i\geqslant 2} ((-1)^i \alpha_{1i} + \omega_i) u^{i+1} \mod J^2.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты в двух полученных выражениях для $\pi(u)$, мы получаем требуемое. Предложение доказано.

Вернемся теперь к формальной группе

$$\varphi_* F_W(u,v) = u + v + \sum (\omega_{ij} + t\,\partial\omega_{ij}) u^i v^j$$

над кольцом $\varGamma^*$.

Лемма 3.2. *В обозначениях леммы* 3.1

$$\begin{aligned}\varphi_* F_W(u,v) = u + v &- 2\bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)uv - 2\delta(2\ell+1)^2(uv^2 + vu^2) \\ &+ \sum_{i\geqslant 1,\, j\geqslant 1} \alpha_{ij} u^i v^j + \sum_{i\geqslant 3} \gamma_i \bigl((u+v)^i - u^i - v^i\bigr) \mod J^2 + tJ.\end{aligned}$$

Доказательство. Мы имеем $\varphi_* F_W(u,v) = \gamma F_U(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v))$ по предложению 3.3. Более того, $\gamma(u) = u - (\lambda + (2\ell+1)t)u^2 + \sum_{i\geqslant 3} \gamma_i u^i \mod J^2 + tJ$ по лемме 3.1. Из равенства $(F_U(x,y))^i = (x+y)^i \mod J$ получаем, что

$$\gamma(F_U(x,y)) = F_U(x,y) - \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)(x+y)^2 + \sum_{i\geqslant 3} \gamma_i (x+y)^i \mod J^2 + tJ. \tag{3.8}$$

Теперь нам нужно вычислить $x = \gamma^{-1}(u)$. Обозначим

$$\gamma^{-1}(u) = u + \sum_{j\geqslant 2} \varepsilon_j u^j, \qquad \gamma(u) = u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i, \quad \text{где } \gamma_2 = -\lambda - (2\ell+1)t.$$

Все нижеследующие выкладки будут проводиться над кольцом $R = \varGamma^*/(J^2 + tJ)$, т. е. по модулю $J^2 + tJ$, см. конструкцию 3.1. Имеем $\varepsilon_j \in R^{2-2j}$ и $R^{<0} R^{<-2} = 0$, откуда следует, что $\varepsilon_2\bigl(u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i\bigr) = \varepsilon_2(u - (2\ell+1)tu^2)$ и $\varepsilon_j\bigl(u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i\bigr) = \varepsilon_j u$ при $j \geqslant 3$. Таким образом,

$$\begin{aligned}u = \gamma^{-1}(\gamma(u)) &= u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i + \sum_{j\geqslant 2} \varepsilon_j \biggl(u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i\biggr)^j \\ &= u + \sum_{i\geqslant 2} \gamma_i u^i + \varepsilon_2 (u - (2\ell+1)tu^2)^2 + \sum_{j\geqslant 3} \varepsilon_j u^j.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при u^j, получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2 = -\gamma_2 = \lambda + (2\ell+1)t,\\
&\varepsilon_3 = 2\varepsilon_2(2\ell+1)t - \gamma_3 = 2(\lambda+(2\ell+1)t)(2\ell+1)t - \gamma_3 = 2(2\ell+1)^2\delta - \gamma_3,\\
&\varepsilon_j = -\gamma_j \quad \text{при} \quad j \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma^{-1}(u) = u + \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)u^2 + \bigl(2(2\ell+1)^2\delta - \gamma_3\bigr)u^3 - \sum_{j\geqslant 4}\gamma_j u^j.$$

Осталось подставить $x = \gamma^{-1}(u)$ и $y = \gamma^{-1}(v)$ в (3.8). Мы имеем $F_U(x,y) = x + y + \sum \alpha_{ij}x^iy^j = x + y + \sum \alpha_{ij}u^iv^j$ над R, и аналогично $\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(x+y)^i = \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i$. Для оставшегося слагаемого из (3.8) получаем

$$\begin{aligned}
\bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)(x+y)^2 &= \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)\bigl(u + v + (\lambda+(2\ell+1)t)(u^2+v^2)\bigr)^2\\
&= \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)\bigl((u+v)^2 + 2(\lambda+(2\ell+1)t)(u+v)(u^2+v^2)\bigr)\\
&= (\lambda + (2\ell+1)t)(u+v)^2 + 2(2\ell+1)^2\delta(u+v)(u^2+v^2).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (3.8), в итоге получаем

$$\begin{aligned}
\gamma\bigl(F_U(\gamma^{-1}(u),\gamma^{-1}(v))\bigr) &= \gamma^{-1}(u) + \gamma^{-1}(v) + \sum \alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i\\
&\qquad - \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)(u+v)^2 - 2(2\ell+1)^2\delta(u+v)(u^2+v^2)\\
&= u + \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)u^2 + \bigl(2(2\ell+1)^2\delta - \gamma_3\bigr)u^3\\
&\qquad - \sum_{i\geqslant 4}\gamma_i u^i + v + \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)v^2 + \bigl(2(2\ell+1)^2\delta - \gamma_3\bigr)v^3\\
&\qquad - \sum_{i\geqslant 4}\gamma_i v^i + \sum \alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i\\
&\qquad - \bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)(u+v)^2 - 2(2\ell+1)^2\delta(u^3+uv^2+vu^2+v^3)\\
&= u + v - 2\bigl(\lambda + (2\ell+1)t\bigr)uv - 2\delta(2\ell+1)^2(uv^2+vu^2)\\
&\qquad + \sum \alpha_{ij}u^iv^j + \sum_{i\geqslant 3}\gamma_i\bigl((u+v)^i - u^i - v^i\bigr),
\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Для коэффициентов формальной группы* $F_W(u,v) = u + v + \sum \omega_{ij}u^iv^j$ *имеем*

$$\sum_{i+j=k+1}\omega_{ij}u^iv^j = \sum_{i+j=k+1}\alpha_{ij}u^iv^j + \gamma_{k+1}\bigl((u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}\bigr) \mod J^2 \quad (3.9)$$

для $k \geqslant 3$.

Доказательство. Мы имеем $t\,\partial\omega_{ij} = 0 \mod tJ$ для $i+j > 2$, откуда вытекает, что $\varphi_*F_W(u,v) = u + v + (\omega_{11} + t\,\partial\omega_{11})uv + \sum_{i+j>2}\omega_{ij}u^iv^j \mod J^2 + tJ$. Теперь требуемые равенства следуют из равенства леммы 3.2. Лемма доказана.

Для целых $k \geqslant 1$ положим

$$m_k = \text{НОД}\left\{\frac{k+1}{i},\ 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{при } k+1 \neq p^\ell \text{ ни для какого простого } p, \\ p & \text{при } k+1 = p^\ell \text{ для простого } p \text{ и целого } \ell > 0. \end{cases}$$

Теорема 3.1 (см. [2, гл. X] или [3, теорема 6.10]). *По отношению к умножению, задаваемому проектором Стонга π_0, кольцо W_* полиномиально с образующими в каждой положительной четной размерности кроме 4:*

$$W_* \cong \mathbb{Z}[x_1, x_k \colon k \geqslant 3], \qquad x_1 = [\mathbb{C}P^1], \quad x_k \in W_{2k}.$$

Полиномиальные образующие x_k характеризуются условием $s_k(x_k) = \pm m_k m_{k-1}$ для $k \geqslant 3$.

Лемма 3.4 (см. [6]). *Для коэффициентов формальной группы $F_W(u,v)$ выполнено равенство*

$$\text{НОД}\{s_{i+j-1}(\omega_{ij}) \colon i+j = k+1\} = m_k\bigl(1 + (-1)^k(k+1) + c_k m_k m_{k-1}\bigr)$$

при $k \geqslant 3$, где c_k могут быть произвольными целыми числами в зависимости от ориентации w.

Доказательство. Напомним, что $MU_* \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $a_k \in MU_{2k}$ и $s_k(a_k) = m_k$.

Для коэффициентов формальной группы F_U по модулю разложимых элементов верна следующая формула:

$$\sum_{i+j=k+1} \alpha_{ij} u^i v^j = -a_k \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J^2$$

(см., например, [8] или [2, добавление В. М. Бухштабера]), т. е.

$$\alpha_{ij} = -\frac{\binom{i+j}{i}}{m_{i+j-1}} a_{i+j-1} \mod J^2$$

и, в частности, $\alpha_{1j} = -((j+1)/m_j)a_j \mod J^2$. Отсюда следует, что

$$\gamma_{k+1} = (-1)^k \alpha_{1k} + \omega_k = (-1)^{k+1}\frac{k+1}{m_k} a_k + \omega_k \mod J^2.$$

Подставляя это в (3.9), получаем

$$\sum_{i+j=k+1} \omega_{ij} u^i v^j = -\bigl(a_k + (-1)^k(k+1)a_k - m_k\omega_k\bigr) \times \frac{(u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}}{m_k} \mod J^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\text{НОД}\{s_{i+j-1}(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\}\\&\qquad= s_k\bigl(a_k+(-1)^k(k+1)a_k-m_k\omega_k\bigr)=m_k\bigl(1+(-1)^k(k+1)-s_k(\omega_k)\bigr).\end{aligned}$$

Из формулы (3.1) следует, что если элемент $x\in W_{2i}$, $i\geqslant 3$, разложим в W_* (по отношению к произвольному умножению), то его образ при забывающем гомоморфизме в MU_* также разложим. Следовательно, $\omega_k=c_kx_k \mod J^2$ для некоторых целых c_k. А значит, $s_k(\omega_k)=c_km_km_{k-1}$, откуда получаем требуемое.

Теорема 3.2. *Ни для какой комплексной ориентации на W коэффициенты соответствующей формальной группы F_W не порождают всего кольца W_*.*

Доказательство. Рассмотрим полиномиальную образующую x_k при $k\geqslant 3$ из теоремы 3.1. Предположим, что x_k лежит в кольце, порожденном коэффициентами формальной группы F_W. Так как разложимые в W_* элементы разложимы и в MU_* (в размерностях $\geqslant 6$), получаем

$$s_k(x_k)=\pm\,\text{НОД}\{s_{i+j-1}(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\}=\pm m_k\bigl(1+(-1)^k(k+1)+c_km_km_{k-1}\bigr).$$

С другой стороны, по теореме 3.1 $s_k(x_k)=\pm m_km_{k-1}$. Покажем, что в некоторых размерностях $k\geqslant 3$ эти два числа не совпадают даже с точностью до знака.

Действительно, напомним, что $m_k=p$, если $k+1=p^s$ для некоторого простого p, и $m_k=1$ иначе. Следовательно, если $k=2^\ell$ и, вдобавок, $k+1=p^s$ для нечетного простого p, то $m_km_{k-1}=2p$ и $m_k(1+(-1)^k(k+1)+c_km_km_{k-1})=2p+p(2^\ell+2c_kp)=2p(1+2^{\ell-1}+c_kp)$. Предположим, что $\pm 2p=2p(1+2^{\ell-1}+c_kp)$, т. е. $1+2^{\ell-1}+c_kp=\pm1$. Так как p нечетно, $2^{\ell-1}+c_kp\neq 0$ ни для какого c_k. Поэтому $1+2^{\ell-1}+c_kp\neq 1$. Но если $1+2^{\ell-1}+c_kp=-1$, то $-2c_kp=4+2^\ell=3+p^s$. Это невозможно при $p>3$. В любом случае приходим к противоречию в размерностях вида $k=2^\ell=p^s-1$ для $\ell>1$. Теорема доказана.

Мы также можем доказать следующий результат, сформулированный в [6].

Теорема 3.3. *Пусть A – подкольцо в W_*, порожденное коэффициентами формальной группы F_W. Тогда существует ориентация на W такая, что $A[1/2]=W_*[1/2]$.*

Замечание. Доказательство, приведенное ниже, могло бы быть существенно упрощено в том случае, если бы мы знали, что кольцо W_* полиномиально *для произвольного SU-линейного умножения* на W. Однако описание из теоремы 3.1 верно только для умножения, определяемого проектором Стонга.

Доказательство будет опираться на три леммы. В первой лемме утверждается, что случай $k=2^\ell=p^s-1$, рассмотренный в доказательстве теоремы 3.2, является единственным, в котором НОД s-чисел коэффициентов формальной группы F_W не совпадает с m_km_{k-1}.

Лемма 3.5. *Если k не имеет вид $k=2^\ell=p^s-1$ для некоторого нечетного простого p, то $\text{НОД}\{s_{i+j-1}(\omega_{ij})\colon i+j=k+1\}=m_km_{k-1}$ для некоторых значений c_k (см. лемму 3.4).*

Доказательство. Согласно лемме 3.4 нам нужно найти c_k, для которых выполнено $1+(-1)^k(k+1)+c_k m_k m_{k-1}=m_{k-1}$.

Если $m_{k-1}=1$, то положим $c_k=(-1)^{k+1}(k+1)/m_k$, что является целым числом, так как m_k всегда делит $k+1$.

Если $m_{k-1}=2$, то $k=2^\ell$. Так как $k\neq p^s-1$, получаем $m_k=1$. Требуемое равенство принимает вид $1+(2^\ell+1)+2c_k=2$, что выполнено для $c_k=-2^{\ell-1}$.

Если $m_{k-1}=p$ – нечетное простое, то $k=p^s$. Следовательно, $m_k=1$ или 2. Требуемое равенство принимает вид $1-(p^s+1)+pc_k m_k=p$, что выполняется для $c_k=(p^{s-1}+1)/m_k$. Это целое число, так как $p^{s-1}+1$ четно.

Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Если $p^s=2^\ell+1$ для нечетного простого p и целых положительных ℓ, s, то либо $s=1$ и $\ell=2^n$ (т.е. p – простое число Ферма), либо $p=3$, $s=2$ и $\ell=3$.*

Доказательство. *Случай* 1: $p=3$. Существуют очевидные решения $s=1$, $\ell=1$ и $s=2$, $\ell=3$.

Предположим теперь, что $s>2$, т.е. $\ell>3$. Тогда $3^s=2^\ell+1\equiv 0 \pmod 9$. Легко проверить, что $2^\ell\equiv -1 \pmod 9$ тогда и только тогда, когда $\ell=6m+3$. Тогда $3^s=2^\ell+1=(2^{2m+1})^3+1=(2^{2m+1}+1)(2^{4m+2}-2^{2m+1}+1)$. Следовательно, $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1=3^{s'}$ и $2^{2m+1}+1=3^{s''}$. Из $\ell>3$ вытекает, что $m>0$, и значит, $s'>1$. Тогда $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1\equiv 0 \pmod 9$. Аналогично, $s''>1$ и $2^{2m+1}+1=3^{s''}\equiv 0 \pmod 9$. Но из последнего следует, что $2^{4m+2}-2^{2m+1}+1\equiv 1+1+1=3\not\equiv 0 \pmod 9$. Противоречие.

Случай 2: $p>3$. Приводя равенство $p^s=2^\ell+1$ по модулю 3, мы получаем $(\pm1)^s\equiv(-1)^\ell+1 \pmod 3$. Отсюда следует, что s нечетно, а ℓ четно.

Если запишем $p-1=a2^q$ для нечетного a, то получаем $2^\ell+1=(a2^q+1)^s=a^s2^{qs}+\dots+sa2^q+1$. Предположим, что $s>1$. Тогда $\ell>q$ и $as+2^q(a^s2^{q(s-2)}+\cdots)=2^{\ell-q}$ четно. Это противоречит тому, что as нечетно. Следовательно, $s=1$ и $p=2^\ell+1$.

Записав $\ell=r2^n$ с нечетным r, получим $p=2^\ell+1=(2^{2^n}+1)(2^{(r-1)2^n}-\dots+1)$. Так как p простое, получаем, что $p=2^{2^n}+1$ и $\ell=2^n$.

Лемма 3.7. *Если для некоторого подкольца $A\subset W_*$ выполнено $[\mathbb{C}P^1]\in A$ и существуют такие элементы $x_k\in A_{2k}$, $k\geqslant 2$, что $s_k(x_k)=m_km_{k-1}$ с точностью до степеней 2, то $A[1/2]=W_*[1/2]$.*

Доказательство. Так как $MSU_*\subset\operatorname{Ker}\partial$, любое SU-линейное умножение (3.1) индуцирует стандартное умножение на MSU_*, и, следовательно, мы имеем полиномиальное подкольцо $MSU_*[1/2]\subset W_*[1/2]$. Более того, $MSU_*[1/2]$ совпадает с $\operatorname{Ker}\partial=\operatorname{Im}\partial$ в $W_*[1/2]$ (см. [2, гл. X] или [3, теорема 5.11]). Из (3.2) получаем равенство $x=(1/2)(\partial([\mathbb{C}P^1]x)+[\mathbb{C}P^1]\,\partial x)$ для любого $x\in W_*[1/2]$, из которого следует, что $W_*[1/2]$ является свободным $MSU_*[1/2]$-модулем с базисом $\{1,[\mathbb{C}P^1]\}$. Так как по предположению $[\mathbb{C}P^1]\in A$, нам нужно показать, что $MSU_*[1/2]\subset A[1/2]$.

Согласно теореме Новикова [18] $MSU_*[1/2]\cong\mathbb{Z}[1/2][y_2,y_3,\dots]$, $\dim y_k=2k$. Полиномиальные образующие y_k характеризуются условием $s_k(y_k)=\pm m_km_{k-1}$ с точностью до степеней 2 (см. [2, гл. X]).

Пусть $x_1 = [\mathbb{C}P^1] \in A$. Предположим по индукции, что $MSU_*[1/2] \subset A[1/2]$ в размерностях меньших, чем $2k$. Для $x_k \in A$ рассмотрим

$$\widetilde{y}_k = \frac{1}{2}\,\partial(x_1 x_k) = x_k - \frac{1}{2} x_1\,\partial x_k.$$

Мы имеем $\widetilde{y}_k \in MSU_*[1/2]$. По предположению индукции $\partial x_k \in A[1/2]$, т. е. $\widetilde{y}_k \in A[1/2]$. Так как элемент $x_1\,\partial x_k$ разложим, $s_k(\widetilde{y}_k) = s_k(x_k) = m_k m_{k-1}$ с точностью до степени 2. Значит, $\widetilde{y}_k$ является полиномиальной образующей в $MSU_*[1/2]$, и следовательно, по индукции мы получаем, что $MSU_*[1/2] \subset A[1/2]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Согласно лемме 3.7 нам нужно предъявить ориентацию на W и такие элементы $x_k \in A_{2k}$, $k \geqslant 2$, что $s_k(x_k) = m_k m_{k-1}$ с точностью до степеней 2.

По формуле из леммы 3.2 имеем $\omega_{11} = \alpha_{11} - 2\lambda = -[\mathbb{C}P^1] - 2\lambda$. Выбирая ориентацию на W такую, что $\lambda = 0$, получаем $[\mathbb{C}P^1] \in A$.

Далее нам нужно найти $x_2 \in A$ с $s_2(x_2) = m_2 m_1 = 3$ с точностью до степеней 2.

Умножение на W_* задано формулой $a * b = ab + \delta\,\partial a\,\partial b$, $\delta = 2[V] + \omega$, $\omega \in W_4$, $[V] = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$. Имеем $W_4 = \mathbb{Z}\langle 9[\mathbb{C}P^1]^2 - 8[\mathbb{C}P^2]\rangle$, следовательно, $s_2(\omega) = 24\alpha$ для $\alpha \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем $s_2(\delta) = -6 + 24\alpha$.

По формуле из леммы 3.2 имеем

$$\omega_{12} = -2\delta(2\ell+1)^2 + \alpha_{12} + 3\gamma_3 \mod J^2.$$

Подставляя в это равенство $2\ell = \partial\lambda = 0$ и $\gamma_3 = \omega_2 + \alpha_{12}$ (см. лемму 3.1), получаем

$$\omega_{12} = 4\alpha_{12} + 3\omega_2 - 2\delta \mod J^2,$$

где $\omega_2 \in W_4$ можно выбрать произвольно в зависимости от ориентации W. Так как $s_2(\alpha_{12}) = 3$ и $s_2(\omega_2) = 24\beta$ для $\beta \in \mathbb{Z}$, мы получаем $s_2(\omega_{12}) = 24 - 48\alpha + 72\beta$.

Случай 1: $\alpha = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$. Положим $\beta = 2n$ и возьмем $x_2 = \omega_{12} \in A$. Тогда $s_2(x_2) = 24 = 3 \cdot 2^3$.

Случай 2: $\alpha = 3n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = 1$ или 2. Положим $\beta = -2n$ и возьмем $x_2 = \omega_{12} + x_1 * x_1 \in A$. Тогда получим $x_1 * x_1 = (x_1)^2 + 4\delta$ и $s_2(x_2) = s_2(\omega_{12}) + 4s_2(\delta) = 24(3\beta + 2\alpha) = 3 \cdot \varepsilon 2^4$, что также равняется 3 с точностью до степени 2.

Осталось выбрать x_k для $k \geqslant 3$. Согласно лемме 3.5 существует целочисленная линейная комбинация x_k коэффициентов ω_{ij} с $i + j = k + 1$ такая, что $s_k(x_k) = m_k m_{k-1}$, за исключением случая $k + 1 = p^s = 2^\ell + 1$.

В оставшемся случае $k = 2^\ell = p^s - 1$ из леммы 3.6 следует, что $p = 3$, $s = 2$ или $p = 2^{2^n} + 1$, $s = 1$.

В первом случае ($k = 8$) по лемме 3.4 имеем НОД$\{s_k(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\} = 3(1 + 9 + 6c_k)$. Полагая $c_k = -2$, получаем НОД$\{s_k(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\} = -6 = -m_k m_{k-1}$, что и требовалось.

Во втором случае, полагая $c_k = (p-1)/2 - 1$, получаем НОД$\{s_k(\omega_{ij})\colon i + j = k + 1\} = p(p^2 - 2p + 1) = p(p-1)^2 = 2^{2^{n+1}} p$, что и требовалось.

Теорема доказана.

Авторы весьма благодарны В. М. Бухштаберу за консультации и поддержку. Мы благодарим Т. Бахмана за мотивирующее обсуждение SU-линейных операций в комплексных кобордизмах и, в частности, за его вопрос, образуют ли геометрические операции Коннера и Флойда топологический базис в модуле всех SU-линейных операций, ответом на который служит наша теорема 1.2. Мы также благодарим рецензента за ценные замечания.

Список литературы

1. С. П. Новиков, "Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951; англ. пер.: S. P. Novikov, "The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theory", *Math. USSR-Izv.*, **1**:4 (1967), 827–913.
2. Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973, 372 с.; пер. с англ.: R. E. Stong, *Notes on cobordism theory*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1968, v+354+lvi pp.
3. И. Ю. Лимонченко, Т. Е. Панов, Г. С. Черных, "SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители", *УМН*, **74**:3(447) (2019), 95–166; англ. пер.: I. Yu. Limonchenko, T. E. Panov, G. S. Chernykh, "SU-bordism: structure results and geometric representatives", *Russian Math. Surveys*, **74**:3 (2019), 461–524.
4. P. S. Landweber, "Cobordism operations and Hopf algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **129** (1967), 94–110.
5. P. E. Conner, E. E. Floyd, *Torsion in* SU*-bordism*, Mem. Amer. Math. Soc., **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 74 pp.
6. В. М. Бухштабер, "Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией", *УМН*, **27**:6(168) (1972), 231–232.
7. M. Bakuradze, *Polynomial generators of* $MSU^*[1/2]$ *related to classifying maps of certain formal group laws*, 2021, arXiv: 2107.01395.
8. Дж. Ф. Адамс, *Стабильные гомотопии и обобщенные гомологии*, МЦНМО, М., 2014, 432 с.; пер. с англ.: J. F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL–London, 1974, x+373 pp.
9. Р. М. Свитцер, *Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии*, Наука, М., 1985, 607 с.; пер. с англ.: R. M. Switzer, *Algebraic topology – homotopy and homology*, Grundlehren Math. Wiss., **212**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, xii+526 pp.
10. H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod algebra. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category*, North-Holland Math. Library, **29**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, xix+489 pp.
11. Yu. B. Rudyak, *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998, xii+587 pp.
12. D. Barnes, C. Roitzheim, *Foundations of stable homotopy theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., **185**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2020, vi+423 pp.
13. M. F. Atiyah, "Bordism and cobordism", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **57**:2 (1961), 200–208.
14. A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, J. P. May, *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, With an appendix by M. Cole, Math. Surveys Monogr., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, xii+249 pp.
15. В. М. Бухштабер, "Комплексные кобордизмы и формальные группы", *УМН*, **67**:5(407) (2012), 111–174; англ. пер.: V. M. Buchstaber, "Complex cobordism and formal groups", *Russian Math. Surveys*, **67**:5 (2012), 891–950.

16. D. C. Ravenel, "Localization with respect to certain periodic homology theories", *Amer. J. Math.*, **106**:2 (1984), 351–414.
17. Б. И. Ботвинник, В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, С. А. Юзвинский, "Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах", *УМН*, **55**:4(334) (2000), 5–24; англ. пер.: B. I. Botvinnik, V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, S. A. Yuzvinskii, "Algebraic aspects of the theory of multiplications in complex cobordism theory", *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 613–633.
18. С. П. Новиков, "Гомотопические свойства комплексов Тома", *Матем. сб.*, **57(99)**:4 (1962), 407–442; англ. пер.: S. P. Novikov, "Homotopy properties of Thom complexes", *Topological library*, Part 1: cobordisms and their applications, Ser. Knots Everything, **39**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, 211–250.

Тарас Евгеньевич Панов
(Taras E. Panov)
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
11.03.2022
07.05.2022

Георгий Сергеевич Черных
(George S. Chernykh)
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет;
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: aaa057721@gmail.com