Числа Гурвица для групп Коксетера типов B и D

Р. Феслер

Ключевые слова: Числа Гурвица, группы Коксетера

1. Введение. Рассмотрим разбиение $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_s)$ числа $n \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \dots + \lambda_s$. Пусть m — натуральное число. *Число Гурвица* $h_{m,\lambda}$ по определению равно $\frac{1}{n!}$, умноженному на количество последовательностей $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in S_n$ транспозиций (т.е.$\sigma_k = (i_k, j_k)$ для каждого k) таких, что произведение $\sigma_1 \dots \sigma_m \in S_n$ имеет циклический тип λ. Числа Гурвица являются ответом во множестве задач комбинаторики, топологии, алгебраической геометрии и других; см., например, [1, 2, 3, 4]. Производящая функция чисел Гурвица $H(\beta, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m,\lambda} h_{m,\lambda} \frac{\beta^m}{m!} p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}$ удовлетворяет *уравнению cut-and-join* $\frac{\partial H}{\partial \beta} = \mathcal{CJ}(H)$, где

$$\mathcal{CJ} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}, \tag{1}$$

а также является τ-функцией интегрируемой иерархии КП [5, 6].

В данной заметке мы рассматриваем аналог чисел Гурвица для групп Коксетера (групп, порожденных отражениями) B_n и D_n. Роль транспозиций в них будут играть отражения, а циклический тип заменяется на класс сопряженности.

2. Структура групп B_n и D_n. Существует хорошо известное (см. [7]) вложение группы B_n в группу перестановок S_{2n} в качестве нормализатора $\mathrm{Norm}(\tau)$ элемента $\tau = (1, n+1)(2, n+2) \dots (n, 2n)$. Отражения в B_n при этом вложении переходят в перестановки $r_{ij} = (ij)(\tau(i), \tau(j))$ и $\ell_i = (i, \tau(i))$; здесь $1 \leqslant i, j \leqslant 2n$. Группа D_n — пересечение группы B_n с подгруппой четных перестановок; она порождена отражениями r_{ij}.

Пусть $x \in \mathrm{Norm}(\tau)$, и пусть $x = c_1 \dots c_k$ — разложение на независимые циклы. Тогда для каждого цикла c_i, $i = 1, \dots, k$, верно одно из двух: либо в разложении имеется другой цикл $c_j = \tau c_i \tau$ той же длины, либо c_i имеет четную длину и τ-инвариантен: $c_i = \tau c_i \tau$.

Зафиксируем два разбиения, $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_s)$ и $\mu = (\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_t)$, для которых $|\lambda| + |\mu| = n$, и рассмотрим множество $C_{\lambda|\mu}$, состоящее из всех элементов $x \in B_n \subset S_{2n}$, разложение которых на циклы состоит из пар циклов c_i and $\tau c_i \tau$ длиной $\lambda_1, , \dots, \lambda_s$ (имеется в виду длина каждого из циклов) и из τ-инвариантных циклов $c_i = \tau c_i \tau$, длины которых равны $2\mu_1, \dots, 2\mu_t$ (напомним, что длины должны быть четными).

Теорема 1 [8; Proposition 25]. *Множество $C_{\lambda|\mu} \subset B_n$ явчляется классом споряженности. Каждый класс сопряженности в группе B_n имеет вид $C_{\lambda|\mu}$ для некоторых разбиений λ и μ таких, что $|\lambda| + |\mu| = n$.*

Описание классов сопряженности группы D_n несколько сложнее:

Теорема 2 [8; Proposition 25].

1. *Если разбиение μ содержит четное число частей, то класс сопряженности $C_{\lambda|\mu} \subset B_n$ лежит в группе D_n; если же количество частей нечетно, класс не пересекается с D_n.*
2. *Если $\mu \neq \emptyset$ и содержит четное количество частей, то $C_{\lambda|\mu}$ — класс сопряженности в группе D_n.*
3. *Если хотя бы одна из частей λ_i разбиения λ — нечетное число, то $C_{\lambda|\emptyset}$ — класс сопряженности в группе D_n.*
4. *Если все части λ_i — четные числа, то $C_{\lambda|\emptyset}$ распадается на два класса сопряженности в группе D_n, $C^+_{\lambda|\emptyset}$ и $C^-_{\lambda|\emptyset}$.*

Любой класс сопряженности в группе D_n — один из перечисленных выше.

В частности, отражения r_{ij} образуют класс сопряженности $C_{2^1 1^{n-2}|\emptyset} \subset D_n \subset B_n$, а отражения ℓ_i — класс сопряженности$C_{1^{n-1}|1^1} \subset B_n$. Мы будем обозначать эти классы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ соответственно.

3. Числа Гурвица и уравнение cut-and-join. Зафиксируем пару разбиений λ, μ, для которых $|\lambda| + |\mu| = n$, и пусть $C_{\lambda|\mu} \subset B_n$ — определенный выше класс сопряженности.

Определение 1. *Говорят, что последовательность отражений $(\sigma_1, \dots, \sigma_{m+\ell})$ в группе B_n имеет* профиль *(λ, μ, m, ℓ), если $\#\{p \mid \sigma_p \in \mathcal{R}\} = m$, $\#\{p \mid \sigma_p \in \mathcal{L}\} = \ell$ и $\sigma_1 \dots \sigma_{m+\ell} \in C_{\lambda|\mu}$.* Число Гурвица для группы B_n *$h^B_{m,\ell,\lambda,\mu}$ определяется как $\frac{1}{n!}\#\{(\sigma_1, \dots, \sigma_{m+\ell})$ — последовательность профиля $(\lambda, \mu, m, \ell)\}$. Число Гурвица для группы D_n определяется как $h^D_{m,\lambda,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} h^B_{m,0,\lambda,\mu}$.*

Обозначим $\mathcal{A}_{\lambda|\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\# C_{\lambda|\mu}} \sum_{x \in C_{\lambda|\mu}} x \in \mathbb{C}[B_n]$ среднее арифметическое элементов класса сопряженности. Элементы $\mathcal{A}_{\lambda|\mu}$ принадлежат центру $Z[B_n]$ групповой алгебры группы B_n и образуют в нем базис. Рассмотрим теперь кольцо многочленов $\mathbb{C}[p,q]$, где $p = (p_1, p_2, \dots)$ и $q = (q_1, q_2, \dots)$ — два бесконечных набора переменных. Кольцо градуировано по общей степени многочлена, причем предполагается, что $\deg p_k = \deg q_k = k$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Отображение, переводящее $\mathcal{A}_{\lambda|\mu}$ в $p_\lambda q_\mu \stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s} q_{\mu_1} \dots q_{\mu_t}$ — изоморфизм между $Z[B_n]$ и $\mathbb{C}[p,q]_n$ — однородной компонентой степени n кольца.

Ситуация для группы D_n аналогична (см. подробности в [8]): средние арифметические $\mathcal{A}_{\lambda|\mu}$, где разбиение $\mu \neq \emptyset$ содержит четное число частей, а также средние арифметические $\mathcal{A}_{\lambda|\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\# C_{\lambda|\emptyset}} \sum_{x \in C^+_{\lambda|\emptyset} \cup C^-_{\lambda|\emptyset}} x \in \mathbb{C}[D_n]$ образуют базис в пространстве$V_n^+ \subset Z[D_n]$, изоморфном подпространству $Q_n \subset \mathbb{C}[p,q]_n$, состоящему из многочленов четной степени по q. При нечетном n имеет место равенство $Z[D_n] = V_n^+$, а при четном n — равенство $Z[D_n] = V_n^+ \oplus V_n^-$, где пространство V_n^- порождено элементами $\mathcal{B}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\# C_{\lambda|\emptyset}} \left(\sum_{x \in C^+_{\lambda|\emptyset}} x - \sum_{x \in C^-_{\lambda|\emptyset}} x \right)$. Отображение, переводящее $\mathcal{B}_\lambda$ в $p_{\lambda_1/2} \dots p_{\lambda_s/2}$ (напомним, что все части λ_i разбиения λ четные) — изоморфизм между V_n^- и $\mathbb{C}[p]_{n/2}$.

Пусть теперь $\mathcal{CJ}_1, \mathcal{CJ}_2 : \mathbb{C}[p,q]_n \to \mathbb{C}[p,q]_n$ — линейные операторы, для которых следующие диаграммы коммутативны:

$$
\begin{tikzcd}
Z\mathbb{C}[B_n] \arrow[r, "\times T_i"] \arrow[d, "\simeq"] & Z\mathbb{C}[B_n] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{C}[p,q]_n \arrow[r, "\mathcal{CJ}_i"'] & \mathbb{C}[p,q]_n
\end{tikzcd}, \qquad i = 1, 2. \tag{2}
$$

Здесь $T_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2n} r_{ij}$ и $T_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant 2n} \ell_i$ — суммы отражений, принадлежащих классам $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ соответственно. Теперь соберем числа Гурвица для группы B_n в следующую производящую функцию:

$$
\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p,q) = \sum_{m,\ell}\sum_{\lambda,\mu} \frac{h^B_{m,\ell,\lambda,\mu}}{m!\ell!} p_\lambda q_\mu \beta^m \gamma^\ell.
$$

Теорема 3. *$\mathcal{CJ}_1$ и $\mathcal{CJ}_2$ — дифференциальные операторы, задаваемые формулами*

$$
\mathcal{CJ}_1 = \sum_{i,j=1}^{\infty}\Bigg((i+j)p_iq_j\frac{\partial}{\partial q_{i+j}} + 2ijq_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial q_j} + ijp_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}
$$
$$
+ \frac{1}{2}(i+j)q_iq_j\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + \frac{1}{2}(i+j)p_ip_j\frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ijp_{i+j}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}\Bigg)
$$

и

$$
\mathcal{CJ}_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(ip_i\frac{\partial}{\partial q_i} + iq_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right).
$$

Функция $\mathcal{H}^B$ удовлетворяет уравнениям cut-and-join

$$
\frac{\partial\mathcal{H}^B}{\partial\beta} = \mathcal{CJ}_1(\mathcal{H}^B) \quad \text{и} \quad \frac{\partial\mathcal{H}^B}{\partial\gamma} = \mathcal{CJ}_2(\mathcal{H}^B)
$$

Следствие 1.

$$
\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p,q) = e^{\beta\mathcal{CJ}_1+\gamma\mathcal{CJ}_2}e^{p_1} \tag{3}
$$

4. Замена переменных и явные формулы. Непосредственные вычисления показывают, что при замене переменных $u_\ell = \frac{p_\ell+q_\ell}{2}$ и $v_\ell = \frac{p_\ell-q_\ell}{2}$, $\ell = 1, 2, \ldots$, операторы cut-and-join переходят в

$$
\mathcal{CJ}_1 \mapsto \mathcal{CJ}_u + \mathcal{CJ}_v, \qquad \mathcal{CJ}_2 \mapsto E_u - E_v.
$$

Здесь $\mathcal{CJ}_u$ и $\mathcal{CJ}_v$ — классический оператор cut-and-join (1), где переменные p_i заменяются на u_i и v_i, соответственно. E_u, E_v — эйлерово векторное поле $E \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^\infty ip_i\frac{\partial}{\partial p_i}$, где произведена та же замена.

Теорема 4. *Для любых разбиений λ и μ многочлены*

$$
s_{\lambda|\mu}(p,q) \overset{\text{def}}{=} s_\lambda((p+q)/2)s_\mu((p-q)/2),
$$

где s_λ и s_μ — многочлены Шура, а $(p\pm q)/2$ означает $((p_1\pm q_1)/2, (p_2\pm q_2)/2, \ldots)$, — собственные векторы операторов $\mathcal{CJ}_1$ и $\mathcal{CJ}_2$. Соответствующие собственные значения равны $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(\lambda_i-2i+1)+\mu_i(\mu_i-2i+1))$ для $\mathcal{CJ}_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_i)$ для $\mathcal{CJ}_2$.

Следствие 2.

$$\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,p,q)=\sum_{\lambda,\mu}\exp\big(\beta\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i(\lambda_i-2i+1)+\mu_i(\mu_i-2i+1)+\gamma\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_i)\big)\\ \times s_{\lambda|\mu}(1,0,\dots;1,0,\dots)s_{\lambda|\mu}(p,q)$$

Это аналог формулы, выражающей классические числа Гурвица через многочлены Шура, см. [5].

Следствие 3.

$$h^B_{m,\ell,\lambda,\mu}=(|\lambda|\,+|\mu|\,)^\ell h^B_{m,0,\lambda,\mu}$$

Для группы D_n подпространства $V_n^+,V_n^-\subset Z[D_n]$ инвариантны относительно умножения на T_1. Обозначим $\mathcal{CJ}_1^D$, $\mathcal{CJ}_2^D$ операторы, для которых коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} V_n^+ \arrow[r, "\times T_1"] \arrow[d, "\simeq"] & V_n^+ \arrow[d, "\simeq"] \\ Q_n \arrow[r, "\mathcal{CJ}_1^D"'] & Q_n \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} V_n^- \arrow[r, "\times T_1"] \arrow[d, "\simeq"] & V_n^- \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{C}[p]_{n/2} \arrow[r, "\mathcal{CJ}_2^D"'] & \mathbb{C}[p]_{n/2} \end{tikzcd}.$$

Теорема 5. *Оператор $\mathcal{CJ}_1^D$ — ограничение оператора $\mathcal{CJ}_1^B$ на подпространство $Q_n\subset\mathbb{C}[p,q]_n$ многочленов четной степени по переменным q. Оператор $\mathcal{CJ}_2^D$ (определенный только для четных n) заменой переменных $p_i\mapsto p_i/2$ переводится в умноженный на* 4 *оператор cut-and-join* (1)*, в котором $n\mapsto n/2$.*

Существуют явные формулы, выражающие $h^B_{m,0,\lambda,\mu}$ через классические числа Гурвица $h_{m,\lambda}$. Для произвольной последовательности $c=(c_1,\dots,c_k)$ натуральных чисел обозначим $\xi(c)$ разбиение, содержащее c_1 частей, равных 1, c_2 частей, равных 2, и т.д. Тогда $|\xi(c)|=c_1+2c_2+\dots+kc_k$. Для натуральных чисел p, q, r обозначим f^r_{pq} коэффициент при x^r в многочлене $(1+x)^p(1-x)^q$.

Пусть $\lambda\stackrel{\rm def}{=}\xi(\gamma)$ и $\mu\stackrel{\rm def}{=}\xi(\delta)$. Тогда

Теорема 6.

$$h^B_{m,0,\lambda,\mu}=\sum_{\substack{\alpha_i+\beta_i=\gamma_i+\delta_i\ \forall i\\ m_1+m_2=m}}\frac{h_{m_1,\xi(\alpha)}h_{m_2,\xi(\beta)}}{2^{\#\lambda+\#\mu}}\binom{m}{m_1}\binom{|\lambda|\,+|\mu|}{|\xi(\alpha)|}f^{\gamma_1}_{\alpha_1\beta_1}f^{\gamma_2}_{\alpha_2\beta_2}\dots$$

5. Иерархия КП и числа Гурвица для группы B_n. Иерархия КП — одна из наиболее изученных интегрируемых систем; см., например, [9, 10, 11]. Она представляет собой бесконечную систему уравнений в частных производных, применяемых к формальному ряду $F\in\mathbb{C}[[t]]$ от бесконечного числа переменных (“времен”) $t=(t_1,t_2,\dots)$. Если ряд F — решение иерархии, его экспонента $\tau=e^F$ называется τ-функцией.

Теорема 7. *Производящая функция $\mathcal{H}^B(\beta,\gamma,u+v,u-v)$ — 2-параметрическое семейство τ-functions иерархии КП, отдельно по переменным u и по переменным v.*

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю Ю. М. Бурману за многочисленные плодотворные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Исследования автора частично финансировались Программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и международной лабораторией кластерной геометрии НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ ag. No. 075-15-2021-608 от 08.06.2021).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Yu. Burman, R. Fesler, *Ribbon decomposition and twisted Hurwitz numbers*, `http://arxiv.org/abs/math/2107.13861`, 2021. **[2]** Yu. Burman, D. Zvonkine,, "Cycle factorization and 1-faced graph embeddings", *European Journal of Combinatorics*, **31**:1 (2010), 129–144. **[3]** N. Apostolakis, *A duality for labeled graphs and factorizations with applications to graph embeddings and Hurwitz enumeration*, `http://arxiv.org/abs/math/1804.01214v4`, 2018. **[4]** I. P. Goulden, D. M. Jackson, "Transitive factorizations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 51–60. **[5]** M. Kazarian, S. Lando, "An algebro-geometric proof of Witten's conjecture", *J. Amer. Math. Soc.*, **20** (2007), 1079–1089. **[6]** A. Okounkov, "Toda equations for Hurwitz numbers", *Math. Res. Letters*, **7** (2000), 447–453. **[7]** J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990. **[8]** R. W. Carter, "Conjugacy classes in the Weyl group", *Compositio Mathematica*, **25**:1 (1972), 1–59. **[9]** M. Kazarian, "KP hierarchy for Hodge integrals", *Adv. Math.*, **221**:1 (2009), 1–21. **[10]** R. Kramer, *KP hierarchy for Hurwitz-type cohomological field theories*, Preprint (Max-Planck-Institut für Mathematik Preprint Series), No.42a., Bonn, 2021. **[11]** T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, **135**, Cambridge University Press.

Р. Феслер
НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия
E-mail: `raphael.fesler@gmail.com`