

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина, Возмущения негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, *Матем. заметки*, 2023, том 114, выпуск 2, 229–243

DOI: 10.4213/mzm13612

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 5.164.206.46

1 августа 2023 г., 23:04:35





Возмущения негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

Все негиперболические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, и предсказать динамику сколь угодно их малых возмущений, вообще говоря, невозможно. В настоящей работе для представителя каждого класса алгебраической сопряженности неперiodических негиперболических отображений построено однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, содержащее исходное отображение при нулевом значении параметра и состоящее из диффеоморфизмов Морса–Смейла при всех значениях параметра, не равных нулю. Согласно результатам В. З. Гринеса и А. Н. Бездежных диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутой ориентируемой поверхности, индуцирующий в фундаментальной группе неперiodическое действие, обладает непустым гетероклиническим множеством. Доказано, что диффеоморфизмы построенных семейств при всех значениях параметра, не равных нулю, обладают непустым ориентируемым гетероклиническим множеством, число орбит которого определяется возмущаемым автоморфизмом.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: негиперболические автоморфизмы, двумерный тор, ориентируемая гетероклиника.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13612>

1. Введение и формулировка результатов

Пусть M^n – гладкое замкнутое (компактное без края) связное ориентируемое n -многообразие, $n \geq 1$, и f – гомеоморфизм (диффеоморфизм) на M^n . Через Ω_f обозначим неблуждающее множество диффеоморфизма f . Если $p \in \Omega_f$ является перидической гиперболической точкой диффеоморфизма f , то обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия точки p через W_p^s и W_p^u соответственно.

Напомним, что диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s , W_q^u пересекаются трансверсально для любых перидических точек $p, q \in \Omega_f$.

Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)” в 2021–2022 гг., кроме п. 2, который выполнен при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Если p, q – различные периодические седловые точки диффеоморфизма f , для которых $W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ называется *гетероклиническим*. При этом в случае $\dim W_q^s \cap W_p^u = 0$ пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а орбита гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой*.

Назовем *гетероклиническим множеством* диффеоморфизма f множество всех его гетероклинических точек. Согласно работе [1] если диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутой ориентируемой поверхности индуцирует непериодический автоморфизм фундаментальной группы, то его блуждающее множество содержит непустое множество гетероклинических орбит. В работе [2] в классах диффеоморфизмов двумерного тора, которые действуют непериодически и негиперболически в фундаментальной группе, построены примеры в виде диффеоморфизмов Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Пусть $n = 2$, $f: M^2 \rightarrow M^2$ – диффеоморфизм Морса–Смейла и p – его седловая периодическая точка. Обозначим через $W_p^{\nu,i}$, $i \in \{1, 2\}$, $\nu \in \{u, s\}$, компоненту связности множества $W_p^\nu \setminus \{p\}$.

Гетероклиническое множество диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$ называется *ориентируемым* (согласно [3] и [4; п. 1.2]), если для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$, для которых $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} \neq \emptyset$, индекс пересечения кривых $W_p^{u,j}$ и $W_q^{s,i}$ один и тот же в любой точке $z \in W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i}$.

Представим двумерный тор \mathbb{T}^2 как факторгруппу группы \mathbb{R}^2 по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2: \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с естественной проекцией $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и обозначим через $[z]_{p_2}$ смежный класс группы \mathbb{R}^2 по группе \mathbb{Z}^2 , содержащий точку $z \in \mathbb{R}^2$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

т.е. A – целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A}([(x, y)]_{p_2}) = [(ax + by, cx + dy)]_{p_2},$$

является алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Согласно [5] алгебраический автоморфизм \hat{A} называется *гиперболическим*, если собственные значения матрицы $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице. В противном случае автоморфизм \hat{A} будем называть *негиперболическим*.

Согласно [6; лемма 3] и [7; разделы 2 и 3] каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:

$$\begin{aligned} A_1(m) &= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2(m) &= \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & m &\in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & A_7 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Напомним, что отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности M^2 называется *периодическим*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n = \text{id}$. Наименьшее из таких n называется *периодом* f .

Матрица $A_1(0)$ индуцирует тождественное отображение двумерного тора. Матрицы $A_2(0), A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ индуцируют периодические автоморфизмы двумерного тора, а матрицы $A_1(m)$ и $A_2(m)$ при $m \neq 0$ индуцируют непериодические автоморфизмы двумерного тора.

Хорошо известно (см. [8; теорема 1]), что гиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора являются структурно устойчивыми отображениями. Негиперболические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, поэтому представляет интерес изучение возмущений таких автоморфизмов.

Рассмотрим однопараметрические семейства M_ε и L_ε диффеоморфизмов двумерного тора такие, что при $\varepsilon = 0$ они являются тождественными отображениями, а при $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ являются сдвигами на единицу времени потоков с гиперболическими состояниями равновесия, фазовые портреты которых в фундаментальной области действия группы \mathbb{Z}^2 на \mathbb{R}^2 при $\varepsilon \in (-1, 0)$ представлены на рис. 1, 2. При $\varepsilon \in (0, 1)$ их фазовые портреты получаются из представленных на рис. 1, 2 обращением времени в обратную сторону. Построение таких семейств описано в п. 2.2.

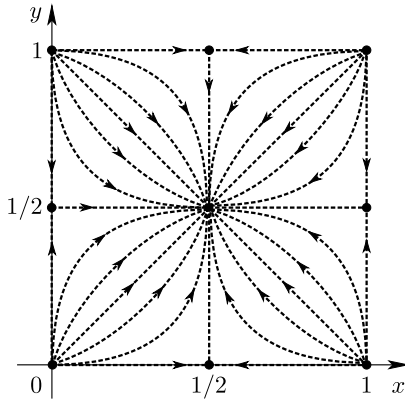


Рис. 1. Семейство M_ε .

Введем однопараметрические семейства диффеоморфизмов следующими формулами:

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,A} = M_\varepsilon \circ \widehat{A}, \quad \mathcal{L}_{\varepsilon,A} = L_\varepsilon \circ \widehat{A},$$

где \widehat{A} – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ верны следующие утверждения:

- 1) при $t = 2l, l \in \mathbb{N}$, диффеоморфизмы $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_1(m)}$ и $\mathcal{M}_{\varepsilon,A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из t гетероклинических орбит;
- 2) при $t = 2l - 1, l \in \mathbb{N}$, диффеоморфизмы $\mathcal{L}_{\varepsilon,A_1(m)}$ и $\mathcal{L}_{\varepsilon,A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4t$ гетероклинических орбит;

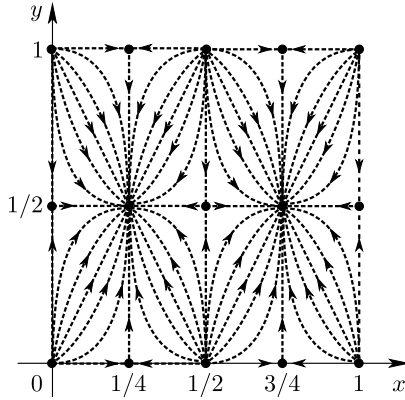


Рис. 2. Семейство L_ϵ .

3) любая периодическая точка каждого диффеоморфизма из пунктов 1) и 2) является периодической точкой того же периода относительно возмущаемого алгебраического автоморфизма.

2. Вспомогательные сведения и результаты

Пусть f – диффеоморфизм многообразия M^n и p – его гиперболическая периодическая точка. Обозначим через $W_{p,\text{loc}}^s$ (соответственно $W_{p,\text{loc}}^u$) локальное устойчивое (соответственно неустойчивое) многообразие точки p , которое представляет собой некоторую открытую окрестность точки p во внутренней метрике многообразия W_p^s (соответственно W_p^u).

Пусть X, Y – подмногообразия Z , трансверсально пересекающиеся в точке z , и $\dim Z = \dim X + \dim Y$. Если X, Y, Z ориентированы в точке $z \in (X \cap Y)$, то индекс пересечения подмногообразий X и Y в этой точке определяется следующим образом. Пусть τ_1, τ_2 – ориентирующие касательные реперы (наборы векторов) к X, Y , соответственно, в точке z . Индекс в точке z равен $+1$, если репер $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ является ориентирующим для Z в точке z , и равен -1 в противном случае.

Пусть \bar{X} – накрывающее пространство для X и $p: \bar{X} \rightarrow X$ – его накрытие. Группой скольжений накрытия $p: \bar{X} \rightarrow X$ называется группа всех гомеоморфизмов $h: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, для которых $p \circ h = p$ (см., например, [9; определение 10.63]). Множества $\bar{X}_1 \subset \bar{X}$ и $\bar{X}_2 \subset \bar{X}$ называются конгруэнтными, если существует гомеоморфизм h из группы скольжений накрытия $p: \bar{X} \rightarrow X$ такой, что $h(\bar{X}_1) = \bar{X}_2$.

Группа скольжений накрытия $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ состоит из гомеоморфизмов вида $h_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Обозначим ее через G_{p_2} .

Пусть $a \in [0, 1)$. Обозначим через $\mathbb{S}_{x=a}^1$ (соответственно $\mathbb{S}_{y=a}^1$) окружность на двумерном торе \mathbb{T}^2 , которая является образом относительно естественной проекции $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ прямой $x = a + k$ (соответственно $y = a + k$), где $k \in \mathbb{Z}$.

2.1. Динамика непериодических негиперболических автоморфизмов. Автоморфизмы $\hat{A}_1(m)$ и $\hat{A}_2(m)$ при $m \neq 0$ не являются периодическими отображениями. Каждая окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$, $\gamma \in [0, 1)$, является инвариантной относительно

действия $\widehat{A}_1(m)$. Ограничение отображения $\widehat{A}_1(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ . Инвариантными относительно действия отображения $\widehat{A}_2(m)$ являются окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1, \mathbb{S}_{y=1/2}^1$ и объединения окружностей $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1 \cup \mathbb{S}_{y=1-\gamma}^1, \gamma \in (0, 1/2)$. Ограничение второй степени отображения $\widehat{A}_2(m)$ на каждую окружность $\mathbb{S}_{y=\gamma}^1$ действует как поворот на некоторый угол θ_γ .

2.2. Построение семейств M_ε и L_ε . Зададим функцию $h_\varepsilon(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, принадлежащую классу гладкости C^1 , по следующему правилу:

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z)\right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right), \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

где¹ $\varepsilon \in (-1, 1)$.

При $\varepsilon = 0$ функция $h_\varepsilon(z)$ имеет вид $h_\varepsilon(z) = z$. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ график функции $h_\varepsilon(z)$ изображен на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

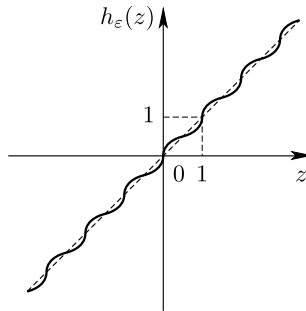


Рис. 3. Функция $h_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$.

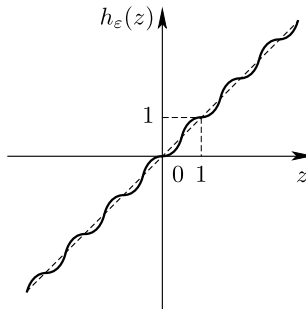


Рис. 4. Функция $h_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \in (0, 1)$.

¹В точках $z \in (k - 1/2, k + 1/2), k \in \mathbb{Z}$, дифференцируемость функции следует из дифференцируемости функций $\operatorname{tg}(\pi z)$ и $\arctg(z)$; в точках вида $k + 1/2, k \in \mathbb{Z}$, дифференцируемость функции следует из равенства левой и правой производной функции в этих точках.

Так как функция $h_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию $h_\varepsilon(z+k) = h_\varepsilon(z) + k$, $k \in \mathbb{Z}$, то она индуцирует диффеоморфизмы окружности $\varphi_\varepsilon: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и $\psi_\varepsilon: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами

$$\varphi_\varepsilon([z]_{p_1}) = [h_\varepsilon(z)]_{p_1}, \quad \psi_\varepsilon([z]_{p_1}) = \left[\frac{1}{2} h_\varepsilon(2z) \right]_{p_1}.$$

Отметим, что в работе [10] функция φ_ε использовалась для построения возмущений гиперболических алгебраических автоморфизмов.

При $\varepsilon = 0$ отображения φ_ε и ψ_ε являются тождественными.

При $\varepsilon \in (-1, 0)$ (соответственно $\varepsilon \in (0, 1)$) непосредственно проверяется, что неблуждающее множество диффеоморфизма φ_ε гиперболично и состоит из стока $\omega = p_1(1/2)$ (соответственно $\omega = p_1(0)$) и источника $\alpha = p_1(0)$ (соответственно $\alpha = p_1(1/2)$), и φ_ε – градиентно-подобный диффеоморфизм, фазовый портрет которого изображен на рис. 5.

Аналогично, при $\varepsilon \in (-1, 0)$ (соответственно $\varepsilon \in (0, 1)$) неблуждающее множество диффеоморфизма ψ_ε гиперболично и состоит из двух стоков: $\omega_1 = p_1(1/4)$ и $\omega_2 = p_1(3/4)$ (соответственно $\omega_1 = p_1(0)$ и $\omega_2 = p_1(1/2)$), и двух источников: $\alpha_1 = p_1(0)$ и $\alpha_2 = p_1(1/2)$ (соответственно $\alpha_1 = p_1(1/4)$ и $\alpha_2 = p_1(3/4)$), и ψ_ε – градиентно-подобный диффеоморфизм, фазовый портрет которого изображен на рис. 6.

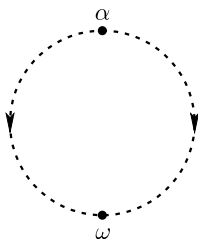


Рис. 5. Диффеоморфизм φ_ε при $\varepsilon \neq 0$.

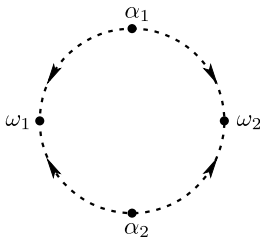


Рис. 6. Диффеоморфизм ψ_ε при $\varepsilon \neq 0$.

Определим диффеоморфизмы двумерного тора M_ε и L_ε как прямые произведения: $M_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \times \varphi_\varepsilon$, $L_\varepsilon = \psi_\varepsilon \times \varphi_\varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ отображения M_ε и L_ε являются тождественными. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ (соответственно $\varepsilon \in (0, 1)$) диффеоморфизм M_ε по построению является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество Ω_{M_ε} которого состоит

из источника $\alpha = p_2(0, 0)$ (соответственно $\alpha = p_2(1/2, 1/2)$), стока $\omega = p_2(1/2, 1/2)$ (соответственно $\omega = p_2(0, 0)$) и двух седел: $\sigma_1 = p_2(0, 1/2)$ и $\sigma_2 = p_2(1/2, 0)$. Аналогично, при $\varepsilon \in (-1, 0)$ (соответственно $\varepsilon \in (0, 1)$) диффеоморфизм L_ε является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество Ω_{L_ε} которого состоит из следующих элементов:

двух источников: $\alpha_1 = p_2(0, 0)$ и $\alpha_2 = p_2(1/2, 0)$ (соответственно $\alpha_1 = p_2(1/4, 1/2)$ и $\alpha_2 = p_2(3/4, 1/2)$);

двух стоков: $\omega_1 = p_2(1/4, 1/2)$ и $\omega_2 = p_2(3/4, 1/2)$ (соответственно $\omega_1 = p_2(0, 0)$ и $\omega_2 = p_2(1/2, 0)$);

четырёх седел: $\sigma_1 = p_2(1/4, 0)$, $\sigma_2 = p_2(3/4, 0)$, $\sigma_3 = p_2(0, 1/2)$ и $\sigma_4 = p_2(1/2, 1/2)$.

3. Доказательство теоремы 1

Непосредственно проверяется, что при $\varepsilon \in (-1, 0)$ отображения $h_\varepsilon(z)$ и $h_\varepsilon^{-1}(z)$ переводят в себя любой интервал вида $(k/2, (k+1)/2)$, $k \in \mathbb{N}$, и являются на нем сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами.

Далее эти свойства понадобятся в ходе доказательства теоремы.

Докажем утверждения теоремы 1 для диффеоморфизмов семейства $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in (-1, 0)$. Утверждения теоремы 1 для диффеоморфизмов семейства $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in (0, 1)$, а также для диффеоморфизмов семейств $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(m)}$ при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $\mathcal{L}_{\varepsilon, A_2(m)}$ при $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ доказываются аналогично.

Везде далее, где не оговорено противное, будем полагать $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon \in (-1, 0)$.

Разобьем доказательство на три основных этапа, первый из которых разобьем еще на два шага.

Этап 1. Докажем, что диффеоморфизм $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла. Для этого сначала докажем, что его неблуждающее множество конечно и гиперболично, а затем, что инвариантные многообразия его седловых точек пересекаются трансверсально.

Шаг 1.1. Докажем, что неблуждающее множество $\Omega_{\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}}$ диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ конечно и гиперболично. Отображение $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ представимо в виде

$$\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}([(x, y)]_{p_2}) = [(h_\varepsilon(x + my), h_\varepsilon(y))]_{p_2} = \varphi([x + my]_{p_1}) \times \varphi([y]_{p_1}).$$

Так как вторая компонента прямого произведения $\varphi([x + my]_{p_1}) \times \varphi([y]_{p_1})$ является отображением φ и неблуждающее множество диффеоморфизма φ состоит из гиперболического источника $p_1(0)$ и гиперболического стока $p_1(1/2)$, то неблуждающие точки диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ находятся на окружностях $\mathbb{S}_{y=0}^1$ и $\mathbb{S}_{y=1/2}^1$. Ограничение отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ на эти окружности действует как диффеоморфизм M_ε . Поэтому неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма M_ε . Вычисление матрицы Якоби отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ показывает, что неблуждающее множество $\Omega_{\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}}$ состоит из гиперболического источника $\alpha = p_2(0, 0)$, гиперболического стока $\omega = p_2(1/2, 1/2)$ и двух гиперболических седел: $\sigma_1 = p_2(0, 1/2)$ и $\sigma_2 = p_2(1/2, 0)$. Шаг 1.1 закончен.

Шаг 1.2. Докажем, что инвариантные многообразия седловых точек диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ пересекаются трансверсально. Для $n \in \mathbb{N}$ введем следующие последовательности:

$$\begin{cases} x_n = h_\varepsilon(x_{n-1}), \\ y_n = h_\varepsilon(y_{n-1}) \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое является накрывающим для диффеоморфизма \mathcal{M}_ε ;

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + my_{n-1}, \\ y_n = y_{n-1} \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\overline{A}_1(m): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое является накрывающим для автоморфизма $\widehat{A}_1(m)$;

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + my_{n-1} - \frac{m}{2}, \\ y_n = y_{n-1} \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\overline{A}_1^*(m): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое также является накрывающим для автоморфизма $\widehat{A}_1(m)$.

Рассмотрим накрывающие для диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ отображения

$$\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

заданные формулами

$$\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)} = \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon \circ \overline{A}_1^*(m), \quad \overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}^* = \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon \circ \overline{A}_1(m).$$

Точка $\overline{\sigma}_1$ с координатами $(0, 1/2)$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}$, а точка $\overline{\sigma}_2$ с координатами $(1/2, 0)$ является неподвижной седловой точкой диффеоморфизма $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}^*$. Далее под $W_{\overline{\sigma}_1}^s$ будем понимать устойчивое многообразие точки $\overline{\sigma}_1$ относительно диффеоморфизма $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}$, а под $W_{\overline{\sigma}_2}^u$ будем понимать неустойчивое многообразие точки $\overline{\sigma}_2$ относительно диффеоморфизма $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}^*$.

Рассмотрим точку $\overline{\sigma}_1$. В точке $\overline{\sigma}_1$ собственные значения матрицы Якоби отображения $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}$ равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad \text{где } |\lambda_1| > 1, \quad |\lambda_2| < 1.$$

Непосредственно проверяется, что касательная к многообразию $W_{\overline{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ в точке $\overline{\sigma}_1$ задается функцией

$$y = \frac{4\varepsilon}{m(1 - \varepsilon)^2} x + \frac{1}{2}.$$

При рассматриваемых значениях $\varepsilon \in (-1, 0)$ тангенс угла наклона касательной в точке $\overline{\sigma}_1$ принимает отрицательные значения.

Отображение $\overline{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)} \in C^1$, следовательно, по теореме Адамара–Перрона (см., например, [5; теорема 6.2.8]) локальное устойчивое многообразие $W_{\overline{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ седловой

точки $\bar{\sigma}_1$ является гладкой кривой класса C^1 . Из определения гладкой кривой и отрицательности тангенса угла наклона касательной к кривой $W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ в точке $\bar{\sigma}_1$ следует, что кривая $W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ в координатах xOy является графиком некоторой гладкой, строго убывающей функции (см. рис. 7).

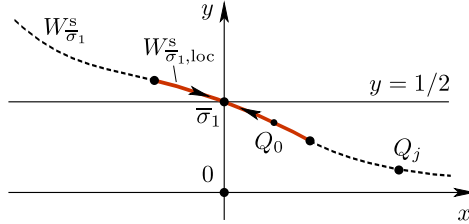


Рис. 7. Устойчивое многообразие $W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ точки $\bar{\sigma}_1$.

Рассмотрим отображение $\bar{M}_{\varepsilon, A_1(m)}^{-1}$, которое является обратным к $\bar{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ и задано формулой $\bar{M}_{\varepsilon, A_1(m)}^{-1} = \bar{A}_1^*(m)^{-1} \circ \bar{M}_{\varepsilon}^{-1}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ введем следующие последовательности:

$$\begin{cases} x_n = h_{\varepsilon}^{-1}(x_{n-1}), \\ y_n = h_{\varepsilon}^{-1}(y_{n-1}) \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\bar{M}_{\varepsilon}^{-1}$;

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - my_{n-1} + \frac{m}{2}, \\ y_n = y_{n-1} \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\bar{A}_1^*(m)^{-1}$.

При этом

$$\begin{cases} x_n = h_{\varepsilon}^{-1}(x_{n-1}) - mh_{\varepsilon}^{-1}(y_{n-1}) + \frac{m}{2}, \\ y_n = h_{\varepsilon}^{-1}(y_{n-1}) \end{cases}$$

– последовательность точек орбиты отображения $\bar{M}_{\varepsilon, A_1(m)}^{-1}$.

Введем на кривой $W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ параметризацию $(x(t), y(t))$ так, что $\dot{x} > 0$; тогда $\dot{y} < 0$. Диффеоморфизм $\bar{M}_{\varepsilon}^{-1}$ есть произведение сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов h_{ε} прямой, а потому для образа кривой $(X(t), Y(t)) = (X(x(t)), Y(y(t)))$ будем иметь

$$\dot{X} = \left(\frac{dX}{dx} \right) \dot{x} > 0, \quad \dot{Y} = \left(\frac{dY}{dy} \right) \dot{y} < 0.$$

Если же

$$(X(t), Y(t)) = \bar{A}_1^*(m)^{-1}(x(t), y(t)) = \left(x(t) - my(t) + \frac{m}{2}, y(t) \right),$$

то также $\dot{X} > 0$ и $\dot{Y} < 0$.

Таким образом, объединение прообразов кривой $W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ будет гладкой кривой $y = \phi_s(x)$ с $d\phi_s/dx < 0$.

Рассмотрим точку $Q_0 \in W_{\bar{\sigma}_1, \text{loc}}^s$ (см. рис. 7) и последовательность ее прообразов

$$Q_j = \bar{\mathcal{M}}_{\varepsilon, A_1(m)}^{-1}(Q_{j-1}), \quad Q_j = (x_j, y_j).$$

Тогда $y_j = h_\varepsilon^{-1}(y_{j-1})$. Если $y_0 < 1/2$, то $y_n \rightarrow 0$. Если $y_0 > 1/2$, то $y_n \rightarrow 1$. Наконец,

$$x_n = h_\varepsilon^{-1}(x_{n-1}) - m \left(h_\varepsilon^{-1}(y_{n-1}) - \frac{1}{2} \right) = h_\varepsilon^{-1}(x_{n-1}) - m \left(y_n - \frac{1}{2} \right).$$

При больших n верно, что $|y_n - 1/2| > 1/4$, а тогда второй член составляет по модулю по меньшей мере $1/2$, так как $m = 2l \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$. Значит, x_n лежит в каком-то интервале вида $(k/2, (k+1)/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, лежащим строго правее, если $y_0 < 1/2$ (левее, если $y_0 > 1/2$), чем аналогичный интервал, где лежит $h_\varepsilon^{-1}(x_{n-1})$. Так как $h_\varepsilon^{-1}(x_{n-1})$ по свойству функции h_ε^{-1} лежит в том же интервале, где лежит и x_{n-1} , то каждый раз x_n смещается минимум на один интервал правее (левее, если $y_0 < 1/2$). Следовательно, $x_n \rightarrow +\infty$, если $y_0 < 1/2$, и $x_n \rightarrow -\infty$, если $y_0 > 1/2$ (см. рис. 8).

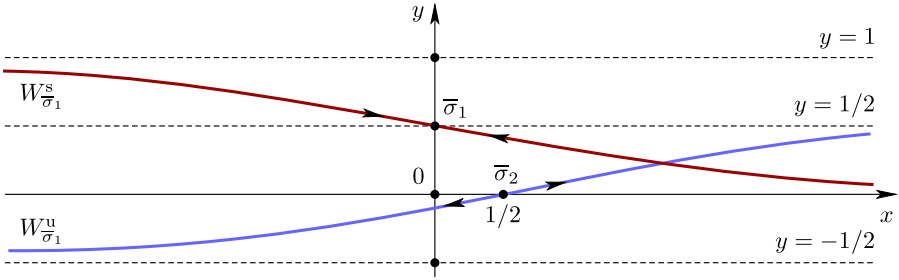


Рис. 8. Асимптотическое поведение кривых $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ и $W_{\bar{\sigma}_2}^u$.

Аналогичным образом, неустойчивое многообразие $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ точки $\bar{\sigma}_2 = (1/2, 0)$ задается графиком $y = \phi_u(x)$, где $d\phi_u/dx > 0$, $\phi_u(x) \rightarrow 1/2$ при $x_n \rightarrow +\infty$, $\phi_u(x) \rightarrow -1/2$ при $x_n \rightarrow -\infty$ (см. рис. 8). Отсюда следует, что многообразия $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ и $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ пересекаются трансверсально. Шаг 1.2 закончен.

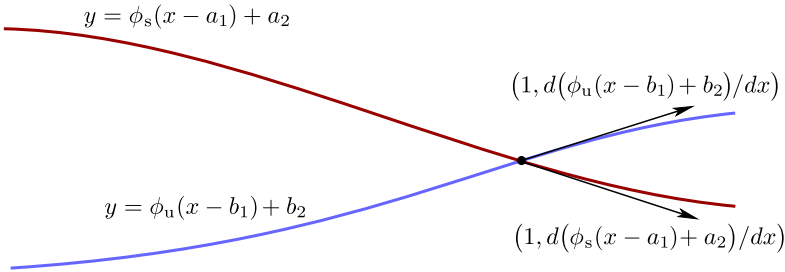


Рис. 9. Ориентация графиков функций $y = \phi_s(x - a_1) + a_2$ и $y = \phi_u(x - b_1) + b_2$.

Этап 2. Докажем, что гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ ориентируемо. Кривые, конгруэнтные $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ – графики функций $y = \phi_s(x - a_1) + a_2$,

$a_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Кривые, конгруэнтные $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ – графики функций $y = \phi_u(x - b_1) + b_2$, $b_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Все конгруэнтные кривые можно согласованно ориентировать выбором касательного вектора, смотрящего в сторону увеличения x (например, вектором $(1, d(\phi_s(x - a_1) + a_2)/dx)$ для графиков $y = \phi_s(x - a_1) + a_2$, и $(1, d(\phi_u(x - b_1) + b_2)/dx)$ для графиков $y = \phi_u(x - b_1) + b_2$) (см. рис. 9). Тогда во всех точках пересечения определитель будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{d}{dx}(\phi_s(x - a_1) + a_2) \\ 1 & \frac{d}{dx}(\phi_u(x - b_1) + b_2) \end{vmatrix} = \phi'_u(x - b_1) - \phi'_s(x - a_1) > 0.$$

Следовательно, индекс пересечения кривых $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ и $W_{\bar{\sigma}_2}^u$ во всех точках совпадает и гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ ориентируемо. Этап 2 закончен.

Этап 3. Докажем, что гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ состоит из m орбит. Обозначим через $W_{\bar{\sigma}_1}^{s,1}$ (соответственно $W_{\bar{\sigma}_1}^{s,2}$) часть кривой $W_{\bar{\sigma}_1}^s$, которая лежит ниже (соответственно выше) прямой $y = 1/2$. Графики $y = \phi_u(x - b_1) + b_2$ лежат в полосе $y \in (b_2 - 1/2, b_2 + 1/2)$, а $W_{\bar{\sigma}_1}^{s,1}$ – в полосе $y \in (0, 1/2)$, поэтому пересечение возможно лишь при $b_2 = 0$.

Если же $b_2 = 0$, то при любом $b_1 = q \in \mathbb{Z}$ пересечение существует и единственно: на луче $[0, +\infty)$ функция ϕ_s убывает от $1/2$ до 0 , а $\phi_u(x - q)$ возрастает от $\phi_u(-q) < 1/2$ до $1/2 > 0$. Пусть $H_q = (x_q, y_q)$ – точка пересечения. Тогда x_q возрастает с ростом q .

Действительно²,

$$\phi_u(x_q - (q + 1)) < \phi_u(x_q - q) = \phi_s(x_q).$$

Тогда точка x_{q+1} лежит на луче $[x_q, +\infty)$ (см. рис. 10).

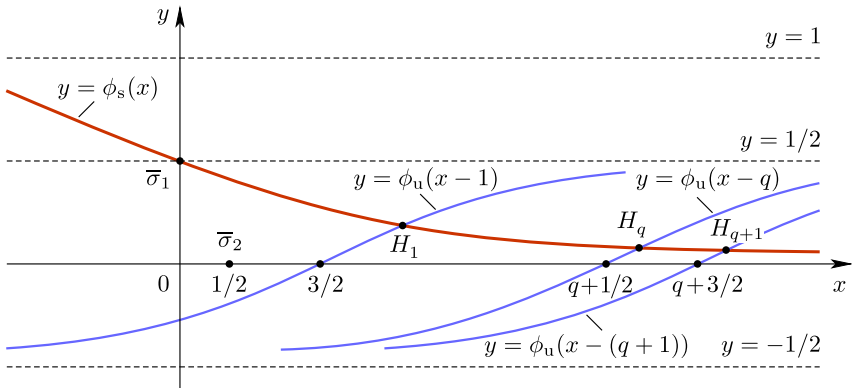


Рис. 10. Графики функций $y = \phi_s(x)$ и $\phi_u(x - q)$.

Итак, H_q – все гетероклинические точки на луче $[0, +\infty)$. Отображение \bar{M}_ε переводит в себя точку $\bar{\sigma}_1$ и, следовательно, кривую $W_{\bar{\sigma}_1}^s$ также переводит в себя. Точки

²Геометрически это означает, что график $\phi_u(x - (q + 1))$ лежит ниже, чем $\phi_u(x - q)$, а тогда и точка пересечения также лежит ниже (и правее в силу монотонности ϕ_s).

же вида $(1/2 + q, 0)$ переходят друг в друга: $(1/2 + q, 0) \rightarrow (1/2 + q + m/2, 0)$, поэтому то же происходит с их неустойчивыми многообразиями:

$$\{y = \phi_u(x - q)\} \rightarrow \left\{y = \phi_u\left(x - \left(q + \frac{m}{2}\right)\right)\right\}$$

и с точками пересечения последних с $\{y = \phi_s(x)\}$: $H_q \rightarrow H_{q+m/2}$. Следовательно, существует в точности $m/2$ гетероклинических орбит диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$, лежащих на кривой $p_2(W_{\bar{\sigma}_1}^{s,1})$. Аналогично доказывается, что существует в точности $m/2$ гетероклинических орбит диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$, лежащих на кривой $p_2(W_{\bar{\sigma}_1}^{s,2})$.

Таким образом, гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(m)}$ состоит из m гетероклинических орбит. Этап 3 закончен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На рис. 11 изображено гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(2)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$. Оно состоит из двух орбит. На рис. 11 каждая гетероклиническая орбита отмечена своим цветом и проиллюстрировано действие диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(2)}$ на произвольную гетероклиническую точку z .

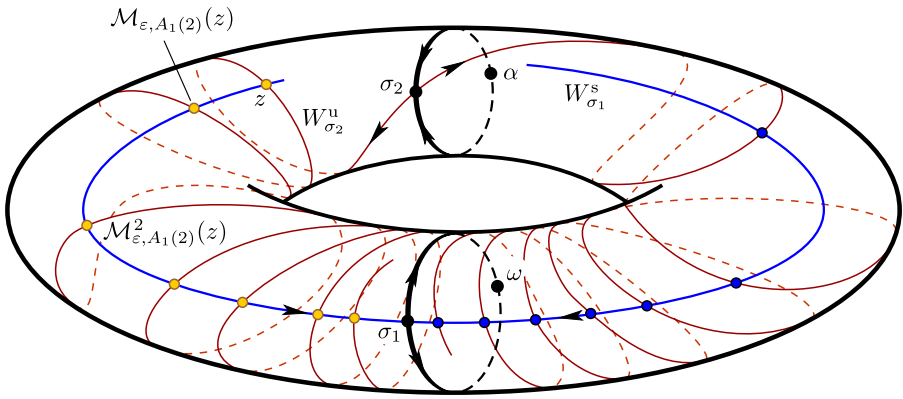


Рис. 11. Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_1(2)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(m)}$ совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма M_ε и состоит из двух неподвижных гиперболических узлов и двух неподвижных гиперболических седел. Ограничение отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(m)}$ на инвариантные многообразия седел не сохраняет ориентацию. Каждая компонента связности этих многообразий, участвующая в гетероклиническом пересечении, содержит точки каждой гетероклинической орбиты диффеоморфизма. На рис. 12 изображено гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(2)}$ при $\varepsilon \in (-1, 0)$. Оно состоит из двух орбит. На рис. 12 каждая гетероклиническая орбита отмечена своим цветом и проиллюстрировано действие диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(2)}$ на произвольную гетероклиническую точку z .

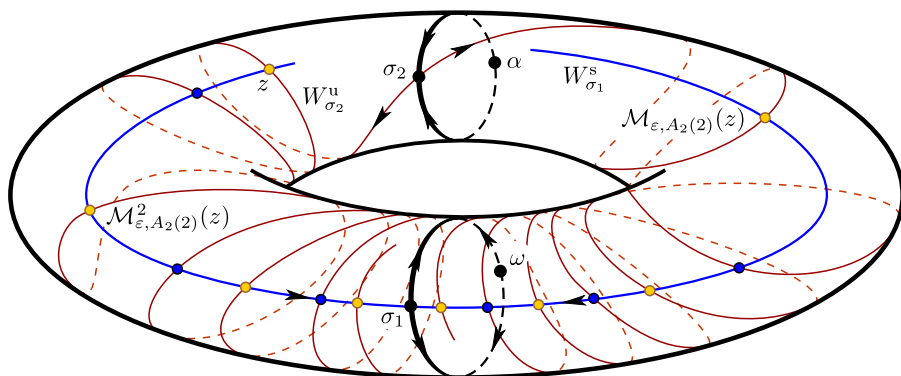


Рис. 12. Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\epsilon, A_2(2)}$ при $\epsilon \in (-1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_1(m)}$ совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма L_ϵ и состоит из двух неподвижных гиперболических узлов, двух гиперболических узлов периода два, двух неподвижных гиперболических седел и двух гиперболических седел периода два. Одно из инвариантных многообразий каждого неподвижного седла участвует в гетероклиническом пересечении с одним из инвариантных многообразий каждого периодического седла и содержит m орбит на каждой компоненте связности. На рис. 13 изображено гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_1(1)}$ при $\epsilon \in (-1, 0)$. Оно состоит из четырех орбит. На рис. 13 каждая гетероклиническая орбита отмечена своим цветом и проиллюстрировано действие диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_1(1)}$ на произвольную гетероклиническую точку z .

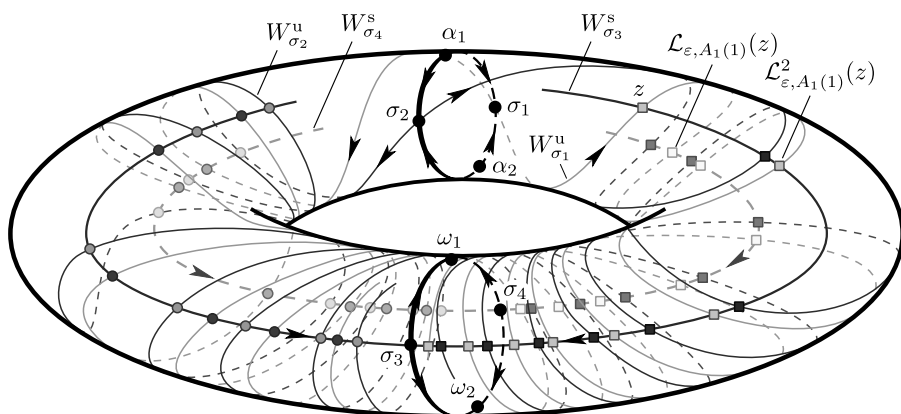


Рис. 13. Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_1(1)}$ при $\epsilon \in (-1, 0)$.

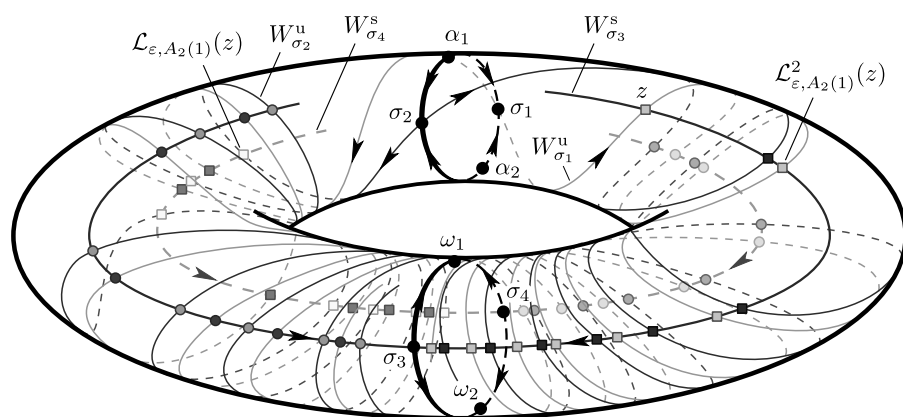


Рис. 14. Гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_2(1)}$ при $\epsilon \in (-1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $m = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$, неблуждающее множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_2(m)}$ совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма L_ϵ и состоит из четырех неподвижных гиперболических узлов и четырех гиперболических седел периода два. Каждая гетероклиническая орбита диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_2(m)}$ содержит точки на инвариантном многообразии каждого из четырех седел. На рис. 14 изображено гетероклиническое множество диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_2(1)}$ при $\epsilon \in (-1, 0)$. Оно состоит из четырех орбит. На рис. 14 каждая гетероклиническая орбита отмечена своим цветом и проиллюстрировано действие диффеоморфизма $\mathcal{L}_{\epsilon, A_2(1)}$ на произвольную гетероклиническую точку z .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992).
- [2] А. И. Морозов, “Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами”, *Журнал СВМО*, **23**:2 (2021), 171–184.
- [3] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. тр.*, Горьк. гос. ун-т, Горький, 1985, 139–152.
- [4] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32.
- [5] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [6] S. Batterson, “The dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms on the torus”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **256** (1979), 395–403.
- [7] С. В. Сидоров, Е. Е. Чилина, “О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора”, *Журнал СВМО*, **23**:3 (2021), 295–307.
- [8] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН СССР*, **90**, 1967, 3–210.
- [9] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, *Developments in Math.*, **46**, Springer, Cham, 2016.

- [10] V. Chigarev, A. Kazakov, A. Pikovsky, “Kantorovich–Rubinstein–Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller”, *Chaos*, **30**:7 (2020), 073114.

В. З. Гринес

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде

Д. И. Минц

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: dmitriimints@gmail.com

Е. Е. Чилина

Национальный исследовательский университет –
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде
E-mail: k.chilina@yandex.ru

Поступило

05.06.2022

После доработки

15.11.2022

Принято к публикации

20.02.2023