

О. В. Починка, Е. А. Таланова, Д. Д. Шубин

Узел как полный инвариант 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками

Известно, что топологическая сопряженность градиентно-подобных 3-диффеоморфизмов с единственной седловой точкой полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, являющихся проекцией одномерной седловой сепаратрисы в бассейн узловой точки, а несущим многообразием для всех таких каскадов является 3-сфера. В настоящей работе аналогичный результат устанавливается для градиентно-подобных 3-диффеоморфизмов в точности с двумя седловыми точками и единственной гетероклинической кривой.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: градиентно-подобный диффеоморфизм, топологическая сопряженность, диффеоморфизм Морса–Смейла.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9814>

§ 1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом связном ориентируемом n -мерном многообразии ($n \geq 1$) M^n , называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если

- 1) его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Если σ_1, σ_2 – различные седловые периодические точки диффеоморфизма Морса–Смейла, для которых $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ называется *гетероклиническим пересечением*. При этом компоненты линейной связности размерности 1 называются *гетероклиническими кривыми*.

В работе [1] получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на произвольных замкнутых 3-многообразиях. Однако, будучи рассчитанным на широкий класс потоков, описание инвариантов занимает основную часть классификации. В некоторых частных случаях инварианты зачастую находятся более естественным образом, без рассмотрения их как части общности. Так, в настоящей работе устанавливается, что для широкого класса 3-диффеоморфизмов, чье неблуждающее множество состоит в точности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00027, <https://rscf.ru/project/22-11-00027/>, кроме доказательства теоремы 1.2, которое выполнено в Международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ при поддержке Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-1101).

из четырех точек, полным инвариантом является класс эквивалентности узла Хопфа на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Напомним, что *узлом* на многообразии M^n называется гладкое вложение $\gamma: M^n \rightarrow M^n$ или образ этого вложения $L = \gamma(\mathbb{S}^1)$. Узлы L, L' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ такой, что $h(L) = L'$. Через $[L]$ будем обозначать класс эквивалентности узла L .

Узел $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ называется *узлом Хопфа*, если гомоморфизм i_{L*} , индуцированный включением $i_L: L \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, является изоморфизмом групп $\pi_1(L) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Любой хопфовский узел гомотопен стандартному хопфовскому узлу $L_0 = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [2], [3]), но не является эквивалентным ему в общем случае. Б. Мазур в [4] построил хопфовский узел L_M , не эквивалентный узлу L_0 (рис. 1).

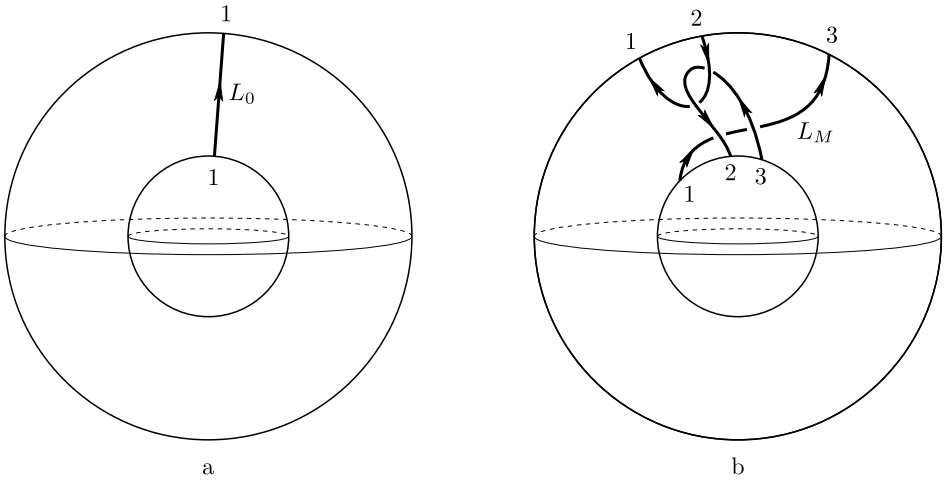


Рис. 1. Неэквивалентные хопфовские узлы L_0 и L_M : а – стандартный хопфовский узел L_0 ; б – узел Мазура L_M .

В работе [3] построены счетные семейства попарно неэквивалентных хопфовских узлов (рис. 2).

Трехмерные диффеоморфизмы Морса–Смейла в точности с четырьмя неблуждающими точками делятся на два класса, в одном из которых диффеоморфизмы имеют в точности одну седловую точку, в другом – две. Для диффеоморфизмов первого класса в работе Хр. Бонатти и В. З. Гринеса [5] установлено, что их топологическая сопряженность полностью определяется эквивалентностью узлов Хопфа, являющихся проекцией одномерной седловой сепаратрисы. В силу результатов работ [6], [5] любой узел Хопфа может быть реализован диффеоморфизмом первого класса на 3-сфере.

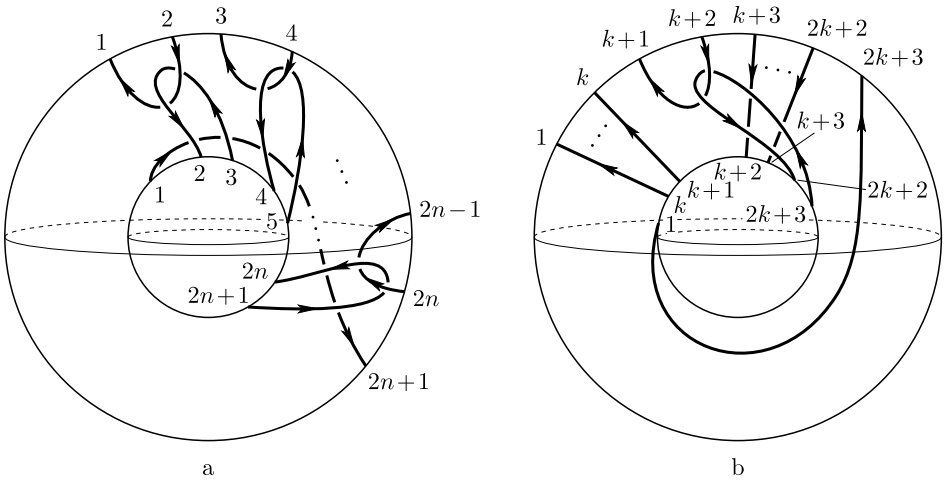


Рис. 2. Счетные семейства попарно неэквивалентных хопфовских узлов: а – обобщенный узел Мазура $L_{M,n}$; б – обобщенный узел Мазура L_M^k .

В настоящей работе рассмотрены диффеоморфизмы второго класса. Именно, рассмотрен класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла f , заданных на замкнутом многообразии M^3 со следующими свойствами:

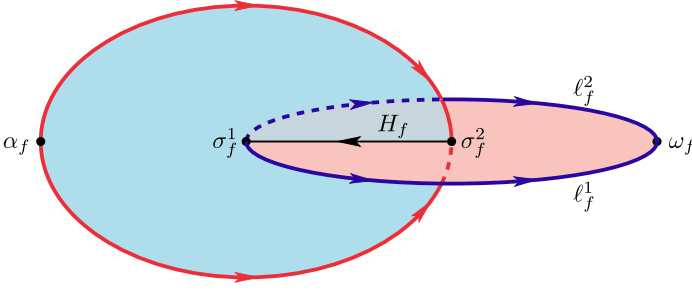
- неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ состоит в точности из четырех неподвижных точек $\omega_f, \sigma_f^1, \sigma_f^2, \alpha_f$ с размерностями неустойчивых многообразий 0, 1, 2, 3 соответственно;
- множество $H_f = W_{\sigma_f^1}^s \cap W_{\sigma_f^2}^u$ непусто и линейно связно (следовательно, состоит из единственной некомпактной кривой)¹.

Исследование таких систем представляет интерес в первую очередь с фундаментальной точки зрения: изучается взаимосвязь топологии и динамики. Однако системы с гетероклиническими кривыми на \mathbb{R}^3 и \mathbb{S}^3 возникают во многих прикладных задачах, например, в модели Лотки–Вольтерра, которую, в частности, в [8] предлагалось использовать для моделирования когнитивных и эмоциональных функций мозга.

Пусть $f \in G$. Обозначим через ℓ_f^1, ℓ_f^2 неустойчивые сепаратрисы точки σ_f^1 . Тогда (см., например, [9]) замыкание $\text{cl}(\ell_f^i)$, $i = 1, 2$, одномерной неустойчивой сепаратрисы точки σ_f^1 гомеоморфно простой компактной дуге и состоит из этой сепаратрисы и двух точек: седла σ_f^1 и стока ω_f (рис. 3).

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и $a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – диффеоморфизм, определенный формулой $a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/2$. Определим отображение

¹В работе [7] доказано, что для диффеоморфизмов второго класса множество H_f содержит хотя бы одну некомпактную гетероклиническую кривую, но в общем случае оно может содержать более одной кривой, в том числе может содержать и бесконечное множество компактных гетероклинических кривых.

Рис. 3. Динамика диффеоморфизма $f \in G$.

$p: \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \log_2(\|\mathbf{x}\|) \pmod{1} \right).$$

Положим $V_{\omega_f} = W_{\omega_f}^s \setminus \omega_f$. В силу гиперболичности стока ω_f существует диффеоморфизм $\psi_f: V_{\omega_f} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O$, сопрягающий диффеоморфизмы f и a . Положим $p_{\omega_f} = p\psi_f: V_{\omega_f} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и $L_f^i = p_{\omega_f}(\ell_f^i)$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ множества L_f^1, L_f^2 являются эквивалентными узлами Хопфа в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Обозначим через $\mathcal{L}_f = [L_f^1] = [L_f^2]$ класс эквивалентности этих узлов.

ТЕОРЕМА 1.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$.*

Таким образом, класс эквивалентности хопфовского узла является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов класса Пикстона. Более того, имеет место следующая теорема реализации.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого класса эквивалентности \mathcal{L} хопфовских узлов существует диффеоморфизм $f_{\mathcal{L}}: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \in G$ такой, что $\mathcal{L}_{f_{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$.*

Непосредственно из теорем 1.1, 1.2 следует, что объемлющим многообразием для диффеоморфизмов класса G является 3-сфера \mathbb{S}^3 (независимое доказательство этого факта можно найти в работе [10]).

§ 2. Согласованная система окрестностей

Для $t \in (0, 1]$ положим $\mathcal{N}_1^t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1^2(x_2^2 + x_3^2) < t\}$, $\mathcal{N}_3^t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 < t\}$ и для $i \in \{1, 3\}$ положим $\mathcal{N}_i^1 = \mathcal{N}_i$.

Определим в окрестности \mathcal{N}_1 пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}_1^u, \mathcal{F}_1^s$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^u &= \bigcup_{(c_2, c_3) \in O_{x_2 x_3}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_1 : (x_2, x_3) = (c_2, c_3)\}, \\ \mathcal{F}_1^s &= \bigcup_{c_1 \in O_{x_1}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_1 : x_1 = c_1\}.\end{aligned}$$

Определим в окрестности \mathcal{N}_3 пару трансверсальных слоений $\mathcal{F}_2^u, \mathcal{F}_2^s$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^u &= \bigcup_{c_3 \in O_{x_3}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_3 : x_3 = c_3\}, \\ \mathcal{F}_2^s &= \bigcup_{(c_1, c_2) \in O_{x_1 x_2}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}_3 : (x_1, x_2) = (c_1, c_2)\}.\end{aligned}$$

Определим диффеоморфизмы $a_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулами

$$a_1(\mathbf{x}) = \left(2x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2} \right), \quad a_3 = a_1^{-1}.$$

Заметим, что для $i \in \{1, 3\}$ множество \mathcal{N}_i^t является инвариантным относительно диффеоморфизма a_i , который переводит слои слоения \mathcal{F}_i^u (\mathcal{F}_i^s) в слои этого же слоения.

В силу результатов работы [1] седловая точка σ_f^i диффеоморфизма $f \in G$ обладает *линеаризующей окрестностью* N_f^i , оснащенной гомеоморфизмом $\mu_i: N_i \rightarrow \mathcal{N}_i$, сопрягающим диффеоморфизм $f|_{N_f^i}$ с диффеоморфизмом $a_i|_{\mathcal{N}_i}$ и являющимся диффеоморфизмом на $N_i \setminus (W_{\sigma_i \cup W_{\sigma_i}^s})$. Слоения $\mathcal{F}_i^u, \mathcal{F}_i^s$ индуцируют посредством гомеоморфизма μ_i^{-1} , f -инвариантные слоения F_i^u, F_i^s на линеаризующей окрестности N_i . Для любой точки $x \in N_f^i$ будем обозначать через $F_{i,x}^u$ ($F_{i,x}^s$) единственный слой слоения F_i^u (F_i^s), проходящий через точку x .

Для диффеоморфизма $f \in G$ множество H_f состоит из единственной гетероклинической кривой. Поэтому существует ее f -инвариантная окрестность $N_{H_f} \subset M^3$, оснащенная f -инвариантным $C^{1,1}$ -слоением F , состоящим из двумерных дисков, трансверсальных H_f . Для любой точки $x \in N_{H_f}$ будем обозначать через F_x единственный слой слоения F , проходящий через точку x .

Набор N_f линеаризующих окрестностей N_f^1, N_f^2 седловых точек диффеоморфизма f назовем *согласованной системой окрестностей*, а слоения F_i^s, F_i^u , $i = 1, 2$, *согласованными*, если для любой точки $x \in (N_f^1 \cap N_f^2 \cap N_{H_f})$ и слоя F_x слоения F , проходящего через точку x , выполняются условия (рис. 4)

$$\begin{aligned}F_{1,x}^s \cap F_x &= F_{2,x}^s \cap (N_f^1 \cap N_{H_f}), \\ F_{2,x}^u \cap F_x &= F_{1,x}^u \cap (N_f^2 \cap N_{H_f}).\end{aligned}$$

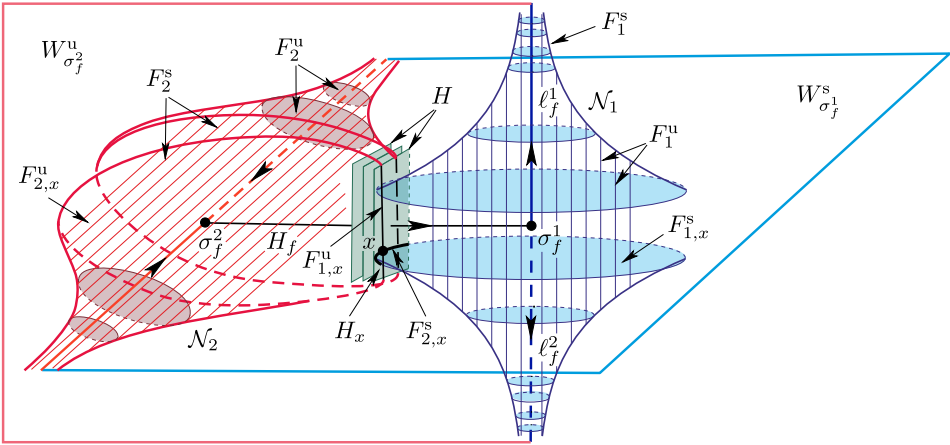


Рис. 4. Согласованная система окрестностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см. [1; теорема 1]). Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует согласованная система окрестностей.

§ 3. Эквивалентность узлов L_f^1, L_f^2

В этом параграфе мы докажем лемму 1.1, именно, докажем, что для любого диффеоморфизма $f \in G$ множества L_f^1, L_f^2 являются эквивалентными узлами Хопфа.

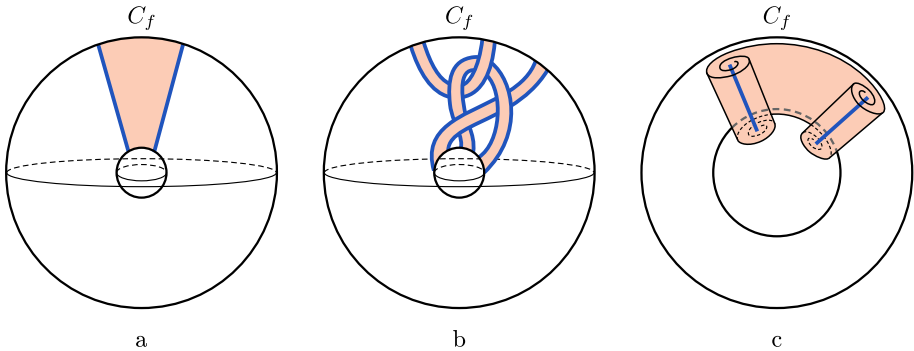


Рис. 5. Возможные варианты проекции C_f двумерного неустойчивого седлового многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. В силу [3; лемма 2] узлы Хопфа эквивалентны тогда и только тогда, когда они изотопны. Поэтому для доказательства леммы достаточно построить изотопию между узлами L_f^1, L_f^2 . Положим (рис. 5)

$$C_f = p_{\omega_f}(W_{\sigma_f^2}^u).$$

Поскольку диффеоморфизм $f|_{W_{\sigma_f^u}^u}$ топологически сопряжен с линейным растяжением, то пространство орбит $(W_{\sigma_f^u}^u \setminus \sigma_f^2)/f$ гомеоморфно двумерному тору. Поскольку $W_{\sigma_f^u}^u \cap V_{\omega_f} = W_{\sigma_f^u}^u \setminus (H_f \cup \sigma_f^2)$ и пространство орбит H_f/f гомеоморфно окружности, то множество C_f гомеоморфно двумерному кольцу. При этом гомоморфизм $i_{C_f^*}$, индуцированный включением $i_{C_f}: C_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, является изоморфизмом групп $\pi_1(C_f) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Положим

$$U_f^1 = p_{\omega_f}(N_f^1).$$

Поскольку $N_f^1 \cap V_{\omega_f} = N_f^1 \setminus W_{\sigma_f^s}^s$, то множество U_f^1 является дизъюнктным объединением двух заполненных торов $U_f^1 = U_f^{1,1} \sqcup U_f^{1,2}$, являющихся трубчатыми окрестностями узлов L_f^1, L_f^2 .

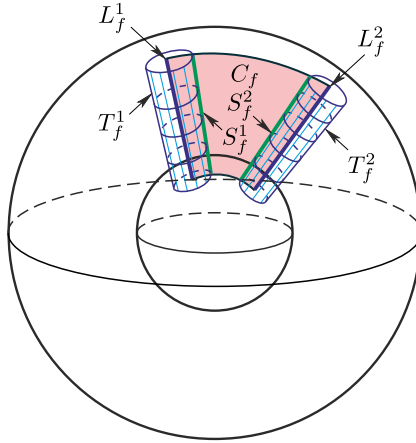


Рис. 6. Проекция согласованных окрестности N_f^1 .

Положим (рис. 6)

$$T_f^i = \partial U_f^{1,i}, \quad S_f^i = T_f^i \cap C_f.$$

Поскольку множество $W_{\sigma_f^s}^s \cap W_{\sigma_f^u}^u$ состоит из единственной некомпактной f -инвариантной кривой, то множество $\partial N_f^1 \cap W_{\sigma_f^u}^u$ также состоит из двух некомпактных f -инвариантных кривых, проекцией которых в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ являются кривые $S_f^1 \sqcup S_f^2$ (рис. 6). Отсюда следует, что S_f^1, S_f^2 – изотопные хопфовские узлы в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Таким образом, узлы S_f^i, L_f^i являются образующими заполненного тора $U_f^{1,i}$. Тогда они ограничивают в нем двумерное кольцо и, следовательно, являются изотопными. Лемма доказана.

§ 4. Класс эквивалентности узла Хопфа как полный инвариант топологической сопряженности в классе G

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1: диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. *Необходимость.* Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены посредством некоторого сопрягающего гомеоморфизма $h: M^3 \rightarrow M^3$. Поскольку h переводит инвариантные многообразия неподвижных точек диффеоморфизма f в инвариантные многообразия диффеоморфизма f' с сохранением устойчивости, то $h(W_{\omega_f}^s) = W_{\omega_{f'}}^s$, $h(\ell_f^i) = \ell_{f'}^i$. Так как $hf = f'h$, то гомеоморфизм h определяет гомеоморфизм $\widehat{h}: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ формулой

$$\widehat{h} = p_{\omega_f} h p_{\omega_{f'}}^{-1}.$$

Откуда следует, что $\widehat{h}(L_f^i) = L_{f'}^i$, и, следовательно, хопфовские узлы $L_f^i, L_{f'}^i$ эквивалентны.

Достаточность. Пусть $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$. Тогда существует гомеоморфизм $\widehat{h}_0: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\widehat{h}_0(L_f^1) = L_{f'}^1$. Модифицируя гомеоморфизм \widehat{h}_0 , по шагам построим гомеоморфизм $h: M^3 \rightarrow M^3$, сопрягающий диффеоморфизмы f и f' . Для этого мы будем использовать обозначения леммы 1.1 и § 2, которые будем снабжать штрихом для диффеоморфизма f' .

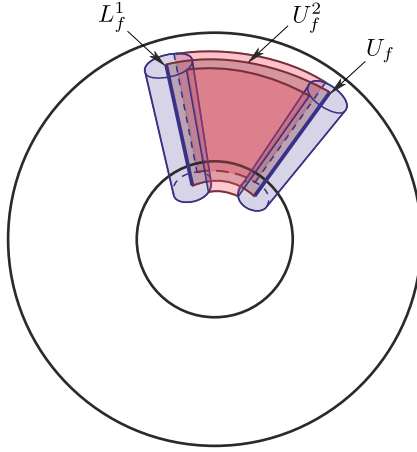


Рис. 7. Проекция согласованных окрестностей седловых точек.

Положим (рис. 7)

$$U_f^2 = p_{\omega_f}(N_f^2), \quad U_f = U_f^1 \cup U_f^2.$$

Шаг 1. Построим гомеоморфизм $\widehat{h}_1: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\widehat{h}(U_f) = U_{f'}$. Поскольку $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{f'}$, то в силу леммы 1.1 U_f является трубчатой окрестностью узла L_f^1 . Пусть $\widetilde{U}_f \supset U_f$ – также трубчатая окрестность узла L_f^1 . Положим $U = \widehat{h}_0^{-1}(U_{f'})$, $\widetilde{U} = \widehat{h}_0^{-1}(\widetilde{U}_{f'})$ и выберем трубчатую окрестность V узла L_f^1 такую, что $V \subset \text{int}(U_f \cap U)$ (рис. 8).

Поскольку множества $\widetilde{U}_f \setminus \text{int} U_f$ и $U_f \setminus \text{int} V$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, то существует гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, тождественный вне \widetilde{U}_f и такой, что $\widehat{\psi}_f(U_f) = V$. Аналогичным образом строится гомеоморфизм $\widehat{\psi}: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, тождественный вне \widetilde{U} и такой, что $\widehat{\psi}(U) = V$ (рис. 8).

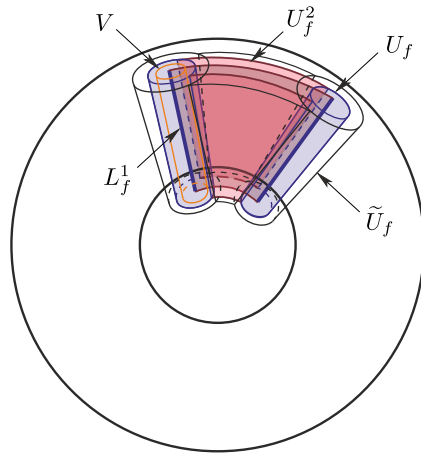


Рис. 8. Трубочатые окрестности узла L_f^1 .

Тогда искомый гомеоморфизм \widehat{h}_1 имеет вид

$$\widehat{h}_1 = \widehat{h}_0 \widehat{\psi}^{-1} \widehat{\psi}_f.$$

Шаг 2. Построим гомеоморфизм $\widehat{h}_2: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, совпадающий с \widehat{h}_1 вне \widehat{U}_f и такой, что $\widehat{h}(C_f) = C_{f'}$.

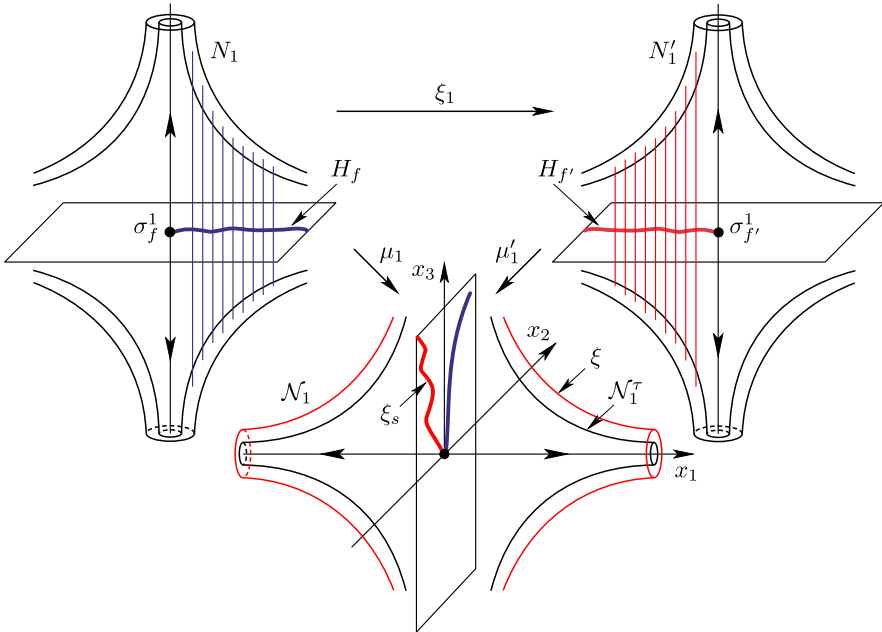


Рис. 9. Построение гомеоморфизма ξ .

Положим $H = \mu_1(H_f)$, $H' = \mu'_1(H_{f'})$. Тогда H, H' – a_1 -инвариантные кривые на плоскости Ox_2x_3 . Тогда существует гомеоморфизм $\xi_s: Ox_2x_3 \rightarrow Ox_2x_3$, коммутирующий с $a_1|_{Ox_2x_3}$ и такой, что $\xi_s(H) = H'$ (см., например, [9]). Определим гомеоморфизм $\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ формулой (рис. 9)

$$\xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, \xi_s(x_2, x_3)).$$

Выберем $\tau \in (0, 1)$ так, что $\xi(\mathcal{N}_1^\tau) \subset \text{int } \mathcal{N}_1$. Положим $N_1^\tau = \mu_1(\mathcal{N}_1^\tau)$ и $\xi_1 = \mu_1'^{-1}\xi\mu_1|_{N_1^\tau}$. Из определения согласованной системы окрестностей следует, что $\xi_1(N_1^\tau \cap W_{\sigma_f^u}^u) \subset W_{\sigma_{f'}^u}^u$. Положим $N_3^\tau = \mu_3(\mathcal{N}_3^\tau)$, $U_1^\tau = p_{\omega_f}(N_1^\tau)$, $U_3^\tau = p_{\omega_f}(N_3^\tau)$, $U^\tau = U_1^\tau \cup U_3^\tau$, $U_3'^\tau = p_{\omega_{f'}}(N_3^\tau)$ и $\widehat{\xi}_1 = p_{\omega_{f'}}\xi_1 p_{\omega_f}^{-1}|_{U_1^\tau}$. Положим $U_1'^\tau = \widehat{\xi}_1(U_1^\tau)$, $U'^\tau = U_1'^\tau \cup U_3'^\tau$, $K = C_f \setminus \text{int } U^\tau$, $K' = C_{f'} \setminus \text{int } U'^\tau$, $U_K = U^\tau \setminus U_1^\tau$, $U_{K'} = U'^\tau \setminus U_1'^\tau$ (рис. 10).

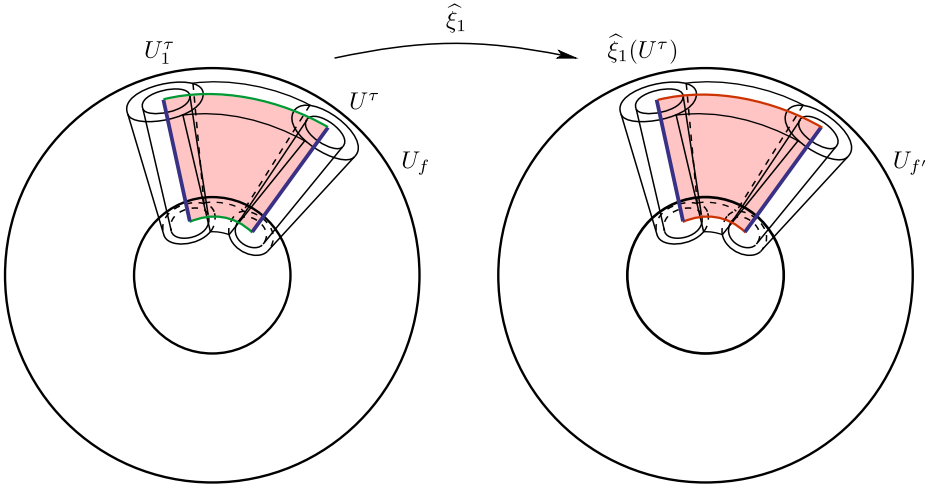


Рис. 10. Построение гомеоморфизма $\widehat{\xi}_1$.

Поскольку множества K, K' гомеоморфны двумерным кольцам и множества $U_K, U_{K'}$ являются их трубчатыми окрестностями, то гомеоморфизм $\widehat{\xi}_1$ продолжается до гомеоморфизма $\widehat{\xi}: U^\tau \rightarrow U'^\tau$ такого, что $\widehat{\xi}(C_f) = C_{f'}$. Тогда гомеоморфизм $\widehat{\psi}_1 = \widehat{h}_1^{-1}\widehat{\xi}$ обладает свойством $\widehat{\psi}_1(U^\tau) \subset \text{int } U_f$ и гомеоморфизм $\widehat{\xi}_1|_{\partial U^\tau}$ гомотопен тождественному отображению. Поскольку множества $U_f \setminus \text{int } U^\tau$ и $U_{f'} \setminus \text{int } \widehat{\psi}_1(U^\tau)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, то гомеоморфизм $\widehat{\psi}_1$ продолжается до гомеоморфизма $\widehat{\psi}_1: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, тождественного вне U_f . Тогда искомым гомеоморфизм \widehat{h}_2 имеет вид

$$\widehat{h}_2 = \widehat{h}_1 \widehat{\psi}_1.$$

Шаг 3. Построим искомый гомеоморфизм h . Из построения гомеоморфизма \widehat{h}_2 следует, что существует его поднятие $h_2: V_{\omega_f} \rightarrow V_{\omega_{f'}}$, сопрягающее диффеоморфизмы $f|_{V_{\omega_f}}, f'|_{V_{\omega_{f'}}$ и продолжающееся гомеоморфизмом ξ_1 на $W_{\sigma_1^s}$.

Таким образом, мы построили сопрягающий гомеоморфизм всюду, кроме замыканий одномерных многообразий седловых точек. В силу [1; теорема 1] такой гомеоморфизм продолжается до искомого гомеоморфизма h .

Теорема 1.1 доказана.

§ 5. Реализация диффеоморфизмов класса G

В динамике дикая дуга Артина–Фокса впервые встречается в статье Д. Пикстона [6], где он построил диффеоморфизм Морса–Смейла на 3-сфере с единственной седловой точкой, чьи инвариантные многообразия образуют дугу Артина–Фокса. В работе [5] приведена конструкция реализации произвольного узла хопфа в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ диффеоморфизмом Морса–Смейла с единственной седловой точкой на 3-сфере (см. также [9], [11]). В настоящем параграфе аналогичная реализация приводится для диффеоморфизмов класса G .

Пусть $L \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – хопфовский узел и U_L – его трубчатая окрестность. Тогда множество $\bar{L} = p^{-1}(L)$ является a -инвариантной дугой в \mathbb{R}^3 и $U_{\bar{L}} = p^{-1}(U_L)$ – ее a -инвариантная окрестность, диффеоморфная $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$ (рис. 11).

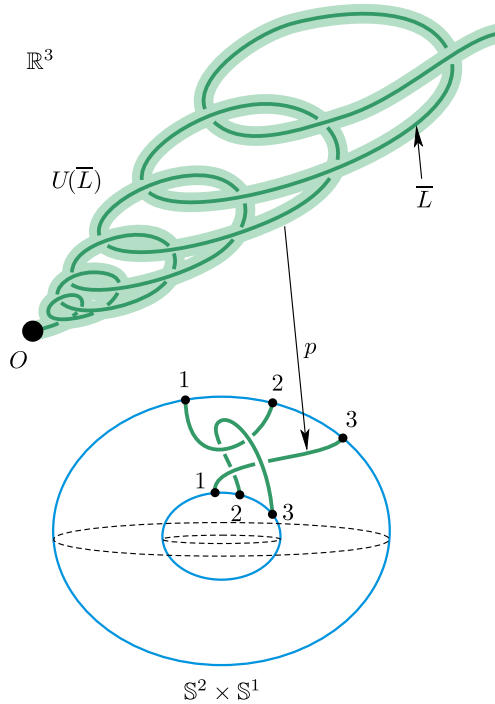


Рис. 11. Поднятие узла Хопфа.

Определим на цилиндре $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$ поток $g^t : C \rightarrow C$ формулой

$$g^t(x) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\zeta: U_L \rightarrow C$, который сопрягает $a|_{U_L}$ и $g = g^1|_C$. Определим поток ϕ^t на C формулами

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(\|\mathbf{x}\| - 4)^2, & \|\mathbf{x}\| \leq 4, \\ 1, & \|\mathbf{x}\| > 4, \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{x_2}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(\|\mathbf{x}\| - 3)\right) - 1 \right), & 2 < \|\mathbf{x}\| \leq 4, \\ -x_2, & \|\mathbf{x}\| \leq 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 4, \end{cases}$$

$$\dot{x}_3 = \begin{cases} -\frac{x_3}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(\|\mathbf{x}\| - 3)\right) - 1 \right), & 2 < \|\mathbf{x}\| \leq 4, \\ x_3, & \|\mathbf{x}\| \leq 2, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > 4. \end{cases}$$

По построению диффеоморфизм $\phi = \phi^1$ имеет два неподвижных гиперболических седла: седло $P_1(-1, 0, 0)$ с индексом Морса 1 и седло $P_2(1, 0, 0)$ с индексом Морса 2 (рис. 12). Некомпактная гетероклиническая кривая $W_{P_1}^s \cap W_{P_2}^u$ совпадает с открытым интервалом $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: |x_1| < 1, x_2 = x_3 = 0\}$. Заметим, что ϕ совпадает с диффеоморфизмом $g = g^1$ вне шара $\{\mathbf{x} \in C: \|\mathbf{x}\| \leq 4\}$.

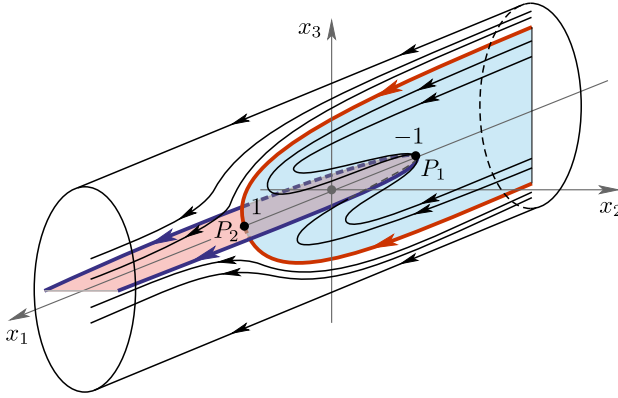


Рис. 12. Траектории потока ϕ^t .

Определим диффеоморфизм $\bar{f}_L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким образом, что \bar{f}_L совпадает с a вне U_L и совпадает с $\zeta^{-1}\phi\zeta$ на U_L . Тогда \bar{f}_L имеет в U_L две неподвижные гиперболические точки: седло $\zeta^{-1}(P_1)$ и седло $\zeta^{-1}(P_2)$ (рис. 13).

Обозначим через $N(0, 0, 0, 1)$ северный полюс сферы \mathbb{S}^3 и обозначим через $\vartheta: \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{S}^3 \setminus \{N\})$ стандартную стереографическую проекцию. По построению диффеоморфизм \bar{f}_L совпадает с диффеоморфизмом a в некоторой окрестности точки O и вне некоторой окрестности этой точки, следовательно, он индуцирует на \mathbb{S}^3 диффеоморфизм Морса–Смейла

$$f_L(s) = \begin{cases} \vartheta(\bar{f}_L(\vartheta^{-1}(s))), & s \neq N; \\ N, & s = N. \end{cases}$$

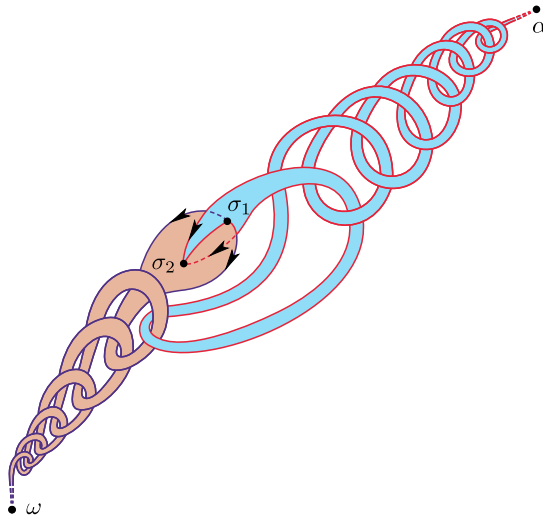


Рис. 13. Фазовый портрет диффеоморфизма \bar{f}_L .

Непосредственно из построения следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма f_L состоит из четырех неподвижных гиперболических точек: стока ω , двух седел $\sigma^1 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_1))$, $\sigma^2 = \vartheta(\zeta^{-1}(P_2))$ и одного источника α . Построенный диффеоморфизм принадлежит классу G и $\mathcal{L}_{f_L} = [L]$.

Список литературы

- [1] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Math. J.*, **168**:13 (2019), 2507–2558.
- [2] P. Kirk, C. Livingston, “Knot invariants in 3-manifolds and essential tori”, *Pacific J. Math.*, **197**:1 (2001), 73–96.
- [3] P. M. Akhmet’ev, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms”, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, **20**:3 (2021), 76, 15 pp.
- [4] B. Mazur, “A note on some contractible 4-manifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **73**:1 (1961), 221–228.
- [5] C. Bonatti, V. Z. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [6] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [7] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds”, *Math. Notes*, **74**:3 (2003), 352–366.
- [8] V. S. Afraimovich, M. I. Rabinovich, P. Varona, “Heteroclinic contours in neural ensembles and the winnerless competition principle”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **14**:4 (2004), 1195–1208.
- [9] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.

- [10] В. Шмуклер, О. Починка, “Бифуркации, меняющие тип гетероклинических кривых 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Таврический вестник информатики и математики*, **50**:1 (2021), 101–114.
- [11] T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, “The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems”, *Dyn. Syst.*, **33**:4 (2018), 660–666.

Ольга Витальевна Починка
(**Olga V. Pochinka**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Поступила в редакцию
22.07.2022 и 26.04.2023

Елена Анатольевна Таланова
(**Elena A. Talanova**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород;
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: eltalanova72@gmail.com

Данила Денисович Шубин
(**Danila D. Shubin**)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Нижний Новгород
E-mail: schub.danil@yandex.ru