**Глава 2**

**Принцип минимакса Понтрягина**

**в задачах дифференциальных игр**

**2.1. Постановка задачи**

Во многих практических задачах на управляющие воздействия, как правило, накладываются некоторые существенные ограничения. Неопределенность (неполная информация о состоянии объекта, его параметрах и возмущениях) может рассматриваться как некоторое противодействие управляющей переменной, что, естественно, приводит к усложнению решения задачи и приводит к большому разнообразию в поведении управляемых систем. Из литературы последних лет можно увидеть, что для решения подобных задач управления достаточно успешно используется метод дифференциальных игр с рассмотрением стратегий с обратной связью.

В настоящем разделе книги принцип максимума Понтрягина, используя материал Главы 1 (§ 1.3), расширим на решение задач управления неопределенными системами с использованием методов программного управления и дифференциальных игр. Известно, что принцип Понтрягина представляет собой необходимые условия локальной оптимальности. Этот принцип требует относительно слабых предположений о дифференцируемости и очень хорошо подходит для решения задач с ограничениями, а также позволяет достаточно легко учитывать различные множества конечных состояний. В последние годы принцип максимума получил широкое распространение в форме принципа минимума. Преимущество такого подхода состоит в более тесной связи с вариационным исчислением, принципом Гамильтона в механике и динамическим программированием Беллмана.

Пусть детерминированная нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

 (2.1)

Здесь  состояние системы; , − множество возможных начальных условий системы; ,  − управление; ,  − ограниченное возмущение. Матрицы − непрерывные функции.

**Предположение 2.1.1.** Управление  и возмущение  будем называть управляющими воздействиями (управлениями), которые удовлетворяют следующим ограничениям:

. (2.2)

Каждым допустимым управляющим воздействиям соответствует решение уравнения (2.1) (*допустимая траектория*).

Задачу синтеза управления системой (2.1)-(2.2) будем рассматривать как задачу условной оптимизации, т.е. конструирования управлений, доставляющих минимакс функционалу

. (2.3)

Предполагается, что существуют такие управляющие воздействия  и , отвечающие ограничениям (2.2), что каждое состояние  в каждый момент  на интервале существования решения системы (2.1)  полностью управляемо [4, 25, 71], т.е. в рассматриваемой задаче для всех  система (2.1) во всем диапазоне переходного процесса управляема. Назовем  ­ синтезирующими функциями задачи (2.1)-(2.3).

Для соотношений мощностей множеств  и , при котором выполняются условия существования дифференциальной игры с нулевой суммой, рассмотрим скалярную функцию, образованную из лагранжиана  функционала (2.3) и содержащую только управляющие воздействия , т.е. . По условиям существования решения задачи об оптимальном управлении должно выполняться условие: , которое предопределяет соответствие мощностей множеств  и .

Элемент , для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, является *допустимым управляемым процессом*. Допустимыми элементами  в поставленной задаче будем считать функции класса, .

Рассматривая возмущение  как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры [4, 16, 18, 69] двух игроков  и . Задача дифференциальной игры заключается в построении оптимальной стратегии с обратной связью для игроков  и , т.е. в нахождении управления  минимизирующего функционал вида (2.3) на объекте (2.1) при соответствующем противодействии управления .

**Определение 2.1.1**. *Допустимый управляющий процесс доставляет сильный локальный минимакс  в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой (2.1)-(2.3), если существует такое , что  для любого допустимого управляемого процесса , для которого* .

**Предположение 2.1.2.** Об условиях существования оптимального решения задачи (2.1)-(2.3). Для того, чтобы записать условия, которым должны удовлетворять оптимальные управления  и  для игроков  и , предположим, что такие управления существуют и  - соответствующая этим управлениям траектория (здесь значком  отмечаются оптимальные величины). Другими словами, , и , где , удовлетворяют следующему условию:

1. , ;
2. если  и  любые управления, удовлетворяющие ограничениям (2.2), такие, что соответствующая им траектория  удовлетворяет условию:

,

то .

**2.2. Задача со свободным правым концом и заданным временем**

**переходного процесса**

Для синтеза оптимальных управлений в смысле поставленной в этом разделе книги задачи в статье будет применен метод Л.С. Понтрягина, расширенный на задачи дифференциальных игр с нулевой суммой.

Запишем гамильтониан системы:

. (2.4)

Здесь  ­ вектор сопряженных переменных (вектор множителей Лагранжа).

**Предположения 2.2.1.** Предполагаем, что

**(П1**) Функции , ,  являются непрерывными и удовлетворяют ограничениям

, ,  (2.5)

для всех  (здесь ) – положительные числа.

**(П2)** Функции  и удовлетворяют условию Липшица по переменной *х*

 (2.6)

для всех , .

**(П3**) Для любых  и  имеет место равенство

 (2.7)

Здесь.

Предположение П3 есть условие существования дифференциальной игры с нулевой суммой (условие седловой точки или условие Айзекса). Нетрудно видеть, что  гамильтониан непрерывен по переменным 

Покажем, что

. (2.8)

Пусть

,

.

Напомним, что  и  ­ множества минимизирующих и максимизирующих элементов, т.е.

,

,

где  и  ­ произвольные непрерывные функции.

Справедливы соотношения





Следовательно



Последнее неравенство следует из оценки (2.5). Точно так получается оценка

.

Таким образом, получено, что гамильтониан вида (2.4), удовлетворяет условию (2.8).

Теперь покажем, что гамильтониан удовлетворяет условию Липшица по переменной . Выберем

,

.

Справедливо



Последняя оценка следует из условия (2.6).

Таким образом, доказано, что гамильтониан вида (2.4) удовлетворяет условиям единственности минимаксного решения задачи (2.1)-(2.3).

**Теорема 2.2.1**. *Пусть  и  оптимальные управления в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой (2.1)-(2.3), а  ­ соответствующая этим управлениям оптимальная траектория. Тогда управления  и  удовлетворяют условию минимакса*

*.* (2.9)

Здесь вектор  сопряженных переменных является решением задачи

. (2.10)

Относительно необходимых условий оптимальности имеет место следующая теорема:

**Теорема 2.2.2**. *Пусть  и  оптимальные управления в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой (2.1)-(2.3), а  ­ соответствующая этим управлениям оптимальная траектория. Тогда существует такой вектор , удовлетворяющий уравнениям*

,

*что справедливо условие минимакса*

*,*

*где  определяется формулой*

.

Необходимые условия оптимальности дифференциальной игры с нулевой суммой записываются в виде двухточечной краевой задачи:

, (2.11)

 (2.12)

 (2.13)

Следует отметить, что управления , синтезируемые с использованием необходимых условий оптимальности (2.11)-(2.13), относятся к классу программных управлений, т.е. . В силу этого, следует доопределить свойства ограничений (2.2):

, .

Учитывая, что дифференциальная игра с нулевой суммой возможна, когда управляющие воздействия, отвечающее ограничениям (2.2), одновременно принадлежат непустому множеству, образованному пересечением множеств  и . Пусть , где  ­ выпуклое и компактное множество (в силу сделанных предположений о множествах  и ), таким образом .

**Теорема 2.2.3.** *Если условия, сформулированные в предположениях (2.5)-(2.7) из раздела § 2.2 выполняются, то в задаче дифференциальной игры c нулевой суммой (2.1)-(2.3) существует единственное минимаксное решение*

*, где* .

Определение минимаксного решения может быть определено как функция, которая одновременно является верхним и нижним значением гамильтониана (2.4).

**Определение 2.2.1.** *Верхним минимаксным значением решения задачи (2.5-2.7) называется соотношение значений гамильтониана (2.4),*

*, принимаемых при управлениях .*

В этом случае  является надграфиком гамильтониана .

**Определение 2.2.2.** *Нижним минимаксным значением решения задачи (2.5-2.7) называется соотношение значений гамильтониана (2.4)*

*, принимаемых при управлениях .*

В этом случае  является надграфиком гамильтониана .

Отметим, что в силу сделанных определений

*.*

**Определение 2.2.3** *Минимаксным значением решения задачи (2.5-2.7) называется соотношение верхнего и нижнего значений гамильтониана (2.4)*

**

*или*

*.*

Таким образом, значение гамильтониана , соответствующее минимаксному решению задачи, является притягивающим.

**Теорема 2.2.4**. *Пусть выполняются условия Теоремы 2.2.2, пусть управляемый допустимый процесс*  есть решение задачи (2.1)-(2.3). *Тогда производная функции* , где

*,*

*существует и непрерывна во всех точках непрерывности оптимальных управлений  и .*

***Доказательство теоремы 2.2.4***. Полная производная по *t* функции Понтрягина имеет вид

 (2.14)

Второе и третье слагаемые образуют каноническую систему, связанную с основной задачей, это выражение можно переписать:



Внутри множеств  и  необходимое условие минимакса ** состоит в том, чтобы . Отсюда следует равенство

. (2.15)

Если минимакс ** (inf/sup функционала *J*) достигается только на замыкании области допустимых управлений, то равенства  не будут выполняться. В этих случаях, как правило,  и является постоянным, следовательно,  и опять . Если одно из двух этих условий не удовлетворяется, то можно показать, что векторы и , так же как и  и  взаимно ортогональны и, следовательно, ,

т.е. при оптимальном допустимом процессе  выполняется условие (2.15). ■

Для частного случая, когда объект и функционал качества в явном виде не зависят в явном виде от времени *t*, функция Понтрягина не зависит от времени и его полная производная по *t* имеет вид



Учитывая тот факт, что в рассматриваемом случае  и второе и третье слагаемых образуют каноническую систему, связанную с основной задачей, это выражение можно переписать:



Внутри множеств  и  необходимое условие минимакса *Н* состоит в том, чтобы . Отсюда следует равенство . Если минимакс  (inf/sup функционала *J*) достигается только на замыкании области допустимых управлений, то равенства  не будут выполняться. В этих случаях, как правило,  и является постоянным, следовательно,  и опять . Если одно из двух этих условий не удовлетворяется, то можно показать, что векторы  и , так же как и  и  взаимно ортогональны и, следовательно,

,

т.е. при оптимальном допустимом процессе :

. (2.16)

Построение оптимальных управлений в задаче (2.1)-(2.3) содержит следующие шаги:

1. Определяются оптимальные управления **,

** и ** из решения уравнения (2.8).

1. Подставляются найденные управления **, ** в равенства (2.1), (2.9) и решается краевая задача относительно ** и **.
2. Подставляют найденные значения **и ** в выражения для **, **, которые являются оптимальными, если решение исходной задачи дифференциальной игры с нулевой суммой (2.1)-(2.3) существует, а решение краевой задачи в п.2 единственно.

Следует отметить, что игра с нулевой суммой, при которой выполняется условие существования седловой точки (2.7)

** (2.17)

что соответствует соотношению значений функционала (2.3) при дифференциальной игре

,

может не существовать, если не предполагается, что функция  разделима. В таком случае можно записать условие

.

Однако разделимость гамильтониана не означает разделимость функционала. Таким образом, это означает, что стратегии, полученные из решения двухточечной краевой задачи (2.10)-(2.11), могут не удовлетворять условию игры с нулевой суммой (2.17), т.е. существованию седловой точки.

В рассматриваемой задаче со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса уравнения Эйлера-Лагранжа приводят к такой же структуре двухточечной краевой задачи (2.10)-(2.11), что и в задаче при отсутствии ограничений на управляющие воздействия. Однако, если в задаче Лагранжа управление находится при помощи условия стационарности гамильтониана 



то в задаче Понтрягина управление отыскивается с помощью условия (2.12).

Естественно, что в случае, когда совпадают со всем пространством, а функция Понтрягина имеет один экстремум, который при этом является минимаксом, оба условия дают одни и те же функции .

**2.3. Достаточные условия локального минимума в задаче дифференциальной игры при заданном времени переходного процесса**

На основе ряда предположений относительно неэффективности наложенных ограничений на управляющие воздействия и поведения функционала качества в задаче, рассмотренной в § 2.2, найдем некоторые достаточные условия оптимальности, которые дополняют необходимые условия, полученные в разделах второй главы 1 и 2.

Результатом исследований данного раздела главы 2 будут:

- условие выпуклости (усиленное условие Лежандра – Клебша);

- условие нормальности;

- условие отсутствия сопряженных точек на траектории (условие Якоби).

Эти условия, совместно с необходимыми условиями, полученными в разделах 1 и 2 второй главы, образуют систему необходимых и достаточных условий, по крайней мере, локального минимума критерия .

**2.3.1. Непрерывный закон управления с обратной связью**

Пусть объект описывается дифференциальным уравнением вида

 (2.18)

Рассмотрим задачу, в которой ограничения на конечное состояние объекта системы задается в виде функции, т.е.

 (2.19)

**Предположение 2.3.1.** Управление  и возмущение  будем называть управляющими воздействиями (управлениями), которые удовлетворяют следующим ограничениям:

. (2.20)

В данном разделе параграфа предполагается, что оптимальные управления не принадлежат к границам замыкания  и  множеств,  и  т.е. .

Для сокращения записей примем следующее обозначение

, т.е.

 (2.21)

Задачу синтеза управления системой (2.21) будем рассматривать как задачу условной оптимизации, т.е. конструирования управлений, доставляющих минимакс функционалу

. (2.22)

Предполагается, что существуют такие управляющие воздействия  и , находящиеся внутри ограничений (2.19), что каждое состояние  в каждый момент  на интервале существования решения системы (2.20)  полностью управляемо [4, 25, 49], т.е. в рассматриваемой задаче для всех  система (2.21) во всем диапазоне переходного процесса управляема. Назовем  ­ синтезирующими функциями задачи (2.21)-(2.22).

Расширенный функционал качества (2.22) имеет вид

. (2.23)

Здесь

. (2.24)

Необходимые условия минимакса в рассматриваемой задаче записываются в виде

 (2.25)

 (2.26)

Отметим, что выполнение необходимых условий оптимальности (2.25) соответствует выполнению условий существования седловой точки (2.7), т.е. дифференциальной игре с нулевой суммой

**

**Предположение 2.3.2.** Последнее уравнение в (2.25) предполагает, что оптимальные управления  и , отвечающие ограничениям (2.19), не достигают своих предельных значений, т.е. .

Отклонения от оптимальной траектории, вызванные вариациями начальных состояний  и конечных условий , будут иметь вид

 (2.27)

где  и  - заданы,

. (2.28)

Здесь нижний индекс обозначает переменную, по которой производится дифференцирование, т.е., например,



Прежде чем начинать исследование поведения функционала (2.24), найдем уравнение для приращений управляющих воздействий при условии их независимости. Предположим, что матрицы  и  невырождены для , можно разрешить третье уравнение из (2.27) относительно и :

 (2.29)

Подстановка выражения для  в уравнения, определяющие  и , дает

 (2.30)

 (2.31)

где

 (2.32)

Будем искать  и  в виде

, (2.33)

 (2.34)

здесь:  и  - векторы с постоянными бесконечно малыми компонентами; ,  и  матрицы.

Сравнивая уравнения (2.33) при  и условия выбора , определенное выражением (2.31), а также принимая во внимание, что , будем иметь

 (2.35)

Продифференцируем выражения (2.33) и (2.34) по времени, считая  и  постоянными величинами:

 (2.36)

 (2.37)

Уравнение (2.30) с учетом (2.33) будет выглядеть:

 (2.38)

Приравнивая правые части уравнений (2.31) и (2.36) и учитывая (2.38), будем иметь

 (2.39)

Аналогично, подставив (2.38) в (2.37), получим

 (2.40)

Если рассматривать (2.39) и (2.40) как тождества, справедливые при произвольных значениях  и , то коэффициенты при  и  должны обращаться в нуль, откуда:

 (2.41)

Соотношения (3.10) являются граничными условиями матричных уравнений (3.16). Используя (2.35), перепишем (2.29) как функцию параметров  и :

 (2.42)

Для того чтобы получить  как функцию  и , обратимся к выражению (2.34). Предположив, что матрица ** обратимая, будем иметь

. (2.43)

Таким образом, существование  для всех значений  связано с невырожденностью матрицы *.*

Подставляя (2.43) в (2.42), получаем

 (2.44)

Это непрерывный закон управления с обратной связью, при котором критерий  достигает минимума и терминальные значения имеют требуемые малые отклонения 

**2.3.2. Достаточные условия локального минимума**

Вторая вариация расширенного критерия качества (2.23), записанная с точностью до членов второго порядка (а все ограничения – с точностью до членов первого порядка) малости относительно ,  и , будет иметь вид:

 (2.45)

при выполнении условий:



Добавим к (2.45) следующее тождество:



в котором  определяются решениями уравнений (2.31) с краевыми условиями (2.35)

Интегрируя  и  по частям, получим



Рассмотрим отдельно подынтегральное выражение более подробно:



или (с учетом (2.44))



Выберем матрицы  и  так, чтобы выполнялись соотношения

 (2.46)

 (2.47)

а матрицу  определим следующим соотношением:

 (2.48)

Аналогично:



Нетрудно заметить,



Полученные уравнения для матриц ,  и  полностью совпадают с уравнениями (2.41), в которых параметры ,  и  определяются соотношениями (2.32).

Выражение для второй вариации функционала качества (2.45), с учетом полученных результатов, можно переписать в виде:



Здесь индексы  и означают веса норм, записанных под интегралами.

Принимая во внимание (2.24) и (2.43) (выражения для  и ), получаем

 (2.49)

Если сравнить две одинаковые траектории с одинаковыми краевыми условиями, т.е. при  и , то в задаче дифференциальной игры с нулевой суммой  для всех  и , за исключением тех, при которых подынтегральное выражение (2.49) обращается в нуль, т.е. за исключением  и , определяемых для всех  выражениями:

 (2.50)

при выполнении условий:

1. , т.е. матрицы и  положительно определены при  (условие выпуклости или условие Лежандра - Клебша);

2. так как  положительно определена для , а , то  Другими словами,  отрицательно определена при  (условие нормальности);

3. матрица  ограничена при  (условие отсутствия сопряженных точек на траектории или условие Якоби).

Само условие Лежандра – Клебша является ослабленным условием для минимума функционала  Если  ­ гладкая функция и ограничения на управление отсутствуют, то должны выполняться условия

.

Что касается условия нормальности, то уравнение (2.43) можно интерпретировать следующим образом: малые изменения  могут быть получены при малых изменениях  только в случае невырожденности матрицы  на интервале . Если  и , то из (2.48) следует, что . Поскольку , то, следовательно, 

Если  в точке , где , то необходимо, чтобы некоторая линейная комбинация  была равна нулю. Это означает, что система допустимых возмущений имеет размерность меньше, чем *n* (где *n* – число переменных состояния системы). Следовательно, поверхность постоянных значений  в окрестности точки  имеет излом (разрыв в частных производных), поскольку  при . Если траектории продолжить от  в сторону , то они уже не будут минимизирующими. Следует отметить, что если  то это еще не обязательно означает, что . Если матрица  является вырожденной, то задача оптимизации называется *анормальной*, что означает, что в этом случае не существует соседних минимальных решений.

Таким образом, условия 1, 2, 3 вместе с условиями (2.25) образуют необходимые и достаточные условия, по крайней мере, минимума функционала .

При выполнении ряда предположений принцип Л.С. Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным [3, 19, 47]. Рассмотрим, например, задачу дифференциальных игр с нулевой суммой линейной управляемой системой



Здесь  состояние системы; , − множество возможных начальных условий системы; ,  − управление; ,  − ограниченное возмущение. Матрицы − непрерывны. Множества  и  замкнуты, выпуклы и совокупности всех внутренних точек этих множеств не пусты. Наконец  и  для любого ненулевого решения  системы

.

Тогда необходимое условие оптимальности в задаче (2.1)-(2.3)

**

при сделанных предположениях являются и достаточными.

**2.4. Задача с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданный момент окончания переходного процесса**

Как и в предыдущих разделах книги, задачу синтеза управления системой (2.1)-(2.2) будем рассматривать как задачу условной оптимизации, т.е. конструирования управлений, доставляющих минимакс функционалу

. (2.51)

на объекте

 (2.52)

.

Пусть граничные условия системы (2.52) имеют вид

 (2.53)

причем функции  непрерывны и непрерывно дифференцируемы, а якобиан  имеет свой максимальный ранг *k* (в этом случае говорят, что правый конец принадлежит *(n-k) -* мерному гладкому многообразию).

Предполагается, что существуют такие управляющие воздействия  и , отвечающие соответствующим ограничениям, что каждое состояние  в каждый момент  на интервале существования решения системы (2.52)  полностью управляемо [4, 25, 49], т.е. в рассматриваемой задаче для всех  система (2.52) в всем диапазоне переходного процесса управляема.

Гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

. (2.54)

Пусть в дифференциальной игре управления ,  и соответствующая траектория системы таковы, что выполняется условие седловой точки (условие Айзекса)

 (2.55)

или

. (2.56)

Здесь. Очевидно что гамильтониан  непрерывен по переменным  и, как это было показано в разделе § 2.2, удовлетворяет условиям Липшица по переменным  и .

Из условия выполнения соотношения (2.55), т.е. выполнения условия



для функционала (2.51), состоящего в неотрицательности его первой вариации, получаем неравенство

 (2.57)

Множество  образует выпуклый конус концевых вариаций , т.е. .

Отметим, что вариация траектории системы (2.52)  отвечает уравнению

 (2.58)

Введем сопряженную систему

. (2.59)

**Лемма 2.4.1.** *Поскольку уравнение в вариациях (2.58) является однородным, то скалярное произведение  является постоянным, т.е.*

. (2.60)

***Доказательство леммы 2.2*.** В справедливости леммы 2.2 нетрудно убедиться, отыскав производную функции *М* по времени:

.

Учитывая (2.16) и (2.18), будем иметь



т.е.  ■

Доказательство принципа максимума Понтрягина для рассматриваемого случая усложняется тем, что это неравенство должно выполняться не для всех вариаций, а только для тех из них, которые не нарушают граничных условий, т.е. концевые вариации  не должны нарушать граничных условий (2.53). В силу этого должно выполняться соотношение

 (2.61)

В качестве конечного значения вспомогательной переменной Лагранжа выберем  в виде нормали  к конусу концевых вариаций , т.е.

. (2.62)

Поскольку вектор  выбран в виде (2.62), то для любых , удовлетворяющих проварьированным граничным условиям (2.61), должно выполняться равенство

. (2.63)

Используя выражения (2.61) и (2.63), получим условия трансверсальности в таком виде, как это уже было получено в Главе 1 (раздел § 1.3). Для этого умножим каждое уравнение (2.61) на , сложим полученные выражения, а затем результат вычтем из уравнения (2.63). Тогда получим

 (2.64)

Из выражения (2.64) получаем, что

 (2.65)

Так как, по предположению, якобиан  имеет свой максимальный ранг *k*, то, приравнивая к нулю соответствующие *k* коэффициентов в (2.64), можно получить систему с ненулевым детерминантом, определяющую множители  по  однозначно. Остальные *n-k* условий в (2.64) равны нулю в силу независимости оставшихся вариаций.

В силу выбора  для любого вектора  будет справедливо

. (2.66)

Согласно (2.60) выражение . Этот факт позволяет осуществить перенос неравенства (2.66) из конечного времени в момент времени , при котором осуществлялось игольчатое варьирование управлений  и :

 (2.67)

Подставляя в (2.67) выражение (2.58) для при , получим условие выполнения верхнего решения задачи дифференциальной игры



которое, используя функцию Понтрягина (2.20), можно переписать в виде

,

или окончательно

 . (2.68)

Аналогично доказывается выполнение условия нижнего решения задачи дифференциальной игры

 (2.69)

**Теорема 2.4.2.** *Если управления ,  и траектория  доставляют минимум функционалу (2.23) при уравнениях связи (2.22) и краевых условиях (2.36), то существует такая ненулевая непрерывная вектор - функция , удовлетворяющая условиям трансверсальности (2.41), что при каждом  Гамильтониан (2.54) достигает при оптимальных управлениях  и  минимума по всем  и максимума по всем .*

**2.5. Оптимальные стратегии в случае гладкой функции цены**

Предположим, что существует решение задачи (2.10)-(2.12). Рассмотрим конструкции возможных оптимальных процессов, учитывая, что совместное решение задачи дифференциальной игры возможно, если . Определим функции

, (2.70)

здесь ;

; (2.71)

. (2.72)

В общем случае функции  и  могут быть определены с использованием соотношений (2.70) и (2.72) не единственным образом. Эти функции будем называть предстратегиями игроков  и . Определим стратегии игроков в виде

, (2.73)

. (2.74)

Докажем, что стратегия  оптимальна для игрока  с управлением , предположив, что функция  непрерывна. Выберем произвольную траекторию управляемой системы

, (2.78)

где  ­ некоторое измеримое управление игрока . Это управление может быть сформировано игроком  согласно равенству .

Теперь оценим оптимальность стратегии , учитывая определение 2.2 относительного верхнего решения задачи (2.1)-(2.3)

,

получим

**

так как **, то стратегия  является оптимальной.

Аналогично, используя определение 2.3, докажем оптимальность стратегии  для игрока .

Для случая, когда непрерывность стратегий  и  не предполагается, введем множество  траекторий , которые удовлетворяют начальному условию  и дифференциальному включению

.

Введем замкнутое и ограниченное множество

.

Пусть

.

Ясно, что для любого  и любых интервалов времени  будет выполняться условие .

Рассмотрим пошаговую процедуру реализации стратегии . Из равенства  для  и соотношений (2.4), (2.7) (Предположение П3), (2.71), (2.72) для верхнего решения задачи (2.1)-(2.4) следует, что

,

то есть во всех интервалах  для верхнего решения справедливо соотношение

. (2.76)

То же самое можно показать, что относительно нижнего решения

. (2.77)

Учитывая полученные результаты, можно прийти к следующему выводу. Если существует классическое решение задачи (2.1)-(2.3), то стратегия

 (стратегия ) оптимальна для игрока  (игрока ).

Из (2.4), (2.5) можно сделать вывод, что дифференциальная игра с нулевой суммой имеет место при

,

т.е. при одновременном выполнении условий верхнего и нижнего решений.

**2.6. Задача об оптимальном быстродействии**

Прежде чем приступить к рассмотрению задачи быстродействия в приложении к дифференциальным играм следует сделать предположение относительно существования решения такой задачи в условиях противодействия двух игроков  и .

**Предположение 2.6.1.** Соотношение возможностей игроков  и  таково, что существует решение задачи перевода системы из начального состояния в заданное, т.е. , за минимальное время.

**2.6.1. О совместном действии игроков**

Пояснение понятия «совместного действия игроков» дадим ниже, при анализе построенных управлений в задаче оптимального быстродействия.

Сформулируем задачу об оптимальном быстродействии в задаче дифференциальной игре для подвижной области *St*. Дана система

 (2.78)

**Предположения 2.6.2.**

1)  ­ элементы матриц *f*, *B, D* соответственно непрерывны относительно  и *t*;

2) ­ непрерывны по *x(t)* и *t* для .

Предположим, что компоненты векторов управлений  ,  ограничены по величине соотношениями

; . (2.79)

Вопрос об мощностных соотношениях ограничений  и  рассмотрим после синтеза управляющих воздействий.

Заданная гладкая область определена соотношением

 (2.80)

где вектор .

Будем считать, что

1)  непрерывны по *x(t)* и *t*;

2) векторы (градиенты)  линейно независимы для всех 

Пусть  - заданный начальный момент времени и  ­ заданное начальное состояние системы (2.78).

Функционал определим в виде

 (2.81)

где ** – свободно.

Задача заключается в нахождении синтезирующих функций *,* которые

* удовлетворяют ограничениям (2.79);
* переводят  в область *S*;
* минимизируют функционал  (2.81).

В этом подразделе Главы 2 рассматривается задача программных совместных управлений двумя игроками  и  объектом (2.78). В такой постановке задачи моменты переключений управляющих воздействий могут быть разными, но количество переключений будет одинаковым. Как мы увидим ниже, это определяется единым для обоих игроков гамильтонианом задачи, который имеет вид

 (2.82)

Векторы  образуют каноническую систему

 (2.83)

Предположим, что  ­ синтезируемые управления оптимальные по быстродействию, выполняющее требования 1 и 2;  - оптимальная траектория и  - минимальное время окончания переходного процесса  В соответствии с постановкой задачи оптимальные величины  должны удовлетворять условиям

 (2.84)

Третье условие из (2.84) в силу (2.80) означает, что

 (2.85)

Из принципа минимакса имеем

 (2.86)

Применяя принцип минимума (максимума) Понтрягина, получаем стратегии игроков в виде  и , где  и  являются решениями канонической системы (2.83) с соответствующими краевыми условиями, т.е. воздействия и  относятся к программному типу управлений [4, 18]. Здесь.

**Теорема 2.6.1.** *Если условия, сформулированные в предположениях (2.5)-(2.7) из раздела § 2.2 выполняются, то в задаче дифференциальной игры c нулевой суммой (2.79)-(2.81) существует единственное минимаксное решение*

*,*

*где*



Из существования минимаксного решения с нулевой сумой следует, что

 (2.87)

Кроме этого, определяются верхнее и нижнее решения задачи:

**, (2.88)

**. (2.89)

Учитывая (2.26), (2.30) для верхнего условия существования решения задачи дифференциальной игры, можно переписать:

 (2.90)

Так как первые члены с обеих сторон неравенства равны, то

 (2.91)

для всех .

Введем обозначения



или в векторной форме

 (2.92)

При использовании функций  и  неравенство (2.39) запишется в виде

 (2.93)

для всех  и любого 

Уравнение (2.93) означает, что функция



достигает абсолютного минимакса при

.

При этом справедливо соотношение

 (2.94)

Замена местами *min* и *max* знаками возможна, так как функции , так же как и  ограничены независимо друг от друга. Отметим, что

. (2.95)

Управления будут минимизировать, а управления  ­ максимизировать гамильтониан. Следовательно, в силу условия (2.94), управление  должно быть функциями  вида

 (2.96)

В силу условия (2.94), управление  должно быть функциями  вида

 (2.97)

Выражения (2.96), (2.97)) можно записать в виде

 (2.98)

Уравнения (2.97), (2.98) показывает, что верхнее решение задачи дифференциальной игры достигается при управлениях  и , которые являются вполне определенными функциями от  и *t*, если аргумент *sign* не равен нулю. Однако при  и  величины из уравнения (2.95) и  из уравнения (2.98) определить нельзя.

**Определение 2.6.1.** *Нормальная задача дифференциальной игры об оптимальном быстродействии верхнего решения дифференциальной игры.*

*Предположим, что на интервале  имеется счетное количество точек  таких, что* 

 (2.99)

*Верхнее решение задачи дифференциальной игры на быстродействие достигается, если отношение ограничений (2.79), наложенных на управляющие воздействия, отвечают соотношению*

*. (2.100)*

*В этом случае такую задачу назовем нормальной дифференциальной игрой на быстродействие.*

**Теорема 2.6.2.** Релейный принцип. *Пусть*  и *− управления в дифференциальной задаче по быстродействию (2.78)-(2.81). Пусть так же верхнее решение такой задачи достигается при* *,* *,  и* *. Компоненты векторов управлений в верхней задаче игры по быстродействию есть кусочно-постоянные (или релейные) функции времени, которые определяются соотношениями*

 (2.101)

*или в векторной форме* *.*

Как мы видим из (2.101), линии переключений и моменты переключений стратегий игроков  и  зависят как от параметров системы, т.е. значений матриц  и , но от общей в этих стратегиях функции , которая является решением уравнения Лагранжа из канонической системы (2.83). В силу этого в названии этого подраздела введено понятие «совместного действия игроков».

Следует принять во внимание то, что гамильтониан (2.82) и дифференциальные уравнения, образующие каноническую систему (2.83) полностью определенную объектом (2.78) и функционалом (2.81) и, таким образом, не зависит от граничных условий при  и области *S. H*- минимаксные управления (2.46) функционально независимы от наложенных ограничений. Необходимые условия для гамильтониана и дополнительной переменной  в конечный момент времени  вместе с заданным начальным состоянием , условиями, задаваемыми на правом конце для дополнительной переменной

,

и уравнениями, определяющими область конечных значений системы (2.80), дают достаточно граничных условий для решения *2n* дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример.

Пусть система управления организована в соответствии со структурой, представленной на рис. 2.1 и уравнения для обеих игроков имеют вид:



Здесь

- сила тяги,

- сила трения.

Требуется с помощью выбора управлений  и  перевести систему из заданного начального состояния в начало координат за кратчайшее время.

Гамильтониан

.

Сопряженные переменные



Оптимальные по быстродействию управления находятся из условия

.

Из условия  имеем



Пусть , тогда

 при ,

 при .

На рис. 2.6.1 приведены графики переходных процессов ,  и соответствующие управления  и . Время на графиках приведено в условных единицах.

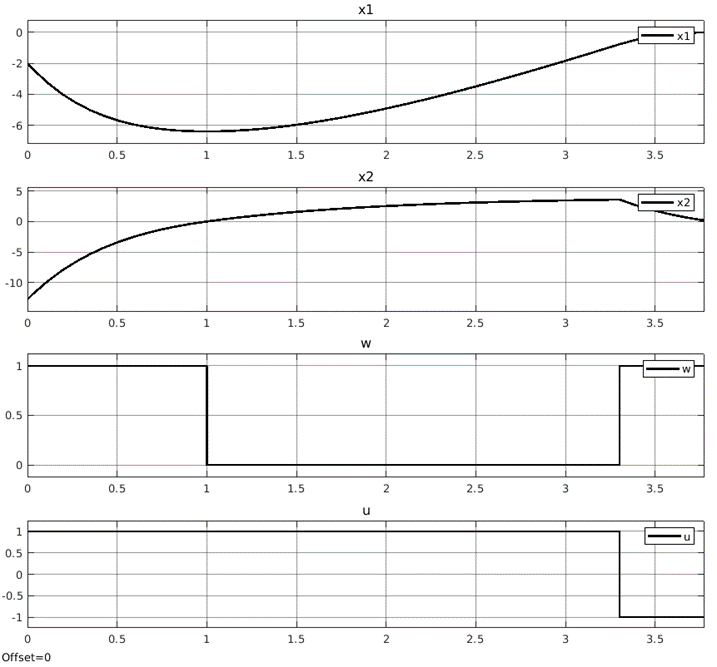


Рис. 2.6.1. Графики переходных процессов ,  и соответствующие управления  и 

Моменты переключений управлений  и :

Время окончания переходного процесса по быстродействию в условных единицах: .

**2.6.2. О самостоятельных действиях игроков**

Рассмотрим задачу быстродействия с игроками, реализующие программные управления независимо друг от друга. В этом случае каждый из игроков управляет «своим» объектом, общим для каждого из них является только управляемая часть и при этом: . Пусть эти объекты описываются следующими уравнениями

, (2.102)

. (2.103)

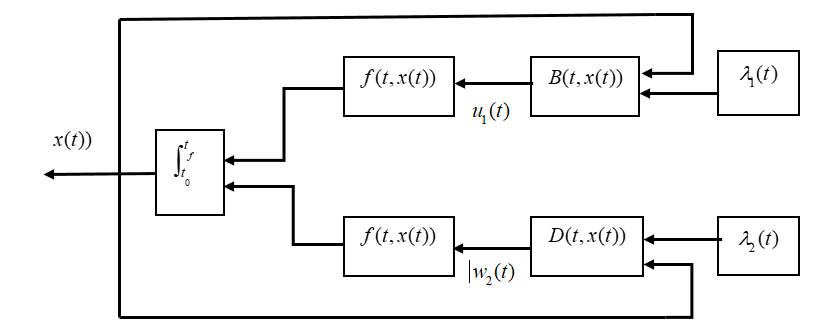


Рис. 2.1. Блок схема системы, реализующая «самостоятельное» принятия решений двумя игроками.

Предположения относительно задания гладкой области поведения состояния исходной системы (2.80) и ограничений, накладываемых на управления (2.79), соответствуют сделанным определениям из предыдущей задачи.

Запишем гамильтонианы для этих систем с «самостоятельными» управлениями

 (2.104)

 (2.105)

В соответствии с (2.102), (2.104) и (2.103), (2.106) соответствующие канонические системы сбудут иметь вид

 (2.106)

 (2.107)

Условиями нахождения оптимальных управлений игроков  и  являются

 (2.108)

 (2.109)

Применяя принцип минимума (максимума) Понтрягина (2.108), (2.109), получаем стратегии игроков  и , где пары  и  являются решениями соответствующих решений канонических систем (2.106) и (2.107) с соответствующими краевыми условиями. Эти стратегии таковы, что управления  и  должны удовлетворять условиям



и обеспечивать выполнение поставленной задачи:  за минимальное время  окончания переходного процесса. Синтезированные управления  и  относятся к классу программных управлений [4, 18]. Здесь.

Используя принятые обозначения для параметров подсистем (2.102) и (2.103), запишем условия переключения управлений

 (2.110)

 (2.111)

**Предположение 2.6.2.** Пусть при успешном выполнении задачи быстродействия количество переключений каждого из управлений  и  есть .

Следует отметить, что в рассматриваемой дифференциальной игре быстродействия при одинаковом числе переключений управлений  и  моменты этих переключений могут быть разными.

**Теорема 2.6.3.** *Если условия, сформулированные в предположениях (2.5)-(2.7) из раздела § 2.2 выполняются, то управления быстродействия, синтезированные для подсистем*

,



*с применением принципа минимума (максимума) Понтрягина*





*где пары функций  и  определяются решениями уравнений Эйлера-Лагранжа*





*обеспечивают выполнение задачи быстродействия  для системы*



*за минимальное время  окончания переходного процесса, если выполняется условие*

*,*

*где  ­ количество переключений каждого из управлений*  и ; 



Рассмотрим пример.

Пусть система управления организована в соответствии со структурой, представленной на рис. 2.1 и уравнения для обеих игроков имеют вид:

Игрок 1



Игрок 2



На рис.2.2. Представлены переходные процессы системы и соответствующие управления.

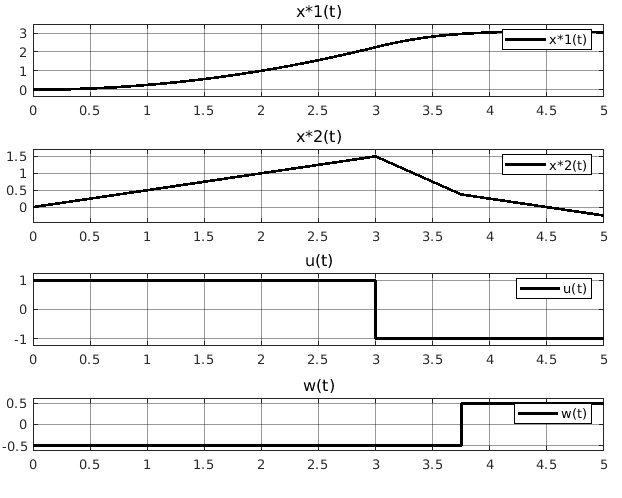


Рис. 2.2. Переходные процессы в системе и соответствующие управления

**2.7. Задача на минимум времени перехвата с ограничениями**

**на управления**

Заданы две системы со скалярными управлениями, на которые наложены ограничения

 (2.112)

 (2.113)

Система *Р* (преследователь) стремится за минимальное время перехватить систему *Е* (преследуемый), в то же время система *Е* стремится максимизировать время перехвата. Пусть условием перехвата будет

, (2.114)

где *Q* - вектор - строка. Это скалярное условие перехвата неявно определяет время окончания перехвата **. Введем соответствующие переменные и определим скалярную величину *z(t)*:

. (2.115)

Здесь

. (2.116)

Расширенный функционал качества имеет вид



где .

Выпишем гамильтониан

.

Тогда необходимые условия стационарности принимают вид

 (2.117)

,

откуда следует, что

 (2.118)

. (2.119)

Управления (2.118) и (2.119) реализуют стратегию с обратной связью.

Учитывая, что для задачи быстродействия справедливо следующее

,

получаем условие для определения знака коэффициента :

. (2.120)

Так как для успешного завершения задачи перехвата эффективность действий преследователя, должна быть выше, чем у преследуемого, то *.* Отсюда следует, что .

Подставляя (2.118) и (2.119) в (2.115), получим

. (2.121)

Интегрируя (2.121) и учитывая, что , получаем

. (2.122)

Наименьшее значение , которое удовлетворяет уравнению (2.122), называется возможным минимаксным временем перехвата. Поскольку каждый член уравнения (2.122) известен либо может быть вычислен, знак коэффициента  известен, величину ** можно определить сразу. Таким образом, для систем П и Г оптимальные стратегии управлений *u0(t)* и *v0(t)* могут быть найдены как функции *z(t0).*

Если необходим многомерный перехват, то для нахождения  и знаков векторного коэффициента  требуется решить не одно уравнение (2.122), а большее их число.

**2.8. Задача на оптимум расхода ресурсов**

Как и в предыдущем разделе, объект описывается дифференциальным уравнением вида

 (2.123)

; . (2.124)

Заданная гладкая область конечных значений состояния *S* определяется соотношением , или в векторной форме  Предположим, что область конечных значений удовлетворяет предположениям, сделанным в § 1.3.

Функционал качества задан в виде

 (2.125)

Таким образом, функционал (2.125) оценивает «стоимость» ресурсов, затрачиваемых на управление  объектом (2.123) при действии неконтролируемых затрат  этих ресурсов.

Синтезируемые управления  и  должны:

1. удовлетворять заданным ограничениям;
2. переводить систему из состояния  в область *S*;
3. минимизировать функционал (2.125):
   1. если  не задано;
   2. если  фиксировано.

Рассмотрим вначале случай 2.1 (** не задано). Образуем гамильтониан:

 (2.126)

Векторы  образуют каноническую систему

 (2.127)

Предположим, что  ­ синтезируемые управления минимаксные по минимуму ресурсов, расходуемых на выполнение поставленной задачи и, выполняющее требования 1 и 2;  - оптимальная траектория и  ­ минимальное время окончания переходного процесса  По определению оптимальные величины  должны удовлетворять условиям

 (2.128)

В силу, что , то

 (2.129)

Предположим, что управления  оптимальное в смысле минимума функционала (2.125),  – соответствующая этим управлениям траектория и - первый момент времени, когда . Отметим, что если  – минимальное время прибытия состояния в область *S*, то 

Векторы  образуют каноническую систему

 (2.130)

или в координатной форме:

 (2.131)

 (2.132)

Из принципа минимакса имеем

(2.133)

Здесь.

**Теорема 2.7.1.** *Если условия, сформулированные в предположениях (2.5)-(2.7) из раздела § 2.2 выполняются, то в задаче дифференциальной игры c нулевой суммой (2.129)-(2.125) существует единственное минимаксное решение*

*, где*.

Из существования минимаксного решения с нулевой сумой следует, что

 (2.134)

Кроме этого, определяются верхнее и нижнее решения задачи:

**, (2.135)

**. (2.136)

Учитывая (2.88) для верхнего условия существования решения задачи дифференциальной игры, можно переписать:



которое дает соотношение

(2.137)

Для задачи с заданным временем окончания переходного процесса и движущимся множеством целей принцип минимума определяет значение гамильтониана при 

 (2.138)

Кроме того, для этого типа задач краевое условие на правом конце для переменной  имеет вид

 (2.139)

В (2.137) и (2.138)  ­ некоторые постоянные.

Рассматриваемая задача имеет решение, когда заданное время окончания переходного процесса  больше или равно минимальному времени окончания переходного процесса (т.е. ). Таким образом, если оптимальное по расходу ресурсов управление существует, то соответствующие траектории должны удовлетворять следующим условиям:

а) если  не задано, то необходимые условия выражаются соотношениями (2.130), (2.131), (2.137), (2.139);

б) если  задано, то необходимые условия выражаются соотношениями (2.130), (2.131), (2.137), (2.139), однако заданное время не может быть меньше, чем минимальное время, находимое в задаче о быстродействии при минимуме расхода ресурсов.

Как это уже делалось в § 2.4, используя выражение (2.137), получим уравнение, связывающее оптимальное по расходу ресурсов управление с траекторией системы, соответствующей .

Определим функции  и  в виде

, . (2.140)

Выражение (2.137) с учетом (2.140) можно переписать в виде

 (2.141)

Выражение (2.141) означает, что



Нетрудно видеть, что

 (2.142)

 (2.143)

Так как минимакс имеет место при  и  , то из (2.142), (2.143) имеем:

 (2.144)

 (2.145)

Соотношения (2.144) и (2.145) в компактной форме записываются в виде

 (2.146)

 (2.147)

где

.

Из (2.146) видно, что если функции и , то минимаксные по расходу ресурсов управления полностью определены, если же  и/или  то можно лишь угадать знаки при управлениях, само же минимаксное по расходу ресурсов управления найти нельзя. Это обстоятельство приводит к понятию нормальной и вырожденной задач на оптимум расхода ресурсов.

**Определение 2.8.1.** *Нормальная задача дифференциальной игры на оптимум расхода ресурсов.*

*Предположим, что на интервале , когда время переходного процесса не задано, или на интервале  при фиксированном времени имеется счетное множество моментов времени таких, что*

*, *

*в том случае, если  Тогда задачу дифференциальной игры на оптимум расхода ресурсов будем называть нормальной. Моменты времени  называют моментами переключений.*

**Теорема 2.8.1.** *Пусть и − минимаксные по расходу ресурсов управления для задачи (2.142)-(2.143), а  и − соответствующие ему фазовая траектория и дополнительный вектор. Компоненты векторов минимаксного по расходу ресурсов управлений есть кусочно-постоянные (или релейные) функции времени, которые определяются соотношениями*



*или в векторной форме* *.*

Следует отметить, что в силу того, что моменты переключений управлений  и  определяются функциями и  соответственно, то в общем случае при одинаковом количестве таких переключений их моменты могут быть разными.

Также следует принять во внимание то, что гамильтониан (2.126) и дифференциальные уравнения, образующие каноническую систему (2.130) полностью определенную объектом (2.123) и функционалом (2.125) и, таким образом, не зависит от граничных условий при  и области *S. H*- минимаксные управления (2.121), (2.122) функционально независимы от наложенных ограничений. Необходимые условия для гамильтониана и дополнительной переменной  в конечный момент времени  вместе с заданным начальным состоянием , условиями, задаваемыми на правом конце для дополнительной переменной

,

и уравнениями, определяющими область конечных значений системы , дают достаточно граничных условий для решения *2n* дифференциальных уравнений.

В общем случае управлений, при которых выполняются необходимые условия оптимальности, может быть несколько. Эти управления называются экстремальными. Каждое экстремальное управление дает траекторию, которая может быть оптимальной либо локально, либо глобально.

**2.9. Общее замечание к принципу минимакса Понтрягина**

1. Если мимаксное оптимальное решение задачи дифференциальной игры по оптимальному расходу ресурсов существует и единственно и нет других локальных оптимальных решений, то существует только одно экстремальное решение, которое и является оптимальным по оптимальному расходу ресурсов. Предположение об отсутствии других локальных оптимальных управлений превращает принцип минимакса в необходимое и достаточное условие.
2. Если имеется  различных оптимальных управлений и если есть  управлений, оптимальных локально, но не являющихся оптимальными глобально, то всего будет  экстремальных управлений.
3. Из существования экстремальных управлений не вытекает необходимость существования глобально оптимального управления.
4. Если оптимальное по оптимальному расходу ресурсов управление существует, то его можно найти, вычислив время , требуемое каждым из экстремальных управлений, и выбрать управление, минимизирующее .