УДК 519.86 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2022.6.3

МОДЕЛИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА НЕЧЁТКИХ СИСТЕМАХ, С ПРИМЕНЕНИЕМ К РОССИЙСКОМУ ФОНДОВОМУ РЫНКУ

В.А. Свиязов

Аннотация. Моделирование и прогнозирование волатильности – актуальная как в научных кругах, так и в практической сфере задача. В работе развивается подход, основанный на совокупности модели GARCH и нечёткой логики. Используемая схема нечёткого вывода Такаги – Сугено производит так называемую фаззификацию оригинальной модели авторегрессии – условной гетероскедастичности, тем самым позволяя использовать несколько разных локальных моделей GARCH в разных областях входных данных и осуществлять мягкое переключение между ними. Этот подход способствует учёту таких феноменов, как кластеризация и асимметричность волатильности – свойств, демонстрируемые финансовыми рынками в реальности. Предложенный алгоритм применяется к историческим значениям индекса РТС и сравнивается с классической моделью GARCH. Проведённое исследование показывает, что в ряде случаев нечёткие модели обладают преимуществами по отношению к традиционной, а именно более высокой точностью прогнозов. Таким образом, при моделировании волатильности инструментов российского финансового рынка среди прочих целесообразно рассматривать предложенный метод, поскольку он демонстрирует качества, превосходящие конвенциональные методы.

Ключевые слова: нечёткие системы, прогнозирование, временны́е ряды, волатильность.

ВВЕДЕНИЕ

Перевод ряда известных эконометрических моделей из вероятностной постановки в нечёткую в последнее время привлекает всё большее внимание (см., например, работы [1–9]). Это относится и к моделированию волатильности – задаче, которая является важной как с научной, так и с прикладной точки зрения. Многие модели подразумевают единую зависимость выходных значений от входных данных, однако фактически зависимость может быть разной на разных областях значений входных переменных. Введение нечёткости в систему позволяет преодолеть этот недостаток при помощи использования нескольких локальных моделей и агрегирования их с применением нечётких функций принадлежности.

Задача моделирования волатильности несколько отличается от других задач финансовой эконометрики, поскольку волатильность – ненаблюдаемая величина в отличие от, например, цен финансовых инструментов или уровня процентных ставок. Более того, не существует единой позиции, что именно называть волатильностью. Однако умение корректно оценить текущую и спрогнозировать будущую волатильность того или иного инструмента или портфеля важно для финансовых институтов, поскольку на этом основывается оценка рыночного риска. Достаточно точно оценённый рыночный риск, в свою очередь, означает бо́льшую стабильность финансовой организации и позволяет избежать фатальных потерь при турбулентности рынков.

Одним из наиболее известных и широко применяемых методов измерения волатильности является подсчёт вменённой волатильности по модели Блэка – Шоулза [10, 11] из обозреваемых на рынке цен на европейские опционы (производные финансовые инструменты, дающие право купить или продать базовый актив, например, акцию, по определённой цене в определённую дату). Этот подход имеет несколько недостатков. Прежде всего, необходим ликвидный рынок опционов – иначе цена опциона с высокой вероятностью может быть несправедливой, и вся процедура не будет иметь смысла. Кроме того, в модели Блэка – Шоулза заложено несколько сильных предположений, которые, как правило, не выполняются в реальности. Например, предположение о константной по времени безрисковой процентной ставке, по которой можно как занимать деньги, так и давать в долг, или предположение о постоянной во времени волатильности цены базового актива. Последнее утверждение приводит к тому, что на разных ценах исполнения опционов вменённая волатильность получается разная – для акций такой эффект известен как «улыбка» или «ухмылка волатильности». Таким образом, метод в некоторой степени противоречив и, кроме того, для его применения требуется выполнение достаточно жёстких предпосылок.

Другим известным подходом является эконометрическое моделирование на основе исторических значений волатильности. Как правило, в этом подходе под волатильностью понимается доходность актива. В этом направлении общепризнанной является модель GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*) [12, 13], основанная на модели ARCH, и впервые предложенная в работе [14]. Однако есть эффект, демонстрируемый современными финансовыми рынками, который классическая модель GARCH не учитывает. Он состоит в скошенности распределения доходностей активов на рынках: негативные внешние шоки вызывают более резкое падение и более высокую волатильность; позитивные внешние шоки вызывают менее резкий рост и менее высокую волатильность. Различными исследователями был предложен достаточно широкий спектр модификаций классической модели GARCH, учитывающих асимметричность волатильности: NAGARCH (nonlinear asymmetric GARCH) [15], EGARCH (exponential GARCH) [13], QGARCH (quadratic GARCH) [16], GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan, and Runkle GARCH)[17], TGARCH (threshold GARCH) [18], VSGARCH (volatility-switching GARCH) [19] и пр. Тем не менее, эти подходы не учитывают, например, наличие четырёх кластеров волатильности.

В связи с некоторыми недостатками устоявшихся методов предлагается к рассмотрению модель, которая включает в себя элементы нечёткой логики. Нечёткая система, используемая в настоящей работе, – схема нечёткого вывода Такаги – Сугено – берёт своё начало в работе [20]. Авторы работы [21] предложили метод оценки параметров нечёткой модели при помощи метода наименьших квадратов. Эти две работы стали основой для широкого распространения таких моделей в различных областях и для добавления нечёткой постановки в классические эконометрические модели. Нечёткие системы описаны, например, в книгах [22, 23].

Применяются нечёткие модели и для задач прогнозирования волатильности фондовых индексов. Посвящённые этому работы демонстрируют широкий спектр алгоритмов и исходных данных. Например, в исследовании [1] представляется вниманию асимметрическая нечёткая модель GARCH, в которой схема нечёткого вывода применяется для определения порога переключения. В статье демонстрируется работоспособность предложенного метода на доходностях фондовых индексов NASDAQ (США), Nikkei 225 (Япония), взвешенного индекса Тайваня, а также Индекса Hang Seng (Гонконг). В исследовании [2] авторы развили идею, предложенную в работе [1]. Использовалась та же асимметрическая нечёткая модель GARCH, однако нечёткая логика применялась не только для определения порога переключения, но также нечёткость была введена в характеристическую функцию (в предложенной модели она может принимать любое значение в интервале [0, 1]). Были предложены три варианта фаззификации характеристической функции. Авторы работы сравнивают работоспособность представленных методов с моделью GJR-GARCH и с моделью из статьи [1]. В качестве рядов для исследования использовались Индекс МосБиржи (ранее Индекс ММВБ) и Индекс РТС.

Авторы работы [3] предлагают адаптивную нечёткую систему вывода (*adaptive fuzzy inference system*, AdaFIS), которая динамически определяет необходимое количество нечётких правил и их параметры. Модель применяется к индексу Bovespa (основной фондовый индекс Бразилии), курсу BRL/USD и ценам привилегированных акций компании Petrobras. Работа [4] демонстрирует метод эволюционного совместного обучения (*evolving participatory learning*, ePL) для динамической оценки параметров модели. Практическую часть исследователи проводят на исторических значениях фондовых индексов S&P 500 и Bovespa. Отметим, что этот метод является расширением эволюционной модели Такаги – Сугено (*evolving Takagi – Sugeno*, eTS), которая первоначально была предложена в статье [24]. Авторы работы [5] продолжают идею эволюционной нечёткой модели GARCH в статье [4], однако в ней применяют другой метод для нечёткой кластеризации – так называемый алгоритм eClustering. В качестве реальных рядов также взяты значения индексов S&P 500 и Bovespa. Нечёткая модель GARCH также представлена в исследовании [6]. В этой работе асимметричность учитывается благодаря использованию известных значений доходности в качестве объясняющих переменных: поскольку используется не квадрат доходности, а само значение, при нечёткой кластеризации учитывается знак. Авторы применяют модель к индексу Dow Jones Industrial Average.

Модель, предлагаемая в настоящей работе, является комбинацией обычной модели GARCH и нечёткой логики. Кратко описать работу модели можно следующим образом. Входные данные разделяются на несколько нечётких кластеров, и внутри каждого кластера применяется своя локальная модель GARCH. Затем выходы каждой локальной модели агрегируются в один посредством предварительно выбранной функции принадлежности. Эмпирическая часть исследования проводилась на исторических значениях Индекса РТС – одного из основных фондовых индексов российского рынка. Для сравнения прогнозных свойств построенной модели используются две модели (выступающие бенчмарками): GARCH без пересчёта и GARCH с пересчётом (определение понятия GARCH с пересчётом будет приведено далее). Проведённые расчёты доказывают существование нечётких моделей GARCH, точность прогноза которых выше классических моделей.

Структура работы следующая. В § 1 дано теоретическое описание предлагаемой модели и подхода к кластеризации входных данных; § 2 содержит описание исходных данных, постановку задачи и результаты эмпирического исследования. В заключении подводится итог проделанной работы и высказываются предположения о возможных направлениях дальнейших исследований.

1. МЕТОДОЛОГИЯ

1.1. Нечёткая модель GARCH

Классическая модель GARCH описана, например, в работе [13]. Предлагаемая нечёткая модель основана на модели GARCH, но включает в себя также мягкое переключение между нечёткими правилами. Каждому правилу соответствует нечёткий кластер в пространстве входных данных. Если использовать C кластеров, то нечёткую модель GARCH можно представить в виде набора C нечётких правил вида «ЕСЛИ – ТО», каждое из которых имеет вид:

$$\begin{gathered}\text{IF } x_t \in F_k \text{ THEN}\\ h_t^{(k)} = \alpha_{k0} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{ki} y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{kj} h_{t-j},\\ \alpha_{k0} > 0,\\ \alpha_{ki} > 0 \ \forall k,\, i,\\ \beta_{kj} \ge 0 \ \forall k,\, j,\end{gathered} \tag{1}$$

где k – номер кластера (k = 1,..., C); F_k – нечёткий кластер; $x_t = (x_t^1, ..., x_t^n)'$ – вектор переменных, на основе которого в момент времени t определяется принадлежность кластерам. Ряд y_t – значения временнóго ряда; $h_t^{(k)}$ – условная дисперсия, соответствующая нечёткому правилу k, в момент t; h_t – условная дисперсия в момент t (далее будет описано, каким образом она подсчитывается); α_{k0}, α_{ki}, β_{kj} – параметры модели, подлежащие оценке. Здесь и далее символ ' обозначает знак транспонирования. Размерность n вектора x_t, вообще говоря, может быть произвольной и может зависеть от t. Параметры α_{ki} и β_{kj} мы будем называть параметрами консеквента.

Запись $x_t \in F_k$ понимается в нечётком смысле, т. е. степень принадлежности вектора x_t кластеру F_k – это действительное число из отрезка [0, 1]. Степень принадлежности тому или иному кластеру может иметь различную функциональную форму. В данной работе используется гауссовская функция принадлежности, аналитически совпадающая с плотностью многомерного нормального распределения:

$$\mu_k(x_t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det(\Sigma_k))^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_t - c_k)' \sum_k^{-1} (x_t - c_k)}.$$

Здесь $\mu_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция принадлежности вектора k-му кластеру; $c_k \in \mathbb{R}^n$ – центр k-го кластера; $\Sigma_k^* \in \mathbb{R}^n$ – матрица ковариации k-го кластера. В данной работе применяется диагональная положительно определённая матрица ковариации. Матрица Σ_k и вектор c_k – параметры кластера k, полностью его задающие; также будем называть эти параметры в совокупности по всем k параметрами антецедента.

Степени принадлежности нормируются так, чтобы в каждой точке значения степеней принадлежности в сумме по всем кластерам были равны единице:

$$\mu_k^*(x_t) = \frac{\mu_k(x_t)}{\sum_{k=1}^{C} \mu_k(x_t)}.$$

Все значения дисперсии $h_t^{(k)}$, $k = 1, ..., C$, агрегируются в одно значение h_t при помощи функций принадлежности:

$$h_t = \sum_{k=1}^{C} \mu_k^*(x_t) h_t^{(k)},$$

где значения $h_t^{(k)}$ вычисляются, исходя из формулы (1).

Прогнозируется величина y_t^2. Ряд y_t в данной работе – это ряд доходностей некоторого финансового инструмента. Выражение для прогноза следующее:

$$\hat{y}_t^2 = h_t.$$

Пусть T – количество элементов в выборке (совокупной выборке, состоящей и из обучающей, и из тестовой). Для оценки параметров консеквента применяется метод наименьших квадратов, т. е. выбираются те параметры α_{ki}, β_{kj}, для которых сумма

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t^2 - \hat{y}_t^2)^2$$

минимальна. Здесь y_t – известные значения из выборки.

В дальнейшем под y_t подразумевается логарифмическая доходность некоторой ценной бумаги или индекса, выраженная в процентах. То есть если дан ряд z_t некоторых значений (цен финансового инструмента или значений индекса), то

$$y_t = \ln \frac{z_t}{z_{t-1}} \cdot 100. \qquad (2)$$

Во всех расчётах, результаты которых приводятся в настоящей работе, принято $C = 4$.

1.2. Кластеризация и оценка параметров антецедента

В качестве ряда x_t – ряда, подлежащего кластеризации – в исследовании берётся весь известный исходный ряд доходностей y_t на момент времени t, т. е. $x_t = (y_1,..., y_t)'$ $\forall t$. Отметим, что при предложенном подходе размерность n вектора x_t является функцией времени и равна t: $n = n(t) = t$. Таким образом, мы строим семейство нечётких систем: в каждый момент времени, когда становится известно новое значение доходности, весь ряд с учётом этого нового значения кластеризуется заново, порождая новую нечёткую систему.

Входные данные разбиваются на две части: обучающую и тестовую выборки.

Существует несколько разных подходов к кластеризации данных, что в сущности означает оценку параметров антецедента. В настоящей работе применяется метод поиска по сетке. Подробное описание сетки приведено в п. 2.1.

Размер обучающей выборки обозначим T_{train}, размер тестовой – T_{test}.

На той же обучающей выборке, используемой для нечёткой модели, строится классическая модель GARCH(p, q) где значения параметров p и q такие же, как в построенной нечёткой модели. Для оценки точности прогнозов классической модели применяются два подхода: в первом строится обычный прогноз модели на T_{test} дней вперёд; во втором параметры модели GARCH ежедневно переоцениваются в течение T_{test} дней и строится прогноз только на следующий день (условно этот подход назван GARCH с пересчётом). Отметим, что GARCH с пересчётом показывает меньшую ошибку прогноза, чем GARCH без пересчёта, что подтверждается проделанными вычислениями (см. табл. 1 и 2 в § 2). Далее для каждого из этих двух подходов подсчитываются среднеквадратические ошибки: $MSE_{n/r}$ для GARCH без пересчёта и $MSE_{w/r}$ для GARCH с пересчётом. Полученные два значения ошибок используются в качестве бенчмарков для нечёткой модели. Чтобы сравнить, насколько нечёткая модель “лучше” или “хуже” классической модели, подсчитываются величины $ratio_{w/r} = \dfrac{MSE_{w/r}}{MSE_{fuzzy}}$ и $ratio_{n/r} = \dfrac{MSE_{n/r}}{MSE_{fuzzy}}$. Если величина $ratio_i > 1$, то ошибка нечёткого метода меньше, чем ошибка классического i-го метода (здесь i = “w/r” или i = “n/r”). В этом случае чем выше значение $ratio_t$, тем “лучше” нечёткая модель по сравнению с i-й классической моделью.

Для задания нечёткой модели мы используем множество $\Theta = (\Theta,..., \Theta_C) \in \mathbb{R}^{n \times n \times C}$ возможных значений параметров антецедента. Каждое $\Theta_k = \{c_k, \Sigma_k \,|\, c_k \in \mathbb{R}^n, \Sigma_k \in \mathbb{R}^n\}$ представляет собой все возможные комбинации значений c_k и Σ_k. Процесс оценки параметров антецедента начинается с того, что для каждого элемента Θ строится своя нечёткая модель и считается значение ошибки MSE_{fuzzy}. Чтобы найти наилучшие параметры антецедента c_k и Σ_k, максимизируется величина $ratio_{w/r} = ratio_{w/r}(c_1, ..., c_C, \Sigma_1,..., \Sigma_C)$.

Таким образом, после приведённой выше процедуры находится наилучший набор параметров антецедента, т. е. наилучшая (по сравнению классической моделью GARCH) нечёткая модель считается заданной.

2. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

2.1. Множество параметров антецедента

В исследовании использовались значения $p = 1$, $q = 1$. Количество кластеров зафиксировано и равно четырём ($C = 4$). Центр каждого кластера $c_k \in \mathbb{R}^n$ представляет собой вектор с совпадающими компонентами c_k^*:

$$c_k = \begin{pmatrix} c_k^* \\ \dots \\ c_k^* \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица – диагональная вещественнозначная матрица размера $n \times n$, на главной диагонали которой все элементы равны $\Sigma_k^* > 0$ – этот параметр можно считать дисперсией кластера k:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \Sigma_k^* & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Sigma_k^* & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \Sigma_k^* \end{pmatrix}.$$

Пусть $c^* = (c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*)$, $\Sigma^*(\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_3^*, \Sigma_4^*)$. Эти два четырёхмерных вектора полностью задают все четыре кластера. Вместо Θ будем использовать эти векторы для параметризации пространства возможных значений вектора.

В данной работе набор центров не варьировался, а был задан экспертно: во всех расчётах c^* = (−7,5; −1,5; 1,5; 4). Интуитивно центры c^* можно интерпретировать следующим образом: центр 1,5 соответствует малым положительным доходностям, центр 4 – большим; центры −1,5 и −7,5 соответствуют малым по модулю и большим по модулю отрицательным доходностям соответственно. Тот факт, что |−7,5| > |4|, отражает характерную особенность рынков капитала, согласно которой под влиянием положительных внешних шоков рынок растёт более плавно, чем падает под влиянием внешних отрицательных шоков.

Дисперсии оцениваются методом поиска по сетке, которая была построена следующим образом. Диапазоны значений были выбраны такими: для Σ_1^* – от 4 до 12, для Σ_2^* и Σ_3^* – от 1 до 6, для Σ_4^* – от 2 до 10. Шаг сетки был принят равным единице для всех Σ_k^*. Таким образом, всего было рассмотрено 2916 узлов сетки.

2.2. Результаты

В качестве исходного ряда использовалась дневная логарифмическая доходность Индекса РТС. На рис. 1 показаны значения дневных закрытий индекса за длительный исторический период.

Начало обучающей выборки совпадает с первым торговым днём 2014 года (6 января 2014 г.). Рис. 2 отражает значения Индекса РТС за используемый в расчётах исторический период (ряд z_t), который составляет около трёх лет с начала обучающей выборки. Соответствующая логарифмическая доходность (ряд y_t, полученный по формуле (2)) изображена на рис. 3.

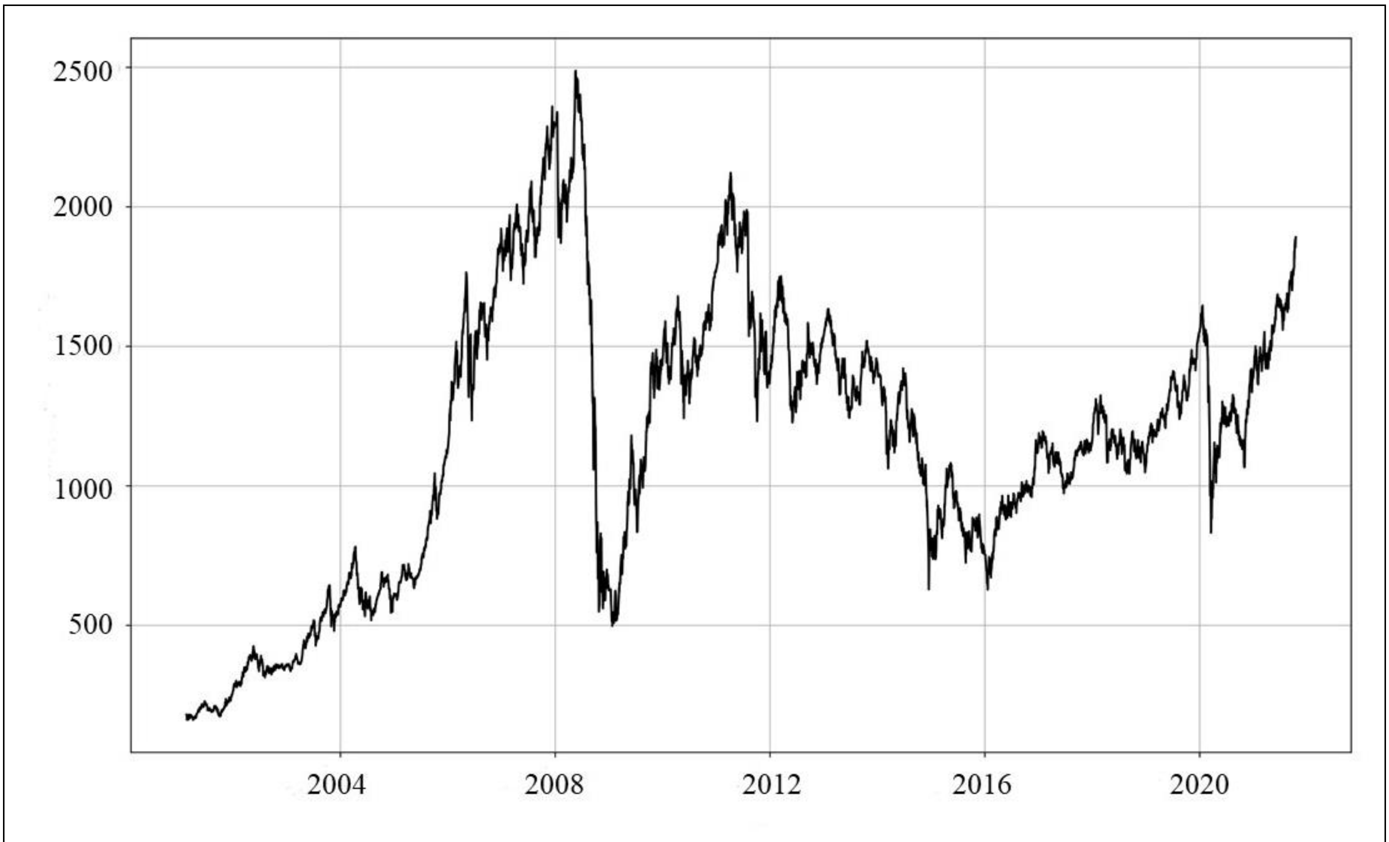

Рис. 1. Дневные значения Индекса РТС с 2001 г.

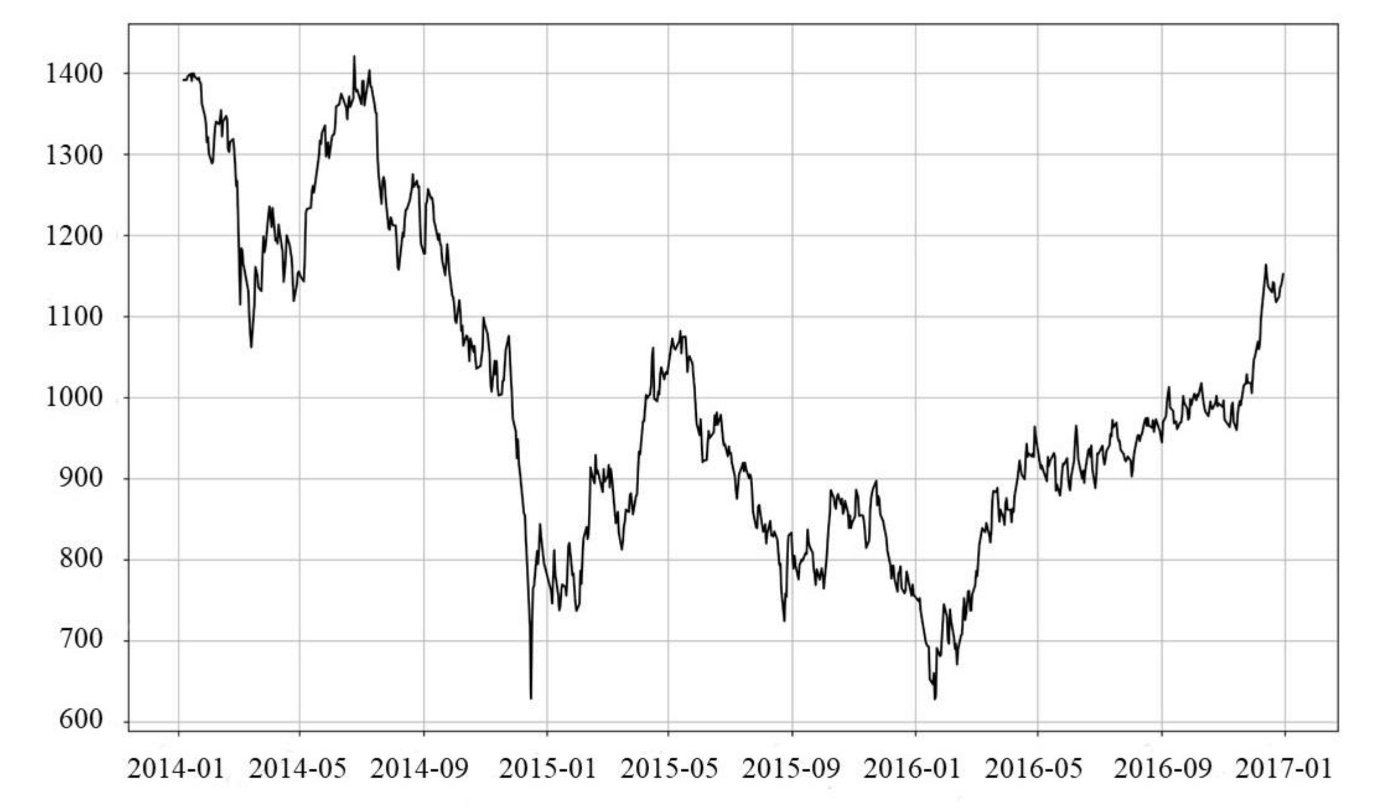

Рис. 2. Дневные значения Индекса РТС за период с января 2014 г. по декабрь 2016 г.

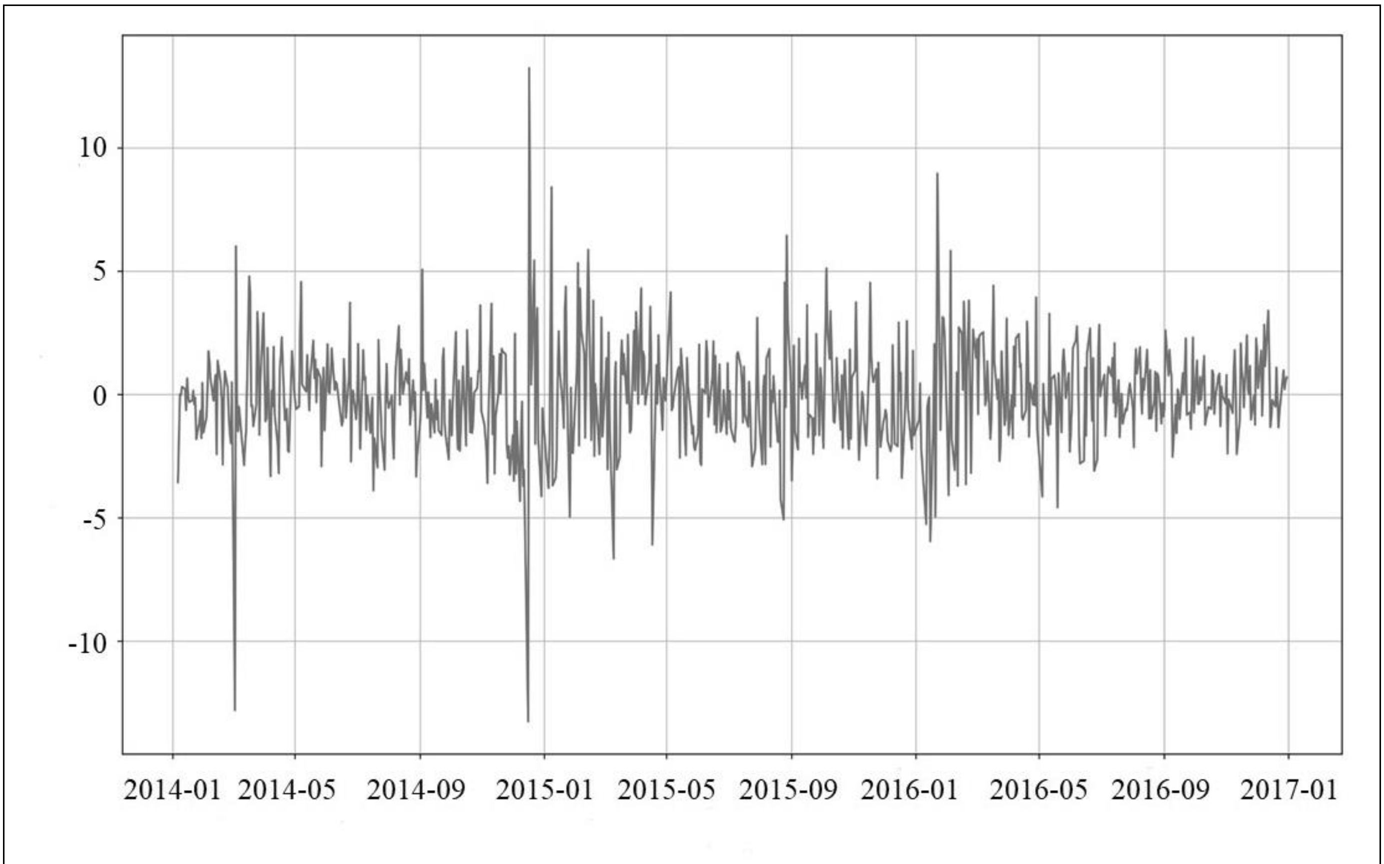

Рис. 3. Дневная логарифмическая доходность Индекса РТС за период с января 2014 г. по декабрь 2016 г.

Параметры антецедента (конкретнее, дисперсии, так как центры были зафиксированы) были оценены при использовании 100 элементов в обучающей выборке и 10 элементов в тестовой выборке. Наилучший набор дисперсий – (7, 6, 3, 5). Далее модель с этими параметрами была применена к выборкам других размеров, соответствующие результаты показаны в табл. 2. Размеры выборок обусловлены следующим: 252 – это примерное количество торговых дней в году; 504 – в двух годах; 21 – в месяце; 42 – в двух месяцах; 63 – в трёх месяцах.

Результаты исследования представлены в двух таблицах. В табл. 1 продемонстрированы характеристики систем, показавших наилучшие результаты по сравнению с классической моделью. Заметим, что во всех этих моделях $ratio_{w/r} > 1$. В первой строке этой таблицы содержатся сведения о наилучшей нечёткой модели. В табл. 2 показаны результаты применения наилучшей системы из табл. 1 к выборкам других размеров. Расчёты показывают, что ошибка этих систем больше, чем ошибка классической модели ($ratio_{w/r} < 1$).

Были достигнуты хорошие результаты при 100 элементах в обучающей выборке и 10 элементах в тестовой выборке. При увеличении размера любой из выборок качество нечёткой модели начинает снижаться. Потенциальным объяснением этого может быть то, что параметры антецедента нужно оценивать заново на других размерах выборок (это не было сделано в силу высоких вычислительных затрат). Кроме того, добавление вариативности центров кластеров может способствовать нахождению модели с более высокой точностью.

Таким образом, было показано, что для достаточно коротких временных рядов существуют нечёткие системы типа GARCH, которые по своим прогнозным свойствам превосходят классическую модель GARCH. При увеличении длины временного ряда классическая модель GARCH становится более «сильным» конкурентом. Скорее всего, это объясняется преимуществами метода максимального правдоподобия, которые проявляются при увеличении длины временного ряда. Однако и для более длинных временных рядов нельзя исключить того, что нечёткие системы типа GARCH, превосходящие по своим свойствам классическую модель GARCH, могут быть построены при использовании более широких классов функций принадлежности.

Таблица 1

Наилучшие модели, оценённые на обучающей и тестовой выборках размеров 100 и 10 элементов соответственно

T_{train}	T_{test}	Σ^*	MSE_{fuzzy}	$MSE_{n/r}$	$MSE_{w/r}$	$ratio_{n/r}$	$ratio_{w/r}$
100	10	[7, 6, 3, 5]	9,66	17,89	12,75	1,85	1,32
100	10	[6, 4, 4, 6]	9,72	17,89	12,75	1,84	1,31
100	10	[8, 6, 4, 6]	10,18	17,89	12,75	1,76	1,25
100	10	[8, 1, 4, 6]	11,31	17,89	12,75	1,58	1,13

Таблица 2

Наилучшая оценённая модель, применённая к выборкам других размеров

T_{train}	T_{test}	Σ^*	MSE_{fuzzy}	$MSE_{n/r}$	$MSE_{w/r}$	$ratio_{n/r}$	$ratio_{w/r}$
252	21	[7, 6, 3, 5]	353,14	273,58	189,09	0,77	0,51
252	42	[7, 6, 3, 5]	251,84	201,34	137,60	0,80	0,55
252	63	[7, 6, 3, 5]	190,30	141,74	99,21	0,74	0,52
504	21	[7, 6, 3, 5]	542,75	382,64	300,49	0,70	0,55
504	42	[7, 6, 3, 5]	290,84	203,56	160,35	0,70	0,55
504	63	[7, 6, 3, 5]	202,47	143,12	112,76	0,70	0,56

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проведённом исследовании нечёткая модель типа GARCH была применена для моделирования волатильности. В качестве альтернативы предложенной модели были рассмотрены классические модели GARCH с пересчётом и без такового – эти модели послужили бенчмарками. Эффективность нечёткой модели была протестирована на основном индексе российского фондового рынка – Индексе РТС. Показано существование нечётких систем, способных давать более точный прогноз по сравнению с традиционными моделями.

Тем не менее, очевидна тенденция прогнозных свойств нечёткой системы к ухудшению (в сравнении с моделями-бенчмарками) с ростом размера выборок. Это может быть связано как с методом оценки параметров в нечёткой модели, так и с методом оценки параметров в классической модели GARCH.

Одно из возможных направлений дальнейшего исследования – практические методы нахождения нечётких систем, существование которых было установлено в данной работе. Особенный интерес представляют другие формы функций принадлежности, а также более универсальные методы оценки параметров антецедента.

Благодарности. *Исследование выполнено с использованием суперкомпьютерного комплекса НИУ ВШЭ* [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hung, J.C.* A Fuzzy Asymmetric GARCH Model Applied to Stock Markets // Information Sciences. – Elsevier, 2009. – Vol. 179, no. 22. – P. 3930–3943.
2. *Lepskiy, A., Suevalov, A.* Application of Fuzzy Asymmetric GARCH-Models to Forecasting of Volatility of Russian Stock Market // Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer Verlag, 2018. – Vol. 679. – P. 286–294.
3. *Luna, I., Ballini, R.* Adaptive Fuzzy System to Forecast Financial Time Series Volatility // Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. – 2012. – Vol. 23. – P. 27–38. – DOI: 10.3233/IFS-2012-0491.
4. *Maciel, L., Gomide, F., Ballini, R.* Enhanced Evolving Participatory Learning Fuzzy Modeling: An Application for Asset Returns Volatility Forecasting // Evolving Systems. – 2013. – Vol. 5. – P. 1–14. – DOI: 10.1007/s12530-013-9099-0.
5. *Maciel, L., Gomide, F., Ballini, R.* Evolving Fuzzy-GARCH Approach for Financial Volatility Modeling and Forecasting // Computational Economics. – Springer New York LLC, 2016. – Vol. 48, no 3. – P. 379–398.
6. *Popov, A.A., Bykhanov, K.V.* Modeling Volatility of Time Series Using Fuzzy GARCH Models // Proceedings - 9th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology. – 2005. – Vol. 1. – P. 687–692.
7. *Tan, L., Wang, S., Wang, K.* A New Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System with Adaptive Adjustment Rules for Stock Market Volatility Forecasting // Information Processing Letters. – 2017. – Vol. 127. – P. 32–36. – DOI: 10.1016/j.ipl.2017.06.012
8. *Troiano, L., Mejuto, E., Kriplani, P.* An Alternative Estimation of Market Volatility Based on Fuzzy Transform // IFSA-SCIS 2017 - Joint 17th World Congress of International Fuzzy Systems Association and 9th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems. – Otsu, 2017. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/IFSA-SCIS.2017.8023316.
9. *Thavaneswaran, A., Liang, Y., Zhu, Z.*, et al. Novel Data-Driven Fuzzy Algorithmic Volatility Forecasting Models with Applications to Algorithmic Trading // 2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). – Glasgow, 2020. – P. 1–8. – DOI: 10.1109/FUZZ48607.2020.9177735
10. *Black, F., Scholes, M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, no. 3. – P. 637–657.
11. *Hull, J.C.* Options, Futures, and Other Derivatives. Ninth Edition. – London: Pearson, 2014. – 896 p.
12. *Bollerslev, T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // Journal of Econometrics. – 1986. – Vol. 31, no. 3. – P. 307–327. – DOI: https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1.
13. *Tsay, R.S.* Analysis of Financial Time Series. Third Edition. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2010. – 712 p.
14. *Engle, R.F.* Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // Econometrica. – 1982. – Vol. 50, no. 4. – P. 987–1007.
15. *Engle, R.F., Ng, V.K.* Measuring and Testing the Impact of News on Volatility // The Journal of Finance. [American Finance Association, Wiley]. – 1993. – Vol. 48, no. 5. – P. 1749–1778.
16. *Sentana, E.* Quadratic ARCH Models // The Review of Economic Studies. [Oxford University Press, Review of Economic Studies, Ltd.]. – 1995. – Vol. 62, no. 4. – P. 639–661.
17. *Jagannathan, R., Glosten, L., Runkle, D.* On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // Journal of Finance. – 1993. – Vol. 48. – P. 1779–1801.
18. *Zakoian, J.-M.* Threshold Heteroskedastic Models // Journal of Economic Dynamics and Control. – 1994. – Vol. 18, no. 5. – P. 931–955.
19. *Fornari, F., Mele, A.* Modeling the Changing Asymmetry of Conditional Variances // Economics Letters. North-Holland. – 1996. – Vol. 50, no. 2. – P. 197–203.
20. *Takagi, T., Sugeno, M.* Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1985. – Vol. SMC-15, no. 1. – P. 116–132. DOI: 10.1109/TSMC.1985.6313399.
21. *Sugeno, M., Kang, G.T.* Structure Identification of Fuzzy Model // Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – Vol. 28, no. 1. – P. 15–33.
22. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. 2-е издание. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 798 с. [*Piegat, A.* Fuzzy Modeling and Control. Second Edition. – Moscow: BINOM. Laboratoriya znanii, 2013. – 798 p. (In Russian)]
23. *Baczyński, M., Jayaram, B.* Fuzzy Implications. – Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2008. – 328 p.

24. *Angelov, P.P., Filev, D.P.* An Approach to Online Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). – 2004. – Vol. 34, no. 1. – P. 484–498. – DOI: 10.1109/TSMCB.2003.817053.
25. *Kostenetskiy, P.S., Chulkevich, R.A., Kozyrev, V.I.* HPC Resources of the Higher School of Economics // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1740, no. 1. – Art. no. 012050. – DOI: 10.1088/1742-6596/1740/1/012050

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Клочковым.

Поступила в редакцию 10.06.2022,
после доработки 10.12.2022.
Принята к публикации 13.12.2022.

Свиязов Владимир Андреевич – аспирант, НИУ ВШЭ, г. Москва, ✉ v.sviyazov.96@gmail.com.

FUZZY VOLATILITY MODELS WITH APPLICATION TO THE RUSSIAN STOCK MARKET

V.A. Sviyazov

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

✉ v.sviyazov.96@gmail.com

Abstract. Volatility modeling and forecasting is a topical problem both in scientific circles and in the practice. This paper develops an approach combining the GARCH model and fuzzy logic. The Takagi–Sugeno fuzzy inference scheme is adopted to fuzzify an original autoregression model (the conditional heteroskedasticity model). As a result, several different local GARCH models can be used in different input data domains with soft switching between them. This approach allows considering such phenomena as volatility clustering and asymmetric volatility (the properties of real financial markets). The proposed algorithm is applied to the historical values of the RTS Index and is compared with the classical GARCH model. As demonstrated below, in several cases, fuzzy models have advantages over traditional ones, namely, higher forecasting accuracy. Thus, the proposed method should be considered among others when modeling the volatility of the Russian financial market instruments: it demonstrates qualities superior to the conventional counterparts.

Keywords: fuzzy systems, forecasting, time series, volatility.

Acknowledgments. This research was supported in part through computational resources of HPC facilities at HSE University [25].