ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XXIII

Выпуск 3 (84)

Тула
2022

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 23 Выпуск 3

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-5-18

Метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа[1]

О. Б. Борисова

Борисова Ольга Борисовна — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: olyaboricova@gmail.com

Аннотация

В этой статье изучаются свойства метрического сегмента в классе всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с расстоянием Громова — Хаусдорфа. При ограничении на компактные метрические пространства, расстояние Громова — Хаусдорфа становится метрикой. Метрическим сегментом называется класс точек, лежащих между двумя данными. По аксиоматике теории множеств фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) собственный класс — это такое «огромное семейство», эквивалентное классу всех множеств, которое уже само множеством не является. В этой статье показано, что любой метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа, при условии, что существует хотя бы одно метрическое пространство, лежащее на ненулевых расстояниях до концевых точек сегмента, является собственным классом. А сегмент, у которого расстояние между концевыми точками равно нулю — множество. Также доказано, что при ограничении на компактные метрические пространства невырожденный метрический сегмент не является компактным множеством.

Ключевые слова: Расстояние Громова — Хаусдорфа, класс всех метрических пространств, аксиоматика фон-Неймана — Бернайса — Гёделя, метрический сегмент, компактность.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
О. Б. Борисова. Метрический сегмент в классе Громова — Хаусдорфа // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 5–18.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00775а) и стипендии Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант №20-8-2-8-1).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-5-18

Metric Segments in Gromov–Hausdorff class[2]

O. B. Borisova

Borisova Olga Borisovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: olyaboricova@gmail.com

Abstract

We study properties of metric segments in the class of all metric spaces considered up to an isometry, endowed with Gromov–Hausdorff distance. On the isometry classes of all compact metric spaces, the Gromov-Hausdorff distance is a metric. A metric segment is a class that consists of points lying between two given ones. By von Neumann–Bernays–Gödel (NBG) axiomatic set theory, a proper class is a "monster collection", e.g., the collection of all sets. We prove that any metric segment in the proper class of isometry classes of all metric spaces with the Gromov-Hausdorff distance is a proper class if the segment contains at least one metric space at positive distances from the segment endpoints. If the distance between the segment endpoints is zero, then the metric segment is a set. In addition, we show that the restriction of a non-degenerated metric segment to compact metric spaces is a non-compact set.

Keywords: Gromov–Hausdorff distance, class of all metric spaces, von Neumann–Bernays–Gödel axioms, metric segment, compact set.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
O. B. Borisova, 2022, "Metric Segments in Gromov–Hausdorff class" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 5–18.

1. Введение

Расстояние Громова — Хаусдорфа — это величина, показывающая степень различия между двумя произвольными метрическими пространствами. Данное понятие тесно связано с расстоянием Хаусдорфа, впервые появившимся в 1914 году в книге Хаусдорфа «Теория множеств» [1]. Оно естественно определяет расстояние на непустых подмножествах некоторого метрического пространства и становится метрикой для замкнутых ограниченных подмножеств.

В 1981 Громов в своей работе [2] использовал изометричные вложения метрических пространств в одно общее метрическое пространство и рассматривал расстояние Хаусдорфа между их образами. Наименьшее возможное расстояние Хаусдорфа при таких вложениях принято называть расстоянием Громова — Хаусдорфа. Было доказано, что на метрических компактах, рассматриваемых с точностью до изометрии, данное расстояние является метрикой [3]. Независимо от Громова, шестью годами раннее, в работе Эдвардса [4] было введено эквивалентное расстояние между метрическими пространствами, но определенное несколько иным способом. Более подробный исторический обзор можно найти в работе [5].

[2]The study was performed under the support of the Russian Foundation for Basic Research (project №19-01-00775a) and the scholarship of the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS» (grant №20-8-2-8-1).

Известно, что расстояние Громова — Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника, а на любых изометричных метрических пространствах равно нулю. Поэтому будем говорить о нем как о расстоянии между классами изометрии метрических пространств, вычисляя его на произвольном представителе класса (величина не зависит от выбора представителя). Так как на любом множестве можно определить метрику (например, положив равной 1 между любыми двумя различными элементами), по известному парадоксу Кантора, семейство всех классов изометрии не могут образовать множество. В данной статье мы будем использовать систему аксиом фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) теории множеств [6], чтобы корректно работать с такими семействами.

В теории NBG все объекты называются классами. Класс называют *множеством*, если существует класс, в котором этот класс является элементом. В противном случае класс называют *собственным классом*. Семейство всех множеств является собственным классом. Для классов стандартным образом определены операции отображения и декартова произведения. Таким образом, на собственном классе, как и на множестве, мы можем корректно задать функцию расстояния. Семейство классов изометрии метрических пространств (по приведенному выше замечанию) является собственным классом. Этот собственный класс, с определенным на нём расстоянием Громова — Хаусдорфа, — обобщенное псевдометрическое пространство, которое мы будем обозначать $\mathcal{GH}$. Пространство называю обобщенным псевдометрическим пространством, если определенная на его элементах функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника, но может принимать бесконечное значение и равняться нулю на паре не равных элементов.

В данной работе изучается класс элементов в пространства $\mathcal{GH}$, находящихся между двумя данными. А точнее, метрическое пространство $Z \in \mathcal{GH}$ лежит между $X, Y \in \mathcal{GH}$, если $d_{GH}(X,Z) + d_{GH}(Z,Y) = d_{GH}(X,Y)$, где $d_{GH}(\cdot)$ — обозначение расстояния Громова — Хаусдорфа. Класс всех таких Z называют *метрическим сегментом* и обозначают $[X,Y]$. Сегмент, у которого расстояние Громова — Хаусдорфа между концевыми точками равно нулю, называется *вырожденным*, иначе *невырожденным*.

В данной статье показано, что невырожденный метрический сегмент с непустой «внутренностью» (т.е. если в сегменте существует метрическое пространство с ненулевыми расстояниями до концевых точек) содержит в себе так много неизометричных метрических пространств, что уже является не множеством, а становится собственным классом. Вырожденный сегмент является множеством.

При ограничении $\mathcal{GH}$ на множество компактных метрических пространств, расстояние Громова — Хаусдорфа становится метрикой. Данное пространство называется *метрическим пространством Громова — Хаусдорфа* и обозначается $\mathcal{M}$. Геометрия этого пространства подробно описана в [3], [7]. В 2015 году А.О.Ивановым, Н.К.Николаевой и А.А.Тужилинымм было доказано одно из важных свойств этой метрики — строгая внутренность [8], [9]. Это означает, что в метрическом пространстве Громова — Хаусдорфа любые две точки соединены кратчайшей геодезической, длина которой равна расстоянию между ее концами.

Особые кратчайшие геодезические, образованные с помощью оптимального соответствия (точное определение будет введено ниже) назовём R-геодезическими. Примеры применения техники соответствий, и в том числе оптимальных соответствий, встречаются во многих работах, например [10], [11] или [12]. Объединение всех R-геодезических, соединяющих $X, Y \in \mathcal{GH}$, называется *R-сегментом* и обозначается $[X,Y]_R$. В 2018 году Д. Климбус показала, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $[X,Y]_R \cap \mathcal{M}$ компактно [13]. В этой статье докажем, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ невырожденный сегмент $[X,Y] \subset \mathcal{M}$, рассматриваемый в метрическом пространстве Громова — Хаусдорфа, не является компактным множеством. А для $X, Y \in \mathcal{GH}$ класс $[X,Y]_R$ — множество, в отличие от метрического сегмента $[X,Y]$.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание

к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. *Функцией расстояния* на X будем называть каждое симметричное отображение $d : X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на всех парах одинаковых элементов. Если d удовлетворяет неравенству треугольника, то отображение d называется *обобщенной псевдометрикой*. При выполнении условия $d(x, y) \neq 0$ для любых $x \neq y$, данное расстояние становится *обобщенной метрикой*. Если дополнительно справедливо неравенство $d(x, y) < \infty$ для любых $x, y \in X$, то это отображение назовем *метрикой* или *конечной метрикой*, чтобы подчеркнуть отличие от обобщенной метрики. Множество X с (обобщенной) (псевдо-)метрикой называется (*обобщенным*) (*псевдо-*)*метрическим пространством*.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Иногда, для подчеркивания, о каком пространстве идет речь, будем добавлять нижний индекс $|xy|_X$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\}$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X. Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A, B) = \max\bigl\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\bigr\}.$$

Величина $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Пусть $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых ограниченных подмножеств X.

Предложение 1 ([3]). *Ограничение $d_H(A, B)$ на $\mathcal{B}(X)$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2 ([3]). *Ограничение $d_H(A, B)$ на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). Положим

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\bigl\{r : \exists\,(X', Y', Z'),\ d_H(X', Y') \le r\bigr\}.$$

Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется *расстоянием Громова — Хаусдорфа между X и Y*.

Предложение 3 ([3]). *Расстояние Громова — Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника.*

Так как для любых изометричных метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа равно нулю, будем считать изометричные пространства эквивалентными. Таким образом, расстояние Громова — Хаусдорфа определено на классах изометрии метрических пространств (оно не зависит от представителей классов). Заметим, что расстояние Громова — Хаусдорфа может принимать бесконечные значения, и также существуют примеры неизометричных ограниченно компактных метрических пространств, для которых $d_{GH}(X, Y) = 0$, см. [3].

Семейство всех классов изометрии очень большое. Оно «не меньше» семейства всех множеств, так как на любом множестве мы можем задать метрику (например, положив расстояние 1 на всех парах различных точек). Из парадокса Кантора известно, что семейство всех множеств уже само не может быть множеством. В этой статье будем пользоваться аксиоматикой теории множеств фон Неймана — Бернайса — Гёделя (NGB) [6]. Напомним формулировки некоторых положений.

В NGB все объекты, аналоги привычных множеств, называются *классами*. Существует два вида классов: *множество* и *собственный класс*. Класс $\mathcal{A}$ называется *множеством*, если существует класс $\mathcal{C}$ такой, что $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. Класс $\mathcal{A}$ называется *собственным классом*, если для каждого класса $\mathcal{C}$ верно $\mathcal{A} \notin \mathcal{C}$.

Предложение 4 ([6]). *Класс всех множеств $\mathcal{V} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} = \mathcal{A}\}$ является собственным классом.*

Для любых классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ определены операции $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ стандартным образом, поэтому мы можем говорить о функции расстояния на классах. Собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с расстоянием Громова — Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{GH}$. Другим примером собственного класса является класс ограниченных метрических пространств, рассматриваемых с точность до изометрии. Этот класс с определенным на нем расстоянием Громова — Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{B}$.

Предложение 5 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{B}$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 6 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова — Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X, Y)$ называются *отношениями между X и Y*.

Пусть $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ обозначают канонические проекции $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определено *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y),\ (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 7 ([3]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$. Соответствие называют *замкнутым*, если оно является замкнутым подмножеством $X \times Y$. Пусть $\mathcal{R}_c(A, B)$ — множество всех замкнутых соответствий.

Предложение 8 ([9], [12]). *Для $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y) \cap \mathcal{R}_c(X, Y) \neq \emptyset$.*

Пусть X, Y — произвольные метрические пространства. При каждом $t \in (0, 1)$ определим на $X \times Y$ функцию расстояния, положив

$$\big|(x, y)(x', y')\big|_t = (1 - t)|xx'| + t|yy'|.$$

Предложение 9 ([9]). *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0, 1)$ на $X \times Y$.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$, метрическое пространство $\big(\sigma, |\cdot|_t\big)$ обозначим через σ_t.

Предложение 10 ([9]). *Для любых* $X, Y \in \mathcal{M}$ *и любого замкнутого* $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ *имеем* $\sigma_t \in \mathcal{M}$ *при каждом* $t \in (0,1)$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство $R_t, t \in (0,1)$, в точках $t = 0, 1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Предложение 11 ([8], [9], [12]). *Для любых* $X, Y \in \mathcal{M}$ *и* $R \in \mathcal{R}_{opt}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$ *отображение* $t \mapsto R_t, t \in [0,1]$, *задает кривую в* $\mathcal{M}$, *соединяющую* X *и* Y. *Эта кривая является кратчайшей, причем ее длина равна* $d_{GH}(X,Y)$. *Тем самым, метрика пространства* $\mathcal{M}$ *— строго внутренняя.*

Пусть $\mathcal{A}$ — класс, наделенный обобщенной псевдометрикой, и $X, Y \in \mathcal{A}$. *Сегментом* с концами X и Y назовём подкласс

$$[X,Y] = \big\{Z \in \mathcal{A} : |XZ| + |ZY| = |XY|\big\}.$$

Если $|XY| = 0$, то сегмент называют *вырожденным*, иначе *невырожденным.*

Пусть теперь $X, Y \in \mathcal{GH}$. Определим R-сегмент $[X,Y]_R \subset [X,Y]$ следующим образом: рассмотрим произвольное оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}_{opt}(X,Y)$ (их может не быть) и пусть, как и выше, R_t – это R–геодезическая. Объединение всех таких R_t мы и обозначим $[X,Y]_R$.

Предложение 12 ([13]). *Для любых* $X, Y \in \mathcal{M}$, *множество* $[X,Y]_R \cap \mathcal{M}$ *компактно.*

Пусть X — метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. *Числом покрытия* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon)$ называется наименьшее количество открытых шаров радиуса ε, которыми можно покрыть пространство X.

Следующее предложение называется *критерием Громова предкомпактности семейства метрических компактов.*

Через $\operatorname{diam} X = \sup\big\{|ab| : a, b \in X\big\}$ обозначим диаметр пространства X.

Предложение 13 ([3]). *Пусть* C *— непустое подмножество* $\mathcal{M}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Существует число* $D \geq 0$ *и функция* $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ *такие, что для всех* $X \in C$ *выполняется* $\operatorname{diam} X \leq D$ *и* $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.

2. *Семейство* $C \subset \mathcal{M}$ *предкомпактно.*

В данной статье мощность множества X или по-другому его кардинальное число (кардинал) будем обозначать через $\#X$. Напомним некоторые свойства кардинальных чисел.

Предложение 14 ([14]). *Класс всех кардинальных чисел является собственным классом.*

Два множества X, Y *равномощны* или *имеют одинаковое кардинальное число*, т.е. $\#X = \#Y$, если существует взаимно однозначное соответствие между X и Y. Говорят, что *кардинал множества* X *меньше кардинала множества* Y, и пишут $\#X < \#Y$, если существует инъективное отображение X в U, где $U \subset Y$ и $U \neq Y$. Таким образом, на кардинальных числах определено отношение частичного порядка. Неравенство $\#X \leq \#Y$ обозначает, что либо $\#X < \#Y$, либо $\#X = \#Y$.

Предложение 15 (Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера [6]). *Если для произвольных множеств* X, Y *верно* $\#X \leq \#Y$ *и* $\#Y \leq \#X$, *то* $\#X = \#Y$.

В данной статье мы будем принимать аксиому выбора построения теории множеств.

Класс называется *вполне упорядоченным*, если на нем установлено отношения порядка, и каждый его непустой подкласс имеет наименьший в смысле этого отношения элемент. Из определения следует, что во вполне упорядоченном классе любые два элемента сравнимы.

Предложение 16 (Принцип полного упорядочения [6]). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Опираясь на аксиому выбора, доказывается следующая теорема.

Предложение 17 ([14]). *Всякое множество кардинальных чисел с введенным выше отношением порядка является вполне упорядоченным.*

Обозначим мощность множества натуральных чисел через $\aleph_0$, а мощность множества действительных чисел через $\mathfrak{c}$.

Для кардинальных чисел определены арифметические операции. Пусть $\#X = m$ и $\#Y = n$. *Сумма* кардиналов m и n равна мощности множества $X \cup Y$ при условии $X \cap Y = \emptyset$. *Произведение* кардиналов m и n, имеющее обозначение $m \cdot n$, — это мощность множества $X \times Y$. Операция *возведения в степень* с обозначением n^m определена как мощность множества всех отображений из X в Y.

Предложение 18 ([15]). *Произведение или сумма двух кардинальных чисел, отличных от нуля, где хотя бы одно из них бесконечно, равно большему из них.*

Вернемся к метрическим пространствам.

Назовем *плотностью* метрического пространства X наименьшее такое кардинальное число m, что в пространстве X имеется всюду плотное подмножество мощности m. Обозначим плотность через $\operatorname{den}(X)$. Благодаря полной упорядоченности кардинальных чисел, минимальное по мощности всюду плотное подмножество всегда существует.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Метрические пространства X и Y, удовлетворяющие условию $d_{GH}(X,Y) = 0$, имеют одинаковую плотность.*

Доказательство. Докажем неравенство $\operatorname{den}(X) \ge \operatorname{den}(Y)$, из которого будет следовать утверждение теоремы в силу симметричности формулировки относительно X и Y.

Пусть плотность X конечна. Тогда метрическое пространство X совпадает со своим всюду плотным подмножеством и $\#X = \operatorname{den}(X)$, то есть X конечно. Покажем от противного, что $\#X \ge \#Y$.

Пусть $\#X < \#Y$, тогда выберем $\#X+1$ произвольных различных точек пространства Y и обозначим через ε минимальное расстояние между ними. Из условия $d_{GH}(X,Y) = 0$ по предложению 7 следует существование соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такого, что $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Так как на R каноническая проекция $\pi_Y(x,y) = y$ сюрьективна, то существует пара точек $y_1, y_2 \in Y$ и $x \in X$, удовлетворяющих условию $(x,y_1),(x,y_2) \in R$ и $|y_1 y_2| \ge \varepsilon$. Но это противоречит условию $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Таким образом, $\operatorname{den}(X) = \#X \ge \#Y \ge \operatorname{den}(Y)$.

Пусть теперь плотность X бесконечна. Обозначим через $\widetilde{X}$ всюду плотное подмножество X такое, что $\#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$. По предложению 7, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует соответствие $R_{1/n} \in \mathcal{R}(X,Y)$, удовлетворяющее условию $\operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{1}{n}$. Обозначим через $Y_{1/n}$ «однозначный образ» отображения $R_{1/n}(\widetilde{X})$, то есть

$$Y_{1/n} = \bigcup_{x \in \widetilde{X}} y_{1/n}(x),$$

где $y_{1/n}(x) \in Y$ — один произвольно выбранный элемент из образа $R_{1/n}(x)$. Тогда $\#Y_{1/n} \le \#\widetilde{X}$.

Покажем, что $\widetilde{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_{1/n})$ является всюду плотным подмножеством Y. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$. Для натурального n, удовлетворяющему условию $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n}$, выберем элемент x из прообраза $R_{1/n}^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R_{1/n}\}$. Найдем элемент $\widetilde{x}$ из всюду плотного подмножества $\widetilde{X}$, для которого $|x\widetilde{x}| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\widetilde{y} = y_{1/n}(\widetilde{x}) \in Y_{1/n}$ получаем,

$$\big||x\widetilde{x}| - |y\widetilde{y}|\big| \le \operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, существует $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, для которого верно $|y\widetilde{y}| < \varepsilon$. Из арифметики кардинальных чисел следует, что

$$\#\widetilde{Y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \#Y_{1/n} \le \aleph_0 \cdot \#\widetilde{X} = \max\{\aleph_0, \#\widetilde{X}\} \le \#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$$

Тогда $\operatorname{den}(Y) \le \#\widetilde{Y} \le \operatorname{den}(X)$. □

Следствие 1. *Для любого метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ класс $[X] := \{Z \in \mathcal{GH} : d_{GH}(X, Z) = 0\}$ является множеством. В частности, множеством является каждый вырожденный сегмент $[X, Y]$.*

Доказательство. Пусть для метрического пространства Z верно $Z \in [X]$. Тогда, по теореме 1, $\operatorname{den}(Z) = \operatorname{den}(X)$. Число элементов в метрическом пространстве не превосходит количества последовательностей из точек любого всюду плотного подмножества. Тогда $\#Z \le \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Отметим также, что количество неизометричных метрических пространств с одинаковой мощностью m не превосходит $\mathfrak{c}^{m \cdot m}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность множества вещественных чисел (континуум). Таким образом, получаем неравенство $\#[X] \le \mathfrak{c}^{m \cdot m}$, где $m = \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Это означает, что $[X]$ — множество.

Так как вырожденный сегмент $[X, Y] = [X] = [Y]$, получаем, что любой вырожденный сегмент — множество. □

Следствие 2. *Пусть для $X, Y \in \mathcal{GH}$ сегмент $[X, Y]$ — невырожден, и для любого $Z \in [X, Y]$ верно, что либо $d_{GH}(X, Z) = 0$, либо $d_{GH}(Y, Z) = 0$. Тогда $[X, Y]$ — множество.*

Доказательство. По неравенству треугольника для расстояния Громова — Хаусдорфа, любое метрическое пространство, находящееся на нулевом расстоянии до концевой точки сегмента, лежит в сегменте. Таким образом, $[X, Y]$ имеет следующий вид:

$$[X, Y] = [X] \cup [Y].$$

Из этого следует, что сегмент $[X, Y]$ — множество, как объединение двух множеств. □

В метрическом пространстве X замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ будем обозначать $B_r(x_0)$. Чтобы подчеркнуть, в каком пространстве лежит шар, иногда будем добавлять верхний индекс. Таким образом, $B_r(x_0) = B_r^X(x_0) = \big\{x \in X : |xx_0| \le r\big\}$.

Теорема 2. *Пусть сегмент $[X, Y]$ невырожден для $X, Y \in \mathcal{GH}$. Пусть существует метрическое пространство $Z \in [X, Y]$ такое, что $d_{GH}(X, Z) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z) > 0$. Тогда существует такое метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, где $z^* \in Z^*$ — изолированная точка, что $Z^* \in [X, Y]$, и Z^* удовлетворяет условиям $d_{GH}(X, Z^*) > 0$, $d_{GH}(Y, Z^*) > 0$.*

Доказательство. Построим необходимое метрическое пространство Z^*.

Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in Z$ и произвольное конечное δ, где

$$0 < \delta < \min\mathbf{l}\{2d_{GH}(X, Z), 2d_{GH}(Y, Z)\mathbf{r}\}.$$

Построим метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, сохранив расстояние между точками $z \in Z$ и определив расстояние до точки z^* следующим образом:

$$|z^*z|_{Z^*} = \begin{cases} \delta & \text{при } z \in Z \cap B_\delta^Z(z_0), \\ |z_0z|_Z & \text{при } z \in Z \setminus B_\delta^Z(z_0), \\ 0 & z = z^*. \end{cases}$$

Убедимся, что данная функция является метрикой. Для этого достаточно проверить неравенство треугольника для z_1, z_2, z^*, где $z_1, z_2 \in Z$, так как остальные аксиомы очевидно выполняются.

Рассмотрим различные случаи расположения точек z_1, z_2.

Пусть $z_1, z_2 \in Z \cap B_\delta^Z(z_0)$, тогда треугольник равнобедренный и

$$|z^*z_1|_{Z^*} \le |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \le |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \le 2\delta = |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Если же $z_1, z_2 \in Z \setminus B_\delta^Z(z_0)$, то расстояния между z_1, z_2, z^* соответственно равны расстояниям в Z между z_1, z_2, z_0. В последнем случае $z_1 \in Z \setminus B_\delta^Z(z_0)$, а $z_2 \in Z \cap B_\delta^Z(z_0)$, тогда

$$|z^*z_1|_{Z^*} = |z_0z_1|_Z \le |z_0z_2|_Z + |z_2z_1|_Z \le |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z^*z_2|_{Z^*} = \delta \le |z^*z_1|_{Z^*} \le |z^*z_1|_{Z^*} + |z_1z_2|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \le |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \le |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Таким образом, $Z^* \in \mathcal{GH}$.

Далее, докажем, что $d_{GH}(X, Z^*) \le d_{GH}(X, Z)$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Z)$ и построим по нему соответствие $R^* = R \cup \big(R^{-1}(z_0) \times \{z^*\}\big) \in \mathcal{R}(X, Z^*)$, где $R^{-1}(z_0) = \mathbf{l}\{x \in X : (x, z_0) \in R\mathbf{r}\}$. Подсчет искажения R^* разобьем на три части:

$$r_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz'|\big| : (x,z), (x',z') \in R^*; z, z' \in Z\Big\},$$

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| > \delta; (x,z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\},$$

$$r_3 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| \le \delta; (x,z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} R^* = \max\{r_1, r_2, r_3\}$. Оценим r_i сверху.

По построению соответсвия R^*, имеем $r_1 = \operatorname{dis} R$.

Так как в r_2 верно $|zz_0| > \delta$, то $|zz^*| = |zz_0|$ и

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz_0|\big| : |zz_0| > \delta; (x,z), (x',z_0) \in R\Big\} \le \operatorname{dis} R.$$

Теперь рассмотрим произвольные x, x', z из определения множества, по которому берется sup в определении r_3. Если $0 \le |xx'| - |zz^*|$, то

$$|xx'| - |zz^*| \le |xx'| - |zz_0| \le \operatorname{dis} R.$$

В противном случае,

$$0 < |zz^*| - |xx'| \le \delta \le 2d_{GH}(X, Z) \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому и $r_3 \le \operatorname{dis} R$.

Таким образом,

$$\operatorname{dis} R^* \le \operatorname{dis} R.$$

Из этого неравенства и предложения 7 следует, что

$$d_{GH}(X, Z^*) \le d_{GH}(X, Z) < d_{GH}(X, Y).$$

Аналогично доказывается неравенство

$$d_{GH}(X, Y) > d_{GH}(Z, Y) \ge d_{GH}(Z^*, Y).$$

Тогда

$$d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y) \ge \\ d_{GH}(X, Z^*) + d_{GH}(Z^*, Y) \ge d_{GH}(X, Y),$$

где последние неравенство является неравенством треугольника для расстояния Громова — Хаусдорфа. Таким образом, $d_{GH}(X, Z^*) + d_{GH}(Z^*, Y) = d_{GH}(X, Y)$, а это означает, что $Z^* \in [X, Y]$. Также верно, что $d_{GH}(X, Z^*) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z^*) > 0$, так как иначе одно из расстояний $d_{GH}(X, Z^*)$, $d_{GH}(Y, Z^*)$ равно $d_{GH}(X, Y)$, чего не может быть в силу полученных выше неравенств. $\square$

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс X компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий n вершин, расстояния между которыми равны λ, обозначим через $\lambda\Delta_n$.

Теорема 3. *Пусть сегмент $[X, Y]$ невырожден для некоторых $X, Y \in \mathcal{GH}$. Пусть существует метрическое пространство $Z \in [X, Y]$ с хотя бы одной изолированной точкой, для которого $d_{GH}(X, Z) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z) > 0$. Тогда для любого кардинального числа m существует метрическое пространство $W(m) \in [X, Y]$, где $W(m)$ имеет вид $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$ для некого метрического пространства $\widetilde{Z}$ и $\mu > 0$. Если Z — компактное метрическое пространство, а m — конечный кардинал, то $W(m)$ тоже является компактом.*

Доказательство. Пусть $z^* \in Z$ — изолированная точка. Зафиксируем конечное $\mu > 0$ такое, что

$$\mu < 2\min\bigl\{d_{GH}(X, Z), d_{GH}(Z, Y), S(z^*)\bigr\},$$

где $S(z^*) = \inf\bigl\{|z^* z| : z \in Z, z \ne z^*\bigr\} > 0$. Для множества

$$W = W(m) = \mu\Delta_m \sqcup Z \setminus \{z^*\}$$

введем функцию расстояния следующим образом. Пусть $w_1, w_2 \in W$, тогда

$$|w_1 w_2|_W = \begin{cases} |w_1 w_2|_Z & \text{при } w_1, w_2 \in Z \backslash \{z^*\}, \\ |w_i z^*|_Z & \text{при } w_i \in Z, w_{3-i} \in \mu\Delta_m, i \in \{1, 2\}, \\ \mu & \text{при } w_1, w_2 \in \mu\Delta_m, w_1 \ne w_2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Данная функция расстояния является метрикой. Аксиомы положительной определенности и симметрии очевидны. Проверим неравенство треугольника для различных точек W. Если все три точки w_1, w_2, w_3 лежат в $Z \setminus \{z^*\}$ или же $w_i \in \mu\Delta_m$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, то неравенство треугольника сохраняется. Если $w_1, w_2 \in Z\backslash\{z^*\}$, а $w_3 \in \mu\Delta_m$, то расстояния между этими точками соответственно равны расстояниям между $w_1, w_2, z^* \in Z$, значит опять неравенство выполняется. Если же $w_1 \in Z\backslash\{z^*\}$, а $w_2, w_3 \in \mu\Delta_m$, то

$$|w_2 w_3|_W = \mu < 2S(z^*) \le 2|z^* w_1|_Z = |w_2 w_1|_W + |w_1 w_3|_W,$$

$$|w_1w_2|_W = |w_1z^*|_Z < |w_1z^*|_Z + \mu = |w_1w_3|_W + |w_3w_2|_W.$$

Аналогично с $|w_1w_3|_W$.

Докажем, что $d_{GH}(X,W) \le d_{GH}(X,Z)$.

Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Z)$ и построим по нему соответствие $V \in \mathcal{R}(X,W)$ следующим образом. Положим $(x,w) \in V$ тогда и только тогда, когда $w \in Z \setminus \{z^*\}$ и $(x,w) \in R$, либо $w \in \mu\Delta_m$ и $(x,z^*) \in R$.

Посчитаем искажение V:

$$\operatorname{dis} V = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V\Big\}.$$

Рассмотрим два случая разбиения на пары элементов V. Пусть

$$v_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V; w \in Z \setminus \{z^*\}, w' \in W\Big\},$$

$$v_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V; w, w' \in \mu\Delta_m\Big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\}$.

Для каждой пары $(x,w),(x',w') \in V$ из построения v_1 существует пара $(x,z),(x',z') \in R$, где $z,z' \in Z$ и $|ww'|_W = |zz'|_Z$, поэтому $v_1 \le \operatorname{dis} R$. Оценим сверху v_2. Перепишем v_2 в эквивалентном виде, пользуясь тем, что $|ww'|_W = \mu$ для $w,w' \in \mu\Delta_m$, и определением соответствия V:

$$v_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - \mu\mathbf{r}\big| : (x,z^*),(x',z^*) \in R\Big\}.$$

Благодаря выбору μ, имеем $\mu < 2d_{GH}(X,Z) \le \operatorname{dis} R$. Также для произвольных $x,x' \in X$ таких, что $(x,z^*),(x',z^*) \in R$, верно

$$|xx'| \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому модуль разности величин $|xx'|$, μ и сама величина v_2 тоже не превосходит $\operatorname{dis} R$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\} \le \operatorname{dis} R$.

Из этого неравенства и предложения 7 следует, что

$$d_{GH}(X,W) \le d_{GH}(X,Z).$$

Аналогично доказывается неравенство $d_{GH}(Z,Y) \ge d_{GH}(W,Y)$. Тогда

$$\begin{gathered} d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Z) + d_{GH}(Z,Y) \ge \\ d_{GH}(X,W) + d_{GH}(W,Y) \geqslant d_{GH}(X,Y), \end{gathered}$$

где последние неравенство является неравенством треугольника для метрики Громова — Хаусдорфа.

Таким образом, $d_{GH}(X,W) + d_{GH}(W,Y) = d_{GH}(X,Y)$, а это означает, что $W(m) \in [X,Y]$ для любого кардинального числа m.

Так как добавление конечного числа точек к компактному метрическому пространству сохраняет компактность, то в случае компактного Z и конечного m, построенное метрическое пространство $W(m)$ тоже является компактом. $\square$

Следствие 3. *Пусть для невырожденного сегмента $[X,Y]$, где $X,Y \in \mathcal{GH}$, существует метрическое пространство $Z \in [X,Y]$, для которого $d_{GH}(X,Z) > 0$ и $d_{GH}(Y,Z) > 0$. Тогда сегмент $[X,Y]$ — собственный класс.*

Доказательство. По теореме 2 и теореме 3, в сегменте $[X,Y]$ лежат метрические пространства вида $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$, где $\widetilde{Z}$ — метрическое пространство, а m — произвольное кардинальное число. Класс кардинальных чисел, удовлетворяющих условию $m \le \#\widetilde{Z}$ — является множеством, потому что их количество не превосходит кардинала $\#\mathcal{P}(\widetilde{Z})$. Так как объединение двух множеств является множеством, от противного получаем, что класс $\mathcal{A} = \{m$ — кардинал $: m > \#\widetilde{Z}\}$ — собственный класс. Построим сюръективное отображение сегмента $[X,Y]$ на собственный класс $\mathcal{A}$. Неизометричные метрические пространства $W(m)$, где $m > \#\widetilde{Z}$, отобразим в соответствующий кардинал $m \in \mathcal{A}$, а все остальные точки сегмента — в кардинал $\#\mathcal{P}(\widetilde{Z})$. Таким образом, сегмент «не меньше», чем собственный класс, поэтому и сам является собственным классом. □

Следствие 4. *Пусть X, Y — неизометричные компактные метрические пространства. Тогда сегмент $[X,Y] \cap \mathcal{M}$ не является компактом.*

Доказательство. По предложению 11, сегмент $[X,Y]$ всегда содержит компактное метрическое пространство Z, лежащее на ненулевых расстояниях от X, Y. Тогда, по теореме 2 и теореме 3, в сегменте лежит компактное метрическое пространство $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$ для некоторого $\mu > 0$, некоторого метрического пространства $\widetilde{Z}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$. Но для $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ число покрытия $\operatorname{cov} \mathbf{l}(W(m), \varepsilon\mathbf{r})$ не меньше m, так как каждый открытый шар радиуса ε может покрыть не более одной точки из $\mu\Delta_m \subset W(m)$. Таким образом, для $\mathbf{l}\{W(m)\mathbf{r}\}_{m=1}^{\infty} \subset [X,Y]$ не существует функции $N\colon (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такой, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство $\operatorname{cov} \mathbf{l}(W(m), \varepsilon\mathbf{r}) \le N(\varepsilon)$. Тогда, по предложению 13, метрический сегмент $[X,Y] \cap \mathcal{M}$ не является предкомпактом и тем более компактом. □

Теорема 4. *Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ — произвольные непустые метрические пространства. Тогда R-сегмент $[X,Y]_R$ является множеством.*

Доказательство. Количество оптимальных соответствий между X и Y не превосходит $\#\mathcal{P}(X \times Y)$. Тогда мощность R-сегмента удовлетворяет неравенству $[X,Y]_R \le \#\mathcal{P}(X \times Y) \times \mathfrak{c}$.
□

4. Заключение

Таким образом, мы показали, что в классе Громова — Хаусдорфа метрический сегмент, в котором есть хотя бы один элемент, лежащий на ненулевых расстояниях до концевых точек сегмента, — собственный класс. В противном случае, метрический сегмент является множеством. При ограничении класса Громова — Хаусдорфа на компактные метрические пространства невырожденный метрический сегмент всегда является не компакнтым множеством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.

3. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва – Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. — 496 с.

4. Edwards D. The Structure of Superspace. // В сборнике: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N. M. and Allen K. R., New York London San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

5. Tuzhilin A. A. Who Invented the Gromov–Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints. 2017. arXiv:1612.00728.

6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. / Мендельсон Э.; пер. с англ. Ф.А. Кабакова под ред. С.И. Адяна. 2-ое из., исправленное. Москва, из. «Наука» гл. ред. физ-мат. лит., 1976. — 320 с.

7. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова — Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017. — 111 с.

8. Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова — Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя. // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950 (arXiv:1504.03830).

9. Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., Realizations of Gromov–Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1603.08850.

10. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space. // ArXiv e-prints. 2019. arXiv: 1904.09281.

11. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space. // Matematicki Vesnik. 2019. Vol. 71, № 1–2. P. 123–154.

12. Memoli F. On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison. // В сборнике: Proceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

13. Клибус Д.П. Курсовая работа. Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова — Хаусдорфа. [Электронный ресурс]. / Сайт кафедры дифф.геом. и прилож. мех-мата МГУ: Москва: 2018. — Режим доступа: http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2018-kr5-klibus.pdf, свободный.

14. John L. Kelley. General topology. / D. van Nostrand Company, Inc., New York, Toronto, and London, 1955.

15. Энгелькинг Р. Общая топология. / пер. с англ. М. Я. Антоновского и А.В. Архангельского. Москва: Мир, 1986. — 752 с.

REFERENCES

1. Hausdorff, F. 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

2. Gromov, M. 1981, "Groups of Polynomial growth and Expanding Map", In: *Publications Mathematiques*, I.H.E.S., Paris, Vol. 53.

3. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V., 2001, A Course in Metric Geometry, American Mathematical Society, Providence, RI.

4. Edwards, D. 1975, "The Structure of Superspace", In: Studies in Topology, ed. by Stavrakas, N. M. and Allen, K. R., Academic Press, Inc. New York, London, San Francisco.

5. Tuzhilin, A. A. 2017, "Who Invented the Gromov–Hausdorff Distance?", ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728.

6. Mendelson, E. 1979, *Introduction to mathematical logic.* D. Van Nostrand company, INC. Princeton, New Jersey.

7. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, Geometry of Hausdorff and Gromov–Hausdorff distances, the case of compact spaces, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].

8. Ivanov, A. O., Nikolaeva, N. K. & Tuzhilin, A. A. 2016, "The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsi", *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 6, pp. 171–173.

9. Iliadis, S. D., Ivanov, A. O. & Tuzhilin A. A. 2016, "Realizations of Gromov–Hausdorff Distanc", ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850.

10. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 2019,"Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff spac", ArXiv e-prints, arXiv: 1904.09281.

11. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, "Isometry group of Gromov–Hausdorff space", *Matematicki Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.

12. Memoli, F. 2007, "On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison", In: *Proceedings of Point Based Graphics 2007*, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

13. Klibus, D.P., 2018, *Coursework. Compact convexity of balls in the Gromov-Hausdorff space.* Available at: http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2018-kr5-klibus.pdf.

14. John L. Kelley. 1955, *General topology.* D. van Nostrand Company, Inc., New York, Toronto, and London.

15. Engelking, R. 1977, *General topology.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Manuscript of second edition, 1985.

Получено 25.01.21
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-19-36

Оценка меры для p-адических диофантовых приближений

Н. В. Бударина

Бударина Наталья Викторовна — доктор физико-математических наук, Дандолкский технологический институт (г. Дандолк, Ирландия).
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie

Аннотация

В статье получена количественная оценка меры множества p-адических чисел, для которых неравенство $|P(x)|_p < Q^{-w}$ при $w > 3n/2 + 2$ имеет решение в целочисленных полиномах P степени n и высоты $H(P)$, не превышающей $Q \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: метрические диофантовы приближения, p-адические числа, теорема Спринджука.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Н. В. Бударина. Оценка меры для p-адических диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 19–36.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-19-36

Measure estimate for p-adic Diophantine approximation

N. V. Budarina

Budarina Natalia Viktorovna — doctor of physical and mathematical sciences, Dundalk Institute of Technology (Dundalk, Ireland).
e-mail: natalia.budarina@dkit.ie

Abstract

A quantitative estimate for the measure of the set of p-adic numbers for which the inequality $|P(x)|_p < Q^{-w}$ for $w > 3n/2 + 2$ has a solution in integral polynomials P of degree n and of height $H(P)$ at most $Q \in \mathbb{N}$, is established.

Keywords: Metric Diophantine approximation, p-adic numbers, Sprindzuk theorem.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
N. V. Budarina, 2022, “Measure estimate for p-adic Diophantine approximation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 19–36.

1. Introduction

Let $n \in \mathbb{N}$, and $p \in \mathbb{N}$ be a prime number. Given a polynomial $P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ with $a_n \neq 0$, $\deg P = n$ is the degree of P and $H(P)$ is the height of P, i.e. $H(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. Denote by $\mathcal{P}_{\leqslant n}$ the class of integer polynomials P of degree at most n and $\mathcal{P}_n$ the class of integer polynomials P of degree n. Throughout this paper $\mathbb{Q}_p$ denotes the p-adic field with p-adic metric $|\cdot|_p$ and $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant 1\}$ denotes the p-adic integers. A ball $K(a;r)$ in $\mathbb{Q}_p$ is defined as

$$K(a;r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leqslant r\}.$$

It has diameter $diam(K(a;r)) = r$ and measure $\mu(K(a;r)) = r$, where μ is the unique Haar measure on the locally compact abelian group $\mathbb{Q}_p$ such that $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. Let $\mathbb{Q}_p^*$ be the smallest field containing $\mathbb{Q}_p$ and all algebraic numbers. In what follows the Vinogradov symbols $\ll$ and $\gg$ will be used to avoid specifying unimportant constants ($f \ll g$ means that there exists a constant c such that $f \leqslant cg$ with a similar definition for $f \gg g$); if $f \ll g$ and $f \gg g$ then we write $f \asymp g$.

Given any $w \in \mathbb{R}^+$, denote by $L_n(w)$ the set of $x \in K$ for which the inequality

$$|P(x)|_p < H(P)^{-w} \tag{1}$$

has infinitely many solutions in polynomials $P \in \mathcal{P}_{\leqslant n}$. Regarding the set $L_n(w)$ Sprindzuk proved the following statement [16].

Theorem 1. *Let $w > n+1$. Then $\mu(L_n(w)) = 0$.*

There are several generalizations of Sprindzuk's result by replacing the RHS in (1) with a monotonically/non-monotonically decreasing function Ψ, see [2], [5]; by replacing the LHS in (1) with non-degenerate curves/non-degenerate manifolds in higher dimensions, see [1], [14], [15]; by considering simultaneous approximation, see [6],[7],[13]; by considering the inhomogeneous Diophantine approximation in the LHS in (1), see [3], [4].

Given a natural number $Q > 1$, consider the class of integral polynomials

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathcal{P}_n : H(P) \leqslant Q\}.$$

Let $K = K(0;p^n) \subset \mathbb{Q}_p$ be a ball of diameter p^n centered at 0. For $w \in \mathbb{R}^+$ denote by $L_n(Q,w)$ the set of $x \in K$ for which the inequality

$$|P(x)|_p < Q^{-w} \tag{2}$$

has a solution in polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. One of the consequences of the Sprindzuk's result is that $\mu(L_n(Q,w)) \to 0$ for $w > n+1$ as $Q \to \infty$. The main goal of this paper is to obtain a quantitative estimate for the Haar measure of the set $L_n(Q,w)$. The first significant contribution to obtaining an effective estimate for the set $L_n(Q,w)$ was made in [10], and it was shown that $\mu(L_n(Q,w)) \ll Q^{-(w-n-1)/n}\mu(K)$ for $w > n+1$.

We now state the main result of this paper, which consists in improving the known measure estimate for the set $L_n(Q,w)$ in the case when $w > 3n/2+2$.

Theorem 2. *Let $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{R}^+$ with $w > 3n/2+2$. Then, for any positive real number ϵ and sufficiently large Q, we have*

$$\mu(L_n(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+n\epsilon}\mu(K)$$

where the constant implied by the Vinogradov symbol depends on n, w, p, ϵ and K.

Moreover, we expect that the following result to be true.

Conjecture 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{R}^+$ with $w > n+1$. Then, for sufficiently large Q, we have*

$$\mu(L_n(Q,w)) \ll \begin{cases} Q^{-(w-n-1)}\mu(K) & for \quad n+1 < w \leqslant n+2, \\ Q^{-(w-2)/n}\mu(K) & for \quad w > n+2 \end{cases}$$

where the constant implied by the Vinogradov symbol depends on n, w, p and K.

In relation to a quantitative estimate for an analogue of the set $L_n(Q,w)$ in $\mathbb{R}$ see [9], [11].

2. Proof of Theorem 2

2.1. Outline of the proof

For the polynomials P of degree $n = \deg P \geqslant 2$ we proceed the proof of Theorem by induction with the following induction hypothesis.

Induction Hypothesis 1. *For any positive real number ϵ, there exist a constant $f(n,p,K,r,\epsilon)$ depending on n, p, K, r and ϵ such that for every $1 \leqslant m \leqslant n-1$ one has*

$$\mu(x \in K : \exists P \in \mathcal{P}_m(Q) \text{ s.t. } |P(x)|_p < Q^{-r},\ r > m+1) < f(n,p,K,r,\epsilon)Q^{\frac{-(r-2)}{m}+m\epsilon}\mu(K)$$

for Q sufficiently large.

The base case for $m = 1$ follows from the following result which was proved in [10].

Lemma 1. *Let $K_0 = K_0(0;p^r) \subset \mathbb{Q}_p$ be a ball of diameter p^r centered at 0 with $r \geqslant 0$. Define $J(Q)$ to be the set of points $x \in K_0$ for which the inequality $|P_1(x)|_p = |ax+b|_p < Q^{-w}$ holds with $w > 2$ for some $P \in \mathcal{P}_1(Q)$. Then $\mu(J(Q)) \ll Q^{2-w}\mu(K_0)$ for sufficiently large Q.*

Next, the proof is divided into two cases: irreducible and reducible polynomials.

2.2. Irreducible polynomials

In this section, we consider only irreducible polynomials P from the class of polynomials $\mathcal{P}_n(Q)$. Denote by $L_n^{IRR}(Q,w)$ a set of points $x \in K$ such that there exists an irreducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ satisfying the inequality $|P(x)|_p < Q^{-w}$.

2.2.1. Preliminaries

We will consider only *leading* polynomials, that is those polynomials $P \in \mathcal{P}_n$ which satisfy

$$|a_n(P)| \gg H(P), \ \ |a_n|_p > p^{-n}. \tag{3}$$

It was shown in [16] that if polynomial P does not satisfy the first inequality in (3) then a transformation $S(t) = P(t+m)$ for some $0 \leqslant m \leqslant n$ can be performed followed by an inversion (if necessary) to obtain $T(t) = t^n S(\frac{1}{t})$. Thus, this new polynomial $T(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ satisfies $|b_n| \gg H(T) \asymp H(P)$. These transformations preserve measures (up to a constant) of sets which satisfy inequality of the form (2).

Consider irreducible polynomials $P \in \mathcal{P}_n$ satisfying (3). Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ be the roots of the polynomial P in $\mathbb{Q}_p^*$. Define the sets

$$S_P(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x-\alpha_i|_p = \min_{1 \leqslant m \leqslant n}|x-\alpha_m|_p\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Further assume without loss of generality that $i = 1$.

The resultant of $P(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$ and $Q(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x-\beta_j)$ is defined as $R(P,Q) = a_n^m b_m^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (\alpha_i - \beta_j)$, and the discriminant of P is defined as $D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

A number of lemmas for later use are now given.

Lemma 2. *Let $P = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ be a polynomial with rational integer coefficients. If $|a_n|_p > c_1$, where c_1 is a constant depending only on n, then*

$$|\alpha_i|_p \leqslant \max(1/c_1, 1)$$

for every root α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, of P.

This is Lemma 2 of [3].

Suppose that $P \in \mathcal{P}_n$ satisfies (3). From Lemma 2 therefore

$$|\alpha_i|_p < p^n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Lemma 3 ([16, 3]). *Let $x \in S_P(\alpha_1)$. Then*

$$|x - \alpha_1|_p \leqslant |P(x)|_p |P'(x)|_p^{-1} \text{ for } P'(x) \neq 0,$$

$$|x - \alpha_1|_p \leqslant |P(x)|_p |P'(\alpha_1)|_p^{-1} \text{ for } P'(\alpha_1) \neq 0,$$

and

$$|x - \alpha_1|_p \leqslant \min_{2 \leqslant j \leqslant n} (|P(x)|_p |P'(\alpha_1)|_p^{-1} \prod_{k=2}^{j} |\alpha_1 - \alpha_k|_p)^{\frac{1}{j}} \text{ for } P'(\alpha_1) \neq 0.$$

Lemma 4. *Let $K \subset \mathbb{Q}_p$ be a ball and $B \subset K$ be a measurable set satisfying $\mu(B) \geqslant m^{-1}\mu(K) > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Assume that for all $x \in B$ we have $|P(x)|_p < H(P)^{-a}$, where $a > 0$ and $\deg P \leqslant n$. Then for all $x \in K$ we have*

$$|P(x)|_p < (pm(n+1))^{n+1} H(P)^{-a}.$$

This is Lemma 5 of [8].

Lemma 5 ([3]). *Fix $\theta > 0$ and $Q > Q_0(\theta)$. Suppose that $\eta \in \mathbb{R}^+$ and let $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q)$. Further suppose that P_1, P_2 have no roots in common. Let J denote a ball with diameter $Q^{-\eta}$. If there exists real number $\tau > 0$ such that for all $x \in J$*

$$\max(|P_1(x)|_p, |P_2(x)|_p) < Q^{-\tau},$$

then

$$\tau + 2\max(\tau - \eta, 0) < 2n + \theta.$$

This lemma will be used repeatedly throughout the proof to obtain contradictions.

Lemma 6 ([10]). *Let $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ be an irreducible polynomial satisfying (3). Then*

$$|P'(\alpha_1)|_p \gg Q^{-n+1}$$

for sufficiently large Q.

In what follows it is often necessary to compare the value of the derivative of P at the root α_1 with the derivative of P at $x \in S_P(\alpha_1)$. The following lemma gives a general result.

Lemma 7 ([10]). *Let $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ and $w_1 \geqslant 2w_2$. Let $x \in S_P(\alpha_1) \cap K$ for some $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ and suppose that $|P(x)|_p < Q^{-w_1}$. If $|P'(x)|_p > p^{(n-1)^2/2} Q^{-w_2}$ then $|P'(\alpha_1)|_p = |P'(x)|_p$. On other hand, if $|P'(x)|_p \leqslant p^{(n-1)^2/2} Q^{-w_2}$ then $|P'(\alpha_1)|_p < p^{(n-1)^2/2} Q^{-w_2}$.*

2.2.2. Partitioning the roots

Depending on the size of w we consider the partitions of the set $\mathcal{A}(P)$ of roots of $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. These partitions are depended of the values of the derivatives of the polynomials at the roots, and are based on Lemma 6 and Lemma 7, and are detailed below:

$$\begin{array}{lllllll}
T_{0,1}: & Q^{-\frac{1}{2}} & < & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & p^{n(n-1)} & for \quad w > 3n/2+2,\\
T_{n-1,1}: & Q^{-1-\frac{(n-2)(w-2)}{2n}} & < & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & Q^{-\frac{1}{2}} & for \quad 3n/2+2 < w < 2n+2,\\
T_{n-1,2}: & C(n,p)Q^{-n+1} & < & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & Q^{-\frac{1}{2}} & for \quad w \geqslant 2n+2,\\
T_{n,1}: & p^{(n-1)^2/2}Q^{-\frac{w}{2}} & < & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & Q^{-1-\frac{(n-2)(w-2)}{2n}} & for \quad 3n/2+2 < w \leqslant 2n-2,\\
T_{n,2}: & C(n,p)Q^{-n+1} & < & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & Q^{-1-\frac{(n-2)(w-2)}{2n}} & for \quad \max(3n/2+2, 2n-2) < w\\
< 2n+2, & & & & & & \\
T_{n+1,1}: & & & |P'(\alpha)|_p & \leqslant & p^{(n-1)^2/2}Q^{-\frac{w}{2}} & for \quad 3n/2+2 < w \leqslant 2n-2,
\end{array}$$

where $C(n,p)$ arises from Lemma 6, i.e. $|P'(\alpha)|_p > C(n,p)Q^{-n+1}$.

Therefore, for each range of w there are the following subdivisions:

$$\begin{array}{ll}
for \quad 3n/2+2 < w \leqslant 2n-2: & \alpha \in T_{0,1} \cup T_{n-1,1} \cup T_{n,1} \cup T_{n+1,1},\\
for \quad \max(3n/2+2, 2n-2) < w < 2n+2: & \alpha \in T_{0,1} \cup T_{n-1,1} \cup T_{n,2},\\
for \quad w \geqslant 2n+2: & \alpha \in T_{0,1} \cup T_{n-1,2}.
\end{array}$$

Let $\sigma(P)$ denote the set of points for which (2) and $|P'(x)|_p > p^{(n-1)^2/2}Q^{-\frac{w}{2}}$ hold for a fixed polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. By Lemma 3, one has the equality $|P'(\alpha)|_p = |P'(x)|_p$ for $x \in S_P(\alpha)$ and $\alpha \in T_{0,1} \cup T_{n-1,i} \cup T_{n,i}$, $i = 1, 2$, and the set $\sigma(P) \cap S_P(\alpha)$ is contained in $\sigma(P, \alpha)$ which is defined by the inequality:

$$\sigma(P,\alpha) := \{x \in K \cap S_P(\alpha) : |x-\alpha|_p < Q^{-w}|P'(\alpha)|_p^{-1}\}. \tag{5}$$

For $i \in \{0, n-1, n, n+1\}$ and $j \in \{1, 2\}$ define the set $L_{n,i,j}(Q, w)$ of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ for which the system

$$|P(x)|_p < Q^{-w}, \quad \alpha \in T_{i,j}$$

has a solution $P \in \mathcal{P}_n(Q)$.

There follow two auxiliary results and several subsections depending on the sizes of derivatives at certain roots.

2.2.3. Auxiliary results

The key ingredients of the proof of the theorem for the cases of large, middle and small derivatives are the following results.

Define the set $L_n(Q, w, d)$ of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ for which the system

$$|P(x)|_p < Q^{-w}, \quad |P'(\alpha)|_p > cQ^d \tag{6}$$

has a solution $P \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Proposition 1. *Let $d \leqslant 0$. If there exist an integer number $k \in [0, n-1]$ and a real number v satisfying*

$$\max(-2d, 2 + \frac{k}{n}(w-2)) \leqslant v \leqslant w - n + k - \frac{w-2}{n} \tag{7}$$

then

$$\mu(L_n(Q,w,d)) \leqslant \begin{cases} 2\cdot 3^{n-k}c_0^{-1}Q^{-(w-2)/n}\mu(K) + kf(k,p,K,w,\epsilon)2^{-\frac{w-2}{n}+k\epsilon}Q^{-\frac{w-2}{n}+k\epsilon}\mu(K) \\ if\, 1\leqslant k\leqslant n-1, \\ 2\cdot 3^{n}c_0^{-1}Q^{-(w-2)/n}\mu(K) \\ if\, k=0 \end{cases}$$

for $w > 3n/2+2$ *and sufficiently large* Q. *Here*

$$c_0 = \min(cp^n, \min\nolimits_{2\leqslant j\leqslant n} c^{\frac{j}{j-1}}p^{\frac{j(n-1)-n^2}{j-1}}, 2^{-k-1-v}(p(k+1))^{-k-1}).$$

Proof. Let c_0 be a constant to be chosen later. For a polynomial $P\in\mathcal{P}_n(Q)$ with α satisfying (6) define the ball

$$\sigma_0(P,\alpha) = \{x\in K\cap S_P(\alpha):\ |x-\alpha|_p < c_0Q^{-v}|P'(\alpha)|_p^{-1}\}.$$

Denote by $R_0(P)$ the set of roots of the polynomial P satisfying the condition $|P'(\alpha)|_p > cQ^d$. Let $\sigma_0(P) = \cup_{\alpha\in R_0(P)}\sigma_0(P,\alpha)$. From (5) and (6) it follows that $\mu(\sigma_0(P))\leqslant\mu(K)$ and $\sigma(P)\subseteq\sigma_0(P)$ for $-d\leqslant v<w$, and $c_0\leqslant cp^n$ and $Q>Q_0$. Also, $\mu(\sigma(P))\leqslant c_0^{-1}Q^{v-w}\mu(\sigma_0(P))$.

Fix k, $k\in[0,n-1]$. For each $(n-k)$-tuple $\mathbf{b}_k = (b_n,\dots,b_{k+1})\in\mathbb{Z}^{n-k}$ such that $|b_i|\leqslant Q$ for $i=k+1,\dots,n$ define the following subclass of $\mathcal{P}_n(Q)$

$$\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k) = \{P=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathcal{P}_n(Q):\ a_i=b_i\ if\ k+1\leqslant i\leqslant n\}.$$

Note that $\mathcal{P}_n(Q) = \cup_{\mathbf{b}_k}\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)$ and the number of different vectors $\mathbf{b}_k$ does not exceed $(2Q+1)^{n-k}$.

The balls $\sigma_0(P,\alpha)$ are divided into essential and inessential domains for $P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)$. First, the essential balls $\sigma_0(P,\alpha)$ are considered. By definition

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)}\ \sum_{\alpha\in R_0(P),\ \sigma_0(P,\alpha)\, essential}\mu(\sigma_0(P,\alpha))\leqslant 2\mu(K).$$

Using this and the fact that the number of different vectors $\mathbf{b}_k$ does not exceed $(2Q+1)^{n-k}$, it follows that

$$\sum_{\mathbf{b}_k}\ \sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)}\mu(\sigma(P))\leqslant 2\cdot 3^{n-k}c_0^{-1}Q^{v-w+n-k}\leqslant 2\cdot 3^{n-k}c_0^{-1}Q^{-(w-2)/n}\mu(K) \tag{8}$$

for $v\leqslant w-n+k-(w-2)/n$ and $Q>Q_0$.

We now turn to the inessential balls. Suppose that $\sigma_0(P,\alpha)$ is innessential so that there exists $\bar{P}\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}_k)$, $P\neq\bar{P}$ such that $\mu(\sigma_0(P,\bar{P})) = \mu(\sigma_0(P,\alpha_1)\cap\sigma_0(\bar{P}))\geqslant\mu(\sigma_0(P,\alpha))/2$. It can be readily verified that on $\sigma_0(P,\bar{P})$

$$\begin{aligned} |(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha)(x-\alpha_1)^j|_p &< p^{n^2-j(n-1)}c_0^jc^{-j}Q^{(-d-v)j} \\ &\leqslant c_0Q^{-v},\ 2\leqslant j\leqslant n, \end{aligned}$$

for $v\geqslant -2d$, $d\leqslant 0$, $c_0\leqslant\min_{2\leqslant j\leqslant n}c^{\frac{j}{j-1}}p^{\frac{j(n-1)-n^2}{j-1}}$. Thus, using the Taylor expansion of P in the neighbourhood of α, it is easy to obtain $|P(x)|_p < c_0Q^{-v}$, $x\in\sigma_0(P,\bar{P})$. Similar estimate holds for $\bar{P}$ on $\sigma_0(P,\bar{P})$.

Put $R(t) = P(t) - \bar{P}(t)$ so that $\deg R = n_R \leqslant k$ and $H(R) \leqslant 2Q$. Then, by Lemma 4, in $\sigma_0(P, \alpha_1)$ we have

$$\begin{aligned} |R(x)|_p &< (2p(k+1))^{k+1} c_0 Q^{-v} \\ &= 2^{k+1+v}(p(k+1))^{k+1} c_0 Q_1^{-v} \end{aligned}$$

for $Q_1 = 2Q$. Choose $c_0 \leqslant 2^{-k-1-v}(p(k+1))^{-k-1}$. Then $|R(x)|_p < Q_1^{-v}$ in $\sigma_0(P, \alpha_1)$.

First, consider the case when $1 \leqslant n_R \leqslant k \leqslant n-1$. Applying the Induction Hypothesis 1 to polynomials $R \in \mathcal{P}_{n_R}(Q_1)$, we obtain

$$\mu(L_{n_R}(Q_1, v)) \leqslant f(n_R, p, K, v, \epsilon) Q_1^{-(v-2)/n_R + n_R\epsilon} \mu(K)$$

for $v > 3n_R/2 + 2$.

Second, consider the case when $n_R \leqslant k = 0$. From $|R(x)|_p < Q_1^{-v}$ and $|R(x)|_p \geqslant |R(x)|^{-1} \geqslant$ $\geqslant (2Q)^{-1}$ since $R(x) = a_0'$ and $1 \leqslant |a_0'| \leqslant 2Q$, we get a contradiction in $(2Q)^{-1} \leqslant |R(x)|_p < Q_1^{-v} =$ $= (2Q)^{-v}$ for $v \geqslant 1$.

Therefore, the measure of the set of x belonging to inessential balls does not exceed

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{n_R=0}^{k} L_{n_R}(Q_1, v)) &\leqslant \textstyle\sum_{n_R=1}^{k} \mu(L_{n_R}(Q_1, v)) \\ &< \textstyle\sum_{n_R=1}^{k} f(n_k, p, K, v, \epsilon) Q_1^{-\frac{v-2}{n_R} + n_R\epsilon} \mu(K) \\ &\leqslant k f(k, p, K, v, \epsilon) 2^{-\frac{v-2}{k} + k\epsilon} Q^{-\frac{v-2}{k} + k\epsilon} \mu(K) \\ &\leqslant k f(k, p, K, w, \epsilon) 2^{-\frac{w-2}{n} + k\epsilon} Q^{-\frac{w-2}{n} + k\epsilon} \mu(K) \end{aligned}$$

for $v \geqslant 2 + \frac{k}{n}(w-2)$ and $w \geqslant 3n/2 + 2$.

This, together with (8) gives

$$\begin{aligned} \mu(L_n(Q, w, d)) &\leqslant \mu(\cup_{\mathbf{b}_k} \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)) \\ &\leqslant \begin{cases} 2 \cdot 3^{n-k} c_0^{-1} Q^{-(w-2)/n} \mu(K) + k f(k, p, K, w, \epsilon) 2^{-\frac{w-2}{n} + k\epsilon} Q^{-\frac{w-2}{n} + k\epsilon} \mu(K) \\ for\ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 2 \cdot 3^n c_0^{-1} Q^{-(w-2)/n} \mu(K) for\ k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Now we are going to prove the second result. Let $a_i \in \mathbb{R}$ and $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ for $i = 1, 2$. Define the set $L_n(Q, w, a_1, a_2)$ of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ for which the system

$$|P(x)|_p \leqslant Q^{-w},\ b_1 Q^{a_1} < |P'(\alpha)|_p \leqslant b_2 Q^{a_2},\ a_1 \leqslant a_2,\ \ w > 3n/2 + 2,\ w \geqslant -2a_1 \tag{9}$$

has a solution $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Let $\epsilon_0 < \epsilon$ be a sufficiently small positive real number.

Proposition 2. *If there exists real number u satisfying*

$$\max(0, -a_2 + \epsilon_0, 2n + 3a_2 + \theta + 3\epsilon_0) \leqslant u \leqslant w + a_1 - (w-2)/n + \epsilon \tag{10}$$

for some values of $\theta > 0$, then

$$\mu(L_n(Q, w, a_1, a_2)) \ll Q^{-(w-2)/n + \epsilon} \mu(K)$$

for sufficiently large Q.

Proof. Divide the ball K into smaller balls K_i with diameter $\mu(K_i) = Q^{-u}$. It is clear that $\mu(K_i) \leqslant \mu(K)$ for $u \geqslant 0$, and $\mu(\sigma(P, \alpha)) \leqslant \mu(K_i)$ for $w \geqslant -2a_1$, $u < w + a_1$ and sufficiently large Q. We say that a polynomial P belongs to K_i if there exists $x \in K_i$ such that (9) holds.

If there is at most one irreducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ that belongs to every ball K_i then by (5) the measure of these x, that satisfy (9), does not exceed

$$n b_1^{-1} Q^{-w-a_1+u} \mu(K) \leqslant n b_1^{-1} Q^{-(w-2)/n + \epsilon} \mu(K) \tag{11}$$

for $u \leqslant w + a_1 - (w-2)/n + \epsilon$.

If at least two irreducible polynomials P_i of the form $P_i(t) = s_i P(t)$ for the same P, $s_i \in \mathbb{Z}$, belong to the ball K_i then the measure in this case coincides (up to a constant) with the measure in (11).

Now show that the assumption that at least two irreducible polynomials P_1 and P_2, $P_1 \neq P_2$, without common roots belong to the ball K_i will lead to a contradiction. Using Taylor series expansion, it can be readily verified that on K_i,

$$\begin{array}{rcl} |P_i(x)|_p & \leqslant & \max(b_2 Q^{-u+a_2}, \max_{2\leqslant j\leqslant n} p^{n(n-j)+j} Q^{-uj}) \\ & = & b_2 Q^{-u+a_2} \leqslant Q^{-u+a_2+\epsilon_0} \end{array}$$

for $i = 1, 2$, $a_2 \leqslant 0$, $u \geqslant -a_2 + \epsilon_0$ and sufficiently large Q. We now use Lemma 5 with $\tau = u - a_2 - \epsilon_0$ and $\eta = u$. Then,

$$\tau + 2\max(\tau - \eta, 0) = u - 3a_2 - 3\epsilon_0.$$

From Lemma 5

$$u - 3a_2 - 3\epsilon_0 < 2n + \theta$$

for all $\theta > 0$ which is a contradiction if $u \geqslant 2n + 3a_2 + 3\epsilon_0 + \theta$ for some values of θ. □

2.2.4. Large derivative

This section deals with the case when the derivatives of the polynomials at the roots are large.

Proposition 3. *For sufficiently large Q, $n \geqslant 1$ and $w \geqslant n+2$*

$$\mu(L_{n,0,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n}\mu(K).$$

Proof. Take $d = -1/2$ and $c = 1$ in Proposition 1. Then $L_{n,0,1}(Q,w) \subseteq L_n(Q,w,-1/2)$. In this case we choose $k = 0$ and $v = 2$. It is easy to check that the conditions (7) are satisfied for $w \geqslant n+2$, and

$$\mu(L_{n,0,1}(Q,w)) \leqslant 2 \cdot 3^n c_0^{-1} Q^{-(w-2)/n}\mu(K)$$

for sufficiently large Q, where $c_0 = \min(\min_{2\leqslant j\leqslant n} p^{\frac{j(n-1)-n^2}{j-1}}, 2^{-3}p^{-1})$. □

2.2.5. Special cases $n = 2$ and $n = 3$ for a non-large derivative

This section deals with special cases when the derivatives of the quadratic and cubic polynomials at the roots are taking non-large values.

Case: $n = 2$

Note that the set $L_2^{IRR}(Q,w) \setminus L_{2,0,1}(Q,w)$ is defined as the set of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ for which

$$|P(x)|_p < Q^{-w}, \;\; C(2,p)Q^{-1} < |P'(\alpha)|_p \leqslant Q^{1/2}$$

hold for some $P \in \mathcal{P}_2(Q)$. To find the estimate of the measure for the last set we will use Proposition 2. Take $a_1 = -1$, $a_2 = -1/2$, $b_1 = C(2,p)$, $b_2 = 1$ in the Proposition 2. In this case we choose $u = w/2 + \epsilon$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $w > 5$, $\epsilon_0 < \epsilon/4$, $\theta \leqslant \epsilon/4$, and $\mu(L_2^{IRR}(Q,w) \setminus L_{2,0,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/2+\epsilon}\mu(K)$ for sufficiently large Q.

Case: $n = 3$

Let $L_3^{IRR}(Q,w) \setminus L_{3,0,1}(Q,w) = L_3'(Q,w) \cup L_3''(Q,w)$, where the set $L_3'(Q,w)$ is defined as the set of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ satisfying $|P(x)|_p < Q^{-w}$, $Q^{-1} < |P'(\alpha)|_p \leqslant Q^{-1/2}$ for some $P \in \mathcal{P}_3(Q)$; and the set $L_3''(Q,w)$ consists of $x \in K \cap S_P(\alpha)$ for which $|P(x)|_p < Q^{-w}$, $C(3,p)Q^{-2} < |P'(\alpha)|_p \leqslant Q^{-1}$ hold for some $P \in \mathcal{P}_3(Q)$.

To estimate the measure of the set $L'_3(Q,w)$ we will use Proposition 1. Take $d=-1$ and $c=1$ in Proposition 1. Then $L'_3(Q,w)\subseteq L_3(Q,w,-1)$. In this case we choose $k=0$ and $v=2$. It is easy to check that the conditions (7) are satisfied for $w\geqslant 6.5$, and

$$\mu(L'_3(Q,w))\leqslant 54p^5Q^{-(w-2)/3}\mu(K)$$

for sufficiently large Q.

To estimate the measure of the set $L''_3(Q,w)$ we will use Proposition 2. Take $a_1=-2$, $a_2=-1$, $b_1=C(3,p)$, $b_2=1$ in the Proposition 2. In this case we choose $u=2w/3-4/3+\epsilon$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $w>13/2$, $\epsilon_0<\epsilon/4$, $\theta\leqslant\epsilon/4$, and $\mu(L''_3(Q,w))\ll Q^{-(w-2)/3+\epsilon}\mu(K)$ for sufficiently large Q.

Thus, $\mu(L_3^{IRR}(Q,w)\setminus L_{3,0,1}(Q,w))\ll Q^{-(w-2)/3+\epsilon}\mu(K)$ for $w>13/2$ and sufficiently large Q.

From now on $n\geqslant 4$.

2.2.6. Middle value derivative

This section deals with the case when the derivatives of the polynomials at the roots are taking middle values.

Case 1: $w\geqslant 2n+2$

Proposition 4. *Let $n\geqslant 2$ and $w\geqslant 2n+2$. For sufficiently large Q*

$$\mu(L_{n,n-1,2}(Q,w))\ll Q^{-(w-2)/n+(n-2)\epsilon}\mu(K).$$

Proof. Take $d=-n+1$ and $c=C(n,p)$ in Proposition 1. Then $L_{n,n-1,2}(Q,w)\subseteq L_n(Q,w,-n+1)$. In this case we choose $k=n-2$ and $v=\frac{(w-2)(n-1)}{n}$. It is easy to check that the conditions (7) are satisfied for $n\geqslant 2$ and $w\geqslant 2n+2$, and

$$\mu(L_{n,n-1,2}(Q,w))\leqslant 2\cdot 3^2c_0^{-1}Q^{-(w-2)/n}\mu(K)+(n-2)f(n-2,p,K,w,\epsilon)2^{-\frac{w-2}{n}+(n-2)\epsilon}Q^{-\frac{w-2}{n}+(n-2)\epsilon}\mu(K)$$

for sufficiently large Q, where

$$c_0=\min(C(n,p)p^n,\min\nolimits_{2\leqslant j\leqslant n}(C(n,p))^{\frac{j}{j-1}}p^{\frac{j(n-1)-n^2}{j-1}},2^{-n+1-(w-2)(n-1)/n}(p(n-1))^{-n+1}).$$

□

Case 2: $w<2n+2$

Define the set $L'_{n,n-1,1}(Q,w)$ of $x\in K\cap S_P(\alpha)$ for which the system

$$Q^{-1-\frac{(n-2)(w-2)}{2n}}<|P'(\alpha)|_p\leqslant Q^{-1-\frac{(n-3)(w-2)}{2n}},\ \ 3n/2+2<w<2n+2 \tag{12}$$

has a solution $P\in\mathcal{P}_n(Q)$.

Define the set $L''_{n,n-1,1}(Q,w)$ of $x\in K\cap S_P(\alpha)$ for which the system

$$Q^{-1-\frac{(n-3)(w-2)}{2n}}<|P'(\alpha)|_p\leqslant Q^{-\frac{1}{2}},\ \ 3n/2+2<w<2n+2 \tag{13}$$

has a solution $P\in\mathcal{P}_n(Q)$. Then $L_{n,n-1,1}(Q,w)=L'_{n,n-1,1}(Q,w)\cup L''_{n,n-1,1}(Q,w)$.

Proposition 5. *Let $n\geqslant 4$. For sufficiently large Q*

$$\mu(L'_{n,n-1,1}(Q,w))\ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K).$$

Proof. Take $a_1 = -1 - \frac{(n-2)(w-2)}{2n}$, $a_2 = -1 - \frac{(n-3)(w-2)}{2n}$, $b_1 = b_2 = 1$ in the Proposition 2.

First, we deal with the case $n \geqslant 5$. In this case we choose $u = 1 + \frac{(n-3)(w-2)}{2n} + \frac{1}{n} + \epsilon_0$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $n \geqslant 5$, $w > 3n/2+2$, $\epsilon_0 < \min(\epsilon, \frac{1}{2n})$, $\theta \leqslant n-5+\frac{1}{n} - 2\epsilon_0$, and in this case $\mu(L'_{n,n-1,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K)$ for sufficiently large Q.

Second, we consider the case when $n = 4$. In this case we choose $u = 2n-3-\frac{3(n-3)(w-2)}{2n} + \frac{1}{n} + \theta$. Choose $\epsilon_0 < \min(\epsilon, \frac{1}{3n})$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $n = 4$, $3n/2+2 < w < 2n+2$, and $0 < \theta \leqslant n - \frac{11}{4} - \frac{1}{n} + \epsilon$, and in this case $\mu(L'_{n,n-1,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon} \cdot$ $\cdot\, \mu(K)$ for sufficiently large Q. □

Proposition 6. *For sufficiently large Q*

$$\mu(L''_{n,n-1,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+(n-3)\epsilon}\mu(K).$$

Proof. Take $d = -1 - \frac{(n-3)(w-2)}{2n}$ and $c = 1$ in Proposition 1. Then $L''_{n,n-1,1}(Q,w) \subseteq$ $\subseteq L_n(Q,w,-1-\frac{(n-3)(w-2)}{2n})$. In this case we choose $k = n-3$ and $v = 2 + \frac{(w-2)(n-3)}{n}$. It is easy to check that the conditions (7) are satisfied for $w \geqslant 3n/2+2$, and

$$\mu(L''_{n,n-1,1}(Q,w)) \leqslant 2\cdot 3^3 c_0^{-1} Q^{-(w-2)/n}\mu(K) + (n-3)f(n-3,p,K,w,\epsilon)2^{-\frac{w-2}{n}+(n-3)\epsilon}Q^{-\frac{w-2}{n}+(n-3)\epsilon}\mu(K)$$

for sufficiently large Q, where

$$c_0 = \min(p^n, \min_{2\leqslant j\leqslant n} p^{\frac{j(n-1)-n^2}{j-1}}, 2^{-n-(w-2)(n-3)/n}(p(n-2))^{-n+2}).$$

□

2.2.7. Small derivative

This section deals with the case when the derivatives of the polynomials at the roots are small.

Proposition 7. *Let $n \geqslant 3$. For sufficiently large Q*

$$\mu(L_{n,n,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K).$$

Proof. Take $a_1 = -w/2$, $a_2 = -1-(n-2)(w-2)/(2n)$, $b_1 = p^{(n-1)^2/2}$, $b_2 = 1$ in the Proposition 2. In this case we choose $u = 1 + \frac{(n-2)(w-2)}{2n} + \epsilon_0$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $n \geqslant 3$, $w > 3n/2+2$, $\epsilon_0 < \min(\epsilon, \frac{1}{3})$, $\theta \leqslant n-2-2\epsilon_0$, and $\mu(L_{n,n,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K)$ for sufficiently large Q. □

Proposition 8. *Let $n \geqslant 3$. For sufficiently large Q*

$$\mu(L_{n,n,2}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K).$$

Proof. Take $a_1 = -n+1$, $a_2 = -1-(n-2)(w-2)/(2n)$, $b_1 = C(n,p)$, $b_2 = 1$ in the Proposition 2. In this case we choose $u = 1 + \frac{(n-2)(w-2)}{2n} + \epsilon_0$. It easy to check that the conditions (10) are satisfied for $n \geqslant 3$, $w > \max(3n/2+2, 2n-2)$, $\epsilon_0 < \min(\epsilon, \frac{1}{3})$, $\theta \leqslant n-2-2\epsilon_0$, and $\mu(L_{n,n,2}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n+\epsilon}\mu(K)$ for sufficiently large Q. □

2.2.8. Very small derivative

In this section, we consider the case when the derivative is very small. Recall that $L_{n,n+1,1}(Q,w)$ is set of $x \in K \cap S_P(\alpha_1)$ with $\alpha_1 \in T_{n+1,1}$ for which the system

$$|P(x)|_p < Q^{-w}, \quad |P'(\alpha_1)| \leqslant p^{(n-1)^2/2} Q^{-w/2} \tag{14}$$

has a solution in polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Define by $\sigma^*(P)$ the set of solutions of the system (14) for a fixed polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$.

Let α_1 be any root of a reducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Reorder the other roots of P so that

$$|\alpha_1 - \alpha_2|_p \quad \leqslant \quad |\alpha_1 - \alpha_3|_p \quad \leqslant \ldots \leqslant \quad |\alpha_1 - \alpha_n|_p.$$

For the polynomial P define the real numbers ρ_j by

$$|\alpha_1 - \alpha_j|_p = Q^{-\rho_j}, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \quad \rho_2 \geqslant \rho_3 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n. \tag{15}$$

Let $0 < \epsilon_1 < \frac{1}{n^2}$ be sufficiently small, and $T = [\epsilon_1^{-1}] + 1$. Also, define the integers l_j, $2 \leqslant j \leqslant n$, by the relations

$$\frac{l_j - 1}{T} \leqslant \rho_j < \frac{l_j}{T}, \qquad l_2 \geqslant l_3 \geqslant \ldots \geqslant l_n \geqslant 0. \tag{16}$$

Finally, define the numbers q_i by $q_i = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Now for every polynomial P we define a vector $\mathbf{l} = (l_2, \ldots, l_n)$. The number of different vectors $\mathbf{l}$ is a constant depending on n, p and ϵ_1. Let $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l})$ be the class of irreducible polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ satisfying (3) and corresponding to a vector $\mathbf{l}$.

For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, let $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$ denote the subclass of $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l})$ given by

$$\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}) : \; Q^{k\epsilon_1} \leqslant H(P) < Q^{(k+1)\epsilon_1}\}.$$

Then we have $\mathcal{P}_n(Q) = \cup_{\mathbf{l}} \cup_{k=0}^{T-1} \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$. For $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$ satisfying (3) we have the following estimates

$$|P'(\alpha_1)|_p > p^{-n} Q^{-q_1} \;\; \textit{and} \;\; |P^{(l)}(\alpha_1)|_p \leqslant Q^{-q_l + (n-l)\epsilon_1}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1, \tag{17}$$

which come from (15)–(16) and

$$P^{(l)}(\alpha_1) = l! a_n(P) \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_{n-l}) \subset (2,3,\ldots,n),\;\; j_s \neq j_k,\;\; P(\alpha_{j_s}) = 0} \;\; \prod_{s=1}^{n-l} (\alpha_1 - \alpha_{j_s}).$$

Also, by (14) and (17), we get $p^{-n} Q^{-q_1} < |P'(\alpha_1)|_p \leqslant p^{(n-1)^2/2} Q^{-w/2}$, which implies that

$$q_1 \geqslant w/2 \tag{18}$$

for sufficiently large Q.

We say that $\mathbf{l} \in G_-$ if the following condition $l_2/T + q_1 \leqslant n + n^2\epsilon_1$ holds. Similarly, we say that $\mathbf{l} \in G_+$ if the condition $l_2/T + q_1 > n + n^2\epsilon_1$ holds. Then the set $L_{n,n+1,1}(Q,w)$ can be written as

$$L_{n,n+1,1}(Q,w) = L^-_{n,n+1,1}(Q,w) \cup L^+_{n,n+1,1}(Q,w),$$

where $L^{\mp}_{n,n+1,1}(Q,w) = \cup_{\mathbf{l} \in G_{\mp}} \cup_{k=0}^{T-1} \cup_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)} \sigma^*(P)$.

To establish this case we need to consider the following two propositions.

Proposition 9. *For sufficiently large Q, we have*

$$\mu(L^-_{n,n+1,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n} \mu(K).$$

Proof. Divide the ball K into smaller balls K_j with $\mu(K_j) = Q^{-r}$ with $r = n - q_1 + n^2\epsilon_1$. Lemma 5 will now be used to show there cannot exist two irreducible polynomials P_1 and P_2 without common roots which satisfy (14). To show this, suppose that $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$ belong to I_j, $P_1 \neq P_2$. Develop P_1 as a Taylor series expansion in the neighbourhood K_j of α_1 to obtain

$$\begin{aligned} |P_1(x)|_p &\leqslant \max\nolimits_{1\leqslant j\leqslant n} |(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j|_p \\ &\leqslant \max(Q^{-q_1+(n-1)\epsilon_1-r}, \max\nolimits_{2\leqslant j\leqslant n} p^j Q^{-q_j+(n-j)\epsilon_1-jr}) \\ &\leqslant Q^{q_1+(n-1)\epsilon_1-r} = Q^{-n-\epsilon_1(n^2-n+1)} \end{aligned}$$

for $l_2/T + q_1 \leqslant n + n^2\epsilon$ and sufficiently large Q. Obviously, the same estimate holds for P_2 on K_j. Thus, there exist two polynomials P_1 and P_2 of height at most $Q_4 = Q^{(k+1)\epsilon_1}$ which satisfy $|P_i(x)|_p < Q_4^{\frac{-n-\epsilon_1(n^2-n+1)}{(k+1)\epsilon_1}}$ on a ball with diameter $Q_4^{\frac{-n+q_1-n^2\epsilon_1}{(k+1)\epsilon_1}}$. Then Lemma 5 can be used with $\tau = \frac{n+\epsilon_1(n^2-n+1)}{(k+1)\epsilon_1}$ and $\eta = \frac{n-q_1+n^2\epsilon_1}{(k+1)\epsilon_1}$. Putting these together gives that

$$\begin{aligned} \tau + 2\max(\tau-\eta, 0) &= \frac{n+2q_1+(n^2-3n+3)\epsilon_1}{(k+1)\epsilon_1} \\ &>^{(18)} \frac{n+w+(n^2-3n+3)\epsilon_1}{(k+1)\epsilon_1} \\ &>^{w>\frac{3}{2}n+2} \frac{5n/2+2+(n^2-3n+3)\epsilon_1}{(k+1)\epsilon_1} \\ &\geqslant^{1\leqslant k+1\leqslant 1+[\epsilon_1^{-1}]\leqslant 1+\epsilon_1^{-1}} \frac{5n/2+2+(n^2-3n+3)\epsilon_1}{1+\epsilon_1} \\ &= 5n/2+2+(n^2-11n/2+1)\epsilon_1(1+\epsilon_1)^{-1} \\ &>^{\epsilon_1>0,\, n\geqslant 6} 5n/2+2. \end{aligned}$$

From Lemma 5 this implies that $5n/2+2 < 2n+\theta$ for all $\theta > 0$, and it is not difficult to check that this is a contradiction for $\theta < \frac{n}{2}+2$. Therefore, at most one polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$ belongs to each K_j. Thus, the number of polynomials $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$ is $Q^r\mu(K)$. By applying Lemma 7 and the inequalities (17) and (2), we obtain for $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$,

$$|x-\alpha_1|_p \leqslant |P(x)|_p |P(\alpha_1)|_p^{-1} < p^n Q^{-w+q_1};$$

the latter set is containing the set $\sigma^*(P) \cap S_P(\alpha_1)$. Thus, the measure of the set $L^-_{n,n+1,1}(Q,w)$ for $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l}, k)$, is

$$\ll Q^{n-w+n^2\epsilon_1}\mu(K).$$

Summing the last estimate over k and $\mathbf{l}$, we obtain that

$$\begin{aligned} \mu(L^-_{n,n+1,1}(Q,w)) &\ll \sum\nolimits_{\mathbf{l}} \sum\nolimits_{k=0}^{[\epsilon_1^{-1}]} Q^{n-w+n^2\epsilon_1}\mu(K) \\ &\ll Q^{-(w-2)/n}\mu(K) \end{aligned}$$

for $w > \frac{3}{2}n+2$, $n \geqslant 1$ and sufficiently large Q.

Proposition 10. *For sufficiently large Q, we have*

$$\mu(L^+_{n,n+1,1}(Q,w)) \ll Q^{-(w-2)/n}\mu(K)$$

where the constant implied by the Vinogradov symbol depends on n, p, ϵ_1 and K.

Proof. Expressing the discriminant $D(P)$ of an irreducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{l})$ in the form $|D(P)|_p = |a_n^{2n-2}(P)|_p \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\alpha_i - \alpha_j|_p^2$ and using (16), $|a_n|_p \leqslant 1$, and $|D(P)| \ll Q^{2n-2}$, we obtain

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1)l_j/T \leqslant n-1 \tag{19}$$

for sufficiently large Q. Using (19) and the definitions of q_i and the set $L^{+}_{n,n+1,1}(Q,w)$, we get

$$\frac{n+n^2\epsilon_1}{2}+\frac{3q_2}{2}<\frac{q_1+l_2T^{-1}}{2}+\frac{3q_2}{2}\leqslant(l_2/T+q_2/2)+\frac{3q_2}{2}=l_2/T+2q_2\leqslant\sum_{j=2}^{n}(j-1)l_j/T\leqslant n-1 \quad (20)$$

By (20) and using the definitions of q_i, we obtain

$$2l_3/T+q_2\leqslant 3q_2<n-2-n^2\epsilon_1, \quad (21)$$

which implies $l_3/T<(n-2-q_2-n^2\epsilon_1)/2$. Therefore, by (20)

$$l_3/T<(n-q_2+n^2\epsilon_1)/2<l_2/T. \quad (22)$$

Next we show that there is no pair P_1, P_2 of different polynomials in the set $P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)$ with roots α_1, β_1 respectively, satisfying (22) and the inequality

$$|\alpha_1-\beta_1|_p\leqslant Q^{(q_2-n-(n^2-2)\epsilon_1)/2}, \quad (23)$$

where $P_1(\alpha_i)=0$ and $P_2(\beta_i)=0$ for $1\leqslant i\leqslant n$. Assume that there exists such a pair of polynomials. Then, by (22) and (23), we have

$$\begin{array}{rcl}|\alpha_i-\beta_j|_p & \leqslant & \max(|\alpha_i-\alpha_1|_p,|\alpha_1-\beta_1|_p,|\beta_1-\beta_j|_p)\\ & \leqslant & \max(Q^{-l_{\max(i,j)}/T+\epsilon_1},Q^{(q_2-n-(n^2-2)\epsilon_1)/2})\\ & \leqslant & \begin{cases} Q^{(q_2-n-(n^2-2)\epsilon_1)/2} & for \quad \max(i,j)\leqslant 2,\\ Q^{-l_{\max(i,j)}/T+\epsilon_1} & for \quad \max(i,j)\geqslant 3.\end{cases}\end{array}$$

Considering the resultant $R(P_1,P_2)$ of the polynomials P_1 and P_2, we obtain

$$\begin{array}{rcl}|R(P_1,P_2)|_p & = & |a_n(P_1)^n|_p|a_n(P_2)^n|_p\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\alpha_i-\beta_j|_p\\ & \leqslant & Q^{2q_2-2n-2(n^2-2)\epsilon_1}\prod_{\max(i,j)\geqslant 3}Q^{-l_{\max(i,j)}/T+\epsilon_1}.\end{array}$$

But since $\sum_{\max(i,j)\geqslant 3}l_{\max(i,j)}/T=\sum_{j=3}^{n}(2j-1)l_j/T\geqslant 5q_2$ it follows that

$$|R(P_1,P_2)|_p\leqslant Q^{-2n-3q_2-n^2\epsilon_1}.$$

Since the polynomials P_1 and P_2 are irreducible then $|R(P_1,P_2)|\ll Q^{2n(k+1)\epsilon_1}$ and $|R(P_1,P_2)|_p\gg$ $\gg Q^{-2n(k+1)\epsilon_1}$. Thus, the inequality (23) leads to a contradiction for $n\geqslant 3$ and sufficiently large Q. Therefore we conclude that a ball $K(\alpha_1;r)$ with its centre at the point α_1, $P_1(\alpha_1)=0$, and with diameter r satisfying $p^{-r_0}\leqslant r<p^{-r_0+1}$ (with $r_0\in\mathbb{Z}$) and not exceeding $cQ^{(q_2-n-(n^2-2)\epsilon_1)/2}$, cannot contain a root β_1 of any polynomial $P_2\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)$ (with $\mathbf{l}\in G_+$) other than P_1. We cover each of the numbers α_1 under consideration by the ball $K(\alpha_1;r)$. Thus, we see that these balls are mutually disjoint and have the diameter $\gg Q^{(q_2-n-(n^2-2)\epsilon_1)/2}$. Therefore the number of polynomials $P_1\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)$ with $\mathbf{l}\in G_+$ is $\ll Q^{(-q_2+n+(n^2-2)\epsilon_1)/2}$.

By applying Lemma 3, the inequalities (17) and $|P(x)|_p<Q^{-w}$, we obtain for $P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)$,

$$|x-\alpha_1|_p\leqslant(|P(x)|_p|\alpha_1-\alpha_2|_p/|P'(\alpha_1)|_p)^{1/2}\ll Q^{(-w+q_2)/2}.$$

Thus, the measure of the set $L^{+}_{n,n+1,1}(Q,w)$ for $P\in\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{l},k)$ with at least one root satisfying (23), will be $\ll Q^{(n-w+(n^2-2)\epsilon_1)/2}$. Summing the last estimate over k and $\mathbf{l}$, we obtain that

$$\begin{array}{rcl}\mu(L^{+}_{n,n+1,1}(Q,w)) & \ll & \sum_{\mathbf{l}}\sum_{k=0}^{T-1}Q^{(n-w+(n^2-2)\epsilon_1)/2}\\ & \ll & Q^{-(w-2)/n}\mu(K)\end{array}$$

for $w>3n/2+2$, $n\geqslant 4$ and $\epsilon_1<1/n^2$.

2.3. Reducible polynomials

Denote by $L_n^{RED}(Q,w)$ a set of points $x \in K$ such that there exists a reducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ satisfying the inequality $|P(x)|_p < Q^{-w}$. Let $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ be a reducible polynomial of the form

$$P(x) = P_1(x)P_2(x), \ \ \deg P_1 = n_1, \ \ \deg P_2 = n - n_1, \ \ 1 \leqslant n_1 \leqslant n-1,$$

and the inequality $|P(x)|_p < Q^{-w}$ holds for $x \in K$. For a fixed P by $\lambda(P)$ denote the set of $x \in K$ satisfying $|P(x)|_p < Q^{-w}$.

By Gelfond's lemma [12],

$$2^{-n}H(P_1)H(P_2) \leqslant H(P) \leqslant 2^n H(P_1)H(P_2).$$

By definition of height, we have $H(P_i) \geqslant 1$ so that $H(P_i) \leqslant 2^n Q$ for $i=1,2$.

Define $L_{n,1}^{RED}(Q,w) \subset L_n^{RED}(Q,w)$ ($L_{n,2}^{RED}(Q,w)$ respectively) to be the set of points $x \in K$ for which the inequality $|P(x)|_p < Q^{-w}$ holds for some reducible polynomial $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ of the form $P(x) = P_1(x)P_2(x)$ with $1 \leqslant H(P_1) < Q$ ($Q \leqslant H(P_1) \leqslant 2^n Q$ respectively).

We need to consider two cases.

2.3.1. Case 1: $1 \leqslant H(P_1) < Q$.

Let $\beta \in (0,1)$ be a sufficiently small positive real number such that $\frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}$ and it satisfies the condition that will be specified later. Let the height of P_1 be bounded as follows: $Q^{m\beta} \leqslant H(P_1) < Q^{(m+1)\beta}$ where $0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{\beta} - 1$. Then the height of P_2 satisfies $H(P_2) \leqslant 2^n Q^{1-m\beta}$.

There exists $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\mu\left(x \in \lambda(P): \ |P_1(x)|_p < (2p(n_1+1))^{-n_1-1}Q^{-a}\right) = \mu(\lambda(P))/2. \tag{24}$$

Then for the complement to (24) we have

$$\mu\left(x \in \lambda(P): \ |P_1(x)|_p \geqslant (2p(n_1+1))^{-n_1-1}Q^{-a}\right) = \mu(\lambda(P))/2$$

or

$$\mu\left(x \in \lambda(P): \ |P_2(x)|_p < (2p(n_1+1))^{n_1+1}Q^{-w+a}\right) = \mu(\lambda(P))/2. \tag{25}$$

In the next step of the proof we will use the Lemma 4. By applying Lemma 4 and the estimates (24), (25), we have

$$|P_1(x)|_p < Q^{-a}, \quad Q^{m\beta} \leqslant H(P_1) < Q^{(m+1)\beta}, \tag{26}$$

$$|P_2(x)|_p < (2p)^{n+2}(n_1+1)^{n_1+1}(n-n_1+1)^{n-n_1+1}Q^{-w+a}, \ \ H(P_2) \leqslant 2^n Q^{1-m\beta} \tag{27}$$

for all $x \in \lambda(P)$.

Denote by $M^1_{n_1,m}(Q)$ a set of points $x \in K$ such that there exists a polynomial $P_1 \in \mathcal{P}_{n_1}(Q^{(m+1)\beta}) \setminus \setminus \mathcal{P}_{n_1}(Q^{m\beta})$ satisfying the inequality (26) for $a \geqslant 2(m+1)\beta + n_1(w-2)/n - d_m\epsilon$ and $M^2_{n_1,m}(Q)$ a set of points $x \in K$ such that there exists a polynomial $P_2 \in \mathcal{P}_{n-n_1}(2^n Q^{1-m\beta})$ satisfying the inequality (27) for $a < 2(m+1)\beta + n_1(w-2)/n - d_m\epsilon$. Here $d_m = 0$ for $m \geqslant 2$, and $d_m = n_1/2$ for $m = 0, 1$.

Let us estimate the measure of the set $M^1_{n_1,m}(Q)$. For convenience we put $Q_2 = Q^{(m+1)\beta}$ and $w_1 = \frac{2(m+1)\beta + n_1(w-2)/n - d_m\epsilon}{(m+1)\beta}$. Clearly $M^1_{n_1,m}(Q) \subset L_{n_1}(Q_2, w_1)$. By the Induction Hypothesis 1 the set $L_{n_1}(Q_2,w_1)$ has measure at most

$$\begin{aligned} f(n_1,p,K,w_1,\epsilon)Q_2^{\frac{-(w_1-2)}{n_1}+n_1\epsilon}\mu(K) &= f(n_1,p,K,w_1,\epsilon)\left(Q^{(m+1)\beta}\right)^{\frac{-(w_1-2)}{n_1}+n_1\epsilon}\mu(K) \\ &= f(n_1,p,K,w_1,\epsilon)Q^{-(w-2)/n + d_m\epsilon/n_1 + n_1\epsilon(m+1)\beta}\mu(K) \end{aligned}$$

for $w > \frac{3}{2}n((m+1)\beta + \frac{2d_m\epsilon}{3n_1}) + 2$, and sufficiently large Q.

Therefore, for $w > 3n/2 + 2$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n-1$, and $Q > Q_0$, we have

$$L_{n_1}(Q_2, w_1) \leqslant \begin{cases} f(n,p,K,w,\epsilon)Q^{-(w-2)/n+(n-1)\epsilon}\mu(K) \; for \; 2 \leqslant m \leqslant 1/\beta - 1, \; d_m = 0, \\ f(n,p,K,w,\epsilon)Q^{-(w-2)/n+(n-1/2)\epsilon}\mu(K) \\ for \; m = 0, 1, \; d_m = n_1/2, \; \beta \leqslant (3-\epsilon)/6. \end{cases}$$

Now let us estimate the measure of the set $M^2_{n_1,m}(Q)$. We set $Q_3 = 2^n Q^{1-m\beta}$ and $w_2 = \frac{w-2(m+1)\beta - n_1(w-2)/n + d_m\epsilon - \beta/2}{1-m\beta}$. In the view of the definition of the set $M^2_{n_1,m}(Q)$, we get

$$|P_2(x)| < Q_3^{-w_2}, \quad H(P_2) \leqslant Q_3$$

for $Q > Q_0$. Therefore, $M^2_{n_1,m}(Q) \subseteq L_{n-n_1}(Q_3, w_2)$. Then by Induction Hypothesis 1, we obtain

$$\begin{aligned} \mu(L_{n-n_1}(Q_3, w_2)) &< f(n-n_1,p,K,w_2,\epsilon)Q_3^{-\frac{w_2-2}{n-n_1}+(n-n_1)\epsilon}\mu(K) \\ &= f(n-n_1,p,K,w_2,\epsilon)2^{-\frac{w-2}{1-m\beta}+\frac{5n\beta-2nd_m\epsilon}{2(n-n_1)(1-m\beta)}+n(n-n_1)\epsilon} \cdot \\ &\quad \cdot Q^{-\frac{w-2}{n}+\frac{5\beta-2d_m\epsilon}{2(n-n_1)}+(n-n_1)(1-m\beta)\epsilon}\mu(K) \end{aligned}$$

for $w > 2 + \frac{3n}{2}(1 - m\beta + \frac{5\beta - 2d_m\epsilon}{3(n-n_1)})$ and sufficiently large Q. Thus, for $w > 3n/2+2$, $1 \leqslant n_1 \leqslant n-1$, and $Q > Q_0$, we have

$$L_{n-n_1}(Q_3, w_2) \leqslant \begin{cases} f(n-n_1,p,K,w_2,\epsilon)2^{-(w-2)+n(n-1+\frac{1}{2(n-1)})\epsilon}Q^{-(w-2)/n+(n-1+\frac{1}{2(n-1)})\epsilon}\mu(K) \\ for \; 2 \leqslant m \leqslant \frac{1}{\beta} - 1, \; d_m = 0, \; \beta \leqslant \epsilon/5; \\ f(n,p,K,w,\epsilon)2^{-(w-2)+n(n-1)\epsilon}Q^{-(w-2)/n+(n-1)\epsilon}\mu(K) \\ for \; m = 0, 1, \; d_m = n_1/2, \; \beta \leqslant \epsilon/5. \end{cases}$$

Combining the conditions imposed on the values of β, we obtain

$$0 < \beta \leqslant \min\{\epsilon/5, (3-\epsilon)/6\}.$$

Note that $L^{RED}_{n,1}(Q,w) \subset \cup_{n_1=1}^{n-1} \cup_{0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{\beta}-1} \left(M^1_{n_1,m}(Q) \cup M^2_{n_1,m}(Q)\right)$. Adding up the measures over all cases gives that

$$\mu(L^{RED}_{n,1}(Q,w)) \ll Q^{-\frac{w-2}{n}+(n-\frac{1}{2})\epsilon}\mu(K)$$

for sufficiently large Q.

2.3.2. Case 2: $Q \leqslant H(P_1) \leqslant 2^n Q$.

We proceed as in Case 1. The height of P_2 satisfies $H(P_2) \leqslant 2^n$ and further we proceed as in Case 1. There exists $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\mu\left(x \in \lambda(P) : \; |P_1(x)|_p < 2^{-na}(2p(n_1+1))^{-n_1-1}Q^{-a}\right) = \mu(\lambda(P))/2. \tag{28}$$

Then using Lemma 4 and the estimate (28), we get

$$|P_1(x)|_p < 2^{-na}Q^{-a}, \quad Q \leqslant H(P_1) \leqslant 2^n Q, \tag{29}$$

$$|P_2(x)|_p < 2^{n+2+na}p^{n+2}(n_1+1)^{n_1+1}(n-n_1+1)^{n-n_1+1}Q^{-w+a}, \;\; H(P_2) \leqslant 2^n \tag{30}$$

for all $x \in \lambda(P)$.

Denote by $M^3_{n_1}(Q)$ a set of points $x \in K$ such that there exists a polynomial $P_1 \in \mathcal{P}_{n_1}(2^n Q) \setminus \mathcal{P}_{n_1}(Q)$ satisfying the inequality (29) for $a \geqslant 2 + n_1(w-2)/n$ and $M^4_{n_1}(Q)$ a set of points $x \in K$ such that there exists a polynomial $P_2 \in \mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)$ satisfying the inequality (30) for $a < 2+n_1(w-2)/n$. Thus

$$L_{n,2}^{RED}(Q,w) \subset \cup_{n_1=1}^{n-1}\left(M_{n_1}^3(Q) \cup M_{n_1}^4(Q)\right).$$

Clearly,

$$M_{n_1}^3(Q) \subset L_{n_1}\left(2^nQ, 2+\frac{n_1(w-2)}{n}\right).$$

By the Induction Hypothesis 1 the set $L_{n_1}\left(2^nQ, 2+\frac{n_1(w-2)}{n}\right)$ has measure at most

$$f(n_1,p,K,w,\epsilon)\left(2^nQ\right)^{-(w-2)/n+n_1\epsilon}\mu(K) \leqslant 2^{-(w-2)+n(n-1)\epsilon}f(n_1,p,K,w,\epsilon)Q^{-(w-2)/n+(n-1)\epsilon}\mu(K)$$

for $w > \frac{3}{2}n+2$, $n_1 \leqslant n-1$ and sufficiently large Q.

To find the measure of the set $M_{n_1}^4(Q)$ we will use direct calculations. Denote by α_1 a zero of $P_2 \in \mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)$, and assume that α_1 is such that $|x-\alpha_1|_p$ is minimal. From the identity $|P_2(x)|_p = |a_{n-n_1}|_p|x-\alpha_1|_p \ldots |x-\alpha_{n-n_1}|_p$ it follows that $|x-\alpha_1|_p \leqslant \left(\frac{|P_2(x)|_p}{|a_{n-n_1}|_p}\right)^{\frac{1}{n-n_1}}$. This means that

$$M_{n_1}^4(Q) \subseteq \cup_{P_2\in\mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)} \cup_{\alpha_1\in\mathcal{A}(P_2)} \sigma_0(P_2,\alpha_1)$$

where

$$\sigma_0(P_2,\alpha_1) := \{x \in K \,:\, |x-\alpha_1|_p \leqslant (|P_2(x)|_p|a_{n-n_1}(P_2)|_p^{-1})^{\frac{1}{n-n_1}}\}.$$

This, together with the estimates (30), gives

$$\sigma_0(P_2,\alpha_1) \subset \{x \in K \,:\, |x-\alpha_1| \leqslant (2^{4n+2+n_1(w-2)}p^{n+2}(n_1+1)^{n_1+1}(n-n_1+1)^{n-n_1+1})^{\frac{1}{n-n_1}}Q^{-\frac{w-2}{n}}\}$$

for $P_2 \in \mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)$, where $|a_{n-n_1}(P_2)| \leqslant 2^n$, $|a_{n-n_1}(P_2)|_p \geqslant |a_{n-n_1}(P_2)|^{-1} \geqslant 2^{-n}$. The number of different polynomials $P_2 \in \mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)$ does not exceed $(2^{n+1}+1)^{n-n_1+1}$. Thus,

$$\mu(M_{n_1}^4(Q)) \;\leqslant\; \sum_{P_2\in\mathcal{P}_{n-n_1}(2^n)}\sum_{\alpha_1\in\mathcal{A}(P_2)}\mu(\sigma_0(P_2,\alpha_1))) \ll Q^{-\frac{w-2}{n}}\mu(K).$$

Therefore, since $L_n^{RED}(Q,w) = L_{n,1}^{RED}(Q,w) \cup L_{n,2}^{RED}(Q,w)$ we have $\mu(L_n^{RED}(Q,w)) \ll$
$\ll Q^{-\frac{w-2}{n}+(n-\frac{1}{2})\epsilon}\mu(K)$ for $w > \frac{3}{2}n+2$ and sufficiently large Q.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Beresnevich, and E. Kovalevskaya, On Diophantine approximations of dependent quantities in the p-adic case, *Mat. Zametki* **73**(1) (2003) 22–37.

2. V. Beresnevich, V. Bernik and E. Kovalevskaya, On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers, *J. Number Theory* **111**(1) (2005) 33–56.

3. V. Bernik, D. Dickinson and J. Yuan, Inhomogeneous Diophantine approximation on polynomial curves in $\mathbb{Q}_p$, *Acta Arith.* **90** (1999) 37–48.

4. N. Budarina and E. Zorin, Non-homogeneous analogue of Khintchine's theorem in divergence case for simultaneous approximations in different metrics, *Siauliai Math. Semin.* **4**(2) (2009) 21–33.

5. N. Budarina, Diophantine approximation on the curves with non-monotonic error function in the p-adic case, *Chebishevskii Sbornik.* **11** (1) (2010) 74–80.

6. N. Budarina, V.Bernik and D. Dickinson, Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **149** (2) (2010) 193–216.

7. N. Budarina, Simultaneous Diophantine approximation in the real and p-adic fields with nonmonotonic error function, *Lith. Math. J.* **51** (4) (2011) 461–471.

8. N. Budarina and F. Götze, On regular systems of algebraic p-adic numbers of arbitrary degree in small cylinders, *Dal'nevost. Mat. Zh.* **15**(2) (2015) 133–155.

9. N. Budarina, On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers, *Math. Z.* **293** (2019), 809–824.

10. N. Budarina, An effective estimate for the measure of the set of p-adic numbers with a given order of approximation, *International Journal of Number Theory* **16**, No. 3 (2020), 651–672.

11. N. Budarina, Quantitative estimate for the measure of the set of real numbers, *Glasgow Mathematical Journal* **64**, No. 2 (2022), 411–433.

12. Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160 (Cambridge University Press, Cambridge, 2004), 274 pp.

13. D. Kleibock and G. Tomanov, Flows on S-arithmetic homogeneous spaces and applications to metric Diophantine approximation, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007) 519-–581.

14. A. Mohammadi and A. Salehi-Golsefidy, S-arithmetic Khintchine-Type Theorem, *Geom. Funct. Anal.* **19**(4) (2009) 1147-–1170.

15. A. Mohammadi and A. Salehi-Golsefidy, Simultaneous Diophantine approximation in non-degenerate p-adic manifolds, *Israel J. Math.* **188** (2012) 231-–258.

16. V.G. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric Number Theory*, Transl. Math. Monogr., vol. 25, Amer. Math. Soc., Providenca, R.I. (1969).

REFERENCES

1. V. Beresnevich, and E. Kovalevskaya, On Diophantine approximations of dependent quantities in the p-adic case, *Mat. Zametki* **73**(1) (2003) 22–37.

2. V. Beresnevich, V. Bernik and E. Kovalevskaya, On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers, *J. Number Theory* **111**(1) (2005) 33–56.

3. V. Bernik, D. Dickinson and J. Yuan, Inhomogeneous Diophantine approximation on polynomial curves in $\mathbb{Q}_p$, *Acta Arith.* **90** (1999) 37–48.

4. N. Budarina and E. Zorin, Non-homogeneous analogue of Khintchine's theorem in divergence case for simultaneous approximations in different metrics, *Siauliai Math. Semin.* **4**(2) (2009) 21–33.

5. N. Budarina, Diophantine approximation on the curves with non-monotonic error function in the p-adic case, *Chebishevskii Sbornik.* **11** (1) (2010) 74–80.

6. N. Budarina, V.Bernik and D. Dickinson, Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **149** (2) (2010) 193–216.

7. N. Budarina, Simultaneous Diophantine approximation in the real and p-adic fields with nonmonotonic error function, *Lith. Math. J.* **51** (4) (2011) 461–471.

8. N. Budarina and F. Götze, On regular systems of algebraic p-adic numbers of arbitrary degree in small cylinders, *Dal'nevost. Mat. Zh.* **15**(2) (2015) 133–155.

9. N. Budarina, On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers, *Math. Z.* **293** (2019), 809–824.

10. N. Budarina, An effective estimate for the measure of the set of p-adic numbers with a given order of approximation, *International Journal of Number Theory* **16**, No. 3 (2020), 651–672.

11. N. Budarina, Quantitative estimate for the measure of the set of real numbers, *Glasgow Mathematical Journal* **64**, No. 2 (2022), 411–433.

12. Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160 (Cambridge University Press, Cambridge, 2004), 274 pp.

13. D. Kleibock and G. Tomanov, Flows on S-arithmetic homogeneous spaces and applications to metric Diophantine approximation, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007) 519-–581.

14. A. Mohammadi and A. Salehi-Golsefidy, S-arithmetic Khintchine-Type Theorem, *Geom. Funct. Anal.* **19**(4) (2009) 1147-–1170.

15. A. Mohammadi and A. Salehi-Golsefidy, Simultaneous Diophantine approximation in non-degenerate p-adic manifolds, *Israel J. Math.* **188** (2012) 231-–258.

16. V.G. Sprindzuk, *Mahler's problem in metric Number Theory*, Transl. Math. Monogr., vol. 25, Amer. Math. Soc., Providenca, R.I. (1969).

Получено 25.05.2021
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

О решении модельного кинетического уравнения ES

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

Гермидер Оксана Владимировна — кандидат физико-математических наук, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (г. Архангельск).
e-mail: o.germider@narfu.ru
Попов Василий Николаевич — доктор физико-математических наук, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (г. Архангельск).
e-mail: v.popov@narfu.ru

Аннотация

В статье описан метод нахождения решения линеаризованного эллипсоидально-статистического кинетического уравнения (ES) с однородным граничным условием на основе полиномиальной аппроксимации Чебышева в рамках задачи моделирования осевого течения разреженного газа в длинном канале. Канал образован из двух цилиндров, имеющих общую центральную ось. В качестве модели отражения молекул газа от цилиндров использовано диффузное отражение Максвелла. Течение газа обусловлено малым по абсолютной величине градиентом давления, направленным вдоль оси цилиндров. Проведен расчет массового потока газа в канале в зависимости от параметра разрежения и отношения радиусов цилиндров. Неизвестная функция, аппроксимирующая решение линеаризованного уравнения ES, представлена в виде частичной суммы разложения по многочленам Чебышева первого рода. Путем выбора узлов интерполирования и применения свойств конечных сумм многочленов Чебышева задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в этих узлах. Получены выражения массовой скорости газа в канале и потока массы газа через значения частичных сумм рядов многочленов Чебышева.

Ключевые слова: многочлены Чебышева первого рода, эллипсоидально-статистическое кинетическое уравнение, полиномиальная аппроксимация.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
О. В. Гермидер, В. Н. Попов. О решении модельного кинетического уравнения ES // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 37–49.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49

On the solution of the model kinetic equation ES

O. V. Germider, V. N. Popov

Germider Oksana Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk).
e-mail: o.germider@narfu.ru
Popov Vasily Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk).
e-mail: v.popov@narfu.ru

Abstract

The article describes a method for finding a solution to a linearized ellipsoidal-statistical kinetic equation (ES) with a homogeneous boundary condition based on the Chebyshev polynomial approximation in the framework of the problem of modeling the axial flow of a rarefied gas in a long channel. The channel is formed from two cylinders having a common central axis. Diffuse Maxwell reflection is used as a model for the reflection of gas molecules from cylinders. The gas flow is due to a small absolute value of the pressure gradient directed along the axis of the cylinders. The calculation of the mass flow of gas in the channel is carried out depending on the rarefaction parameter and the ratio of the radii of the cylinders. The unknown function approximating the solution of the linearized ES equation is represented as a partial sum of the expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. By choosing interpolation nodes and applying the properties of finite sums of Chebyshev polynomials, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations with respect to the values of the desired function at these nodes. The expressions for the gas mass velocity in the channel and the gas mass flow are obtained in terms of the partial sums of the series of Chebyshev polynomials.

Keywords: Chebyshev polynomials of the first kind, ellipsoidal-statistical kinetic equation, polynomial approximation.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
O. V. Germider, V. N. Popov, 2022, "On the solution of the model kinetic equation ES", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 37–49.

1. Введение

В работе рассматривается модельное эллипсоидально-статистическое кинетическое уравнение [1], которое применяется в динамике разреженного газа, в частности, при описании процессов переноса газа в каналах микро- и наноэлекторонных систем [2]-[7]. В настоящее время для решения модельных кинетических уравнений широко применяются методы дискретных ординат и скоростей [3], [8], конечно-разностные методы [6], [7]. Однако при реализации данных методов возникает необходимость использовать достаточно подробную сетку [6], [7]. Последнее условие приводит к большому росту вычислительных затрат при расчете параметров течений газа в канале. Для уменьшения вычислительных затрат моделирования течения газа в длинном концентрическом канале в настоящей работе предлагается метод, основанный на разложении искомой функции трех переменных в ряд по ортогональным многочленам Чебышева первого рода для каждой переменной. Выбор данной системы многочленов обусловлен устойчиво высокой скоростью равномерной сходимости разложения при увеличении порядка разложения [9], [10]. Получены выражения для частных производных функции и ее интегралов через коэффициенты частичной суммы ряда Чебышева. Краевая задача сведена к решению системы линейных уравнений, записанной в матричной форме, где в качестве узлов интерполирования выбраны точки экстремума и нули многочленов Чебышева. Вычисление коэффициентов разложения при этом выполнено с использованием свойств конечных сумм в этих точках. При таком подходе к построению решения не только минимизируется погрешность интерполирования, но и минимизируется влияние ошибок округления при вычислении значений искомой функции в узлах. Основной расчетной величиной является приведенный поток массы газа. Полученное для него выражение записывается через найденные значения функции в узлах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение разреженного газа в длинном канале, образованным двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R'_1 и R'_2 ($R'_1 < R'_2$), под действием заданного градиента давления, направленного вдоль оси канала z'. Считаем, что цилиндры поддерживаются при постоянной температуре. Полагаем, что длина канала $L' \gg D'_h$, где $D'_h = 2(R'_2 - R'_1)$ – гидравлический диаметр [8].

Состояние газа в точке $\mathbf{r}'$ определяем функцией распределения молекул газа $f'(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, где $\mathbf{v}$ – молекулярная скорость газа. В качестве масштабов длины, скорости, концентрации, температуры, функции распределения выберем соответственно величины: D'_h, $\beta^{-1/2}$, n'_0, T'_0, $n'_0\beta^{3/2}$, где $\beta = m'/(2k_BT'_0)$, k_B – постоянная Больцмана, m' – масса молекул газа, n'_0, T'_0 – концентрация, температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат; $p' = n'k_BT'$. Тогда для безразмерных величин имеем следующие соотношения

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{D'_h},\ R_1 = \frac{R'_1}{D'_h},\ R_2 = \frac{R'_2}{D'_h},\ f = \frac{f'}{n'_0\beta^{3/2}},$$

$$\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v},\ \mathbf{u} = \beta^{1/2}\mathbf{u}',\ \mathbf{q} = \frac{\beta^{1/2}}{p'_0}\mathbf{q}',\ n = \frac{n'}{n'_0},\ T = 1.$$

Считаем, что безразмерный градиент давления является малым по абсолютной величине, т.е.

$$G_p = \frac{dp}{dz},\ |G_p| \ll 1. \tag{1}$$

Учитывая, осесимметричный характер течения газа в канале, введем цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (\rho, r_\varphi, r_z)$ в конфигурационном пространстве и в пространстве скоростей $\mathbf{C} = (C_\perp, C_\psi, C_z)$. В линейном приближении имеем

$$p(z) = 1 + G_pz,\ f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C)\left(1 + G_p(z + h(\rho, \mathbf{C}))\right),\ f_0(C) = \pi^{-3/2}\exp\left(-C^2\right),$$

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int \exp\left(-C^2\right)C_zh(\rho, \mathbf{C})\mathrm{d}^3\mathbf{C}. \tag{2}$$

Основной расчетной величиной является приведенный поток массы газа

$$J_M = \frac{4}{(R_2^2 - R_1^2)}\int\limits_{R_1}^{R_2} U_z(\rho)\rho\mathrm{d}\rho. \tag{3}$$

Для нахождения $h(\rho, \mathbf{C})$ используем уравнение ES [1]

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{\rho}\right)C_\perp + C_z + \mathrm{Pr}\delta h(\rho, \mathbf{C}) = \frac{\mathrm{Pr}\delta}{\pi^{3/2}}\int K(\mathbf{C}, \mathbf{C}')\exp(-C'^2)h(\rho, \mathbf{C}')\mathrm{d}^3\mathbf{C}', \quad (4)$$

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 2\mathbf{C}'\mathbf{C} + \frac{2}{3}\left(C'^2 - \frac{3}{2}\right)\left(C^2 - \frac{3}{2}\right) - \\ - 2(\mathrm{Pr}^{-1} - 1)\sum_{i,j=1}^{3}\left(C_i'C_j' - \frac{1}{3}C'^2\delta_{ij}\right)\left(C_iC_j - \frac{1}{3}C^2\delta_{ij}\right). \quad (5)$$

где δ – параметр разрежения газа, δ_{ij} – символ Кронекера, Pr – число Прандтля, которое для одноатомного газа равно 2/3. В частном случае Pr = 1 модель ES сводится к модели Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК, BGK) [11].

Умножим левую и правую части уравнения (2) на $\pi^{-1/2}C_z\exp(-C_z^2)$ и проинтегрируем по C_z.

Введя обозначение

$$Z_i(\rho, \zeta_i, C_\perp) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)C_z h(\rho, \mathbf{C})\mathrm{d}C_z, \quad (6)$$

где $\zeta_i = \cos\psi_i$, $\psi_1 \in [0, \pi]$ и $\psi_2 = 2\pi - \psi_1$, записываем выражение (2) через $Z_i(\rho, \zeta_i, C_\perp)$ $(i = 1, 2)$

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}Z_i(\rho, C_\perp, \zeta_i)\mathrm{d}\zeta_i\mathrm{d}C_\perp. \quad (7)$$

При $\psi = \psi_1$ уравнение (4) имеет вид

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial \rho}\zeta_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial \zeta_1}\frac{1-\zeta_1^2}{\rho}\right)C_\perp + \frac{1}{2} + \mathrm{Pr}\delta Z_1(\rho, \zeta_1, C_\perp) = \\ = \mathrm{Pr}\delta\left(U_z(\rho) + \zeta_1 C_\perp\sigma_1(\rho) + \sqrt{1-\zeta_1^2}C_\perp\sigma_2(\rho)\right), \quad (8)$$

при $\psi = \psi_2$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}\zeta_2 + \frac{\partial Z_2}{\partial \zeta_2}\frac{1-\zeta_2^2}{\rho}\right)C_\perp + \frac{1}{2} + \mathrm{Pr}\delta Z_2(\rho, \zeta_2, C_\perp) = \\ = \mathrm{Pr}\delta\left(U_z(\rho) + \zeta_2 C_\perp\sigma_1(\rho) - \sqrt{1-\zeta_2^2}C_\perp\sigma_2(\rho)\right). \quad (9)$$

Здесь

$$\sigma_1(\rho) = \frac{1-\mathrm{Pr}^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}Z_i(\rho, C_\perp, \zeta_i)\mathrm{d}\zeta_i\mathrm{d}C_\perp, \quad (10)$$

$$\sigma_2(\rho) = \frac{1-\mathrm{Pr}^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}(-1)^{i+1}Z_i(\rho, C_\perp, \zeta_i)\mathrm{d}\zeta_i\mathrm{d}C_\perp. \quad (11)$$

Учитывая, что $\zeta_2 = \zeta_1$, перепишем уравнение (9) и функции (7), (10) и (11) в виде

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial \rho}\zeta_1 + \frac{\partial Z_2}{\partial \zeta_1}\frac{1-\zeta_1^2}{\rho}\right)C_\perp + \frac{1}{2} + \mathrm{Pr}\delta Z_2(\rho,\zeta_1,C_\perp) = \\ = \mathrm{Pr}\delta\left(U_z(\rho) + \zeta_1 C_\perp \sigma_1(\rho) - \sqrt{1-\zeta_1^2}C_\perp\sigma_2(\rho)\right), \quad (12)$$

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}Z_i(\rho,\zeta_1,C_\perp)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}C_\perp, \quad (13)$$

$$\sigma_1(\rho) = \frac{1-\mathrm{Pr}^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}Z_i(\rho,\zeta_1,C_\perp)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}C_\perp, \quad (14)$$

$$\sigma_2(\rho) = \frac{1-\mathrm{Pr}^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-1}^{1}(-1)^{i+1}Z_i(\rho,\zeta_1,C_\perp)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}C_\perp. \quad (15)$$

Пусть $Z(\rho,\zeta,C_\perp) = Z_1(\rho,\zeta_1,C_\perp) + Z_2(\rho,\zeta_1,C_\perp)$ и $\zeta = \zeta_1$. Тогда

$$U_z(\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z(\rho,\zeta,C_\perp)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}C_\perp. \quad (16)$$

Складывая левые и правые части уравнений (9) и (12), получаем

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\zeta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\frac{1-\zeta^2}{\rho}\right)C_\perp + 1 + \mathrm{Pr}\delta Z(\rho,\zeta,C_\perp) = 2\mathrm{Pr}\delta\left(U_z(\rho) + \zeta C_\perp\sigma(\rho)\right), \quad (17)$$

где

$$\sigma(\rho) = \sigma_1(\rho) = \frac{1-\mathrm{Pr}^{-1}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^2\int\limits_{-1}^{1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}Z(\rho,\zeta,C_\perp)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}C_\perp. \quad (18)$$

В качестве граничного условия на цилиндрах используем модель диффузного отражения Максвелла [12]. В этом случае

$$Z(R_i,\zeta,C_\perp) = 0, \ (-1)^i\zeta < 0. \quad (19)$$

Таким образом, определение безразмерной массовой скорости газа U_z согласно (16) и вычисление потока массы газа в канале J_M по формуле (3) сводится к решению уравнения (17) с граничным условием (19).

3. Решение краевой задачи

Представляем $Z(\rho,\zeta,C_\perp)$, где $\rho \in [R_1, R_2]$, $\zeta \in [-1, 1]$ и $C_\perp \in [0,+\infty)$, в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода $\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i), (j_i = \overline{0,n_i})\}$ [13], [14] для каждой переменной $x_i \in [-1, 1]$ ($n_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,3}$):

$$x_1 = \frac{2\rho - R_2 - R_1}{R_2 - R_1}, \ x_2 = \zeta, \ x_3 = \frac{C_\perp - 1}{C_\perp + 1}. \quad (20)$$

В результате

$$Z(\rho,\zeta,C_\perp)=\sum_{\substack{k_i=0\\ i=\overline{1,3}}}^{n_i} a_{k_1k_2k_3}T_{k_1}(x_1)T_{k_2}(x_2)T_{k_3}(x_3)=\mathbf{T_1}(x_1)\otimes\mathbf{T_2}(x_2)\otimes\mathbf{T_3}(x_3)\mathbf{A}, \tag{21}$$

где $\mathbf{T_i}$ – матрица-строка размером $1\times n_i'$ ($n_i'=n_i+1$, $i=\overline{1,3}$):

$$\mathbf{T}_i(x_i)=\left(T_0(x_i)\,T_1(x_i)\ldots T_{n_i-1}(x_i)\,T_{n_i}(x_i)\right), \tag{22}$$

с помощью $\otimes$ обозначается операция умножения Кронекера двух матриц, $\mathbf{A}$ – матрица-столбец, имеющая размер $n_1'n_2'n_3'\times 1$ и составленная из коэффициентов $a_{k_1k_2k_3}$,:

$$\mathbf{A}=\left(a_{000}\,a_{001}\ldots a_{n_1n_2n_3-1}\,a_{n_1n_2n_3}\right)^T. \tag{23}$$

Получим выражения для производных от полиномов Чебышева. Учитывая, что из определения полинома Чебышева нулевой степени $T_0(x_i)=1$ вытекает

$$\frac{\mathrm{d}T_0(x_i)}{\mathrm{d}x_i}=0,$$

а для производной от полинома Чебышева степени $j_i>0$ выполняется соотношение [13]

$$\frac{\mathrm{d}T_{j_i}(x_i)}{\mathrm{d}x_i}=2j_i\sum_{\substack{k_i=0\\ j_i-k_i-\text{ нечет.}}}^{j_i-1}{}' \quad T_{k_i}(x_i),\;\; i=1,2,$$

где под $\sum'$ понимаем сумму, в которой первое слагаемое умножается на $1/2$, имеем

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T_i}}{\mathrm{d}x_i}=\mathbf{D_i}\mathbf{T_i},\;\; i=1,2, \tag{24}$$

где $\mathbf{D_i}$ – верхняя треугольная матрица размером $n_i'\times n_i'$

$$D_{i,j_1j_2}=\begin{cases} j_2, & j_1=0,\; j_2\,\text{нечет.}\\ 2j_2 & j_1>0,\; j_2-j_1>0,\; j_2-j_1\,\text{нечет.}\end{cases} \tag{25}$$

Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов матриц начинаем с нуля.

Для вычисления интегралов (16) и (17) по переменной $\zeta=x_2$ используем условие ортогональности полиномов Чебышева [13]

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_i(x_2)T_j(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}}\mathrm{d}x_2=\delta_{i,j}\gamma_i', \tag{26}$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$\gamma_i'=\begin{cases} 2, & i=0,\\ 1 & i>0.\end{cases}$$

Для вычисления интегралов (16) и (18) по переменной $C_\perp$ применяем метод Clenshaw-Curtis [15], записывая эти интегралы в виде

$$P_{1+i,k_3}=\int\limits_0^{+\infty}\exp(-C_\perp^2)C_\perp^iT_{k_3}(x_3)\mathrm{d}C_\perp=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1+x_3)^i}{(1-x_3)^{i+2}}\exp\left(-\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_3)^2}\right)T_{k_3}(x_3)\mathrm{d}x_3,\quad i=1,2,\;\; k_3=\overline{0,n_3}. \tag{27}$$

На основе (26) в (27) для (16) и (18) имеем

$$2U_z = \mathbf{T_1} \otimes \mathbf{P_0} \otimes \mathbf{P_2 A}, \tag{28}$$

$$2\sigma_z = \left(1 - \mathrm{Pr}^{-1}\right) \mathbf{T_1} \otimes \mathbf{P_1} \otimes \mathbf{P_3 A}, \tag{29}$$

где

$$\mathbf{P_i} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^i}{\sqrt{1-x_2^2}} \mathbf{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}} T_i(x_2)\mathbf{T_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 = (2\delta_{0i},\, \delta_{1i}, 0 \ldots 0,\, 0)\,,\ i = 0, 1,$$

а элементы матриц-строк $\mathbf{P_2}$ и $\mathbf{P_3}$ определяются (27).

Выражая переменные ρ, ζ и $C_\perp$ из (28) через x_1, x_2 и x_3, записываем интегро-дифференциальное уравнение (17) и граничное условие (19) в матричной форме. Подставляя (21), (28) и (29) в (17) и (19) и учитывая (24), получаем

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{A} = -1, \tag{30}$$

$$\mathbf{T_1}(\pm 1) \otimes \mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{T_3}(x_3)\mathbf{A} = 0, \quad \pm x_2 < 0, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \frac{4(1+x_3)}{1-x_3}\,&\Big(x_2\mathbf{T_1}(x_1)\mathbf{D_1} \otimes \mathbf{T_2}(x_2) + \\ &+ \frac{(1-x_2^2)}{x_1 + 2(R_2 - R_1)}\,\mathbf{T_1}(x_1) \otimes (\mathbf{T_2}(x_2)\mathbf{D_2})\Big) \otimes \mathbf{T_3}(x_3) + \\ &+ \mathrm{Pr}\delta\mathbf{T_1}(x_1) \otimes \left(\mathbf{T_2}(x_2) \otimes \mathbf{T_3}(x_3) - \mathbf{P_0} \otimes \mathbf{P_2} - \frac{\left(1 - \mathrm{Pr}^{-1}\right) x_2(1+x_3)}{1-x_3}\mathbf{P_1} \otimes \mathbf{P_3}\right),\end{aligned} \tag{32}$$

В качестве узлов интерполирования в (30) для x_1 выберем точки экстремума многочлена $T_{n_1}(x_1)$ на отрезке $[-1;1]$, для x_2 и для x_3 — корни $T_{n_2'}(x_2)$ и $T_{n_3'}(x_3)$ на этом отрезке:

$$x_{1,k_1} = \cos\left(\frac{\pi(n_1 - k_1)}{n_1}\right), \quad k_1 = \overline{0, n_1}, \tag{33}$$

$$x_{i,k_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i},\ i = 2, 3. \tag{34}$$

Подставляя (33) и (34) в (17), приходим к системе линейных $n_1'n_2'n_3'$-уравнений, в которой, полагая, что n_2 – нечетное число, вместо уравнений в узлах $x_{1,0}$, x_{2,k_2} ($k_2 = \overline{n_2'/2, n_2}$) записываем уравнения (31):

$$\mathbf{T_1}(-1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T_3}(x_{3,k_3})\mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}. \tag{35}$$

Аналогично, исключая уравнения в точках x_{1,n_1}, x_{2,k_2} ($k_2 = \overline{0, n_2'/2 - 1}$), заменяем их на

$$\mathbf{T_1}(1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T_3}(x_{3,k_3})\mathbf{A} = 0, \quad k_3 = \overline{0, n_3}. \tag{36}$$

В результате система линейных $n_1'n_2'n_3'$-уравнений записывается в матричной форме

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F}, \tag{37}$$

где $\mathbf{K}$ – квадратная матрица размера $n'_1 n'_2 n'_3 \times n'_1 n'_2 n'_3$, в которой строки с индексами $j_1 = k_2 n'_3 + k_3$ ($k_2 = \overline{n'_2/2, n_2}$, $k_3 = \overline{0, n_3}$): $\mathbf{K}_{j_1} = \mathbf{T_1}(-1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T_3}(x_{3,k_3})$, с индексами $j_2 = n_1 n'_2 n'_3 + k_2 n'_3 + k_3$ ($k_2 = \overline{0, n'_2/2-1}$, $k_3 = \overline{0, n_3}$): $\mathbf{K}_{j_1} = \mathbf{T_1}(1) \otimes \mathbf{T_2}(x_{2,k_2}) \otimes \mathbf{T_3}(x_{3,k_3})$, для остальных строк этой матрицы $\mathbf{K}_j = \mathbf{B}(x_{1,k_1}, x_{1,k_2}, x_{1,k_3})$, F – матрица-столбец размера $n'_1 n'_2 n'_3 \times 1$ единичными элементами за исключением $F_{j_1} = F_{j_2} = 0$.

Используя обозначение

$$\mathbf{Z} = (Z_{000},\, Z_{001} \dots Z_{n_1 n_2 n_3 - 1}\, Z_{n_1 n_2 n_3})^T,\ Z_{k_1 k_2 k_3} = Z(\rho_{k_1}, C_{\perp,k_2}, \zeta_{k_3}),$$

получаем выражение для коэффициентов в (21) через значения функции Z в узлах (33) и (34):

$$\mathbf{A} = \mathbf{J_1}^{-1} \otimes \mathbf{H_1}^{-1} \otimes \mathbf{G_1}^{-1} \mathbf{Z}, \tag{38}$$

где $\mathbf{J_1}$, $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{G_1}$ – квадратные матрицы с элементами $J_{k_1,j_1} = T_{j_1}(x_{1,k_1})$, $H_{k_2,j_2} = T_{j_2}(x_{2,k_2})$, $G_{k_3,j_3} = T_{j_3}(x_{3,k_3})$, $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$, $i = \overline{1,3}$.

Найдем обратные матрицы $\mathbf{J_1}^{-1}$, $\mathbf{H_1}^{-1}$ и $\mathbf{G_1}^{-1}$. Для этого рассмотрим суммы

$$g_1(j,l) = \frac{2}{n_1} \sum_{k=0}^{n_1}{}'' T_k(x_{1,j}) T_k(x_{1,l}),\ j,l = \overline{0, n_1}, \tag{39}$$

$$g_i(j,l) = \frac{2}{n_i+1} \sum_{k=0}^{n_i}{}' T_k(x_{i,j}) T_k(x_{i,l}),\ j,l = \overline{0, n_i},\ i = 2,3, \tag{40}$$

где двойной штрих у знака суммы (39) означает, что первое и последнее слагаемое умножается на 1/2.

Подставляя (33) и (34) в $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$, ($j_i = \overline{0, n_i}$), имеем

$$T_{k_1}(x_{1,j_1}) = \cos\left(\frac{\pi k_1 (n_1 - j_1)}{n_1}\right), \quad j_1, k_1 = \overline{0, n_1}, \tag{41}$$

$$T_{k_i}(x_{i,j_i}) = \cos\left(\frac{\pi k_i (2n_i - 2j_i + 1)}{2n'_i}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i},\ i = 2,3. \tag{42}$$

Учитывая, что

$$s_n(j) = 2 \sum_{k=0}^{n}{}'' \cos(jk\pi) = \begin{cases} n, & j = 0,2 \\ \dfrac{\sin(j\pi)\sin(jn\pi)}{1-\cos(j\pi)}, & 0 < j < 2, \end{cases}$$

и подставляя соответственно (41) и (42) в (39) и (40), получаем

$$n_1 g_1(l_1, j_1) = s_{n_1}\left(\frac{l_1 - j_1}{n_1}\right) + s_{n_1}\left(2 - \frac{l_1 + j_1}{n_1}\right),$$

$$n'_i g_i(l_i, j_i) = s_{n'_i}\left(\frac{l_i - j_i}{n'_i}\right) + s_{n'_i}\left(\frac{2n_i - (l_i + j_i) + 1}{n'_i}\right) - \\ - \left(\cos\left(\pi(l_i - j_i)\right) + \cos\left(\pi(2n_i - (l_i + j_i) + 1)\right)\right),$$

$$g_1(l_1, j_1) = \begin{cases} \dfrac{s_{n_1}(0) + s_{n_1}(2)}{n_1} = 2, & l_1 = j_1 = 0, \\ \dfrac{s_{n_1}(0)}{n_1} = 1, & 0 < l_1 = j_1 < n_1, \\ 0, & l_1 \neq j_1, \\ \dfrac{2 s_{n_1}(0)}{n_1} = 2, & l_1 = j_1 = n_1, \end{cases} \tag{43}$$

$$g_i(l_i,j_i)=\begin{cases}\dfrac{s_{n_i'}(0)}{n_i'}=1, & 0\le l_i=j_i\le n_i,\\ 0, & l_i\ne j_i,\end{cases}\quad i=1,2. \tag{44}$$

Из (43) и (44) следует, что обратные матрицы $\mathbf{J_1}^{-1}=2(\mathbf{J_1}^T)''/n_1$, $\mathbf{H_1}^{-1}=2(\mathbf{H_1}^T)'/n_2'$ и $\mathbf{G_1}^{-1}=2(\mathbf{G_1}^T)'/n_3'$, где верхний индекс T у матриц $\mathbf{J_1}$, $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{G_1}$ обозначает операцию транспонирования, а одиночный штрих у матриц $\mathbf{H_1}^T$ и $\mathbf{G_1}^T$ – умножение их строк с нулевым индексом на 1/2, двойной штрих у матрицы $\mathbf{J_1}^T$ – умножение строк и столбцов с индексами 0, n_1 этой матрицы также на 1/2.

Используя (38), приходим к уравнению относительно $\mathbf{Z}$,

$$\mathbf{WZ}=\mathbf{F}, \tag{45}$$

где

$$\mathbf{W}=\mathbf{K}(\mathbf{J_1}^{-1}\otimes\mathbf{H_1}^{-1}\otimes\mathbf{G_1}^{-1})=4\mathbf{W_1}+\delta\mathrm{Pr}\mathbf{I}-\delta\mathrm{Pr}(\mathbf{W_2}+\mathbf{W_3}),$$
$$\mathbf{W_1}=\mathbf{E_{JH}}\circ\big(\mathbf{J_1D_1J_1}^{-1}\otimes\mathbf{I_{d,2}}+\mathbf{I_{d,1}}\otimes(\mathbf{H_2}\circ\mathbf{H_1D_2H_1}^{-1})\big)\otimes\mathbf{I_{d,3}},$$
$$\mathbf{W_2}=\mathbf{E_{JH}}\circ(\mathbf{I_1}\otimes\mathbf{H_3})\otimes\mathbf{G_2},$$
$$\mathbf{W_3}=\mathbf{E_{JH}}\circ(\mathbf{I_1}\otimes\mathbf{H_4})\otimes\mathbf{G_3},$$

где $\mathbf{I_1}$ и $\mathbf{I}$ – единичные матрицы размерами $n_1'\times n_1'$ и $n_1'n_2'n_3'\times n_1'n_2'n_3'$, соответственно; $\mathbf{I_{d,1}}$, $\mathbf{I_{d,2}}$ и $\mathbf{I_{d,3}}$ – диагональные матрицы:

$$I_{d,1,k_1,k_1}=\frac{1}{x_{1,k_1}+2(R_2-R_1)},\ I_{d,2,k_2,k_2}=x_{2,k_2},\ I_{d,3,k_3,k_3}=\frac{1+x_{3,k_3}}{1-x_{3,k_3}},\ k_i=\overline{0,n_i},\ i=\overline{1,3};$$

$\mathbf{E_{JH}}$ – квадратная матрица размером $n_1'n_2'\times n_1'n_2'$, все элементы которой равны 1, за исключением нулевых строк с индексами k $(k=\overline{n_2'/2,n_2})$ и $n_1n_2'+k$ $(k=\overline{0,n_2'/2-1}$; $\mathbf{H_2}$ – квадратная матрица размером $n_2'\times n_2'$ с равными столбцами j: $H_{2,k,j}=1-x_{2,k}^2$ $(j,k=\overline{0,n_2})$, $\mathbf{H_3}$ – квадратная матрица $(n_2'\times n_2')$, все элементы которой равны 1, матрица $\mathbf{G_2}$ $(n_3'\times n_3')$ имеет равные строки $\mathbf{P_2G_1}^{-1}$; $\mathbf{H_4}=\mathbf{V_2}(\mathbf{H_1}^{-1})_1$, $\mathbf{V_i}$ – матрица-столбец с элементами $V_{i,k_i}=I_{d,i,k_i,k_i}$ $(i=2,3)$, $(\mathbf{H_1}^{-1})_1$ – матрица, которая является первой строкой $\mathbf{H_1}^{-1}$ при нумерации от нуля, $\mathbf{G_3}=\mathbf{V_3P_3G_1}^{-1}$. Отметим, что применение выражения (38) для коэффициентов в (21) через значения функции Z в узлах (33) и (34) со свойством произведения Кронекера позволяет получить диагональные матрицы $\mathbf{I_{d,1}}$, $\mathbf{I_{d,2}}$ и $\mathbf{I_{d,3}}$.

Решение уравнения (45) находим LU-методом. Зная элементы матрицы $\mathbf{Z}$, восстанавливаем $U_z(\rho)$:

$$2U_z(\rho)=\mathbf{T_1}\left(\frac{2\rho-R_2-R_1}{R_2-R_1}\right)\mathbf{J_1}^{-1}\otimes\mathbf{H_3}_0\otimes\mathbf{G_2}_0\otimes\mathbf{Z}, \tag{46}$$

где $\mathbf{H_3}_0$ и $\otimes\mathbf{G_2}_0$ – матрицы, которые являются соответственно сроками $\mathbf{H_3}$ и $\otimes\mathbf{G_2}$ с индексом 0.

Подставляя (46) в (3), имеем

$$J_M=\mathbf{P_4J_1}^{-1}\otimes\mathbf{H_3}_0\otimes\mathbf{G_2}_0\mathbf{Z}, \tag{47}$$

$$\mathbf{P_4}=\int_{-1}^{1}\mathbf{T_1}(x_1)\left(x_1\frac{1-R}{1+R}+1\right)\mathrm{d}x_1,\quad R=\frac{R_1}{R_2}.$$

Учитывая, что [15]

$$2x_1T_i(x_1)=T_{i+1}(x_1)+T_{|i-1|}(x_1),\qquad \int_{-1}^{1}T_i(x_1)dx_1=\begin{cases}\dfrac{2}{1-i^2}, & i-\text{чет.},\\ 0, & i-\text{нечет.}\end{cases} \tag{48}$$

приходим к следующим выражениям для элементов матрицы-строки $\mathbf{P_4}$:

$$\mathbf{P_4} = \begin{cases} \dfrac{2}{1-i^2}, & i - \text{чет.}, \\ \dfrac{1-R}{1+R}\left(\dfrac{1}{1-(i-1)^2} + \dfrac{1}{1-(i+1)^2}\right), & i - \text{нечет.} \end{cases} \tag{49}$$

4. Анализ результатов

Для проверки адекватности полученных результатов (47) проведем сравнение с аналогичными результатами, представленными в [8] для случая $\mathrm{Pr} = 1$. Расчеты проводились с использованием системы компьютерной алгебры Maple. На рис. 1 показано относительное отклонение d_r величины приведенного потока массы газа, расчитанного по формуле (47) с использованием найденных значений элементов матрицы $\mathbf{Z}$ при $n_i = 15$ $(i = \overline{1,3})$, от его величины, полученной в [8] на основе решения уравнения БГК методом дискретных скоростей. Интерполирование d_r выполнено с применением кубического сплайна по точкам, которые отмечены на этом рисунке. Видно, что результаты настоящей работы в целом хорошо согласуются с результатами из [8]. С увеличением значений параметра разреженности δ происходит уменьшение относительного отклонения d_r.

На рис. 2 представлены результаты вычислений относительного отклонения d_r величины J_M при $\mathrm{Pr} = 2/3$ от его величины при $\mathrm{Pr} = 1$. Расчеты выполнены по формуле (47) при $n_i = 15$ $(i = \overline{1,3})$.

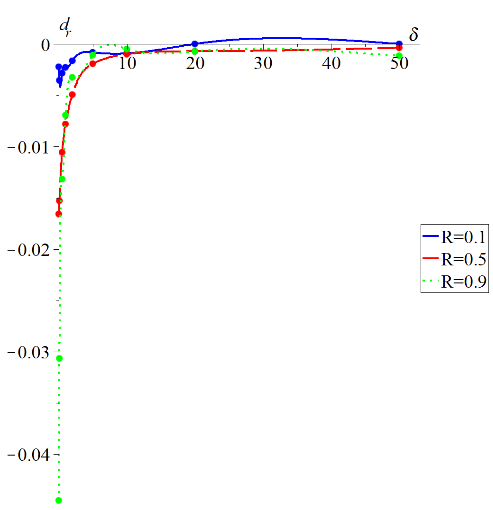


Рис. 1: Относительное отклонение d_r величины J_M при $\mathrm{Pr} = 1$

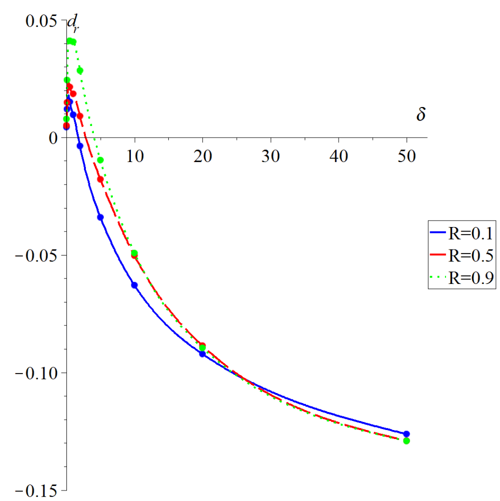


Рис. 2: Относительное отклонение d_r величины J_M при $\mathrm{Pr} = 2/3$ от значения J_M при $\mathrm{Pr} = 1$

Представленные результаты тестовых расчетов показывают, что предложенный метод решения модельного кинетического уравнения ES, обеспечивает хорошую точность счета в широком диапазоне изменения параметра разреженности δ для различных значений отношения радиусов цилиндров.

Рис. 3 и 4 иллюстрируют сходимость результатов вычислений, соответственно при $\mathrm{Pr} = 1$ и $\mathrm{Pr} = 2/3$. Количество узлов, которое использовано, составляет $n_i = 15$ $(i = \overline{1,3})$ и $n_i = 7$ $(i = \overline{1,3})$ для каждого рассматриваемого случая.

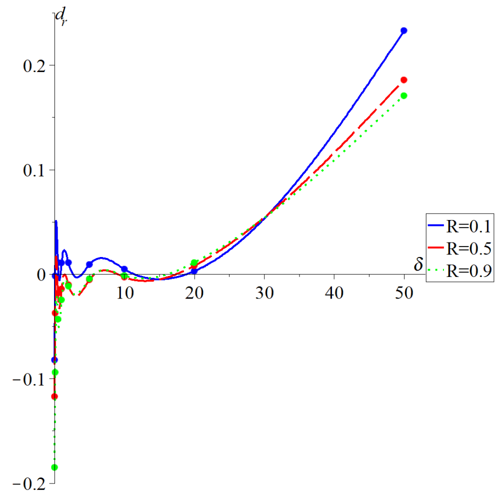


Рис. 3: Относительное отклонение d_r величины J_M при $n_i = 7$ от значений J_M при $n_i = 15$ $(i = \overline{1,3})$ для Pr $= 1$

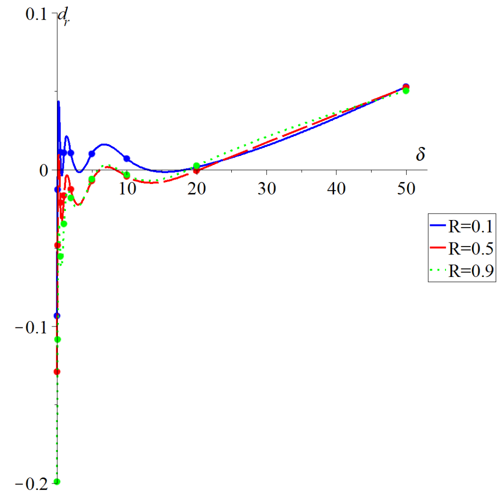


Рис. 4: Относительное отклонение d_r величины J_M при $n_i = 7$ от значений J_M при $n_i = 15$ $(i = \overline{1,3})$ для Pr $= 2/3$

5. Заключение

Методом полиномиальной аппроксимации Чебышева получено решение эллипсоидально-статистического кинетического уравнения в рамках задачи об изотермическом течении разреженного газа в длинном канале, образованном двумя цилиндрами, при полной аккомодации молекул газа на стенках этого канала. Реализация метода выполнена с использованием свойств сумм многочленов Чебышева в точках экстремума и нулей этих многочленов. Вычислены значения массового потока газа для широкого диапазона изменения значений параметра разрежения. Показано, что применение многочленов Чебышева при исследовании течений газа дает возможность эффективно находить интегральные характеристики этих течений с последующим их анализом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Holway L.H. New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // Physics of Fluids. 1966. Vol.9. P. 1658-1673.

2. Andries P., Bourgat J-F., Le Tallec P., Perthame B. Numerical comparison between the Boltzmann and ES-BGK models for rarefied gases // Comput Methods Appl Mech Eng. 2002. Vol. 191, № 31. P. 3369-3390.

3. Graur I.A., Polikarpov A.P. Comparison of different kinetic models for the heat transfer problem // Heat Mass Transfer. 2009. Vol. 46, № 2. P. 237-244.

4. Belyi V.V. Derivation of model kinetic equation // Europhysics Letters. 2015. Vol. 111. P. 40011.

5. Chen S., Xu K., Cai Q., A comparison and unification of ellipsoidal statistical and Shakhov BGK models // Adv. Appl. Math. Mech. 2015. Vol. 7. P. 245-266.

6. Ambrus V. E., Sharipov F., Sofonea V. Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions // Computers and Fluids. 2020 Vol. 211. P. 104637

7. Фролова А.А., Титарев В.А. Кинетические методы решения нестационарных задач со струйными течениями // Математика и математическое моделирование. 2019. Vol. 4. P. 34-51.

8. Breyiannis G., Varoutis S., Valougeorgis D. Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2008. Vol. 27. P. 609-622.

9. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation.2018. Vol. 322. P. 55-65.

10. Шильков А.В. Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 249. 28 с.

11. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A. Model for collision process in gases // Physical Review. 1954. Vol. 94. P. 511-525.

12. Cercignani C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. – New York: Plenum Press, 1969. – 227 p.

13. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. – Florida: CRC Press, 2003. – 360 p.

14. Boyd J. Chebyshev and Fourier Spectral Methods, second ed. – New York: Dover, 2000. – 668 p.

15. Clenshaw C. W., Curtis A. R. A method for numerical integration on an automatic computer // Num. Math. 1960. Vol. 2, P. 197-205.

REFERENCES

1. Holway, L.H., 1966, “New statistical models for kinetic theory: Methods of construction“, *Physics of Fluids*, vol.9, pp. 1658-1673.

2. Andries, P., Bourgat, J-F., Le Tallec, P. & Perthame, B., 2002, “Numerical comparison between the Boltzmann and ES-BGK models for rarefied gases“, *Comput Methods Appl Mech Eng.*, vol. 191, no. 31. pp. 3369-3390.

3. Graur, I.A. & Polikarpov, A.P., 2009, “Comparison of different kinetic models for the heat transfer problem“, *Heat Mass Transfer*, vol. 46, no. 2. pp. 237-244.

4. Belyi, V.V., 2015, “Derivation of model kinetic equation“, *Europhysics Letters*, vol. 111, pp. 40011.

5. Chen, S., Xu K. & Cai, Q., 2015, “A comparison and unification of ellipsoidal statistical and Shakhov BGK models“, *Adv. Appl. Math. Mech.*, vol. 7. pp. 245-266.

6. Ambrus, V. E., Sharipov, F. & Sofonea, V., 2020, “Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions“, *Computers and Fluids*, vol. 211. pp. 104637

7. Titarev V.A. & Frolova A.A., 2019, “Kinetic methods for solving unsteady problems“, *Mathematics and Mathematical Modeling*, no. 04. pp. 34–51.

8. Breyiannis, G., Varoutis, S. & Valougeorgis, D., 2008, “Rarefied gas flow in concentric annular tube: Estimation of the Poiseuille number and the exact hydraulic diameter“, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, vol. 27, pp. 609-622.

9. Baseri, A., Abbasbandy, S. & Babolian, E., 2018, “A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions“, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 322, pp. 55-65.

10. Shilkov, A.V., 2018, “Operator decomposition Scattering of the Particle Transport Equation in a Series in Spherical Tensors“, *Keldysh Institute Preprints named after M.V. Keldysh* no. 249, 28 pp. (Russian).

11. Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. & Krook, M. A., 1954, “Model for collision process in gases“, *Physical Review*, vol. 94, pp. 511-525.

12. Cercignani, C. 1969, Mathematical Methods in Kinetic Theory, Plenum Press, New York, 227 p.

13. Mason, J. & Handscomb, D. 2003, Chebyshev polynomials, CRC Press, Florida, 360 p.

14. Boyd, J.2000, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, second ed., Dover, New York, 668 p.

15. Clenshaw, C. W. & Curtis, A. R. 1960, “A method for numerical integration on an automatic computer“, *Num. Math.*, vol. 2, pp. 197-205.

Получено 10.01.2022
Принято в печать 14.0.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-50-60

О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям

А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет имени Алламе Табатабаи (Иран).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Михайлов Илья Петрович — Казанский авиационный институт (г. Лениногорск).
Чубариков Владимир Николавич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказаны теоремы о разложении действительных чисел по мультипликативной системе чисел, по последовательности Фибоначчи и по целочисленной последовательности, удовлетворяющей рекуррентным соотношениям и связанной с числами Пизо–Виджаярагхавана. Особое внимание обращено на "явные формулы" и условия единственности таких представлений. Отметим, что единственность разложения действительного числа по обратным значениям мультипликативной системы позволяет получить оценку вида

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{x_n}{n!},\frac{1}{n+1}\leq x_n<\frac{1}{n}.$$

Разложения чисел по последовательности обратных чисел Фибоначчи существенно использует их представление через степени "золотого сечения" $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Системы чисел, связанные с числами Пизо-Виджаярагхавана рассмотрены менее подробно, поскольку требуется конкретизировать свойства рассматриваемых чисел.

Ключевые слова: мультипликативная система чисел, последовательность Фибоначчи.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. К. Гияси, И. П. Михайлов, В. Н. Чубариков. О разложении действительных чисел по некоторым последовательностям // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 50 – 60.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-50-60

On an expansion real numbers on some sequences

A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov

Giyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Iran).
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir
Mikhailov Ilya Petrovich — Kazan Aviation Institute (Leninogorsk).
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper theorems on the expression of real numbers on multiplicative number system, Fibonacci sequence and integral valued sequences satisfiing recurrent correlations and connected with Pisot–Vidgajraghavan, are proven. It pay a special attention to "explicit formulas" and conditions of the uniqueness of such representations. We note that unifiing of an expression of a real number over inverse values of a multiplicaticative system permits to get the estimation of the form

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{x_n}{n!},\frac{1}{n+1}\leq x_n<\frac{1}{n}.$$

Expressions of numbers over the sequence of inverse of Fibonacci numbers essentially uses these representation throw powers of "the gold section" $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Systems numbers connected with Pisot–Vidgajraghavana were considered less than in details, as demands to make a properties of examinated numbers more concrete.

Keywords: multiplicative number system, the Fibonacci's sequence.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. K. Giyasi, I. P. Mikhailov, V. N. Chubarikov, 2022, "On an expansion real numbers on some sequences" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 50 – 60.

1. Введение

В настоящей работе даны обобщения теоремы об однозначном представлении в виде ряда в позиционной системе счисления действительного числа и формулы А.О.Гельфонда с нецелым основанием, большим единицы.

Следуя Гельфонду, числу $\theta>1$, являющемуся "основанием системы счисления", для любого действительного числа α из полуинтервала $[0,1)$ определим "цифры" $\bar{\lambda}_n=\bar{\lambda}_n(\alpha), n\geq 1,$ — целые числа с условием $0\leq\bar{\lambda}_n<\theta$. Пусть число α представлено сходящимся рядом вида

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_n}{\theta^n},x_0=\alpha.$$

Отсюда находим

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_n}{\theta^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\bar{\lambda}_k}{\theta^k}+\frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}},\frac{\bar{\lambda}_n}{\theta^n}+\frac{x_n}{\theta^n}=\frac{x_{n-1}}{\theta^{n-1}},\bar{\lambda}_n+x_n=\theta x_{n-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\bar{\lambda}_n=[\theta x_{n-1}],x_n=\{\theta x_{n-1}\}.$$

Будем говорить, что число α представлено рядом

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_k}{\theta^k},0\le\bar{a}_k<\theta(k\ge1),$$

где $\bar{a}_k$ — целые числа, и для любого $n\ge1$ справедливо условие

$$0\le\alpha-A_n<\theta^{-n},A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{a}_k}{\theta^k}.$$

Тогда найденное выше представление числа α в виде ряда — единственно. Предположим противное. Предположим, что существует представление, отличное от предыдущего,

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{b}_k}{\theta^k},0\le\bar{b}_k<\theta(k\ge1),$$

где $\bar{b}_k$ — целые числа, и для любого $n\ge1$ справедливо условие

$$0\le\alpha-B_n<\theta^{-n},B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{b}_k}{\theta^k},$$

причем найдется число m такое, что

$$A_1=B_1,\dots,A_{m-1}=B_{m-1},A_m\ne B_m.$$

Имеем

$$0\le\alpha-A_m<\theta^{-m},0\le\alpha-B_m<\theta^{-m}.$$

Отсюда получим

$$1\le|\bar{a}_m-\bar{b}_m|=|A_m-B_m|<\theta^{-m}.$$

Поскольку $\theta>1$, неравенство $1<\theta^{-m},m\ge1$ — противоречиво. Отсюда следует единственность представления числа α в виде ряда по убывающим степеням числа θ.

§1. Разложение целых чисел по одной мультипликативной системе чисел

Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $q_k\ge2,r\ge1$. Определим мультипликативную систему натуральных чисел $m_k,k\ge0$, вида

$$m_0=1,m_k=m_{k-1}q_k,k\ge1. \tag{1}$$

Покажем, что любое натуральное число $a\ge1$ единственным образом представимо в виде

$$a=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_km_k,0\le\bar{a}_k\le q_k-1,$$

где $\bar{a}_k$ — целые, а число определяется из условий $m_n\le a<m_{n+1}$.

При $k \geq 0$ положим

$$\bar{a}_k = \left[\frac{a}{m_k}\right] - q_k\left[\frac{a}{m_{k+1}}\right].$$

Из неравенства $b-1<[b]\leq b$ имеем

$$-1 = \frac{a}{m_k} - 1 - q_k\frac{a}{m_{k+1}} < \bar{a}_k < \frac{a}{m_k} - q_k\left(\frac{a}{m_{k+1}} - 1\right) = q_k,$$

т.е. $0 \leq \bar{a}_k \leq q_k$.

Найдем сумму

$$\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k m_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\left[\frac{a}{m_k}\right] - q_k\left[\frac{a}{m_{k+1}}\right]\right)m_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{a}{m_k}\right]m_k - \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{a}{m_{k+1}}\right]m_{k+1} = [a] - m_{n+1}\left[\frac{a}{m_{n+1}}\right] = a.$$

Докажем единственность такого представления. Предположим, что существуют два различных представления

$$a = \sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k m_k - \sum_{t=0}^{l}\bar{b}_t m_t, 0 \leq \bar{a}_k, \bar{b}_k < q_k,$$

где a_0, b_0 могут принимать только два значения либо 0, либо 1.

Тогда, вычитая из одного предствления другое, получим

$$\sum_{k=0}^{s}c_s m_s = 0, c_k = a_k - b_k, 0 \leq |c_k| \leq q_k - 1|c_s| \geq 1.$$

Следовательно,

$$m_s \leq |c_s|m_s = \left|\sum_{k=0}^{s-1}c_k m_k\right| \leq \sum_{k=0}^{s-1}(q_k-1)m_k = \sum_{k=0}^{s-1}(m_{k+1}-m_k) = m_s - 1.$$

Последнее неравенство противоречиво. Значит, указанное представление числа a единственно.

§2. Разложение действительных чисел по мультипликативной системе чисел

Пусть a — любое действительное число из полуинтервала $[0,1)$. Говорят, что a представимо в виде ряда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_k}{m_k}, 0 \leq \bar{a}_k \leq q_k - 1, \tag{2}$$

где при $k \geq 0$ числа $\bar{a}_k$ — целые и $\bar{a}_0$ могут принимать два значения либо 0, либо 1, причем для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$a - \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{a}_k}{m_k} < m_n^{-1}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Любое действительное число единственным образом представимо в виде (2) и (3).*

Доказательство. Сначала установим существование искомого представления числа a. Определим при $n \geq 1$ последовательность $\{x_n\}$. Положим

$$a = \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{a}_k}{m_k} + \frac{x_n}{m_n}, 0 \leq x_n < 1, \bar{a}_0 = 0.$$

Для любого $n \geq 1$ находим

$$\frac{\bar{a}_n}{m_n} + \frac{x_n}{m_n} = \frac{x_{n-1}}{m_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = q_n x_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_n = [q_n x_{n-1}], x_n = \{q_n x_{n-1}\}.$$

Отсюда имеем

$$-1 \leq q_n x_{n-1} - 1 < \bar{a}_n \leq q_n x_{n-1} < q_n,$$

т.е. $\bar{a}_n$ может принимать целые значения от 0 до $q_n - 1$.

Теперь найдем сумму

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{m_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{[q_k x_{k-1}]}{m_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k x_{k-1} - \{q_k x_{k-1}\}}{m_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k-1}}{m_{k-1}} - \frac{x_k}{m_k} \right) = a - \frac{x_n}{m_n}.$$

Таким образом выполняется условие (3) и существование разложения числа a в ряд с условиями (2) и (3) установлено.

Докажем единственность представления числа a в виде (2) и (3). Будем рассуждать от противного. Предположим, что найдутся два различных представления

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{m_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_k}{m_k}$$

с условиями (2) и (3).

Найдется m такое, что

$$A_1 = B_1, \ldots, A_{n-1} = B_{n-1}, A_n \neq B_n,$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{m_k}, B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{b}_k}{m_k}, \bar{a}_n \neq \bar{b}_n.$$

Из соотношений (2) получим

$$0 \leq a - A_n < m_n^{-1}, \quad 0 \leq a - B_n < m_n^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$0 \leq m_n(a - A_n) < 1, \quad 0 \leq m_n(a - B_n) < 1.$$

Следовательно, при $n > 1$ имеем

$$-1 < m_n(A_n - B_n) < 1, \quad -1 < m_n(A_{n-1} - B_{n-1}) + \frac{\bar{a}_n - \bar{b}_n}{m_n} = \frac{\bar{a}_n - \bar{b}_n}{m_n} < 1,$$

но

$$|\bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m| = 1,$$

так как $\bar{a}_n \neq \bar{b}_n$. Из полученных противоречивых неравенств находим, что для любого $n \geq 1$ справедливы равенства $A_n = B_n$. Тем самым единственность представления (4) и (5) доказана.

Простейшей мультипликативной системой является “факториальная” система $m_n = (n–1)!$, $q_n = n, 0! = 1, n \geq 1$. Используя теорему 1 о единственности разложения числа по обратным значениям m_n, оценим x_n для числа e. Имеем

$$\frac{x_n}{n!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, 1 = \bar{\lambda}_k = [q_k x_{k-1}] = [k x_{k-1}],$$

$$1 \leq q_k x_{k-1} < 2, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Таким образом,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} + \frac{x_n}{n!}, \frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{2}{n+1}.$$

Заметим, что известна более точная оценка сверху: $x_n < \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n < \frac{1}{n}.$$

§3. Разложение целых чисел по последовательности Фибоначчи

Пусть задана последовательность чисел Фибоначчи

$$F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1} (k \geq 1),$$

или как функция своего номера

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}), \bar{\varphi} = 1 - \varphi.$$

Возьмем любое натуральное число $a \geq 1$. Тогда найдется натуральное число n такое, что $F_n \leq a < F_{n+1}$, и набор $\{a_1, \ldots, a_n\}$, состоящий из чисел 0 и 1, причем $a_n = 1, a_s \cdot a_{s+1} = 0$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$, такой, что имеет место единственное разложение вида

$$a = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots + a_n F_n.$$

Действительно, положим

$$a_k = \left[\frac{a}{F_k} \right] - \frac{F_{k+1}}{F_k} \left[\frac{a}{F_{k+1}} \right], k = 1, 2, \ldots, n.$$

Имеем, что a_k — целые числа при $1 \leq k \leq n$. Покажем, что $0 \leq a_k \leq 1$ при $1 \leq k \leq n$. Находим

$$-1 = \frac{a}{F_k} - 1 - \frac{F_{k+1}}{F_k} \frac{a}{F_{k+1}} < a_k < \frac{a}{F_k} - \frac{F_{k+1}}{F_k} \left(\frac{a}{F_{k+1}} - 1 \right) = \frac{F_{k+1}}{F_k} < 2.$$

Далее, вычислим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} a_k F_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{a}{F_k} \right] - \frac{F_{k+1}}{F_k} \left[\frac{a}{F_{k+1}} \right] \right) F_k = \sum_{k=1}^{n} \left(F_k \left[\frac{a}{F_k} \right] - F_{k+1} \left[\frac{a}{F_{k+1}} \right] \right) = a.$$

Наконец, при $s = 1, 2, \ldots, n$ получим

$$a_s a_{s+1} = 0, a_n = 1.$$

Если $a_s = 1$, то $\left[\frac{a}{F_s}\right] = 1$, $\left[\frac{a}{F_{s+1}}\right] = 0$. Следовательно, $a_{s+1} = 0$. Имеем

$$a_n = \left[\frac{a}{F_n}\right] - \frac{F_{n+1}}{F_n}\left[\frac{a}{F_{n+1}}\right] = \left[\frac{a}{F_n}\right] \geq 1.$$

Докажем теперь единственность такого представления. От противного. Предположим, что имеется два различных представления числа a в виде

$$a = a_1F_1 + a_2F_2 + \cdots + a_nF_n = b_1F_1 + b_2F_2 + \cdots + b_mF_m,$$

где $a_k, k \geq 1$, и $b_l, l \geq 1$, могут принимать только два значения 0 или 1.

Тогда

$$0 = a - a = \sum_{t=0}^{s} c_tF_t, c_t = a_t - b_t, |c_t| \leq 1, c_s \neq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $c_s = 1$. Далее, поскольку $a_{s-1}a_s = 0$ и $b_{s-1}b_s = 0$, получим, что либо $c_{s-1} = 0$, либо $c_{s-1} = -1$ Отсюда находим цепочку эквивалентных неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1}) = F_s \leq |c_s|F_s = |\sum_{t=0}^{s-1} c_tF_t| \leq$$

$$\leq \sum_{t=0}^{s-2} F_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi^s - 1}{\varphi - 1} - \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\bar{\varphi} - 1}\right);$$

$$\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} \leq -\frac{\varphi^s - 1}{\bar{\varphi}} + \frac{\bar{\varphi}^s - 1}{\varphi};$$

$$\varphi^{s+1} - \bar{\varphi}^{s+1} \leq \varphi^{s+1} + \varphi - \bar{\varphi}^{s+1} + \bar{\varphi}; \quad -1 \geq 0.$$

Последнее неравенство противоречиво. Следовательно, единственность представления числа a в указанном виде доказана.

§4. Представление действительного числа в виде бесконечного ряда по обратным числам Фибоначчи

Будем говорить, что число $a \geq 0$ представимо в виде ряда

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, \tag{4}$$

где $a_0 = [a]$ — целая часть числа a, целые числа $\bar{\alpha}_k, k \geq 1$, могут принимать всего два значения 0 и 1, и, кроме того, для любого натурального n выполняется неравенство

$$0 \leq a - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} < F_n^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Любое действительное число единственным образом представимо в виде (4) и (5).*

Доказательство. Докажем сначала единственность представления a в виде (4) и (5). Предположим противное, т.е. найдутся, по крайней мере, два различных представления числа a с условиями (4) и (5):

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}.$$

Поскольку эти представления различны, найдется m такое, что

$$A_1 = B_1, \dots, A_{m-1} = B_{m-1}, A_m \neq B_m,$$

где

$$A_m = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\alpha}_k}{F_k}, B_m = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\beta}_k}{F_k}, \bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m.$$

Из соотношений (4) получим

$$0 \le a - A_m < F_m^{-1}, \quad 0 \le a - B_m < F_m^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$0 \le F_m(a - A_m) < 1, \quad 0 \le F_m(a - B_m) < 1.$$

Следовательно,

$$-1 < F_m(A_m - B_m) < 1, \quad -1 < F_m(A_{m-1} - B_{m-1}) + \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m = \bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m < 1,$$

но

$$|\bar{\alpha}_m - \bar{\beta}_m| = 1,$$

так как $\bar{\alpha}_m \neq \bar{\beta}_m$. Из полученных противоречивых неравенств находим, что для любого $m \ge 1$ справедливы равенства $A_m = B_m$. Тем самым единственность представления (4) и (5) доказана.

Теперь докажем существование представления числа a в виде (4) и (5). Определим “цифры” $\bar{\lambda}_k, k \ge 1$.

Положим $a_0 = [a]$

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} + \frac{x_n}{F_n}, 0 \le x_n < 1, x_0 = \{a\}. \tag{6}$$

Отсюда находим $x_n + \bar{\lambda}_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1}$, что дает возможность определить величины

$$\bar{\lambda}_n = \left[\frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right], \quad x_n = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\}.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}_n, n > 1$ — целые, причем

$$-1 \le \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} - 1 < \bar{\lambda}_n \le \frac{F_n x_{n-1}}{F_{n-1}} < \frac{F_n}{F_{n-1}} < 2,$$

т.е. $\bar{\lambda}_n$ может принимать только два значения: 0 и 1.

Вычислим сумму

$$A_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_k}{F_k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{F_k}{F_{k-1}} x_{k-1} \right]}{F_k} =$$

$$= [a] + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k-1}}{F_{k-1}} - \frac{x_k}{F_k} \right) = [a] + \frac{x_0}{F_0} - \frac{x_n}{F_n} = a - \frac{x_n}{F_n}.$$

Следовательно, выполняется условие (5), что и завершает доказательство теоремы.

§5. Целочисленные рекуррентныесоотношения и числа Пизо–Виджаярагхавана

Пусть $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая при $n \ge 0$ линейному рекуррентному соотношению с целыми постоянными коэффициентами

$$u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + \dots + a_r u_n, a_r \neq 0,$$

и пусть характеристический многочлен $f(x) = x^r - a_1 x^{r-1} - \dots - a_r$ рекуррентного соотношения имеет следующее разложение на линейные множители

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{e_1} \dots (x-\alpha_s)^{e^s}, e_1 + \dots + e_s = r.$$

Тогда u_n как функция от аргумента $n \geq 0$ имеет вид

$$u_n = \sum_{k=1}^{s} P_k(n)\alpha_k^n,$$

где степень многочлена $P_k(n)$ не превосходит $e_k - 1$, а его коффициенты определяются начальным отрезком $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$ последовательности $\{u_n\}$.

Число $\alpha = \alpha_1 > 1$ называют числом Пизо–Виджаяраргхавана (PV-число), если все его сопряженные, отличные от α, лежат внутри единичного круга $|z| < 1$. Предположим, что для любого $n \geq 1$ имеет место неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < \alpha$.

Покажем, что любое $a \in [0, 1)$ можно представить в виде

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{u_k}, 0 \leq \bar{a}_k < \alpha,$$

где $\bar{a}_k, k \geq 1,$ — целые числа.

Положим

$$a = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{u_k} + \frac{x_n}{u_n}.$$

Тогда

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\bar{a}_k}{u_k} + \frac{x_{n-1}}{u_{n-1}}, \bar{a}_n + x_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1},$$

$$\bar{a}_n = \left[\frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1}\right], x_n = \left\{\frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1}\right\}.$$

Следовательно,

$$-1 \leq \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} - 1 < \bar{a}_n < \frac{u_n}{u_{n-1}} x_{n-1} < \alpha,$$

т.е. целые числа $\bar{a}_n$ могут принимать значения от 0 до $[\alpha]$.

Далее, поскольку

$$0 \leq a - \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{a}_k}{u_k} = \frac{x_n}{u_n} < \frac{1}{u_n},$$

имеем, что

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{u_k}.$$

Единственность представления числа a в виде ряда по обратным значениям последовательности $\{u_n\}$ доказывается аналогично предыдущему.

2. Заключение

Построенные разложения действительных чисел в позиционной системе счисления, по мультипликативной системе натуральных чисел, по последовательности Фибоначчи, по целочисленной последовательности, обладающей рекуррентными соотношениями и связанной с числами Пизо–Виджаяраргхавана, представляют интерес при изучении свойств арифметических функций и в анализе Фурье. В основе наших исследований лежат работы [1]–[15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., 1914, **37**.
2. Borel E. Les probabilités dénombarables et leurs applications arithmétiques.// Rend Circolo math. Palermo, 1909, **27**.
3. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления// Изв. АН СССР, сер. матем (in Russian). 1959, **23** (Избр.тр. с.366-371).
4. Zeckendorf E. Reprśentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). 1972, **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washigton. 1919. Ch.17.
6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа. 2006. 640 с.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 212 с.
8. Холл М. Комбинаторика. — М.: Изд-во “Мир”. 1970. 424 с.
9. Бернулли Д.// Comment. Acad.Sci. Petrop., 1728, **3**, p. 85–100.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования, т.1. Основные алгоритмы, 3-е изд. Уч. пособие. — М.: Изд. дом “Вильямс”. 2000. 720 с.
11. de Moivre A.// Philos. Trans., 1922, **32**, p. 162–178.
12. Чебышев П. Л. Теория вероятностей. — Изд-во АН СССР. 1936, §23. с.143–147.
13. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.
14. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и приложения. — М.: Наука, 1987, 344 с.
15. Минеев М. П., Чубариков В. Н. Лекции по арифметическим вопросам криптографии. — М.: ООО“Луч”, 2014, 224 с.
16. Ghyasi A. H. A generalization of the Gel’fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. 2007, **14,** No.3, p.370.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. (1914).The fractional part of $n^k\theta$.// Acta math., **37**.
2. Borel E. (1909). Les probabilités dénombarables et leurs applications arithmétiques.// Rend Circolo math. Palermo, **27**.
3. Gel’fond A. O. (1959). On one general property of numerical system// Izv. AN SSSR, Ser. math. (in Russian). **23** (Selected works. p.366-371).
4. Zeckendorf E. (1972). Reprśentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas// Bull. Soc. R. Sci. Liège (in French). **41**, p. 179-182.
5. Dickson L. E. (1919). History of the theory of numbers. — Carnegie Inst. of Washigton. Ch.17.

6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. (2006).Lectures on mathematical analysis. — M.: Drofa. Pp. 640.

7. Cassels J. W. S. (1961). An introduction to Diophantine approximation. — Cambridge University Press. Pp.212.

8. Hall M.,Jr. (1970). Combinatorial theory. — Waltham (Massachusetts)-Toronto-London: Blaisdell Publ. Comp. Pp. 424.

9. Bernoulli D. (1728). Combinatorial theory.// Comment. Acad.Sci. Petrop., **3**, p. 85–100.

10. Knuth D. E. (1998). The art computer programming. Fundamental algorithms. Third Ed. — Reading, Massachusetts-Harlow, England-Menlo Park, California-Berkley, california-Lon Mills, Ontario-Sidney-Bonn-Amsterdam-Tokyo-Mexico City: Addison Wesley Longman, Inc.. Pp. 720.

11. de Moivre A. (1922). // Philos. Trans., **32**, p. 162–178.

12. Chebyshev P. L. (1936). The theory of probabilities. — AN SSSR. §23. 143–147. (in Russian).

13. Landau E. (1947). Fundamentals of analysis. — M.: Inostr.literature.(in Russian).

14. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. (1987). Series and the Uolsh's transformations: the theory and applications. — M.: Nauka, pp. 344.(in Russian).

15. Mineev M. P., Chubarikov V. N. (2014). Lectures on arithmetical questions of cryptography. — M.: OOO"Luch", pp. 224. (in Russian).

16. Ghyasi A. H. (2007). A generalization of the Gel'fond theorem concerning number systems// Russian Journal of Mathematical Physics. **14,** No.3, p.370.

Получено 18.07.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-61-76

О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II

В. А. Горская

Горская Виктория Александровна — аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород).
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Аннотация

Задача топологической классификации вещественных алгебраических кривых является классической задачей фундаментальной математики, берущей своё начало фактически у истоков математики. Особую известность и современную формулировку задача приобрела после того, как в 1900 году Д. Гильберт включил её в свой знаменитый список математических проблем под номером 16. Это была задача о классификации кривых шестой степени, которую в 1969 году решил Д.А. Гудков [1]. Там же Гудков поставил задачу о топологической классификации вещественных алгебраических кривых степени 6, распадающихся в произведение двух неособых кривых при некоторых естественных условиях максимальности и общего положения кривых-сомножителей. Задача Гудкова была решена в 1977 году Г.М. Полотовским [2], [3]. В настоящее время после длинной серии работ нескольких авторов (точные ссылки можно найти в статье [4]) почти завершено решение аналогичной задачи о кривых степени 7. Кроме этого, в [5] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, и в [6] была найдена классификация взаимных расположений M-квинтики и пары прямых.

Настоящая работа посвящена случаю, когда неприводимые сомножители кривой степени 7 имеют степени 3, 2 и 2, и является продолжением исследования, начатого в [7].

Ключевые слова: неособые плоские вещественные алгебраические кривые, 16-я проблема Гильберта, распадающиеся кривые, топологическая классификация.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
В. А. Горская. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 61–76.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-61-76

On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane. II

V. A. Gorskaya

Gorskaya Victoria Alexandrovna — postgraduate student, National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod).
e-mail: victoriya.gorskaya@mail.ru

Abstract

The problem of topological classification of real algebraic curves is a classical problem in fundamental mathematics that actually arose at the origins of mathematics. The problem gained particular fame and modern formulation after D. Hilbert included it in his famous list of mathematical problems at number 16 in 1900. This was the problem of classifying curves of the sixth degree, solved in 1969 by D.A. Gudkov [1]. In the same place, Gudkov posed the problem of the topological classification of real algebraic curves of degree 6 decomposing into a product of two non-singular curves under certain natural conditions of maximality and general position of quotient curves. Gudkov's problem was solved in 1977 by G.M. Polotovsky [2], [3]. At present, after a large series of works by several authors (exact references can be found in [4]), the solution of a similar problem on curves of degree 7 is almost complete. In addition, in [5] a topological classification of curves of degree 6 decomposing into a product of any possible number of irreducible factors in general position, and in [6] a classification of mutual arrangements of M-quintics, a couple of lines were found.

The present paper is devoted to the case when the irreducible factors of the curve of degree 7 have degrees 3, 2, and 2, and is a continuation of the study begun in [7].

Keywords: non-singular plane real algebraic curves, Hilbert's 16th problem, decomposable curves, topological classification.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
V. A. Gorskaya, 2022, “On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane. II” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 61–76.

1. Введение

Напомним некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых.

Определение 1.1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

Определение 1.2. *Множество $\mathbb{R}C_m(\mathbb{C}C_m)$ точек вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2(\mathbb{C}P^2)$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2), x_i \in \mathbb{R}$ $((z_0 : z_1 : z_2), z_i \in \mathbb{C})$, удовлетворяющими уравнению $C_m = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m.*

Определение 1.3. *Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).*

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек кривой C_m (коротко — вещественная ветвь кривой) в случае неособой кривой гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а вторая — внешней. Если степень кривой нечётна, то среди её вещественных ветвей имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне, она называется *нечётной ветвью.*

Оценку числа N вещественных ветвей кривой степени m даёт классическая

Теорема 1.1 (Теорема Харнака (1876)) $N \leqslant \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$, *и эта оценка точна для любого m.*

Определение 1.4. *Множество $\mathbb{R}C_m$, рассматриваемое с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$, называется вещественной схемой кривой C_m. Неособые кривые с максимально возможными по теореме Харнака числом ветвей называются M-кривыми, а их схемы — M-схемами.*

Таким образом, вещественная схема M-кривой степени 3 состоит из нечётной ветви и одного овала, а вещественная схема M-кривой степени 2 представляет собой один овал.

Цель этой работы — найти топологическую классификацию (точнее, список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубику и две коники (т. е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \widetilde{C}_2$), предполагая выполнение следующих условий:

(i) *C_3, C_2 и $\widetilde{C}_2$ являются M-кривыми;*

(ii) *каждые две из указанных в* (i) *кривых пересекаются без касания в максимально возможном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е.*

$$\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2) = 4;$$

(iii) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\widetilde{C}_2 = \emptyset$, *т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;*

(iv) *все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;*

(v) *для каждой из коник $C_2, \widetilde{C}_2$ все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;*

(vi) *точки пересечения нечётной ветви с разными кониками перемежаются, т. е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем — со второй.*[1]

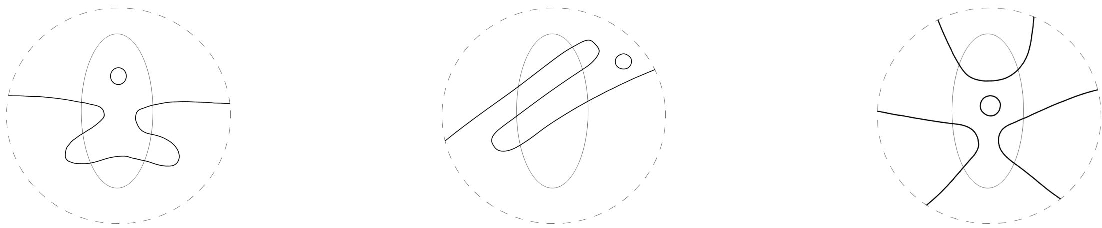
Определение 1.5. *Назовём моделью расположения типа* (i) – (vi) (*в дальнейшем для краткости – моделью*) *набор четырёх топологических окружностей, ровно одна из которых вложена в $\mathbb{R}P^2$ односторонне и её объединение с двумя их трёх остальных окружностей удовлетворяет условиям* (ii) – (vi) *пересечения нечётной ветви кубики с кониками; четвёртая окружность не пересекается с первыми тремя.*

2. Перечисление допустимых моделей

Допустимыми будем называть модели, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу (см., например, [8]), а также известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и на взаимные расположения пары коник.

[1] Случай, когда точки пересечения не перемежаются, был рассмотрен в работе [7].

Ограничения на взаимные расположения M-кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. рис.1 [2] (доказательство имеется в [5]).



а) б) в)

Рис. 1: Типы расположений M-кубики и коники.

Существуют ровно два топологически различных расположения в $\mathbb{R}P^2$ двух неособых коник с четырьмя общими точками, которые показаны на рис.2. Добавить к правому из них нечётную ветвь, удовлетворяющую условию (v), нельзя, поэтому *всюду ниже рассматривается только левое расположение.*

Рис. 2: Типы расположений двух неособых коник.

Пусть $\mathbb{R}C_2$ – «горизонтальный» овал на рис.2, $\mathbb{R}\widetilde{C}_2$ – «вертикальный», и A, $\widetilde{A}$ – дуги, несущие по шесть точек пересечения с нечётной ветвью кубики. Распределение чисел последовательно проходимых точек на дугах A, $\widetilde{A}$ коник при непрерывном движении по нечётной ветви кубики может быть только таким, как указано в таблице 1 (в ячейках указано количество последовательно проходимых точек на указанных дугах коник; при этом учтено, что дуги A, $\widetilde{A}$ равноправны).

Таблица 1

	A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$
1	4	6	2	-	-	-
2	2	4	4	2	-	-
3	4	2	2	4	-	-
4	2	2	4	4	-	-
5	4	4	2	2	-	-
6	2	2	2	4	2	-
7	2	4	2	2	2	-
8	2	2	2	2	2	2

[2]Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

Пронумеруем точки так, как показано на Рис.2., и будем двигаться по нечётной ветви кубики, пересекая дуги A и $\widetilde{A}$ в 6 точках каждую в соответствии с распределениями чисел точек на этих дугах, показанными в таблице 1. Записывая номера последовательно проходимых точек при таком движении по нечётной ветви отдельно для каждой из дуг A и $\widetilde{A}$, мы получим пару перестановок порядка 6.

Один из возможных примеров для строки № 4 таблицы 1 показан на рис.3.

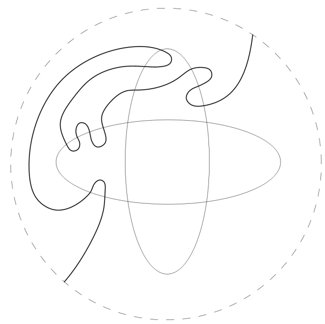


Рис. 3: (123456)(321456)

Следующая лемма легко доказывается непосредственным перебором с учётом рис.1.

Лемма 2.1. *На данной дуге A или $\widetilde{A}$ возможны только перестановки*
(123456), (165432), (321654), (543216), (561234), (345612) (*отвечают случаю* рис.1a));
(123654), (165234), (321456), (345216), (561432), (543612) (*отвечают случаю* рис.1б));
(125634), (163254) (*отвечают случаю* рис.1в)).

Теперь объединим попарно рассмотренные в лемме перестановки. Распишем получившиеся пары для распределений 1 – 8 из таблицы 1. При этом учитываем, что для данного распределения объединение некоторых перестановок в пару влечёт самопересечение нечётной ветви (см. пример на рис.4, где используется распределение 2 таблицы 1 и пара перестановок (123456) и (123456)), что невозможно.

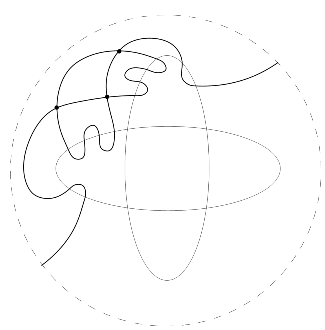


Рис. 4: Пример самопересечения

1) Рассмотрим случай строки № 1 таблицы 1. На дуге A возможны только следующие варианты:

(1236_54); (1654_32); (32_1456); (3216_54); (3456_12); (5432_16); (56_1432);
(16_5432); (16_5234); (32_1654); (3452_16); (54_3216); (5436_12); (56_1234).

На дуге $\widetilde{A}$ рассматриваются перестановки, указанные в лемме 2.1.

Здесь и ниже, чтобы избежать большого количества рисунков, мы применяем кодировку моделей, представляющую собой две перестановки шестого порядка, снабжённые дополнительными символами из набора {R, L, B, $\widetilde{B}$, C, *, _ }.

Чтобы по коду получить рисунок, нужно нарисовать «заготовку», показанную на левом рис.2, и провести нечётную ветвь, пересекающую дуги A и $\widetilde{A}$ в занумерованных точках в порядке, указанном в первой и второй перестановках соответственно, причём дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие первым двум символам первой перестановки, расположена внутри двуугольника, в границу которого входит дуга A.

Если между соседними (в циклическом порядке, причём скобки не замечаются) символами i и j записана буква R (L), то в области, примыкающей справа (соответственно, слева) к дуге $\widetilde{(i,\, j)}$ нечётной ветви, следует расположить овал. Если же после перестановок записана буква B ($\widetilde{B}$) или C, то овал следует нарисовать в двуугольнике, в границу которого входит дуга B (соответственно, $\widetilde{B}$) или в четырёхугольнике внутри коник. Дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие последнему символу второй перестановки и первому символу первой перестановки, а также дуги нечётной ветви, отвечающие символам, между которыми стоит *, пересекают один раз граничную окружность модели проективной плоскости. Последний дополнительный символ из набора (подчёркивание) ставится внутри перестановки в том месте, где нечётная ветвь с одной из дуг A, $\widetilde{A}$ переходит на вторую из них.

2) Рассмотрим случаи № 2 – № 5 таблицы 1. С помощью перебора получим все возможные варианты сочетаемости перестановок на дугах A, $\widetilde{A}$. Эти варианты перечислены в таблице 2 следующим образом: таблица содержит четыре группы, занумерованные числами 1 – 4; входящие в данную группу перестановки на дуге A можно объединять только с перестановками на дуге $\widetilde{A}$, входящими в ту же группу. Например, из группы 1 всего получим 30 пар перестановок, из группы 3 – 42 и т. д.

Таблица 2

1		2	
A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$
(12_3456)	(32_1456)	(1236_54)	(12_3456)
(1234_56)	(32_1654)	(16_5432)	(12_3654)
(12_3654)	(54_3216)	(1654_32)	(34_5216)
(1652_34)	(3452_16)	(16_5234)	(1234_56)
(3214_56)	(5432_16)	(3216_54)	(1652_34)
(34_5216)		(1456_32)	(3214_56)
		(16_3452)	(12_*56*34)
			(16*32_*54)
3		**4**	
A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$
(32_1456)	(56_1432)	(3456_12)	(16_5432)
(32_1654)	(56_1234)	(5436_12)	(16_5234)
(3452_16)	(3456_12)	(56_1432)	(1236_54)
(54_3216)	(5436_12)	(56_1234)	(1654_32)
(5432_16)	(56_*34*12)	(56_3214)	(3216_54)
(54_1236)	(54*16_*32)	(3654_12)	(12*56_*34)
(5234_16)		(5216_34)	(16_*32*54)
		(34_1652)	

3) Рассмотрим случаи № 6 и № 7 из таблицы 2. Результаты представлены в таблице 3 в том же виде, как для случая 2):

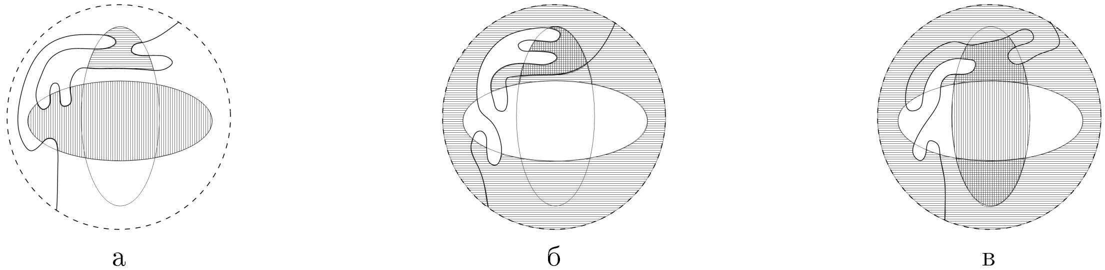
Таблица 3

1		2	
A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$
(34_56_12)	(32_1456) (32_1654) (54_3216) (3452_16) (5432_16)	(16_54_32) (54_32_16)	(12_3456) (12_3654) (34_5216) (1234_56) (1652_34) (3214_56)
3		4	
A	$\widetilde{A}$	A	$\widetilde{A}$
(32_16_54)	(56_1432) (56_1234) (3456_12) (5436_12)	(56_12_34)	(16_5432) (16_5234) (1236_54) (1654_32) (3216_54)

4) Рассмотрим случай № 8 таблицы 1. Имеются только следующие тринадцать возможностей, перечисленных ниже:

(12_34_56)(54_32_16);
(16_54_32)(12_34_56);
(32_16_54)(56_12_34);
(54_32_16)(34_56_12);
(56_12_34)(16_54_32);
(32_*56_14)(54*_16_*32);
(36_12*_54)(16_*32_*54).
(16_*34_52)(16*_32_*54);
(16_52*_*34)(12_*56*_34);
(36_54*_12)(12_*56_*34);
(52_34*_16)(54_*16_*32);
(52_16*_34)(56_*34_*12);
(32_14*_*56)(56_*34*_12);

Таким образом, всего получаются 393 допустимые пары перестановок. Однако в силу равноправия дуг A и $\widetilde{A}$ не всем этим парам отвечают топологически различные модели расположений нечётной ветви кубики и пары коник; кроме этого, как будет показано ниже, многие из получающихся расположений не удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу при пересечении с прямой. Наконец, чтобы получить модель расположения M-кубики и пары коник, каждое расположение следует дополнить овалом кубики, а сделать это, как сейчас будет показано, иногда невозможно, а иногда можно двумя способами.



а б в

Рис. 5: Области для расположения овала кубики.

Действительно, в случае рис. 1а овал кубики расположен внутри коники в шестиугольной компоненте связности дополнения к объединению коники и нечётной ветви кубики, а в случае рис.1б) — вне двуугольников вне коники. Если пересечение области, допустимой для овала относительно коники C_2, с областью, допустимой для овала относительно коники $\widetilde{C}_2$, пусто (см. пример на рис.5а), то данное расположение не может быть реализовано распадающейся кривой степени 7. Если это пересечение состоит из одной или двух компонент связности (заштрихованы дважды на рис.5б и рис.5в), то для дальнейшего рассмотрения получаются одна или две модели соответственно.

Запреты схем расположений кубики и двух коник, получаемые сведением к противоречию с теоремой Безу, проиллюстрируем на примерах, оформленных в виде следующих двух лемм.

Лемма 2.2. *Модель, показанная на рис.*6, *не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени* 7.

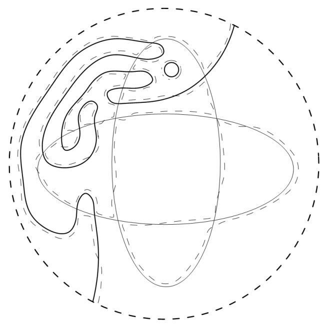
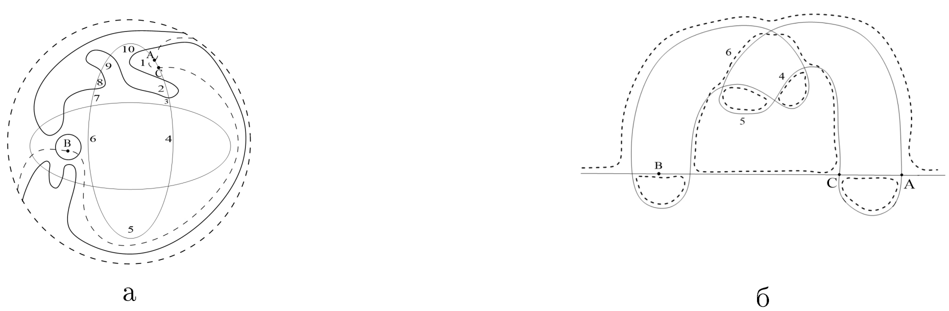


Рис. 6: Пример применения теоремы Брюзотти.

Доказательство. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Возмутим эту кривую в классе кривых степени 7 так, чтобы после устранения её двойных точек образовалась кривая со схемой, показанной на рис.6 пунктиром — такое возмущение найдется в силу теоремы Брюзотти (см., например, [8]) о независимости возмущений двойных точек простой кривой[3]. Схема возмущенной кривой степени 7 содержит гнездо веса три[4] и ещё один овал, что противоречит теореме Безу[5].

Замечание: в других случаях применения рассуждений из доказательства этой леммы иногда получаются два гнезда веса 2, что также противоречит теореме Безу.

Лемма 2.3. *Модель, показанная на рис.*7а, *не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени* 7.



а б

Рис. 7: Пример применения теоремы Безу

Доказательство. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \widetilde{C}_2$. Занумеруем дуги, на которые коника $\widetilde{C}_2$ делится точками пересечения с

[3]Кривая называется *простой*, если все её особенности — невырожденные двойные точки.

[4]Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.

[5]Прямая, проходящая через точку, лежащую внутри самого внутреннего овала гнезда, и через точку внутри любого четвёртого овала, пересечёт кривую не менее, чем в девяти точках.

коникой C_2 и с нечётной ветвью кубики, как показано на рис.7а, выберем точку A на дуге с номером 1 и точку B внутри овала кубики и посмотрим, как может проходить прямая AB, учитывая, что эта прямая не может пересекать каждую конику более, чем в двух точках, и нечётную ветвь кубики более, чем в одной точке (поскольку в силу выбора точки B обязательно имеются две точки пересечения с овалом кубики).

Без ограничения общности можно считать, что прямая AB в точке A не касается коники $\widetilde{C}_2$ – этого всегда можно добиться малым шевелением точки A. Предположим, что вторая точка пересечения прямой AB с коникой $\widetilde{C}_2$ – C – тоже лежит на дуге 1. Тогда прямая может проходить только так, как показано пунктиром на рис.7а. Но тогда прямая AB расположена относительно коник C_2 и $\widetilde{C}_2$ так, как показано на рис.7б, что невозможно: устраняя двойные точки (см. пунктир на рис.7б), получим кривую степени 5, содержащую два овала внутри одного, что противоречит теореме Безу.

Аналогично доказывается невозможность расположения точки C на дугах 8 — 10 коники $\widetilde{C}_2$, а расположение точки C на любой из остальных дуг влечёт более чем однократное пересечение прямой с нечётной ветвью кубики.

С помощью приёма, описанного в доказательстве леммы 2.3, удалось запретить 10 моделей: (1236_54)(16R5324); (5R6_1234)(123654) (рассмотрена в лемме 2.3); (16_5234)(16R5234); (3R456_12)(165234); (5R6_1234)(165234); (56_3214)(12*56_*34); (5216_34)(12*56_*34).

После применения методов, описанных в леммах 2.2, 2.3, для дальнейшего исследования остаются 62 модели, коды которых перечислены во вторых столбцах таблиц 4 и 5 в конце статьи; смысл остальных столбцов этих таблиц будет объяснён ниже.

3. Построения

В работе [5] найдена классификация взаимных расположений прямой, коники и кубики при условиях максимальности и общего положения, аналогичных условиям (i) — (iii), состоящая из 163 схем. «Удвоение» прямой в некоторых расположениях, построенных в [5], даёт реализацию схемами кривых степени 7 некоторых моделей из таблиц 4, 5.

а б

Рис. 8: Построение кривой с расположением (16_52*_*34)(1R2_*56*_34).

Рассмотрим, например, построенное в [5] (см. № 6 в таблице 2 в [5]) расположение коники, кубики и прямой L, показанное на рис.8а, немного повернём прямую L вокруг точки P в положение L' так, чтобы L' тоже пересекала нечётную ветвь кубики в трёх точках. Устраняя двойную точку P кривой $L \cup L'$ с помощью достаточно малого возмущения, получим неособую конику, объединение которой с исходными коникой и кубикой рис.8а реализует модель № 24 из таблицы 4 – см. рис.8б.

Аналогично из расположений № 1, 28, 29, 107, 108, 125, 136, 151, 158 из таблицы 2 работы [5] получаются кривые, реализующие соответственно модели № № 46, 45, 44, 4, 16, 10, 8, 24, 58 из таблиц 4, 5 ниже.

4. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

1) В этом параграфе описано применение предложенного С.Ю. Оревковым в [9], [10] метода запрета изотопических типов алгебраических кривых, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод неоднократно излагался в литературе, поэтому здесь приводится лишь его краткое описание, необходимое для понимание дальнейшего.

Мы будем применять метод Оревкова только для таких схем, модели которых допускают максимальный пучок прямых[6], то есть в $\mathbb{R}P^2$ имеется точка p такая, что любая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекает модель кривой степени 7 не менее, чем в 5 точках, и существует прямая l_{max}, пересекающая эту модель в 7 точках.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l_{max} (а следовательно, и точка p) оказались в бесконечности; тогда пучок L_p превратился в пучок параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. рис.9), где l_t – прямая с уравнением $x = t$. Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой* l_{max}.

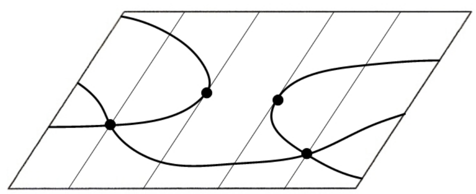


Рис. 9: Развёртка.

Эту развёртку удобно кодировать X-кодом $u_1u_2...u_s$, где символ u_i характиризует расположение кривой $\mathbb{R}C_7$ в окрестности критической прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ $(k \in \{1, ..., 6\})$ в соответствии с рис.10, а $\{l_{t_1}, \ ..., \ l_{t_s}\}$ – набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию параметра t_i.

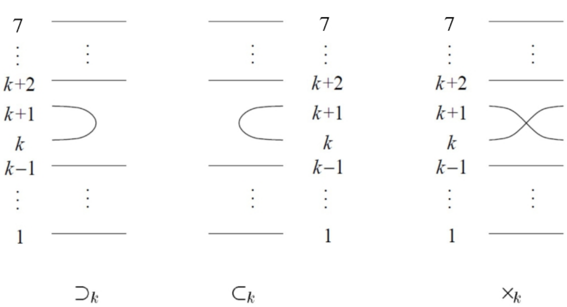


Рис. 10: Символы X-кода и образующие группы кос.

Идея метода заключается в следующем: а) сначала по модели кривой C_7 строится соответствующая этой модели коса из 7 нитей, для чего в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ рассматривается взаимное расположение пучка комплексных прямых $\mathbb{C}L_p$ с центром в точке p относительно $\mathbb{C}C_7$, а затем устраняются двойные точки множества $\mathbb{C}C_7 \cup \mathbb{C}L_p$, б) затем используется известный факт (см. [11]): если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая коса квазиположительна. Следуя Оревкову, мы проверяем да-

[6]В случаях, когда максимального пучка нет, применение метода Оревкова требует слишком больших вычислений.

лее выполнение необходимого условия квазиположительности косы — неравенства Мурасуги-Тристрама (точную формулировку см., например, в [4]). Если оно не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой данной степени.

2) Пример применения метода. Приведём пример применения описанного метода к моделям из таблиц 4, 5. Рассмотрим модель рис.11а., отвечающую коду (1R2_3456)(32_1456) (№ 1 в таблице 4), выберем точку p внутри овала кубики, а прямую l_{max} так, как показано на рис.11а. Развёртка, отвечающая этой прямой, показана на рис.11б;

x5x2x3x3x3x4x5x5x5x5x4x4x5)3(2x3x3x3

– соответствующий этой развёртке X-код.[7] Вычисления дают $h = 2$, где через h мы обозначили значение левой части неравенства Мурасуги-Тристрама, записанного в виде $h \leqslant 0$. Следовательно, рассматриваемая модель не может быть реализована схемой какой-либо кривой степени 7.

а б

Рис. 11: Пример применения метода Оревкова.

Аналогично были рассмотрены все остальные допустимые модели. При этом для выбора центра p пучка прямых возможны разные варианты. В работе точка p выбиралась внутри окружности, отвечающей овалу кубики – эти случаи собраны в таблицу 4 – или в какой-либо точке в пересечении внутренних областей окружностей, отвечающих коникам (область C на рис.2) – эти случаи собраны в таблице 5. Развёртки и X-коды нетрудно находить «вручную», но вычисления значений h вряд ли возможны без компьютера (ввиду необходимости нахождения собственных чисел больших матриц и ввиду большого количества X–кодов). Я использовала многократно применявшуюся ранее программу, написанную специально для таких задач М.А. Гущиным[8]. На вход этой программы подаётся X-код, а на выходе получается значение h.

Замечание 1. *В [10], [12] С.Ю. Оревков предложил применять для проверки квазиположительности выполнение условия Фокса-Милнора. Примеры применения этого условия можно найти также в [4]. В нашей ситуации было интересно применить его только в случаях, когда модель не удалось ни запретить с помощью неравенства Мурасуги-Тристрама, ни реализовать, т. е. для моделей № № 7, 12, 26, 32, 48 в таблице 4 и № 48 в таблице 5. Проведённые вычисления показали, что условие Фокса-Милнора не запрещает реализуемость этих моделей, поэтому описание этих вычислений мы не приводим.*

[7]Здесь и ниже индексы у символов X-кода пишутся в строку справа от символа.

[8]В то время – студентом механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Таблица 4. Центр пучка внутри овала кубики.

№	Код модели	X-код	h
1	(1R2_3456)(32_1456)	x5x2x3x3x3x4x5x5x5x5x4x4x5)3(2x3x3x3	2
2	(1R2_3456)(3452_16)	x5x2x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4)3x3(2x3x3x3	2
3	(1R234_56)(32_1456)	x2x5x3x3x3x4x5x5x4x4x5x5x5)3(2x3x3x3	2
4	(1R234_56)(3452_16)	x5x2x3x4x5x5x4x3x3x4x5x5x5)3(2x3x3x3	0 (∃)
5	(3214_56)(32_1L654)	x4x4x4)3x2x2x2(4x3x3x3x4x5x5x4x4x5x4	2
6	(3214_56)(54_321L6)	x4x4x3)4x2(4x3x3x3x4x5x5x4x4x5x5x5x4	2
7	(3214_56)(5432_1L6)	x4x5x4x4x5x5x5x5x4x3x3x3)4x2(3x4x4x4	0 (?)
8	(34_5216)(32_1L654)	x4x4x4)3x2x2x2(4x3x4x5x5x4x3x3x4x5x4	0 (∃)
9	(34_5216)(54_321L6)	x4x4x4)3x2(4x3x4x5x5x4x3x3x4x5x5x5x4	2
10	(34_5216)(5432_1L6)	x4x4x4)3x2(4x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4x5x4	0 (∃)
11	(1236_54)(1R23456)	x4x5x4x4x4x4x4x4x5x5)3(2x3x3x3)4(3x4x4x4	4
12	(1L6_5432)(123654)	x4x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x3x3x2(3x4x4x4	0 (?)
13	(1L6_5432)(165234)	x4x5x4x3x3x4x4x3)4x3x3x3x3x2(3x4x4x4	2
14	(1L654_32)(123654)	x4x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x2(3x4x4x4	2
15	(1L654_32)(165234)	x4x5x5x5x4x3x3x4x4x4)3x3x3x2(3x4x4x4	2
16	(16_5234)(1R23456)	x4x3x3x3)2(4x3x3x3x4x5x5x5x5x5x5x4x5	0 (∃)
17	(3L216_54)(123654)	x4x5x4x4x4x3x3x3)4x3x3x2x2x2(3x4x4x4	2
18	(3L216_54)(165234)	x4x5x4x3x3x4x4x4)3x3x3x2x2x2(3x4x4x4	2
19	(3456_12)(123456) C	x5x4x4x4x4x4x4x5x4x4x4x4x3x3x2x2	2
20	(3R456_12)(321456)	x4x5x3x3x3x4x4x4)3x3x3x3x3x2x2(3x2x3	2
21	(3R456_12)(345216)	x5x4x4x3x3x4)3x3x3x3x3x2x2(2x3x3x3x4	2
22	(56_1234)(123456) C	x4x4x4x4x4x4x5x4x4x3x3x3x3x2x2x2	2
23	(56_1R234)(345216)	x4x5x3x4x4x3x3x4)3x3x3x2x2x2x2(3x2x3	2
24	(16_52*_*34)(1R2_*56*_34)	x4x3x5x4x5x5x4x3x2x2x3x4)3x3x3(3x2x3	0 (∃)
25	(16_5234)(1R2_*56*34)	x4x3x5x4x5x5x4x3x3x3)4x2x2x3x3(3x2x3	2
26	(1236_54)(1R2_*56*34)	x4x3x3x3x5x4x5x5x4x3)4x2x2x3x3(3x2x3	0 (?)
27	(36_54*_12)(1R2_*56_*34)	x4x5)4x3x3(3x4x3x2x2x3x4x5x5x4x4x2x3	2
28	(56_1234)(12*56_*34) C	x5x5x4x4x3x3x2x3x3x4x4x3x3x3x3x2	2
29	(3456_12)(12*56_*34) C	x5x5x4x4x3x3x2x3x3x3x3x4x4x3x3x2	2
30	(3654_12)(1R2*56_*34)	x4x5)4x3x3x2x2(4x3x3x3x4x5x5x4x4x2x3	2
31	(34_1652)(1R2*56_*34)	x4x5x3x4x4x3x2x2x3x4)3x3x3x2x2(3x2x3	2
32	(1456_32)(16*3R2_*54)	x3x4)3x3x2x2(4x3x4x5x5x4x3x3x3x2x4	0 (?)
33	(16_3452)(16*3R2_*54)	x3x4)3x3x2x2(4x3x3x3x4x5x5x4x3x2x3x4	2
34	(1L6_54_32)(12_3654)	x3x4x5x4x4x5x5x4x3x3x4x5x5)3x2(4x3x4	2
35	(2L1_6543)(61_2543)	x4x5x3x4x5x5x5x5x4x3x3x4)3x2x2(3x2x3	2
36	(2L1_6543)(6541_23)	x4x5x3x3x3x4x5x5x5x5x4x3x2x2)4(3x2x3	2
37	(21_6345)(61_25R43)	)3x4x3(3x4x3x3x4x5x2x2x6x5x4x4x4)5x1x1(4	2
38	(21_6345)(65R41_23)	)3x3x3x3x3(3x2x2x4x4x5x6x5x4x4x4)5x1x1(4	2
39	(2341_65)(61_25R43)	)3x3(4x3x3x3x4x5x6x5x5)4(3x2x3x3)4x2x1x1(4	2
40	(2341_65)(65R41_23)	)3x4x3x3x3(3x2x3x3x2x4x4x5x6x5x5)4x1x1(4	2
41	(4L321_65)(61_2543)	x4x5x3x4x5x5x4x3x3x3x2x2x2x2)4(3x2x3	2
42	(4L321_65)(6541_23)	x4x3x3x3x5x4x5x5x4x3x2x2x2x2)4(3x2x3	2

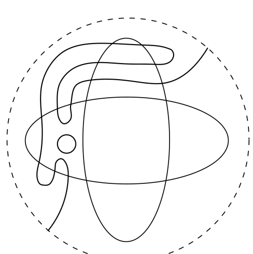
Таблица 5. Центр пучка внутри пересечения коник.

№	Код модели	X-код	h
43	(32R14_56)(32_1456)	)4x4(4x3x3x3)2x3x3x3(3x4x4x1x1x5x6x5x5)4x3(3	4
44	(32R14_56)(3452_16)	)4x2(5x4x4x4)3x3(4x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 (∃)
45	(34_52R16)(32_1456)	)4x2x2x2(5x4x4x3x3x4x5x6x5x4x3)4x1x1x1(3	0 (∃)
46	(34_52R16)(3452_16)	)3(4x3x3x3x4x5x6x5x4x3x3x4x4)5x1x1x1x2(4	0 (∃)
47	(1236_54)(1236R54)	)4x2x2x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x4)3x1x1x1(3	2
48	(16_5234)(1236R54)	)4x2(5x4x4x4x5x5x5x6x5x4x3x3x4)3x1x1x1(3	0 (?)
49	(5436_12)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
50	(5436_12)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
51	(5436_12)(3214R56)	)3x3x3x3(3x4x4x4)5x4x3(3x4x4x4)5x2x2x1x1x1(4	4
52	(56_1432)(12L3654)	)3(5x4x4x4)3x3x3x3x4x3x3(2x3x3x3)4x2x1x1x1(4	4
53	(56_1432)(1652L34)	)3(5x4x4x3x3x3)4x3x4x3x3(3x2x3x3)4x2x1x1x1(4	4
54	(32_1456)(5L6_*34*12)	x6x6x5x4)5(5)5x2x2x3x3x1x2x2x2(3x4x3x2x1	2
55	(32_14*_*56)(56_*34*1R2)	x6x5x4x4)3x3x4x5x6x2x2x3x3(5)5(2x3x2x1x1	6
56	(3452_16)(5R6_*34*12)	x6x5x4x3x3x3)4x3x2x4x2x3x3(5)5(3x2x2x1x1	4
57	(16_*34_52)(16*_3R2_*54)	x6x6x2x3x3)4(3)3(4x3x3x2x1x2x3x4x4x3x2x1	0 (∃)
58	(54_1236)(5L4*16_*32)	x6x5x5x5x4x4x3x3x5)4x4(3)3(4x3x3x2x1x1x5	2
59	(32_*56_14)(54*_16_*3R2)	x6x6x5x2x4x4x1x2x2)3(4)4(3x2x4x4x3x3x2x1	2
60	(36_12*_54)(16_*3R2_*54)	x6x5x4)5(3)3(4x5x3x3x4x4x5x6x5x4x4x2x1x1	2
61	(56_1432)(16_*3R2*54)	x6x6x5x3x3x4x4x2x1x2x2)3(4)4(3x2x3x3x2x1	2
62	(5436_12)(1R6_*32*54)	x6x6x5x3x3x4x4x2x1x2x3x3x3)2(4)4(2x3x2x1	2

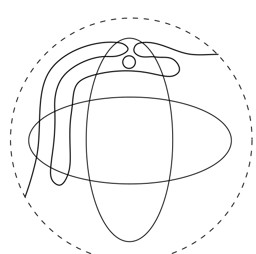
5. Заключение

Итог проведённого исследования можно сформулировать следующим образом.

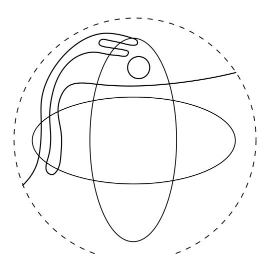
Теорема 5.1. *Топологические модели кривых рассматриваемого класса* (*т. е. удовлетворяющих условиям* (i) – (iv) *п.*1), *отличные от показанных на рис.* 12, 13, *не могут быть реализованы как схемы кривых степени* 7. *Из этих четырнадцати моделей первые девять* (*рис.* 12) *реализуются распадающимися кривыми степени* 7, *а вопрос о реализуемости пяти оставшихся* (*рис.* 13) *открыт.*



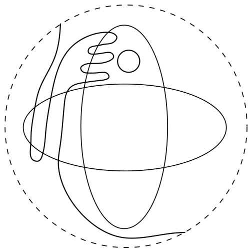
(1R234_56)(3452_16)



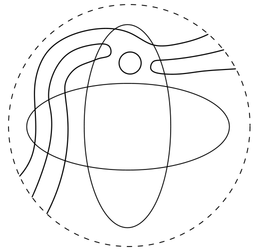
(34_5216)(32_1L654)



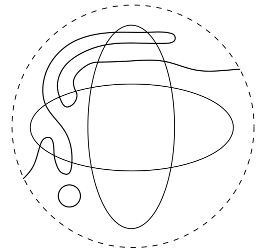
(34_5216)(5432_1L6)



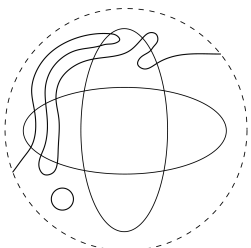
(16_5234)(1R23456)



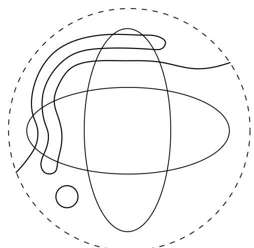
(16_52*_*34)
(1R2_*56*_34)



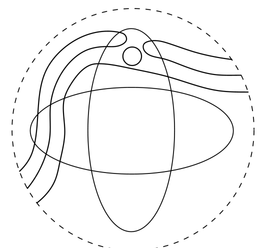
(32R14_56)(3452_16)



(34_52R16)(32_1456)

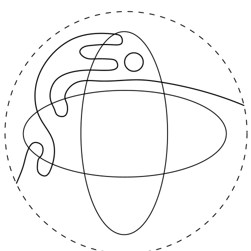


(34_52R16)(3452_16)

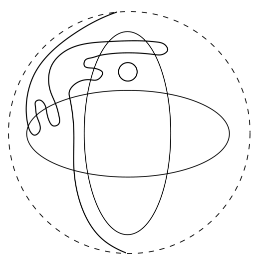


(16_*34_52)(16*_3R2_*54)

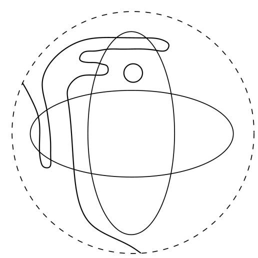
Рис. 12: Реализованные схемы.



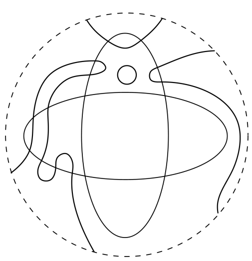
(3214_56)(5432_1L6)



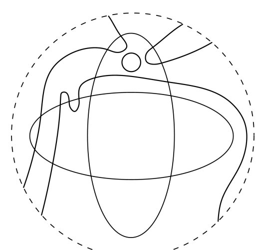
(1L6_5432)(123654)



(16_5234)(1236R54)



(1236_54)(1R2_*56*34)



(1456_32)(16*3R2_*54)

Рис. 13: Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. 87. С. 1–214.

2. Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // Докл. АН СССР. 1977. 236, № 3. С. 548–551.

3. Полотовский Г. М. Полная классификация M-распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости / Деп. в ВИНИТИ. № 1349–78. М., 1978.

4. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Тематические обзоры. 2020. 176. С. 3–18.

5. Kuzmenko T. V., Polotovskiy G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations Ser. 2, 1996. 173. P.165–177.

6. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. 21, № 2. С. 92–112.

7. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. 22, № 1. С. 24–37.

8. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // Усп. мат. наук. 1974. 29, № 4 (178). С. 3–79.

9. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. 38. P. 779–810.

10. Orevkov S. Yu. Clasification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy // Geom. Funct. Anal. 2002. 12, № 4. P. 723–755.

11. Lee R. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. 22. P. 191–202.

12. Оревков С. Ю. Расположения M-квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. 19, № 4. С. 174–242.

REFERENCES

1. Gudkov D. A., Utkin G. A. 1969, “Topology of 6-th degree curves and 4-th degree surfaces (to the Hilbert 16th problem)“, *Uchenye zapiski Gorkovskogo universiteta*, vol. 87, 214 p.

2. Polotovskiy G. M. 1977, “A catalogue of M-decomposing curves of sixth order“, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 236, no. 3 pp. 548–551.

3. Polotovskiy G. M. 1978, “Complete classification of 6th order M-decomposable curves in the real projective plane“ *Dep. in VINITI* no. 1349–78.

4. Borisov I. M., Polotovskiy G. M. 2020, “On the topology of plane real decomposable curves of degree 8“, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tematicheskie obzory*, no. 176. pp. 3–18.

5. Kuzmenko T. V., Polotovskiy G. M. 1996, “Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position“, *AMS Translations*, vol. 2, no. 173, pp.165–177.

6. Korchagin A. B., Polotovskiy G. M. 2003, "On arrangements of a plane real quintic curvwes with respect to a pair of lines", *Commun. Contemp. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 1–24.

7. Gorskaya V. A., Polotovskiy G. M. 2020, "On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane" *Middle Volga Mathematical Society Journal* vol. 22, no.1. pp. 24–37.

8. Gudkov D. A. 1974, "The topology of real projective algebraic varieties", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 29, no. 4(178), pp. 3–79.

9. Orevkov S. Yu. 1999, "Link theory and oval arrangements of real algebraic curve", *Topology*, no. 38, pp. 779–810.

10. Orevkov S. Yu. 2002, "Clasification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy", *GAFA, Geom. Funct. Anal.*, vol.12, no. 4, pp. 723–755.

11. Lee R. 1983, "Algebraic functions and closed braids", *Topology*, no. 22, pp. 191–202.

12. Orevkov S. Yu. 2007, "Arrangements of an M-quintic with respect to a conic that maximally intersects its odd branch", *Algebra i Analiz*, vol. 19, no. 4, pp. 174–242

Получено 09.06.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.1, 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-77-101

Рекуррентные числовые последовательности: теория и приложения

Е. И. Деза, Л. В. Котова

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Котова Лидия Владимировна — кандидат педагогических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: lv.kotova@mpgu.su

Аннотация

Теория рекуррентных соотношений являются важной составной частью современной математической науки. Множество числовых последовательностей имеют рекуррентную природу. Часто они естественным образом связаны с теорией чисел (числа Фибоначчи, фигурные числа, числа Мерсенна и Ферма, дружественные числа и др.) или имеют комбинаторные "корни" (элементы треугольника Паскаля, числа Стирлинга, числа Белла, числа Каталана и др.). Применяемые для исследования рекуррентных последовательностей производящие функции подробно изучаются в математическом анализе, предоставляя широкий спектр практико-ориентированных примеров использования классических аналитических построений. Рекурсивные функции играют важную роль в теории алгоритмов.

Приложения теории рекуррентных соотношений крайне востребованы в криптографии (генерация псевдослучайных последовательностей над конечными полями), цифровой обработке сигналов (моделирование обратной связи в системе, где выходные данные одновременно становятся входными для будущего времени), экономике (модели различных секторов экономики – финансового, товарного и др., в которых текущие значения ключевых переменных (процентная ставка, реальный ВВП и т.д.) анализируются с точки зрения прошлых и текущих значений других переменных), биологии (например, модели динамики роста той или иной популяции; вспомним числа Фибоначчи) и др.

Мы рассматриваем несколько аспектов указанной тематики, в том числе:

- историю вопроса, место числовых рекуррентных последовательностей в развитии математической науки и математического образования;

- примеры использования рекуррентного подхода при построении различных классов (и подклассов) специальных чисел (фигурных чисел, дружественных чисел и др.);

- теоретические аспекты использования последовательностей больших периодов над конечными полями в радиолокации и методы генерации псевдослучайных последовательностей для обеспечения криптографической защиты информации, передаваемой на большие расстояния.

В частности, в работе представлена рекуррентная схема построения так называемых центрированных k-пирамидальных чисел $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, которые представляют собой конфигурации точек, образующих k-угольную пирамиду, в основании которой лежит центрированное k-угольное число $CS_k(n)$.

Исходя из определения, мы получаем для последовательности $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, рекуррентную формулу $CS_k^3(n+1) = CS_k^3(n) + CS_k(n+1)$, $CS_k^3(1) = 1$. Учитывая, что $CS_k(n+1) = \frac{kn^2+kn+2}{2}$, и пользуясь стандартными подходами, мы доказываем, что производящая функция $f(x)$ последовательности $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеет вид

$f(x) = \frac{x(1+(k-2)x+x^2)}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$, в то время как явная формула для $CS_k^3(n)$ имеет вид $CS_k^3(n) = \frac{kn^3+n(6-k)}{6}$.

Ключевые слова: Рекуррентное соотношение, рекуррентная числовая последовательность, производящая функция последовательности, треугольник Паскаля, фигурные числа, дружественные числа, рекуррентные последовательности над конечным полем.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Е. И. Деза, Л. В. Котова. Рекуррентные числовые последовательности: теория и приложения // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 77 – 101.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.1, 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-77-101

Recurrent numerical sequences: theory and applications

E. I. Deza, L. V. Kotova

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Kotova Lidiya Vladomirovna — candidate of pedagogical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: lv.kotova@mpgu.su

Abstract

The theory of recurrence relations is an important component of modern mathematical science. Many numerical sequences have a recurrent nature. Often they are naturally related to Number Theory (Fibonacci numbers, figurate numbers, Mersenne and Fermat numbers, amicable numbers, etc.) or have combinatorial “roots”(elements of the Pascal triangle, Stirling numbers, Bell numbers, Catalan numbers, etc.). The generating functions used for the study of recurrent sequences are considered in detail in Mathematical Analysis, providing a wide range of practical-oriented examples of the use of classical analytical constructions. Recursive functions play an important role in the Theory of Algorithms.

Applications of the theory of recurrence relations are extremely in demand in Cryptography (generation of pseudo-random sequences over finite fields), digital signal processing (feedback modeling in a system where the output simultaneously becomes input for future time), Economy (models of various sectors of the economy - financial, commodity, etc., in which the current values of key variables (interest rate, real GDP, etc.) are analyzed in terms of past and current values of other variables), Biology (for example, models of growth dynamics of a particular population; recall Fibonacci numbers), etc.

We consider several aspects of this topic, including:

- history of the issue, place of recurrent numerical sequences in the development of mathematical science and mathematical education;

- examples of using a recurrent approach when constructing various classes (and subclasses) of special numbers (figurate numbers, amicable numbers, etc.);

- theoretical aspects of using of sequences of large periods over finite fields in radar-location and methods for generating pseudo-random sequences to provide cryptographic protection of information transmitted over long distances.

In particular, the paper presents a recurrent scheme for constructing so-called centered k-pyramidal numbers $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, which present configurations of points that form the k-gonal pyramid, at the base of which lies the centered k-gonal number $CS_k(n)$.

Based on the definition, we get for the sequence $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, recurrence formula $CS_k^3(n+1) = CS_k^3(n) + CS_k(n+1)$, $CS_k^3(1) = 1$. Noting that $CS_k(n+1) = \frac{kn^2+kn+2}{2}$, and using standard approaches, we prove that the generating function $f(x)$ of the sequence $CS_k^3(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, has the form $f(x) = \frac{x(1+(k-2)x+x^2)}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$, while the closed formula for $CS_k^3(n)$ has the form $CS_k^3(n) = \frac{kn^3+n(6-k)}{6}$.

Keywords: Recurrence relation, recurrent numerical sequence, generating function of sequence, Pascal triangle, figurate numbers, amicable numbers, recurrent sequences over finite field.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
E. I. Deza, L. V. Kotova, 2022, "Recurrent numerical sequences: theory and applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 77 – 101.

1. Введение

Часто при решении различных задач, как прикладных, так и теоретических, появляются последовательности [10].

Во многих случаях мы знаем, как определяются элементы последовательности a_n при каждом значении n. Такое описание последовательностей называется *явным*.

Однако при решении ряда задач пользуются методом нахождения n-го элемента последовательности a_n, опираясь на информацию об одном или нескольких предыдущих элементах той же последовательности. Метод сведения задачи к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений* (от латинского "recurrere" - возвращаться). Другими словами, *рекуррентными соотношениями* называют такие соотношения, которые позволяют получить информацию о n предметах, используя информацию о $n-1$ ($n-2$, $n-3$, $\ldots$) предметах. В случае числовых последовательностей – соотношения, которые позволяют найти a_n, используя a_{n-1} (a_{n-2}, a_{n-3}, $\ldots$).

Так, из комбинаторики известно, что $P_m = mP_{m-1}$, т.е. число перестановок из m предметов можно вычислить, зная число перестановок из $m-1$ предмета. Таким образом, зная начальное условие $P_1 = 1$, можно найти $P_2, P_3 \ldots, P_n, \ldots$ рекуррентным способом.

Аналогично, формула $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ дает рекуррентное соотношение для числа сочетаний: число сочетаний из n элементов по k элементов можно найти, используя числа сочетаний из $n-1$ элемента. Таким образом, зная, что $C_0^0 = 1$, $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$, можно получить все значения C_n^k последовательными вычислениями:

$$\begin{array}{c} C_0^0 = 1 \\ C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1 \\ C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2 \quad C_2^2 = 1 \\ C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 1 + 2 = 3 \quad C_3^2 = 1 + 2 = 3 \quad C_3^3 = 1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

Действуя по данной схеме, мы получили арифметический треугольник, внешними элементами которого являются 1, а каждый внутренний элемент получен как сумма двух элементов, расположенных непосредственно над ним. Данный треугольник называется *треугольником Паскаля.*

Одной из наиболее известных задач, связанных с рекуррентными соотношениями, является *задача о кроликах* Фибоначчи (Леонардо Пизанского), появившаяся в 1202 г. в книге "Liber

Abaci". Решение указанной задачи приводит нас к рекуррентному соотношению

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

с начальными условиями $u_1 = u_2 = 1$, что позволяет последовательно вычислять все элементы последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, которые называются *числами Фибоначчи.*

Не представляет труда доказать, что существует бесконечно много последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Так, если $u_1 = 1, u_2 = 2$, то мы получаем последовательность $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ которая является подпоследовательностью последовательности Фибоначчи. Если $u_1 = 1, u_2 = 3$, то мы получим последовательность *чисел Люка* $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$, и т.д. Но при задании начальных условий $u_1 = 1, u_2 = 1$ последовательность Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ однозначно.

Понятие "рекуррентность" (англ. "recurrence" – возвращение, повторение) является универсальным, часто встречаемым в разных областях знания. Оно используется, помимо математики, в биологии (связь с миграцией фауны и флоры) и в геологии (повторение состава продуктов вулканического извержения). В психологии используют словосочетание "рекуррентный образ", что означает образ, возникающий после того, как глаз долго смотрел на освещенный объект. Данное понятие становится частью терминологического аппарата гуманитарных наук — философии, социологии, культурологии, семиотики, лингвистики, педагогики [2].

В статье будут рассмотрены несколько аспектов указанной тематики, в том числе:

- история вопроса, место числовых рекуррентных последовательностей в развитии математической науки и математического образования [1, 5, 7];
- примеры использования рекуррентного подхода при построении различных классов (и подклассов) специальных чисел (фигурных чисел, дружественных чисел и др.) [3, 5];
- теоретические аспекты использования последовательностей больших периодов над конечными полями в радиолокации и методы генерации псевдослучайных последовательностей для обеспечения криптографической защиты информации, передаваемой на большие расстояния [7, 9].

2. Немного истории

2.1. Наиболее известной задачей, связанной с рекуррентными соотношениями, является *задача о кроликах* одного из самых значительных западных математиков средневековья, итальянского купца Фибоначчи (Леонардо Пизанского), появившаяся в 1202 г. в книге "Liber Abaci". Эта книга представляет собой объемный труд, содержащий почти все арифметические и алгебраические сведения того времени и сыгравший значительную роль в развитии математики в Западной Европе в течение нескольких следующих столетий.

Задача состоит в следующем: *пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат, причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов получится через год, если в начале года было два кролика?*

Для решения данной задачи проведем простейшие рассуждения, обозначая число пар кроликов в начале i-го месяца через u_i: 1 января мы имели 1 пару новорожденных кроликов ($u_1 = 1$). 1 февраля мы все еще имеем одну пару кроликов ($u_2 = 1$), которые, впрочем, перестали быть новорожденными. 1 марта мы получим первый приплод, то есть 2 пары кроликов ($u_3 = 1 + 1 = 2$), одна из которых новорожденная. 1 апреля одна из наших пар даст приплод, и мы получим 3 пары кроликов ($u_4 = 2 + 1 = 3$), одна из которых новорожденная. 1 апреля одна из наших пар даст приплод, и мы получим 3 пары кроликов ($u_4 = 2 + 1 = 3$), одна из которых новорожденная. 1 мая две наших пары дадут приплод, и мы получим 5 пар кроликов ($u_5 = 3 + 2 = 5$), 2 из которых новорожденные. 1 июня три наших пары дадут приплод, и мы получим 8 пар кроликов ($u_5 = 5 + 3 = 8$), 3 из которых новорожденные. Рассуждая аналогично, 1 июля мы получим 13 пар ($u_7 = 8 + 5 = 13$), 1 августа - 21 пару ($u_8 = 13 + 8 = 21$), 1 сентября - 34 пары ($u_9 = 21 + 13 = 34$), 1 октября - 55 пар ($u_{10} = 34 + 21 = 55$), 1 ноября - 89 пар ($u_{11} = 55 + 34 = 89$), 1 декабря - 144 пары ($u_{12} = 89 + 55 = 144$), и, наконец, 1 января - 233 пары ($u_{13} = 144 + 89 = 233$).

Из построения следует, что $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ для $n \geq 3$, в то время как $u_1 = u_2 = 1$.

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

с начальными условиями $u_1 = u_2 = 1$, что позволяет последовательно вычислять все элементы последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, которые называются *числами Фибоначчи*.

2.2. *Треугольник Паскаля* стал широко известен благодаря сочинению французского математика Блеза Паскаля “Трактат об арифметическом треугольнике”, изданном в 1655 году. Именно, в указанном сочинении была опубликована таблица, в которой каждое число A было равно сумме предшествующего числа в том же, что и A, горизонтальном ряду, и предшествующего числа в том же, что и A, вертикальном ряду:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

Таким образом треугольник, представленный во введении, отличается от треугольника, рассматриваемого самим Паскалем, поворотом на 45 градусов.

В действительности треугольник Паскаля был известен задолго до 1655 года. Омар Хайям, бывший не только философом и поэтом, но и математиком, знал о существовании треугольника около 1100 года (в Иране эту схему называют *треугольником Хайяма*), в свою очередь, заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Этот треугольник изображен на иллюстрации в книге “Яшмовое зеркало четырех элементов” китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году. (Впрочем, в Китае считают, что изобрел треугольник другой китайский математик, Ян Хуэй, поэтому китайцы называют его *треугольником Яна Хуэя.*)

В Италии треугольник Паскаля иногда называют *треугольником Тартальи*, поскольку Никколо Тарталья описал соответствующую таблицу на сто лет раньше Паскаля. Треугольник воспроизведен и на титульном листе учебника арифметики, написанном в начале XVI века Петером Апианом, астрономом из Ингольштадского университета.

2.3. *Фигурные числа* – числа, которые можно представить с помощью геометрических фигур. Это историческое понятие восходит к пифагорейцам, которые развивали алгебру на геометрической основе и представляли любое положительное целое число в виде набора точек на плоскости. Само построение фигурных чисел носит рекуррентный характер. Так, начиная с 1, каждое *треугольное число* получатся из предыдущего добавлением очередного натурального числа:

$$S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1), \ S_3(1) = 1.$$

Другими словами, n-е треугольное число $S_3(n)$ есть сумма первых n натуральных чисел, или, что тоже, сумма первых n членов простейшей арифметической прогрессии $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ с первым членом 1 и разностью 1. Заменяя разность 1 на $m-2$, $m=4,5,6,\ldots$, мы получим аналогичным образом m-угольные числа (квадратные, пятиугольные, шестиугольные и т.д.).

Указанная связь позволяет успешно использовать многоугольные числа для закрепления понятия "арифметическая прогрессия" у школьников.

Построение пространственных фигурных чисел также подчиняется рекуррентной процедуре. Например, каждое следующее *тетраэдральное число* получается из предыдущего добавлением очередного треугольного числа:

$$S_3^3(n+1)=S_3^3(n)+S_3(n+1),\ S_3(1)=1.$$

На рекуррентной основе строятся и *центрированные* k*-угольные числа* $CS_k(n)$:

$$CS_k(n+1)=CS_k(n)+nk,\ CS_k(1)=1.$$

2.4. Подчиняются рекуррентным законам (см. [6]) *числа Ферма* $F_n=2^{2^n}+1$, $n\geq 0$ (Sloane's A000215), и *числа Мерсенна* $M_n=2^n-1$, $n\geq 1$ (Sloane's A000225):

$$F_{n+1}=F_0\cdots F_n+2,\ F_0=3;\ M_{n+1}=2M_n+1,\ M_1=1.$$

2.5. Если для (четных) *совершенных чисел* n, $\sigma(n)=2n$, специальные рекуррентности не требуются, любое четное совершенное число может быть получено по *формуле Евклида-Эйлера* $2^{p-1}(2^p-1)$ из простого числа Мерсенна $M_p=2^p-1$, то для получения новых *дружественных чисел* (m,n), $\sigma(n)=\sigma(n)=m+n$, помимо классических *правила Сабита* (известны ровно 3 пары, получаемые по этому правилу) и *правила Эйлера* (известны ровно 5 пар, получаемых по этому правилу, включая три пары Сабита), с успехом используются рекуррентные схемы, позволяющие получать новые пары, отталкиваясь от уже известных; классическим примером такого алгоритма является *правило Боро* [3].

2.6. Существуют по крайней мере две различные практические задачи, приводящие к необходимости построения периодической последовательности большого периода.

Первая из них связана с радиолокацией. Например, чтобы определить положение движущегося объекта в атмосферере и пространстве, используется радиолокатор, антенна которого излучает электромагнитную энергию узким пучком. Когда пучок достигает объекта, то часть его энергии оражается назад к антенне. Этот сигнал, получаемый антенной, подтверждает наличие объекта в исследуемом направлении. Расстояние до объекта можно определить, если измерить разницу во времени с момента отправления пучка до получения ответного сигнала.Однако объект движется в пространстве, поэтому единичные импульсы или ряд одинаковых импульсов не могут предоставить достоверной информации. Если же отправить серию импульсов, представляющую собой периодическую последовательность с достаточно большим периодом, то ответный импульс будет давать точную информацию о времени, прошедшем с момента отправки. Например, период порядка 10^6 достаточен для локации Луны, а порядка 10^9 – для локации Венеры.

В данном случае нам необходима последовательность большого приода, которая фиксирована и хорошо известна исследователям.

2.7. Второе применение последовательностей большого периода носит закрытый характер, именно, используется в шифровании,имеющим очень древние корни. *Шифр Цезаря* (Gaius Iulius Caesar, 100 – 44 до н.э.), представляет собой подстановку символов открытого символом, находящимся на 3 позиции правее него в том же алфавите (сдвиг). Для затруднения частотного анализа вместо шифров подстановки (простой замены) (называемых также моноалфавитными, поскольку каждый символ открытого текста переходит в некоторый, фиксированный при данном ключе, символ того же алфавита) с XV в. стали использовать более сложные подстановочные шифры, в том числе полиалфавитные, состоящие в повторяющемся применении нескольких сдвигов алфавита к определенному числу букв шифруемого текста.

Примером построения полиалфавитного шифра является *шифр Тритемиуса* – система шифрования, разработанная Иоганном Тритемием (Iohannes Trithemius, 1462 – 1516), которая подразумевает для каждого символа сообщения свой сдвиг, определяемый некоторым ключом.

Говоря математическим языком, символ, стоящий на i-ой позиции открытого сообщения, заменяется при осуществлении данного алгоритма по закону $l_i \equiv m_i + k_i(mod\ N)$, где m_i - числовой эквивалент i-го символа открытого сообщения, k_i - числовой эквивалент i-го символа ключа, получающегося последовательным повторением заданного ключевого слова, и l_i - числовой эквивалент i-го символа шифротекста. Для дешифрования достаточно провести обратную операцию: $m_i \equiv l_i - k_i(mod\ N)$, то есть для расшифровки шифротекста из номера очередной буквы зашифрованного сообщения вычитают номер соответствующей буквы ключа, осуществляя эту операцию по модулю N.

Однако по настоящему стойким такой шифр будет, если использовать ключевое слово бесконечной длины.

Реализацией данной идеи является *шифр Вернама* (одноразовый шифровальный блокнот) - единственная система шифрования, для которой доказана абсолютная криптографическая стойкость (Claude Elwood Shannon, 1945).

Существенной проблемой для данного способа шифрования является хранение и передача последовательности-ключа. Кроме того, для работы шифра Вернама необходима истинно случайная последовательность, а используемые на практике последовательности, генерируемые с помощью различных, как правило, арифметических алгоритмов, являются лишь псевдослучайными [9].

Таким образом, классическая идея шифровального блокнота привела к использованию в шифровании *псевдослучайных последовательностей* – последовательностей такого большого периода, чтобы их трудно было восстановить непосвященному и достаточно легко сгенерировать для простейшего шифрования с помощью суммирования исходного сообщения и ключа (и дешифрования аналогичным способом). При этом абоненты, находясь на расстоянии друг от друга, используют открытые каналы связи. Для одновременной работы им требуется открытый экспоненциальный ключ (но это другая задача).

3. Рекуррентные соотношения и фигурные числа

3.1. Определим n-ое *m-угольное пирамидальное число* $S^3_m(n)$ как сумму первых n m-угольных чисел [4]:

$$S^3_m(n) = S_m(1) + S_m(2) + \ldots + S_m(n).$$

Таким образом, имеет место следующая рекуррентная формула:

$$S^3_m(n) = S^3_m(n-1) + S_m(n),\ \ S^3_m(1) = 1.$$

Отсюда следует, что n-ое m-угольное пирамидальное число имеет вид

$$S^3_m(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6}.$$

□. Докажем данное утверждение по индукции.

Для $n = 1$ имеем $S^3_m(1) = S_m(1) = 1 = \frac{1\cdot 2((m-2)\cdot 1 - m + 5)}{6}$. Переходя от n к $n+1$, получим

$$S^3_m(n+1) = S^3_m(n) + S_m(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)((m-2)n - m + 5)}{6} + \frac{(n+1)((m-2)(n+1) - m + 4)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)}{6} \cdot (n^2(m-2) + n(5-m) + 3(n+1)(m-2) + 3(4-m)) =$$

$$= \frac{(n+1)}{6} \cdot ((n^2+3n+3)(m-2)+n(5-m)+3(4-m)) =$$

$$= \frac{(n+1)}{6} \cdot ((n^2+3n+2)(m-2)+(n+2)(5-m)+(m-2)-2(5-m)+3(4-m)) =$$

$$= \frac{(n+1)}{6} \cdot ((n+2)(n+1)(m-2)+(n+2)(5-m)+(m-2-10+2m+12-3m)) =$$

$$= \frac{(n+1)}{6} \cdot (n+2)((n+1)(m-2)+(5-m)) = \frac{(n+1)(n+2)((m-2)(n+1)-m+5)}{6}. \ \square$$

Эта формула была известна уже Архимеду (287 – 212 до н.э.) и использовалась им для вычисления объемов.

В частности, n-ое *тетраэдральное число* $S_3^3(n)$ имеет вид $S_3^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Таким образом, последовательность тетраэдральных чисел представляет собой последовательность частичных сумм ряда $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$ (Sloane's A000217) треугольных чисел и начинается с элементов 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ... (Sloane's A000292).

Аналогично, n-ое *квадратное пирамидальное число* $S_4^3(n)$ имеет вид $S_4^3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Последовательность квадратных пирамидальных чисел представляет собой последовательность частичных сумм ряда $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$ (Sloane's A000290) квадратных чисел и начинается с элементов 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, ... (Sloane's A000330).
Производящая функция последовательности $S_m^3(1)$, $S_m^3(2)$, ..., $S_m^3(n)$, ... m-угольных пирамидальных чисел имеет вид $f(x) = \frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4}$, то есть имеет место разложение

$$\frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4} = S_m^3(1)x + S_m^3(2)x^2 + S_m^3(3)x^3 + \ldots + S_m^3(n)x^n + \ldots, \ |x| < 1.$$

В частности, $\frac{x}{(1-x)^4} = x + 4x^2 + 10x^3 + \ldots + S_3^3(n)x^n + \ldots, \ |x| < 1$, для тетраэдральных чисел, и $\frac{x(x+1)}{(x-1)^4} = x + 5x^2 + 14x^3 + \ldots + S_4^3(n)x^n + \ldots, \ |x| < 1$, для квадратных пирамидальных чисел.
$\square$ Этот результат может быть получен с помощью стандартной процедуры [8]. Рассмотрим линейное рекуррентное соотношение

$$S_m^3(n+1) = S_m^3(n) + S_m(n+1).$$

Переходя от n к $n+1$, получим соотношение

$$S_m^3(n+2) = S_m^3(n+1) + S_m(n+1).$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$S_m^3(n+2) - S_m^3(n+1) = S_m^3(n+1) - S_m^3(n) + S_m(n+1) - S_m(n),$$

или, что то же,

$$S_m^3(n+2) = 2S_m^3(n+1) - S_m^3(n) + (1 + (m-2)(n+1)).$$

Аналогично,

$$S_m^3(n+3) = 2S_m^3(n+2) - S_m^3(n+1) + (1 + (m-2)(n+2)),$$

и

$$S_m^3(n+3) - S_m^3(n+2) = 2S_m^3(n+2) - 2S_m^3(n+1) - S_m^3(n+1) + S_m^3(n) + (m-2),$$

то есть

$$S_m^3(n+3) = 3S_m^3(n+2) - 3S_m^3(n+1) + S_m^3(n) + (m-2).$$

Переходя от $n+2$ к $n+3$, получаем

$$S_m^3(n+4) = 3S_m^3(n+3) - 3S_m^3(n+2) + S_m^3(n+1) + (m-2).$$

Следовательно,

$$S_m^3(n+4) - S_m^3(n+3) =$$
$$= 3S_m^3(n+3) - 3S_m^3(n+2) - 3S_m^3(n+2) + 3S_m^3(n+1) + S_m(n+1) - S_m(n),$$

откуда следует, что

$$S_m^3(n+4) = 4S_m^3(n+3) - 6S_m^3(n+2) + 4S_m^3(n+1) - S_m^3(n). \ \square$$

Таким образом, мы получили для последовательности m-угольных пирамидальных чисел линейное рекуррентное соотношение $S_m^3(n+4) - 4S_m^3(n+3) + 6S_m^3(n+2) - 4S_m^3(n) + S_m^3(n) = 0$ 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Учитывая начальные условия $S_m^3(1) = 1$, $S_m^3(2) = 1+m$, $S_m^3(3) = 4m-2$, $S_m^3(4) = 10m-10$, перепишем соотношение в виде

$$c_{n+4} - 4c_{n+3} + 6c_{n+2} - 4c_{n+1} + c_n = 0,\ c_0 = 1,\ c_1 = m+1,\ c_2 = 4m-2,\ c_3 = 10m-10,$$

где $S_m^3(n+1)$ заменено на c_n. В этом случае (см. [8]) производящая функция имеет вид

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4},$$

где $b_0 = 1$, $b_1 = -4$, $b_2 = 6$, $b_3 = -4$, $b_4 = 1$, и $a_0 = b_0c_0 = 1$, $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = 1\cdot(m+1) + (-4)\cdot 1 = m-3$, $a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 1\cdot(4m-2) + (-4)(m+1) + 6\cdot 1 = 0$, $a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 = 1\cdot(10m-10) + (-4)(4m-2) + 6(1+m) + (-4)\cdot 1 = 0$. Так как многочлен $g(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1-x)^4$ имеет 4 совпавших корня $x_1 = \ldots = x_4 = 1$, то производящая функция последовательности m-угольных пирамидальных чисел имеет вид

$$\frac{1+(m-3)x}{(1-x)^4} = S_m^3(1) + S_m^3(2)x + S_m^3(3)x^2 + \ldots + S_m^3(n)x^{n-1} + \ldots,\ |x| < 1.$$

Этот результат может быть получен также с помощью производящей функции

$$\frac{1+(m-3)x}{(1-x)^3} = S_m(1) + S_m(2)x + S_m(3)x^2 + \ldots + S_m(n)x^{n-1} + \ldots$$

последовательности m-угольных чисел и разложения $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. Именно,

$$\frac{1+(m-3)x}{(1-x)^4} = \frac{1+(m-3)x}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1-x} =$$
$$= (S_m(1) + S_m(2)x + S_m(3)x^2 + \ldots + S_m(n)x^{n-1} + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) =$$
$$= S_m(1) + (S_m(1) + S_m(2))x + (S_m(1) + S_m(2) + S_m(3))x^2 + \ldots + (S_m(1) + \ldots +$$
$$+ S_m(n))x^{n-1} + \ldots = S_m^3(1) + S_m^3(2)x + S_m^3(3)x^2 + \ldots + S_m^3(n)x^{n-1} + \ldots,\ |x| < 1. \ \square$$

3.2. Рассмотрим пространственные фигурные числа, образованные центральной точкой, окруженной последовательными слоями-многогранниками, прежде всего – центрированные числа, соответствуюшие правильным многогранникам (тетраэдру, кубу, октаэдру, икосаэдру, додекаэдру), и центрированные m-пирамидные числа.

Так, *центрированные кубические числа* – это числа, представляющее “центрированный куб”. Любой центрированный куб образован центральной точкой, окруженной последовательными кубическими слоями. На n-ом шаге предыдущая конструкция окружается слоем новых точек, образующих куб, каждая грань которого содержит ровно n^2 точек. Другими словами, n-ый слой представлят собой n-ое кубическое число n^3 без внутренности, то есть без $(n-2)$-го кубического числа $(n-2)^3$.

Таким образом, начиная с 1, мы получим на втором шаге куб, сформированный из 8 точек, что соответствует $C(2) = 2^3$ без пустой внутренности. На третьем шаге добавим куб, сформированный из 28 точек, что соответствует $C(3) = 3^3$ без одноточечной внутренности: $28 = C(3) - C(1)$, и т.д.

Другими словами, центрированные кубические числа могут быть получены как частичные суммы последовательности $1^3, 2^3-0^3, 3^3-1^3, 4^3-2^3, \ldots, n^3-(n-2)^3, \ldots$. Следовательно, n-ое центрированное кубическое число $\overline{C}(n)$ имет вид

$$\overline{C}(n) = 1^3 + (2^3-0^3) + (3^3-1^3) + (4^3-2^3) + \ldots + (n^3-(n-2)^3).$$

Отсюда следует рекуррентная формула

$$\overline{C}(n+1) = \overline{C}(n) + ((n+1)^3 - (n-1)^3),\ \overline{C}(1) = 1.$$

Так как $(n+1)^3 - (n-1)^3 = 6n^2 + 2$, мы получаем, что

$$\overline{C}(n+1) = \overline{C}(n) + (6n^2+2),\ \overline{C}(1) = 1.$$

Легко видеть, что

$$1^3 + (2^3-0^3) + (3^3-1^3) + (4^3-2^3) + \ldots + (n^3-(n-2)^3) = n^3 + (n-1)^3,$$

то есть что любое центрированное кубическое число является суммой двух последовательных кубических чисел:

$$\overline{C}(n) = C(n) + C(n-1).$$

Следовательно, поскольку $n^3+(n-1)^3 = n^3+(n^3-3n^2+3n-1) = (2n^3-n^2)-(2n^2+n)+(2n-1) = (2n-1)n^2 - (2n-1)n + (2n-1) = (2n-1)(n^2-n+1)$, имеет место формула

$$\overline{C}(n) = (2n-1)(n^2-n+1).$$

Первыми центрированными кубическими числами являются числа 1, 9, 35, 91, 189, 341, 559, 855, 1241, 1729, … (Sloane's A005898).

3.3. Центрированные пирамидные числа соответствуют конструкциям, образованным центральной точкой, окруженной пирамидальными слоями. Каждый слой может рассматриваться как соответствующее пирамидальное число без внутренности.

Так, *центрированные тетраэдральные числа* соответствуют центрированным тетраэдрам. Начиная с одной точки, получаем на 2-ом уровне тетраэдр, образованный из 4 точек. Он соответствует 2-му тетраэдральному числу $S_3^3(2) = 4$ без пустой внутренности. 3-ий уровень – тетраэдр, образованный из 10 точек. Он соответствует 3-му тетраэдральному числу $S_3^3(3) = 10$ без пустой внутренности. Аналогично, 4-ый уровень соответствует $S_3^3(4) = 20$ без пустой внутренности, 5-й уровень образован из 34 точек и соответствует $S_3^3(5) = 35$ без 1-точечной внутренности: $34 = S_3^3(5) - S_3^3(1)$. 52 точки 6-го уровня соответствуют $S_3^3(6) = 56$ без 4-точечной внутренности: $52 = S_3^3(6) - S_3^3(2)$, и т.д. В общем случае, центрированные тетраэдральные числа являются частичными суммами элементов последовательности

$$S_3^3(1), S_3^3(2), S_3^3(3), S_3^3(4), S_3^3(5) - S_3^3(1), S_3^3(6) - S_3^3(2), \ldots, S_3^3(n+4) - S_3^3(n), \ldots .$$

Начиная с $n = 4$, n-ое центрированное тетраэдральное число $\overline{S}_3^3(n)$ может быть получено как

$$\overline{S}_3^3(n) = S_3^3(1) + S_3^3(2) + S_3^3(3) + S_3^3(4) + (S_3^3(5) - S_3^3(1)) + (S_3^3(6) - S_3^3(2)) + \ldots + (S_3^3(n+4) - S_3^3(n)).$$

Поскольку телескопическая сумма равна $S_3^3(n)+S_3^3(n-1)+S_3^3(n-2)+S_3^3(n-3)$, то

$$\overline{S}_3^3(1)=S_3^3(1)=1,\ \overline{S}_3^3(2)=S_3^3(2)+S_3^3(1)=5,\ \overline{S}_3^3(3)=S_3^3(3)+S_3^3(2)+S_3^3(1)=15,$$

$$\overline{S}_3^3(n)=S_3^3(n)+S_3^3(n-1)+S_3^3(n-2)+S_3^3(n-3),\ n\geq 4.$$

Итак, первые элементы последовательности центрированных тетраэдральных чисел равны 1, 5, 15, 35, 69, 121, 195, 295, 425, 589, ... (Sloane's A005894).

Так как $S_3^3(n)=S_3^3(n-1)+S_3(n)$, получаем, для $n\geq 4$, рекуррентную формулу

$$\overline{S}_3^3(n)=\overline{S}_3^3(n-1)+(S_3(n)+S_3(n-1)+S_3(n-2)+S_3(n-3)).$$

Другими словами, для $n\geq 4$ имеет место соотношение $\overline{S}_3^3(n)=\overline{S}_3^3(n-1)+(2n^2-4n+4)$. Более того, нетрудно проверить, что эта формула работает и для $n=2,3$. Таким образом, замечая, что $2(n+1)^2-4(n+1)+4=2n^2+2$, получаем рекуррентную формулу

$$\overline{S}_3^3(n+1)=\overline{S}_3^3(n)+(2n^2+2),\ \overline{S}_3^3(1)=1.$$

Кроме того, для $\overline{S}_3^3(n)$ легко получить и явную формулу

$$\overline{S}_3^3(n)=\frac{(2n-1)(n^2-n+3)}{3}=\frac{2n^3-3n^2+7n-3}{3}.$$

□ Действительно, для $n\geq 4$ имеем: $S_3^3(n)+S_3^3(n-1)+S_3^3(n-2)+S_3^3(n-3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+$ $+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}=\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}+$ $+\frac{(n^2-3n+2)(2n-3)}{6}=\frac{(2n^3+2n^2+n^2+n)+(2n^3-6n^2+4n-3n^2+9n-6)}{6}=\frac{4n^3-6n^2+14n-6}{6}=\frac{2n^3-3n^2+7n-3}{3}=$ $=\frac{(2^3-n^2)-(2n^2-n)+(6n-3)}{3}=\frac{(2n-1)(n^2-n+3)}{3}$. Для $n=1,2,3$ достаточно использовать прямой подсчет: $\frac{(2\cdot 1-1)(1^2-1+3)}{3}=1=\overline{S}_3^3(1)$, $\frac{(2\cdot 2-1)(2^2-2+3)}{3}=5=\overline{S}_3^3(2)$, $\frac{(2\cdot 3-1)(3^2-3+3)}{3}=35=\overline{S}_3^3(3)$ □.

Мы можем получить последовательность центрированных тетраэдральных чисел путем подсчета частичных сумм последовательности 1, 4, 10, 20, 34, 52, 74, 100, 130, 164, ... (Sloane's A005893), дающей количества точек на поверхности тетраэдра. Первый элемент этой последовательности равен 1, в то время как n-ый элемент, $n\geq 2$, имеет вид $2(n-1)^2+2=2n^2-4n+4$.

Этот результат можно получить по формуле $v+s(n-2)+f\cdot int(S_3(n))$, где $v=4$, $s=6$ и $f=4$ – числа вершин, сторон и граней тетраэдра, в то время как $int(S_3(n))$ – число точек внутри n-го треугольного числа. Для $n\geq 2$ получаем: $v+s(n-2)+f\cdot int(S_3(n))=4+6(n-2)+$ $+4(\frac{n(n+1)}{2}-3(n-1))=6n-8+2(n^2-5n+6)=2n^2-4n+4=2(n-1)^2+2$.

При таком подходе вышеуказанная рекуррентная формула для центрированных тетраэдральных чисел становится очевидной, в то время как явная формула для $\overline{S}_3^3(n)$ может быть получена в результате следующего суммирования: $\overline{S}_3^3(n)=1+\sum_{i=1}^{n-1}(2i^2+2)=1+2\sum_{i=1}^{n-1}i^2+$ $+2(n-1)=2\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+(2n-1)=\frac{(2n-1)(n^2-n+1)}{3}$.

3.4. С помощью той же процедуры можно построить *центрированные m-пирамидные числа* для любого $m\geq 3$.

Именно, последовательность $\overline{S}_m^3(1),\overline{S}_m^3(2),\ldots,\overline{S}_m^3(n),\ldots$ центрированных m-пирамидных чисел можно получить как последовательность частичных сумм ряда 1, $m+1$, $4m-2$, $9m-7$, $16m-14$, ..., задающего количества точек на поверхности m-угольной пирамиды. Первый элемент этой последовательности равен 1, в то время как n-ый элемент, $n\geq 2$, имеет вид $(m-1)(n-1)^2+2=(m-1)n^2-2(m-1)n+(m+1)$.

Этот результат можно получить по формуле $v+s(n-2)+f_\triangle\cdot int(S_3(n))+int(S_m(n))$, где $v=m+1$, $s=2m$ и $f_\triangle=m$ – числа вершин, сторон и граней m-угольной пирамиды, в то время как $int(S_m(n))$ – число точек внутри n-го m-угольного числа. Для $n\geq 2$ имеем:

$v+s(n-2)+f_{\triangle}\cdot int(S_3(n))+int(S_m(n)) = (m+1)+2m(n-2)+m(\frac{n(n+1)}{2}-3(n-1))+(\frac{m-2}{2}(n^2-n)+$ $+n-m(n-1)) = (m-1)n^2-2(m-1)n+(m+1) = (m-1)(n-1)^2+2.$

Таким образом, рекуррентная формула для последовательности центрированных m-пирамидных чисел имеет вид

$$\overline{S}_m^3(n+1) = \overline{S}_m^3(n) + (m-1)n^2 + 2,\ \overline{S}_m^3(1) = 1.$$

Явная формула для $\overline{S}_m^3(n)$ имеет вид

$$\overline{S}_m^3(n) = \frac{(2n-1)((m-1)n^2-(m-1)n+6}{6}.$$

□ Ее можно получить в результате суммирования $\overline{S}_m^3(n) = 1+\sum_{i=1}^{n-1}((m-1)i^2+2) = 1+$ $+(m-1)\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 2(n-1) = (m-1)\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (2n-1) = \frac{(2n-1)((m-1)n^2-(m=1)n+6)}{6}$. □

Производящая функция последовательности $\overline{S}_m^3(1), \overline{S}_m^3(2), \ldots, \overline{S}_m^3(n), \ldots$ имеет вид

$$f(x) = \frac{x(1+(m-2)x+(m-2)x^2+x^3)}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x)(1+(m-3)x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Другими словами,

$$\frac{x(1+x)(1+(m-3)x+x^2)}{(x-1)^4} = \overline{S}_m^3(1)x + \overline{S}_m^3(2)x^2 + \overline{S}_m^3(3)x^3 + \ldots + \overline{S}_m^3(n)x^n + \ldots,\ |x| < 1.$$

□ Этот результат может быть получен стандартной процедурой, приводящей к линейному рекуррентному уравнению $\overline{S}_m^3(n+4) - 4\overline{S}_m^3(n+3) + 6\overline{S}_m^3(n+2) - 4\overline{S}_m^3(n+1) + \overline{S}_m^3(n) = 0$ с начальными значениями $\overline{S}_m^3(1) = 1$, $\overline{S}_m^3(2) = m+1$, $\overline{S}_m^3(3) = 4m-2$, $\overline{S}_m^3(4) = 9m-7$. □

3.5. В этом разделе мы построим два класса пространственных фигурных чисел, которые используют как строительные блоки центрированные многоугольные числа. Они представляют собой центрированные m-пирамидальные числа и центрированные m-гранные призматические числа, $m \geq 3$.

Центрированные 6-пирамидальные числа являются наиболее известными объектами такого рода. Они соответствуют конфигурации точек, которые образуют шестиугольную пирамиду, основанием которой служит центрированное шестиугольное число.

По определению, центрированные 6-пирамидальные числа представляют собой частичные суммы элементов последовательности 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, ... (Sloane's A003215) центрированных шестиугольных чисел:

$$CS_3(n) = CS_6(1) + CS_6(2) + \ldots + CS_6(n).$$

Так как $CS_6(n) = 3n^2+3n+1 = n^3-(n-1)^3$ (см. [4]), мы получаем, что n-ое центрированное шестиугольное пирамидальное число равно n^3. Это означает, что центрированные 6-пирамидальные числа эквивалентны кубическим числам, но по-разному расположены в пространстве. Первыми элементами последовательности являются числа 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ... (Sloane's A000578).

Конечно, можно построить подобные объекты для любого типа центрированных многоугольных чисел.

Центрированное m-пирамидальное число соответствует конфигурации точек, образующих m-угольную пирамиду, в основании которой лежит центрированное m-угольное число.

По определению, такие числа являются последовательными суммами ряда $CS_m(1) = 1$, $CS_m(2) = 1+m, CS_m(3) = 1+3m, CS_m(4) = 1+6m, \ldots, CS_m(n) = 1+\frac{n(n+1)}{2}, \ldots$ центрированных m-угольных чисел. Другими словами,

$$CS_m^3(n) = CS_m(1) + CS_m(2) + \ldots + CS_m(n).$$

В частности, *центрированные 3-пирамидальные числа* являются частичными суммами ряда 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, ... (Sloane's A005448) центрированных треугольных чисел. Первыми элементами последовательности являются числа 1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505, ...

Центрированные 4-пирамидальные числа являются частичными суммами ряда 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, ... (Sloane's A001844) центрированных квадратых чисел. Первыми элементами последовательности являются числа 1, 6, 19, 44, 85, 111, 146, 231, 344, 489, ...

Центрированные 5-пирамидальные числа являются частичными суммами ряда 1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, ... (Sloane's A005891) центрированных пятиугольных чисел. Первыми элементами последовательности являются числа 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835, ... Они совпадают с Sloane's A004068, давая число точек в додекаэдре с n оболочками.

Как было показано ранее, центрированные 6-пирамидальные числа являются частичными суммами ряда 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, ... (Sloane's A003215). Последовательность начинается с элементов 1, 8, 27, 64, 125, 216, , 512, 729, 1000, ... (Sloane's A000578).

Следуя этой процедуре, можно построить центрированные 7-пирамидальные числа 1, 9, 31, 74, 145, 251, 399, 596, 849, 1165, ...; центрированные 8-пирамидальные числа 1, 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, 1330, ...; центрированные 9-пирамидальные числа 1, 11, 39, 94, 185, 321, 511, 764, 1089, 1495, ...; центрированные 10-пирамидальные числа 1, 12, 43, 104, 205, 356, 567, 848, 1209, 1660, ...; центрированные 11-пирамидальные числа 1, 13, 47, 114, 225, 391, 623, 932, 1329, 1825, ...; центрированные 12-пирамидальные числа 1, 14, 51, 124, 245, 426, 679, 1016, 1449, 1990, ... и т.д.

По определению, мы получаем следующую рекуррентную формулу для последовательности $CS_m^3(1)$, $CS_m^3(2)$, ..., $CS_m^3(n)$, ... центрированных m-пирамидальных чисел:

$$CS_m^3(n+1) = CS_m^3(n) + CS_m(n+1),\ CS_m^3(1) = 1.$$

Так как $CS_m(n+1) = \frac{mn^2+mn+2}{2}$ (см. [4]), то

$$CS_m^3(n+1) = CS_m^3(n) + \frac{mn^2+mn+2}{2},\ CS_m^3(1) = 1.$$

Явная формула для n-го центрированного m-пирамидального числа $CS_m^3(n)$ имеет вид

$$CS_m^3(n) = \frac{mn^3 + n(6-m)}{6}.$$

□ Поскольку $CS_m(n) = 1 + mS_3(n-1)$, то $CS_m^3(n)$ имеет вид

$$CS_m^3(n) = n + m(S_3(n-1) + S_3(n-2) + \ldots + S_3(2) + S_3(1)).$$

Сумма первых $(n-1)$ треугольных чисел дает $(n-1)$-ое тетраэдральное число $S_3^3(n-1)$. Следовательно, $CS_m^3(n) = n + mS_3^3(n-1)$. Поскольку $S_3^3(n-1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}$, то $CS_m^3(n) = \frac{mn^3+n(6-m)}{6}$. □

Производящая функция последовательности $CS_m^3(1)$, $CS_m^3(2)$, ..., $CS_m^3(n)$, ... имеет вид $f(x) = \frac{x(1+(m-2)x+x^2)}{(1-x)^4}$, то есть

$$\frac{x(1+(m-3)x)}{(1-x)^4} = CS_m^3(1) + CS_m^3(2)x + CS_m^3(3)x^2 + \ldots, |x| < 1.$$

□ Этот факт может быть получен стандартной процедурой, приводящей к линейному рекуррентному соотношнию с постоянными коэффициентами. Именно, рассмотрим рекуррентное соотношние

$$CS_m^3(n+1) = CS_m^3(n) + CS_m(n+1).$$

Переходя от n к $n+1$, получим:

$$CS_m^3(n+2) = CS_m^3(n+1) + CS_m(n+1).$$

Вычитая первое равенство из второго, получим, что

$$CS_m^3(n+2) - CS_m^3(n+1) = CS_m^3(n+1) - CS_m^3(n) + CS_m(n+1) - CS_m(n),$$

то есть

$$CS_m^3(n+2) = 2CS_m^3(n+1) - CS_m^3(n) + m(n+1).$$

Аналогично,

$$CS_m^3(n+3) = 2CS_m^3(n+2) - CS_m^3(n+1) + m(n+2),$$

и

$$CS_m^3(n+3) - CS_m^3(n+2) = 2CS_m^3(n+2) - 2CS_m^3(n+1) - CS_m^3(n+1) + CS_m^3(n) + m,$$

то есть

$$CS_m^3(n+3) = 3CS_m^3(n+2) - 3CS_m^3(n+1) + CS_m^3(n) + m.$$

Переходя от $n+3$ к $n+4$, получим

$$CS_m^3(n+4) = 3CS_m^3(n+3) - 3CS_m^3(n+2) + CS_m^3(n+1) + m.$$

Следовательно,

$$CS_m^3(n+4) - CS_m^3(n+3) =$$
$$= 3CS_m^3(n+3) - 3CS_m^3(n+2) - 3CS_m^3(n+2) + 3CS_m^3(n+1) + CS_m(n+1) - CS_m(n),$$

то есть

$$CS_m^3(n+4) = 4CS_m^3(n+3) - CS_m^3(n+2) + 4CS_m^3(n+1) - CS_m^3(n).$$

Таким образом, мы получаем для последовательности центрированных m-пирамидальных чисел линейное рекуррентное уравнение

$$CS_m^3(n+4) - 4CS_m^3(n+3) + 6CS_m^3(n+2) - 4CS_m^3(n) + CS_m^3(n) = 0$$

4-го порядка с постоянными коэффициентами. Начальные значения задаются соотношениями $CS_m^3(1) = 1$, $CS_m^3(2) = 2+m$, $CS_m^3(3) = 3+4m$, и $CS_m^3(4) = 4+10m$. Обозначая $CS_m^3(n+1)$ через c_n, перепишем соотношение в виде

$$c_{n+4} - 4c_{n+3} + 6c_{n+2} - 4c_{n+1} + c_n = 0 \ \text{ с } c_0 = 1,\ c_1 = m+2,\ c_2 = 4m+3,\ c_3 = 10m+4.$$

Таким образом, производящая функция последовательности центрированных m-пирамидальных чисел имеет следующий вид (см. [8]):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4},$$

где $b_0 = 1$, $b_1 = -4$, $b_2 = 6$, $b_3 = -4$, $b_4 = 1$, и $a_0 = b_0c_0 = 1$, $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0 = 1\cdot(m+2) + (-4)\cdot 1 = m-2$, $a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 1\cdot(4m+3) + (-4)(m+2) + 6\cdot 1 = 1$, $a_3 = b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 = 1\cdot(10m+4) + (-4)(4m+3) + 6(m+2) + (-4)\cdot 1 = 0$. Так как $g(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1-x)^4$ имеет 4 совпавших корня $x_1 = \ldots = x_4 = 1$, производящая функция имеет вид

$$\frac{1 + (m-2)x + x^2}{(1-x)^4} = CS_m^3(1) + CS_m^3(2)x + CS_m^3(3)x^2 + \ldots + CS_m^3(n)x^{n-1} + \ldots,\ |x| < 1.$$

Этот результат может быть получен также с помощью производящей функции $\frac{1+(m-2)x+x^2}{(1-x)^3}$ для центрированных m-угольных чисел и разложения $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$. Именно, $\frac{1+(m-2)x+x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+(m-3)x}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1-x} = (CS_m(1)+CS_m(2)x+CS_m(3)x^2+\ldots+CS_m(n)x^{n-1}+\ldots)(1+x+$ $+x^2+\ldots+x^n+\ldots) = CS_m(1)+(CS_m(1)+CS_m(2))x+(CS_m(1)+CS_m(2)+CS_m(3))x^2+\ldots+$ $+(CS_m(1)+\ldots+CS_m(n))x^{n-1}+\ldots = CS_m^3(1)+CS_m^3(2)x+CS_m^3(3)x^2+\ldots+CS_m^3(n)x^{n-1}+\ldots,$ $|x|<1$. □

3.6. Построение центрированных m-пирамидальных чисел аналогично построению обычных m-угольных пирамидальных чисел. Однако любое центрированное m-пирамидальное число может рассматриваться как конфигурация точек, образованных центральной точкой, окруженных пирамидальными слоями. В этом смысле они образуют класс центрированных фигурных чисел. Естественный "центр" n-ого центрированного m-пирамидального числа – центральная точка n-го центрированного m-угольного числа, образующего основание соответствующей пирамиды. Эта центральная точка окружена пирамидальными слоями. Каждый слой представляет собой k-ое m-угольное пирамидальное число (с $k = 1, 3, \ldots, n$) без внутренности; более того, его основание также не имеет внутренности.

Например, первый уровень центрированного 3-пирамидального числа является просто центральной точкой его основания. 2-ой уровень образован из 4 точек; он соответствует 2-му тетраэдральному числу $S_3^3(2) = 4$ без пустой внутренности; его основание – 2-ое треугольное число без пустой внутренности. Аналогично, 3-ий уровень состоит из 10 точек. Он соответствует 3-му тетраэдральному числу $S_3^3(3) = 10$ без пустой внутренности; его основание – 3-е треугольное число 6 без пустой внутренности. 4-ый уровень формируется из 19 точек. Он соответствует 4-ому тетраэдральному числу $S_3^3(4) = 20$ без пустой внутренности; его основание – 4-ое треугольное число 10 без 1-точечной внутренности. 5-ый уровень формируется из 31 точки. Он соответствует 5-му тетраэдральному числу $S_3^3(5) = 35$ без 1-точечной внутренности; его основание – 5-ое треугольное число 15 без 3-точечной внутренности, и т.д.

Таким образом, число точек в k-ом уровне равно $S_3^3(k) - S_3^3(k-3)$, $k \geq 4$.

Это означает, что центрированные 3-пирамидальные числа являются частичными суммами ряда

$$S_3^3(1), S_3^3(2), S_3^3(3), S_3^3(4) - S_3^3(1), S_3^3(5) - S_3^3(2), \ldots, S_3^3(n+3) - S_3^3(n), \ldots.$$

Следовательно,

$$CS_3^3(1) = CS_3^3(1) = 1,\ CS_3^3(2) = S_3^3(2)+S_3^3(1) = 5,\ CS_3^3(n) = S_3^3(n)+S_3^3(n-1)+S_3^3(n-2), n \geq 3.$$

Таким образом,

$$\overline{S}_3^3(1) = CS_3^3(1),\ \overline{S}_3^3(2) = CS_3^3(2),\ \overline{S}_3^3(3) = CS_3^3(3),\ \overline{S}_3^3(n) = CS_3^3(n) + S_3^3(n-3),\ n \geq 4.$$

Аналогично, центрированные 4-пирамидальные числа являются частичными суммами ряда

$$S_4^3(1), S_4^3(2), S_4^3(3) - S_4^3(1), S_4^3(4) - S_4^3(2), S_4^3(5) - S_4^3(3), \ldots, S_4^3(n+2) - S_4^3(n), \ldots.$$

Таким образом,

$$CS_4^3(1) = CS_4^3(1) = 1,\ CS_4^3(n) = S_4^3(n) + S_4^3(n-1),\ n \geq 2.$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\overline{S}_4^3(1) = CS_4^3(1),\ \overline{S}_4^3(2) = CS_4^3(2),\ \overline{S}_4^3(n) = CS_4^3(n) + S_4^3(n-2),\ n \geq 3.$$

3.7. *Призматические числа* (точнее, *m-гранные призматические числа*) соответствуют правильной прямой m-призме: многограннику, образованному двумя конгруэнтными правильными m-угольниками (основания) и m прямоугольниками (боковые грани). Они получаются путем сложения нескольких конгруэнтных копий центрированного m-угольного числа.

Так, n-ое *шестигранное призматичское число* может быть получено как сумма n копий n-го центрированного шестиугольного числа $CS_6(n)$; оно имеет вид

$$PCS_6(n) = nCS_6(n) = n(3n^2 - 3n + 1).$$

Данная последовательность начинается с чисел 1, 14, 57, 148, 305, 546, 889, 1352, 1953, …(Sloane's A005915). Шестигранные призматичские числа можно рассматривать в форме $\frac{1}{6}(18n^3 - 18n^2 + 6n)$, что совпадает со структурированными ромбододекаэдральными числами.

Рекуррентная формула последовательности имеет вид

$$PCS_6(n+1) = PCS_6(n) + (9n^2 + 3n + 1),\ PCS_6(1) = 1.$$

□ Это следует, например, из рекуррентной формулы $CS_6(n+1) = PCS_6(n) + 6n$ для центрированных шестиугольных чисел. Именно, $PCS_6(n+1) = (n+1)CS_6(n+1) = (n+1)(CS_6(n) + 6n) = nCS_6(n) + CS_6(n) + 6n(n+1) = nCS_6(n) + (3n^2 - 3n + 1) + 6n(n+1) = PCS_6(n) + (9n^2 + 3n + 1)$. □

Производящая функция последовательности $PCS_6(1)$, $PCS_6(2)$, …, $PCS_6(n)$, …имеет вид $f(x) = \frac{x(1+10x+7x^2)}{(1-x)^4}$, то есть, имеет место разложение

$$\frac{x(1+10x+7x^2)}{(1-x)^4} = PCS_6(1)x + PCS_6(2)x^2 + PCS_6(3)x^3 + \ldots + PCS_6(n)x^n + \ldots,\ |x| < 1.$$

□ Этот факт может быть получен стандартной процедурой (см. [4]), приводящей к линейному рекуррентному уравнению $PCS_6(n+4) - 4PCS_6(n+3) + 6PCS_6(n+2) - 4PCS_6(n+1) + PCS_6(n) = 0$ с начальными значениями $PCS_6(1) = 1$, $PCS_6(2) = 14$, $PCS_6(3) = 57$ и $PCS_6(1) = 148$. □

4. Рекуррентные процедуры для дружественных чисел

4.1. Простой конструктивный способ получения новых *дружественных пар* из данной пары можно получить, используя известное *правило Боро* (см. [3]):

• *если известна дружественная пара ($X = a \cdot u$, $Y = a \cdot s$), где s – простое, $(a, us) = 1$, $p = u + s + 1$ – простое, и a не делится на p, то пара ($M = X \cdot p^n \cdot q_1, N = a \cdot p^n \cdot q_2$) является дружественной для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, таких что $q_1 = (u+1) \cdot p^n - 1$ и $q_2 = (u+1) \cdot (s+1) \cdot p^n - 1$ – простые.*

Соответствующий рекуррентный алгоритм поиска новых дружественных пар на отрезке $[A, B]$ представлен ниже:

- выберем дружественную пару $(X = a \cdot u, Y = a \cdot s)$ с простым s и $(a, us) = 1$;
- найдем $p = u + s + 1$;
- если p простое и $(p, a) = 1$, то рассмотрим все n от A до B;
- для данного n от A до B найдем

$$q_1 = (u+1) \cdot p^n - 1,\ q_2 = (u+1) \cdot (s+1) \cdot p^n - 1;$$

- если q_1, q_2 простые, то найдем $M = Xp^n q_1, N = ap^n q_2$ и объявим пару (M, N) дружественной.

4.2. В 1984 году Те Риле предложил новый алгебраический конструктивный метод поиска новых дружественных пар. *Правило Риле* (см. [11]) утверждает, что:

- *если $(M', N') = (a \cdot u, a \cdot p)$ – дружественная пара с $(a, p) = 1$, где p – простое; если существует пара (r, s) простых чисел с $p < r < s$ и $(a, rs) = 1$, удовлетворяющая билинейному диофантову уравнению*

$$(r - p)(s - p) = (p + 1)(p + u),$$

и если существует третье простое число q с $(au, q) = 1$, такое что $q = r + s + u$, то пара $(M = a \cdot u \cdot q, N = a \cdot r \cdot s)$ является дружественной.

Так, выбрав пару $(3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 59, 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 18719)$, мы имеем $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, $u = 5^2 \cdot 11 \cdot 59 = 16225$, $p = 18719$, и после факторизации получаем $(p + 1)(p + u) = 2^{12}3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^2$. Записав $(p + 1)(p + u)$ как $2688 \cdot 243360$, мы получим три простых $r = 18719 + 2688 = 21407$, $s = 18719 + 243360 = 262079$, $q = 21407 + 262079 + 16225 = 299711$, и, следовательно, дружественную пару

$$(3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 299711, 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13 \cdot 21407 \cdot 262079).$$

Вторую дружественную пару получим, записав $(p + 1)(p + u)$ как $3120 \cdot 20964$.

4.3. В 1968 году Ли предложил общий алгебраический метод построения дружественных пар. Он основыватся на очевидном факте, состоящем в том, что любая дружественная пара может быть записана в форме $(M = a_1 \cdot p \cdot q, N = a_2 \cdot r)$, где $(a_1, p) = (a_1, q) = (a_2, r) = 1$.

Для заданных a_1 и a_2 метод Ли (см. [11]) позволят найти все возможные значения p, q, r, используя все возможные разложения $X \cdot Y$ величины $\sigma(a_2)(a_1 a_2 \sigma(a_2) + \sigma(a_1)(a_1 - a_2)(a_1 - \sigma(a_2)))$.

4.4. Янь (см. [11]) в 1996 году предложил другой общий метод построения дружественных пар. Его алгоритм, начиная с пары $(M', N') = (a_1 p, a_2 q)$, использует заданные числа a_1, a_2 для вычисления константы $W = W(a_1, a_2)$. После полной факторизации W следует рассмотреть все возможные разложения $W = UV, U < V$. Для каждой комбинации $W = UV, U < V$, вычислим $q_1 = q_1(U, a_1, a_2)$, $q_2 = q_2(V, a_1, a_2)$, $p_1 = p_1(q_1, q_2, a_1, a_2)$. Если все три полученных числа q_1, q_2, p_1 простые, то, при условии выполнения дополнительных ограничений $q_1 \neq q_2$, $(a_2, q_1 q_2) = 1$, $(a_1, p_1) = 1$, мы получим новую дружественную пару $(M = a_1 \cdot p_1, N = a_2 \cdot q_1 \cdot q_2)$.

Подробное рассмотрение этих и других методов можно найти в [11]. Для получения дополнительной информации см., например, [3].

5. Псевдослучайные последовательности

5.1. Последовательности, генерируемые с помощью различных, как правило, арифметических алгоритмов, называются *псевдослучайными* [9]. Мы рассматриваем задачу построения псевдослучайных последовательностей, прежде всего, в связи с задачей получения последовательности, по свойствам близкой к случайной, имеющей очень большой период, для использования ее в качестве ключа шифрования, заменяющего одноразовый шифровальный блокнот.

Поскольку для кодирования любого множества сообщений достаточно алфавита из двух символов, можно использовать конечное поле $\mathbb{F}_2$, в котором суммирование принимает простейший вид: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$.

Например, простейшим случаем рекуррентной последовательности, которую можно получить с помощью арифметическойх функции, является последовательность $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, и $\alpha_{n+1} = \mathrm{rest}(\alpha_n + \alpha_{n-1}, 2)$ при любом натуральном n. заметим, что значения очень быстро начинают повторяться: $\alpha_n = 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots$.

5.2. Для генерации псевдослучайных последовательностей можно использовать многочлены над конечными полями. Рассмотрим основы теории таких построений [7], [9].

Пусть $S(\mathbb{F}_p) = \{\alpha = \{\alpha_n\}_n | n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_n \in F_p\}$ - множество всех последовательностей $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ элементов поля $\mathbb{F}_p$.

Определим на множестве $S(\mathbb{F}_p)$ бинарную операцию $+$ и две унарные операции – *умножение на элемент c поля* $\mathbb{F}_p$ и *сдвиг* T:

$$\alpha + \beta = \{\alpha_n\}_n + \{\beta_n\}_n = \{\alpha_n + \beta_n\}_n;\ c\alpha = c\{\alpha_n\}_n = \{c\alpha_n\}_n,\ T \bullet \alpha = T \bullet \{\alpha_n\}_n = \{\alpha_{n+1}\}_n.$$

Нетрудно убедиться, что теперь множество $S(\mathbb{F}_p)$ образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$, замкнутое относительно сдвига.

С каждым многочленом $g(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \ldots + b_k\lambda_k \in F_p[\lambda]$ сопоставим *полиномиальный оператор* g^T, определяемый по следующему закону:

$$g^T \bullet \alpha = g^T \bullet \{\alpha_n\}_n = \{\beta_n\}_n = \beta,$$

где, для любого целого неотрицательного n, $\beta_n = b_0 \cdot \alpha_n + b_1\alpha_{n+1} + b_2\alpha_{n+2} + \ldots + b_k\alpha_{n+k}$.

Полиномиальные операторы удовлетворяют свойствам:

1. $g^T \bullet (\alpha + \beta) = g^T \bullet \alpha + g^T \bullet \beta$.
2. $(g + f)^T \bullet \alpha = g^T \bullet \alpha + f^T \bullet \alpha$.
3. $g^T \bullet (h^T \bullet \alpha) = (gh)^T \bullet \alpha$.
4. $g(\lambda) \equiv h(\lambda) \Leftrightarrow \forall\alpha \in S\ g^T \bullet \alpha = h^T \bullet \alpha$.
5. Если $g(\lambda) = \lambda + 1$, то $g^T \bullet \alpha = T \bullet \alpha$.
6. Если $g(\lambda) \equiv c$, $c \in F_p$, то $g^T \bullet \alpha = c\alpha$.

Так если $g(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \in F_2[\lambda]$, $\alpha = \{\alpha_n\}_n \in S(\mathbb{F}_2)$, то $g^T \bullet \alpha = g^T \bullet \{\alpha_n\}_n = \{\alpha_n + \alpha_{n+1} + +\alpha_{n+2}\}_n$. Последовательность $\varepsilon = \{1\}_n$, состоящая из одних единиц (как и последовательность $\theta = \{0\}_n$, состоящая из одних нулей), перейдет при этом отображении в себя, а, например, последовательность $000100010001\ldots$ – в последовательность $101110111011\ldots$.

Многочлен $g(\lambda) = 1 + \lambda$ соответствует сдвигу T, переводя последовательность ε (как и последовательность θ) в себя, а последовательность $000100010001\ldots$ - в последовательность $001000100010\ldots$.

Многочлен $g(\lambda) \equiv c$ соответствует оператору умножения на элемент $c \in F_p$. Над полем $\mathbb{F}_2$ мы имеем ровно две возможности: при $c = 1$ оператор $g(\lambda) \equiv c$ переводит каждую последовательность в себя, в то время как при $c = 0$ оператор $g(\lambda) \equiv c$ переводит каждую последовательность в нулевую последовательность $\theta = \{0\}_n$.

Назовем уравнение вида

$$\delta_{x+n} = a_{n-1} \cdot \delta_{x+n-1} + a_{n-2} \cdot \delta_{x+n-2} + \ldots + a_0 \cdot \delta_x, \quad \text{где } a_i \in F_p,$$

линейным рекуррентным уравнением порядка n над полем F_p, а многочлен $f(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1} \cdot \cdot \lambda^{n-1} - \ldots - a_0 \in F_p[x]$ - *характеристическим многочленом* этого уравнения.

Уравнение определяет линейную рекуррентную последовательность $\{\delta_x\}_x$ над полем F_p, которая называется *решением* данного линейного уравнения и однозначно определяется своими начальными членами $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

Так, линейное рекуррентное уравнение второго порядка $\delta_{x+2} = \delta_{x+1} + \delta_x$ над полем F_2 отвечает характеристическому многочлену $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Решениями уравнения являются четыре последовательности, три из которых ненулевые. Все три ненулевые последовательности имеют период 3 и являются сдвигами друг друга.

x	0	1	2	3	4	5	6	...	
δ_x	0	0	0	0	0	0	0	...	$per\,\delta = 1$
δ_x	0	1	1	0	1	1	0	...	$per\,\delta = 3$
δ_x	1	0	1	1	0	1	1	...	$per\,\delta = 3$
δ_x	1	1	0	1	1	0	1	...	$per\,\delta = 3$

Линейное рекуррентное уравнение $\delta_{x+2} = \delta_x$ второго порядка над полем F_2 отвечает характеристическому многочлену $g(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Как и в предыдущем случае, решениями уравнения являются четыре последовательности, три из которых ненулевые. Среди ненулевых последовательностей две имеют период 2, и одна - период 1. При этом последовательности, имеющие период 2, являются сдвигами друг друга.

x	0	1	2	3	4	5	6	...	
δ_x	0	0	0	0	0	0	0	...	$per\,\delta = 1$
δ_x	0	1	0	1	0	1	0	...	$per\,\delta = 2$
δ_x	1	0	1	0	1	0	1	...	$per\,\delta = 2$
δ_x	1	1	1	1	1	1	1	...	$per\,\delta = 1$

Рассматривая эти примеры, мы видим, что число решений линейного рекуррентного уравнения конечно, и каждое решение - периодично. Оба этих факта тривиальны. Поскольку решение линейного рекуррентного уравнения однозначно определяется начальным набором δ_0, $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, и над полем $\mathbb{F}_p$ существует ровно p^n таких наборов, то *число* $|S(f)|$ *решений уравнения* $\delta_{x+n} = a_{n-1} \cdot \delta_{x+n-1} + a_{n-2} \cdot \delta_{x+n-2} + \ldots + a_0 \cdot \delta_x$, отвечающего характеристическому многочлену $f(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_0$, равно p^n.

Из конечности числа возможных наборов $(\delta_x, \delta_{x+1}, \ldots, \delta_{x+n-1})$ длины n над конечным полем $\mathbb{F}_p$ следует и периодичность линейных рекуррентных последовательностей: для любого решения $\delta = \{\delta_x\}_x \in S(f)$ линейного рекуррентного уравнения над полем $\mathbb{F}_p$, отвечающего характеристическому многочлену степени n, существует натуральное τ, такое что $\delta_x = \delta_{x+\tau}$ для любого целого неотрицательного x.

5.3. Наименьший натуральный период τ решения δ называется *примитивным периодом* решения δ и обозначается символом $per\ \delta$. Поскольку число ненулевых наборов $(\delta_x, \delta_{x+1}, \ldots, \delta_{x+n-1})$ длины n над конечным полем $\mathbb{F}_p$ равно $p^n - 1$, то наименьший натуральный период τ решения δ не превосходит $p^n - 1$.

Эти и другие свойства линейных рекуррентных последовательностей делают их необычайно полезными при решении практических криптографических задач [7], [9].

Поскольку множество $S(f)$ решений линейного рекуррентного уравнения, отвечающего характеристическому многочлену $f(\lambda) \in F_p[\lambda]$, замкнуто относительно сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{F}_p$, то оно формирует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_p$. Сопоставив каждой линейной рекуррентной последовательности $\delta = \{\delta_x\}_x$ вектор $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ ее начальных значений (полностью эту последовательность задающий), мы убедимся, что векторное пространство решений линейного рекуррентного уравнения над полем $\mathbb{F}_p$, отвечающего характеристическому многочлену степени n, изоморфно классическому n-мерному векторному пространству над полем $\mathbb{F}_p$.

5.4. Назовем решение $\delta = \{\delta_x\}_x$ линейного рекуррентного уравнения *главным*, если вместе со своими сдвигами оно образует базис пространства $S(f)$ всех решений данного линейного рекуррентного уравнения.

Максимальной линейной рекуррентной последовательностью порядка n назовем любое главное решение линейного рекуррентного уравнения порядка n.

Для рассмотренного выше линейного уравнения $\delta_{x+2} = \delta_{x+1} + \delta_x$ над полем $\mathbb{F}_2$, отвечающего характеристическому многочлену $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, главным решением является любое ненулевое решение, так как все остальные ненулевые решения являются его сдвигами, а нулевое есть сумма всех этих сдвигов. Следовательно, каждое из указанных трех ненулевых решений является максимальной линейной рекуррентной последовательностью порядка 2.

Для уравнения $\delta_{x+2} = \delta_x$ над полем $\mathbb{F}_2$, отвечающего характеристическому многочлену $g(\lambda) = \lambda^2 - 1$, в качестве главных решений могут выступать только второе и третье решения. Четвертое (ненулевое) решение вместе со своими сдвигами не может породить все пространство решений, в то время как сумма второго и третьего (сдвига второго) дают нам четвертое решение, а нулевое решение может быть получено путем сложения четвертого решения с его копией.

Многочлен $g(\lambda) \in F_2[\lambda]$ называют *аннулирующим последовательность* $\delta = \{\delta_n\}_n \in S(\mathbb{F}_p)$, если $g^T \bullet \delta = \theta$. Нормированный и наименьшей степени многочлен, аннулирующий $\delta = \{\delta_n\}_n \in S(\mathbb{F}_p)$, называют *минимальным многочленом последовательности* δ и обозначают символом $m_\delta(\lambda)$.

Нетрудно убедиться в том, что для нулевой последовательности $\theta = \{0\}_n$ любой многочлен будет аннулирующим, и, следовательно, $m_\theta(\lambda) \equiv 1$.

Для единичной последовательности $\varepsilon = \{1\}_n$ любой многочлен $\lambda^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, будет аннулирующим, и, следовательно, $m_\varepsilon(\lambda) = \lambda - 1$. Аналогичный результат можно получить для любой ненулевой последовательности-константы $\delta = \{\delta\}_n$.

Для последовательности $010101010101\ldots$ аннулирующим будет любой многочлен $\lambda^{2k} - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Непосредственная проверка показывает, что минимальным многочленом данной последовательности будет многочлен $\lambda^2 - 1$. Вспомнив, что последовательность $010101010101\ldots$ является одним из решений линейного рекуррентного уравнения $\delta_{x+2} = \delta_x$, отвечающего характеристическому многочлену $f(\lambda) = \lambda^2 - 1$, мы замечаем, что минимальный многочлен одного из решений линейного рекуррентного уравнения $\delta_{x+2} = \delta_x$ совпадает с характеристическим многочленом данного линейного рекуррентного уравнения. Случайность ли это?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим поведение многочленов, аннулирующих линейные рекуррентные последовательности ([7], [9]).

Выделим ряд свойств аннулирующих многочленов.

1. Минимальный многочлен любого ненулевого решения $\delta \in S(f)$ является многочленом ненулевой степени: $\delta \neq \theta \Leftrightarrow deg\ m_\delta(\lambda) \geq 1$.

2. Если τ - примитивный период решения $\delta \in S(f)$, то многочлен $\lambda^\tau - 1$ является аннулирующим для решения $\delta \in S(f)$.

3. Характеристический многочлен линейного рекуррентного уравнения аннулирует любое решение этого уравнения.

4. Пусть $\delta \in S(\mathbb{F}_p)$, и $f(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$ - нормированный многочлен степени n над полем $\mathbb{F}_p$ с не равным нулю свободным членом. Оператор f^T аннулирует последовательность δ тогда и только тогда, когда δ - решение линейного рекуррентного уравнения с характеристическим многочленом f.

5. Многочлен g над полем $\mathbb{F}_p$ аннулирует последовательность $\delta \in S(\mathbb{F}_p)$ тогда и только тогда, когда g делится на минимальный многочлен последовательности δ (*основное свойство минимального многочлена*): $g^T \bullet \delta = \theta \Leftrightarrow m_\delta(\lambda)|g(\lambda)$.

6. Минимальный многочлен главного решения уравнения есть характеристический многочлен этого уравнения.

Изучая свойства аннулирующих многочленов, мы убеждаемся в том, что длина периода того или иного решения δ линейного рекуррентного уравнения над полем $\mathbb{F}_p$ с характеристическим многочленом $f(\lambda)$ степени n зависит как от свойств самой последовательности δ – для практических целей целесообразно использовать главные решения линейного рекуррентного уравнения, – так и от свойств характеристического многочлена $f(\lambda)$.

Поэтому необходимо внимательнее отнестись к многочленам, порождающим последовательности, и исследовать их свойства.

5.5. Многочлен $f(x) \in F[x]$ называется *неприводимым* над полем $\mathbb{F}$ (или в кольце $\mathbb{F}[x]$), если $deg\, f(x) > 0$, и из разложения $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $g(x), h(x) \in F[x]$, следует, что либо $g(x)$, либо $h(x)$ - многочлен нулевой степени.

В остальных случаях многочлен положительной степени $f(x) \in F[x]$ называется *приводимым* над $\mathbb{F}$ (или в $\mathbb{F}[x]$): для приводимого многочлена существует хотя бы одно разложение $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, где $g(x), h(x) \in F[x]$, $deg\ g(x) > 0$, и $deg\ h(x) > 0$.

Ясно, что многочлен первой степени всегда неприводим.

Рассмотрим многочлены второй степени над полем $\mathbb{F}_2$. Их всего четыре: x^2+x+1, x^2+x x^2+1, x^2. Многочлены $x^2+x = x(x+1)$, $x^2+1 = (x+1)^2$ и $x^2 = x \cdot x$ приводимы. Многочлен $f(x) = x^2+x+1$ неприводим: если бы он раскладывался на нетривиальные множители, то каждый из этих множителей имел бы степень 1, а, следовательно, многочлен $f(x) = x^2+x+1$ имел бы корень в $\mathbb{F}_2$, однако $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$.

Обратим внимание, что в рассмотренных выше примерах решения уравнений имели разные периоды; максимально возможный период имели решения рекуррентного уравнения, заданного именно неприводимым характеристическим многочленом

Найдем все неприводимые многочлены степени 3 над $\mathbb{F}_2$. Многочлены третьей степени имеют вид $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где $a_1 \in \{1, 0\}$. Очевидно, $a_3 = 1$, и мы получаем ровно 8 многочленов, однако, если исключить очевидно приводимые многочлены с $a_0 = 0$, то останется всего 4 многочлена: x^3+x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^3+1.

Для многочлена третьей степени нетривиальное разложение обязательно будет содержать множители первой и второй степени, следовательно, у приводимых многочленов должны быть корни, в частности, для многочленов из нашего списка - корень, равный единице. Непосредственная проверка показывает, что неприводимыми будут лишь многочлены x^3+x+1 и x^3+x^2+1.

Продолжая исследование, мы получим что, неприводимыми многочленами четвертой степени над $\mathbb{F}_2$ являются многочлены x^4+x^3+1, x^4+x+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$, и только они.

Для поиска всех неприводимых многочленов заданной степени полезно знать, что число $a_p(n)$ неприводимых над полем $\mathbb{F}_p$ многочленов степени n вычисляется (см. [9]) по формуле

$$a_p(n) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{m|n} p^{\frac{n}{m}}\mu(m), \text{ где } \mu(n) \text{ – \textit{функция Мебиуса}.}$$

Таким образом, для всякого простого p и для всякого натурального n существуют неприводимые многочлены над полем $\mathbb{F}_p$ степени n.

Напоминим (см. [1]), что *функция Мебиуса* $\mu(n)$ определена для всех натуральных n и принимает значения из множества $\{-1, 0, 1\}$ в зависимости от разложения n на простые множители: $\mu(n) = 1$, если n - бесквадратное число с четным числом простых делителей; $\mu(n) = -1$, если n - бесквадратное число с нечетным числом простых делителей; $\mu(n) = 0$, если n не является бесквадратным ([1]).

Поскольку $\mu(1) = 1$, $\mu(3) = -1$, то

$$a_2(3) = \frac{1}{3}\sum_{m|n} p^{\frac{n}{m}}\mu(m) = \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{1}}\mu(1) + 2^{\frac{3}{3}}\mu(3)\right) = \frac{1}{3}\left(2^3 \cdot 1 + 2^1 \cdot (-1)\right) = \frac{1}{3}(8-2) = 2.$$

Таким образом, над $\mathbb{F}_2$ имеется ровно два нормированных и неприводимых многочлена степени 3, и мы их нашли: это многочлены x^3+x^2+1 и x^3+x+1.

5.6. Не ограничивая общности, будем считать, что $f \in F_p[x]$ - нормированный многочлен над полем F_p ненулевой степени n, и $f(0) \neq 0$ [9].

В этом случае среди p^n многочленов $1, x, x^2, x^{p^n-1}$, заведомо не делящихся на f (и, следовательно, имеющих ненулевые остатки при делении на f), найдутся два сравнимых по модулю $f(x)$. Таким образом, $f|(x^i - x^j)$, то есть $f|x^j(x^{i-j} - 1)$. Следовательно, в наших условиях $f|(x^{i-j} - 1)$, причем $1 \leq i - j \leq p^n - 1$.

Другими словами, любой нормированный многочлен $f \in F_p[x]$ ненулевой степени n, такой что $f(0) \neq 0$, делит многочлен $x^\delta - 1$ при некотором натуральном δ, $1 \leq \delta \leq p^n - 1$.

Наименьшее натуральное число δ, такое что $f|(x^\delta-1)$, будем называть *порядком многочлена* f, и обозначать символом $ord\ f(x)$. (Если $f(0)=0$, то представим его в виде $f(x)=x^\alpha g(x)$, $g(0)\neq 0$, и назовем порядком $f(x)$ порядок многочлена $g(x)$.)

Для определения порядка многочлена укажем ряд его важных практических свойств.

1. $1\leq ord\ f(x)\leq p^n-1$.
2. $f(x)|(x^m-1)$ тогда и только тогда, когда $ord\,f(x)|m$.
3. Порядок многочлена f над полем $\mathbb{F}_p$ равен порядку этого многочлена над любым расширением поля $\mathbb{F}_p$.
4. $ord\,f(x)|(p^n-1)$, если $f(x)\in F_p[x]$ - неприводимый многочлен.
5. $ord\,(f(x))^n=p^t ord\,f(x)$, где t - наименьшее целое число, такое что $p^t\geq n$, и $f(x)\in F_p[x]$ - неприводимый многочлен.
6. Если $(g_i(x),g_j(x))=1$ для $i\neq j$, то $ord\,(g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_k(x))=[ord\,g_1(x),\ldots,ord\,g_k(x)]$.
7. Если $f(x)=f_1^{m_1}(x)\cdot\ldots\cdot f_k^{m_k}(x)$, где $f_i\in F_p[x]$ - неприводимые многочлены, то $ord\,f(x)=p^t[ord\,f_1(x),\ldots,ord\,f_k(x)]$, где t - наименьшее целое число, такое что $p^t\geq\max\{m_1,\ldots,m_k\}$.

Например, найдем порядок многочлена $f(x)=(x^2+x+1)^3(x^4+x+1)(x^3+1)$ над полем $\mathbb{F}_2$.

Как было доказано ранее, многочлены x^2+x+1 и x^4+x+1 неприводимы. С другой стороны, многочлен x^3+1 приводим: $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$. Таким образом, $f(x)=(x^2+x+1)^4(x^4+x+1)(x+1)$.

По свойствам порядка многочлена, $ord\,f(x)=2^t[ord\,(x^2+x+1),ord\,(x^4+x+1),ord\,(x+1)]$.

1. $ord\,(x^2+x+1)|(2^2-1)$, $ord\,(x^2+x+1)\neq 1$, следовательно, $ord\,(x^2+x+1)=3$.

2. $ord\,(x^4+x+1)|(2^4-1)=15$, то есть принадлежит множеству $\{1,3,5,15\}$. Непосредственная проверка показывает, что $x^4+x+1\nmid(x^1-1)$, $x^4+x+1\nmid(x^3-1)$, $x^4+x+1\nmid(x^5-1)$ (при делении многочлена на многочлен мы получаем, что $x^5-1=(x^4+x+1)\cdot x+(x^2+x+1)$). Таким образом, $ord\,(x^4+x+1)=15$.

3. $ord\,(x+1)|(2^1-1)=1$, то есть $ord\,(x+1)=1$.

Наибольшая из степеней вхождения многочленов в произведение $f(x)=(x^2+x+1)^4(x^4+x+1)(x+1)$ равна 4, то есть для нахождения t нужно рассмотреть соотношение $2^t\geq 4$, из которого следует, что $t=2$.

Таким образом, $ord\,f(x)=2^2\cdot[3,15,1]=60$.

Заметим, что "суммарная" степень многочлена $f(x)$ равна 13, но $60\nmid 2^{13}-1$, то есть для приводимого многочлена $f(x)$ аналог свойства $ord\ f|(x^{p^{deg\ f}}-1)$, имеющего место для неприводимых многочленов, нарушен.

Отметим, что неприводимый над полем $\mathbb{F}_p$ многочлен степени n делит многочлен $x^{p^n}-x$. Из этого следует, что неприводимый над полем $\mathbb{F}_p$ многочлен степени n делит многочлен $x^{p^n-1}-1$.

5.7. Многочлен $f\in F_p[x]$ степени n над полем $\mathbb{F}_p$ называется *примитивным*, если $ord\,(f(x))=p^n-1$. Другими словами, примитивным мы называем многочлен, имеющий максимальный возможный порядок [9].

Ранее мы получили, что, над полем $\mathbb{F}_2$, $ord\,(x^2+x+1)=3=2^2-1$, $ord\,(x^4+x+1)=15=2^4-1$, $ord\,(x+1)=1=2^1-1$, и $f(x)=(x^2+x+1)^3(x^4+x+1)(x^3+1)=60\neq 2^{13}-1$. Отсюда следует, что первые три многочлена являются примитивными, а последний - нет.

Очевидно любой примитивный многочлен f над полем $\mathbb{F}_p$ неприводим над полем $\mathbb{F}_p$.

Число $b_p(n)$ примитивных многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_p$ можно вычислить (см. [9]) по формуле

$$b_p(n) = \tfrac{\varphi(p^n-1)}{n} \ .$$

Следовательно, для любого простого числа p и любого натурального числа n существует примитивный над полем $\mathbb{F}_p$ многочлен степени n.

Найдем число примитивных многочленов 3 степени над $\mathbb{F}_2$: $b_2(3) = \frac{\varphi(2^3-1)}{3} = 2$. Таким образом, оба найденные ранее неприводимых многочлена x^3+x^2+1 и x^3+x+1 степени 3 над $\mathbb{F}_2$ являются примитивными и имеют порядок $2^3-1=7$.

Свяжем полученные результаты с о свойствами аннулирующих последовательностей.

1. Пусть $\delta \in S(f)$. Тогда $per\ \delta = ord\ m_\delta(\lambda)$.

2. Для главного решения δ линейного рекуррентного уравнения, отвечающего характеристическому многочлену $f(\lambda)$, $per\ \delta = ord\ f(\lambda)$.

3. Если характеристический многочлен $f(\lambda)$ линейного рекуррентного уравнения неприводим, то $f(\lambda) = m_\delta(\lambda)$ для любого ненулевого решения δ этого уравнения.

4. Если δ – ненулевое решение линейного рекуррентного уравнения с неприводимым характеристическим многочленом $f(\lambda)$, то $per\ \delta|(p^n-1)$, в частности, $per\ \delta = p^n-1$, если $f(\lambda)$ – примитивный многочлен.

Таким образом, если характеристический многочлен $f(\lambda)$, порождающий линейное рекуррентное уравнение, неприводим, то все ненулевые решения линейного рекуррентного уравнения становятся в некотором смысле “равноправными”, то есть нас может не заботить их оптимальный выбор. Если же, кроме того, многочлен примитивен, то генерируемые соответствующим линейным рекуррентным уравнением последовательности будут иметь максимально возможный период.

5.8. Рассмотрим уравнение $\delta_{x+5} = \delta_x + \delta_{x+3}$. Его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^3 + 1$. Следовательно, период любого ненулевого решения заданного линейного рекуррентного уравнения должен быть равен 31.

Выбирая первоначальное заполнение $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$, получим периодическую последовательность 1000010101110110001111100110100100 00... . Непосредственная проверка показывает, что примитивный период этой последовательности равен 31. Это означает, что, шаг за шагом рассматривая 5-символьные наборы $(\delta_x, \delta_{x+1}, \delta_{x+2}, \delta_{x+3}, \delta_{x+4})$ элементов нашей последовательности для $x=0$ (набор 10000), $x=1$ (набор 00001), ..., $x=30$ (набор 01000), мы получим каждый ненулевой набор из пяти знаков 0 и 1 ровно один раз. Если с набором $(\delta_x, \delta_{x+1}, \delta_{x+2}, \delta_{x+3}, \delta_{x+4})$ сопоставить число $a_0 + a_1\cdot 2 + a_2\cdot 2^2 + a_3\cdot 2^3 + a_4\cdot 2^4$, то нашу линейную рекуррентную последовательность можно рассматривать и как последовательность чисел 1 16 8 20 10 21 26 29 14 23 27 13 6 3 17 24 28 30 31 15 7 19 25 12 22 11 5 18 9 4 2 ... .

Нетрудно убедиться, что период этой последовательности равен 31, и каждое из чисел от 1 до 31 встречается на начальном отрезке последовательности ровно один раз.

Всего у уравнения $2^5 = 32$ решения, из них 31 ненулевое. При этом остальные ненулевые решения – это 30 различных сдвигов решения, полученного выше.

Так, работая над полем F_2 и имея в запасе примитивный многочлен степени 100 над F_2, мы имеем возможность, задавая вектор начальных условий относительно небольшой длины 100, получать на выходе последовательность, период которой $2^{100}-1$ необычайно велик. Это определяет высокую меру близости заданной псевдослучайной последовательности к случайной. При этом, учитывая, что имеется $b_2(100) = \frac{\varphi(2^{100}-1)}{100}$ различных примитивных многочленов степени 100 над полем F_2, и каждый из них дает нам $2^{100}-1$ различных последовательностей, мы получаем серьезный арсенал ключей.

Еще одним техническим, но существенным преимуществом генерирования псевдослучайных последовательностей является необычайная простота технической реализации этого процесса, выражающаяся в использовании специальной электронной схемы: *регистра сдвига*, получающегося комбинацией ячеек памяти и сумматора, в котором происходит побитовое сложение приходящей на два имеющихся у него входа информации ([9]).

6. Заключение

Наш короткий обзор истории, теоретических основ и практических приложений рекуррентных числовых последовательностей позволяет утверждать, что данный раздел математической науки обладает высоким исследовательским потенциалом, позволяющим привлекать к самостоятельной творческой работе в этой области не только ученых и профессионалов-прикладников, но и относительно широкий контингент людей, интересующихся математикой, в том числе, безусловно, студентов-математиков, будущих педагогов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: РиполКлассик, 2013.
2. Григорян Н.Е., Лопатухина Т.А. Феномен рекуррентности как системообразующий прецедентный признак образовательного дискурса // Актуальные исследования. 2019. № 3 (3).
3. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда. – М.: URSS, 2010.
4. Deza E.I., Deza M.M. Figurate numbers. – World Scientific Publishing Company, 2012.
5. Деза Е.И., Деза М.М. Фигурные числа. – М.: МЦНМО, 2016.
6. Deza E.I. Mersenne and Fermat Numbers. – World Scientific Publishing Company, 2021.
7. Деза Е.И., Котова Л.В. Введение в криптографию. – М.: URSS, 2018.
8. Деза Е.И., Модель Д.Л. Основы дискретной математики. – М.: URSS, 2010.
9. Нечаев В.И. Основы защиты информации. – М.: МГУ, 1999.
10. Sloane N.J.A., Plouffe S. The Encyclopedia of Integer Sequences. – San Diego: Academic Press, 1995.
11. Yan S.Y. Perfect, Amicable and Sociable Numbers. A Computational Approach. – World Scientific, 1996.

REFERENCES

1. Buchstab, A.A. 2013, “Number Theory”, *RipolKlassik*. (Russian)
2. Grigoryan, N.E., Lopatukhina, T.A. 2019, “The phenomenon of recurrence as a system-forming precedent sign of educational discourse”, *Actual research*, № 3 (3). (Russian)
3. Deza, E.I. 2010, “Special numbers of the natural series”, *URSS*. (Russian) ,

4. Deza, E.I., Deza, M.M. 2012, “Figurate numbers”, *World Scientific Publishing Company.*

5. Deza, E.I. 2016, “Figurate numbers”, *MCCME.* (Russian)

6. Deza, E.I. 2021, “Mersenne and Fermat Numbers”, *World Scientific Publishing Company.*

7. Deza, E.I., Kotova, L.V. 2018, “Introduction to Cryptography”, *URSS.* (Russian)

8. Deza, E.I., Model, D.L. 2010, “Basics of discrete mathematics”, *URSS.* (Russian)

9. Nechaev, V.I. 1999, “Fundamentals of information security”, *MGU.* (Russian)

10. Sloane N.J.A., Plouffe S. 1995, “The Encyclopedia of Integer Sequences”, *San Diego: Academic Press.*

11. Yan, S.Y. 1996, “Perfect, Amicable and Sociable Numbers. A Computational Approach”, *World Scientific Publishing Company.*

Получено 18.07.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-102-117

Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел[1]

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Кожухов Игорь Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, НИУ «Московский институт электронной техники» (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются алгебраические структуры, возникающие относительно операции умножения двух множеств натуральных чисел. Основными объектами изучения выступают моноид $\mathbb{MN}$ моноидов натуральных чисел и моноид $\mathbb{SN}$ произведений произвольных подмножеств натурального ряда. Также моноидом будет $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus \{\emptyset\}$.

Важным свойством этих моноидов является тот факт, что множество всех идемпотентов в моноиде $\mathbb{SN}$, кроме нулевого элемента, совпадает с множеством идемпотентов моноида $\mathbb{SN}^*$ и образует моноид $\mathbb{MN}$.

Наличие такого факта позволило рассмотреть порядок. Относительно порядка $A \leqslant B$ и бинарных операций inf, sup моноид $\mathbb{MN}$ является не модулярной, полной А-решёткой.

В работе различаются понятия А-решётки как объекта общей алгебры и Т-решётки как объекта теории чисел и геометрии чисел.

В работе определена структура полного метрического пространства с неархимедовой метрикой на моноиде $\mathbb{SN}$. Это позволило доказать теорему о сходимости последовательности рядов Дирихле по сходящимся последовательностям натуральных чисел.

Если рассмотреть произведение двух дзета-функций моноидов натуральных чисел, то оно будет дзета-функцией моноида натуральных чисел только тогда, когда эти моноиды взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по моноиду, равному произведению моноидов сомножителей. Этот моноид, порожденный дзета-функциями моноидов натуральных чисел, обозначается через $\mathbb{MD}$. Показано что моноиды $\mathbb{MN}$ и $\mathbb{MD}$ неизоморфны.

В работе определены две малые категории $\mathcal{MN}$ и $\mathcal{SN}$ и изучены некоторые их свойства.

[1]Работа подготовлена по грантам РНФ № 22-21-00544 и № 22-11-00052.

Ключевые слова: моноид натуральных чисел, решётка моноидов натуральных чисел, метрическое пространство подмножеств натурального ряда, дзета-функция моноида, ряд Дирихле, малая категория моноидов натуральных чисел.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Б. Кожухов, И. Ю. Реброва. Моноид произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, вып. 3, С. 102–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-102-117

Monoid of products of zeta functions of monoids of natural numbers[2]

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Kozhukhov, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Kozhukhov Igor Borisovich — professor, doctor of physical and mathematical sciences, NRU «Moscow Institute of Electronic Technology» (Moscow).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The paper studies algebraic structures arising with respect to the multiplication operation of two sets of natural numbers. The main objects of study are the monoid $\mathbb{MN}$ of monoids of natural numbers and the monoid $\mathbb{SN}$ of products of arbitrary subsets of a natural series. Also, the monoid will be $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus \{\emptyset\}$.

An important property of these monoids is the fact that the set of all idempotents in the monoid $\mathbb{SN}$ except for the zero element coincides with the set of idempotents of the monoid $\mathbb{SN}^*$ forms the monoid $\mathbb{MN}$.

The presence of such a fact allowed us to consider the order. With respect to the order of $A \leqslant B$ and binary operations inf, sup the monoid $\mathbb{MN}$ is an irregular, complete A-lattice.

The paper distinguishes the concepts of A-lattice as an object of general algebra and T-lattice as an object of number theory and geometry of numbers.

[2]The work was prepared under RSF grants No. 22-21-00544 and No. 22-11-00052.

The paper defines the structure of a complete metric space with a non-Archimedean metric on the monoid $\mathbb{SN}$. This made it possible to prove a theorem on the convergence of a sequence of Dirichlet series over convergent sequences of natural numbers.

If we consider the product of two zeta functions of monoids of natural numbers, then it will be a zeta function of a monoid of natural numbers only when these monoids are mutually simple. In general, their product will be a Dirichlet series with natural coefficients over a monoid equal to the product of the monoids of the cofactors. This monoid generated by the zeta functions of the monoids of natural numbers is denoted by $\mathbb{MD}$. It is shown that the monoids $\mathbb{MN}$ and $\mathbb{MD}$ are non-isomorphic.

The paper defines two small categories $\mathcal{MN}$ and $\mathcal{SN}$ and studies some of their properties.

Keywords: a monoid of natural numbers, a lattice by a monoid of natural numbers, a metric space of subsets of a natural series, a zeta function of a monoid, a Dirichlet series, a small category of monoids of natural numbers.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. B. Koguhov, I. Yu. Rebrova, 2022, "Monoid of products of zeta functions of monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 102–117.

1. Введение

В работах [3] – [14] был заложен фундамент теории дзета-функции моноидов натуральных чисел. Нетрудно понять, что множество всех моноидов натуральных чисел образует мультипликативный моноид, мощность которого континуум. Этот мультипликативный моноид будем обозначать через $\mathbb{MN}$.

Очевидно, что этот моноид является подмоноидом моноида $\mathbb{SN}$ — моноида произведений произвольных подмножеств натурального ряда.

Одним из наиболее важных примеров моноидов натуральных чисел является моноид значений норм точек решётки, повторяющейся умножением. Как следует из монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева [2], наиболее интересный пример получается при рассмотрении решётки, для которой координаты точек являются наборами сопряжённых целых алгебраических чисел чистовещественного алгебраического поля степени размерности решётки.

Так как термин решётка в нашей работе встречается в двух смыслах, то мы будем различать А-решётки как объекты общей алгебры и Т-решётки как объекты теории чисел и геометрии чисел. Таким образом, все решётки из предыдущего абзаца в данной работе будут называться Т-решётками, а решётки моноидов натуральных чисел будут называться А-решётками.

Будем говорить, что два множества натуральных чисел A и B взаимно просты, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $(a, b) = 1$. В этом случае будем писать $(A, B) = 1$. Ясно, что если $(A, B) = 1$, то либо $A \bigcap B = \emptyset$, либо $A \bigcap B = \{1\}$. Если A и B взаимно простые моноиды, то $A \bigcap B = \{1\}$.

Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A). \tag{1}$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [16],

[17]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Если рассмотреть произведение двух дзета-функций моноидов натуральных чисел, то оно будет дзета-функцией моноида натуральных чисел только тогда, когда эти моноиды взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по моноиду, равному произведению моноидов сомножителей. Будем этот моноид, порожденный дзета-функциями моноидов натуральных чисел, обозначать через $\mathbb{MD}$.

Как будет показано ниже, моноиды $\mathbb{MN}$ и $\mathbb{MD}$ неизоморфны.

Аналогично, произведение двух дзета-функций двух множеств натуральных чисел будет дзета-функцией множества натуральных чисел только тогда, когда эти множества взаимно просты. В общем случае их произведение будет рядом Дирихле с натуральными коэффициентами по множеству натуральных чисел, равному произведению множеств сомножителей. Будем этот моноид, порожденный дзета-функциями множеств натуральных чисел, обозначать через $\mathbb{SD}$.

Цель настоящей работы — заложить основы теории моноидов $\mathbb{MN}$, $\mathbb{SN}$, $\mathbb{MD}$ и $\mathbb{SD}$ и рассмотреть категории, соответствующие этим моноидам.

2. Основные свойства моноида моноидов натуральных чисел

Как известно, подмножество M натурального ряда $\mathbb{N}$ является мультипликативным моноидом, если $1 \in M$ и множество M замкнуто относительного операции обычного умножения: $a \cdot b \in M$ для любых $a, b \in M$.

Все моноиды M натурального ряда являются бесконечными счётными множествами, кроме одного $I = \{1\}$.

Множество $\mathbb{MN}$ всех моноидов натуральных чисел, очевидно, является подмножеством множества $\mathbb{SN}$ всех подмножеств натурального ряда.

Определение 1. *Для любых двух подмножеств A и B натурального ряда их произведением называется множество C, заданное равенством $C = A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A,\, b \in B\}$.*

Ясно, что и множество $\mathbb{MN}$ и множество $\mathbb{SN}$ относительно операции умножения множеств являются коммутативными, мультипликативными моноидами, в которых общий единичный элемент I.

Оба эти моноида имеют нулевой элемент, то есть такой элемент $\mathbb{O}$, что для любого A имеем $A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$. Но в этих моноидах нулевые элементы различные. Для моноида $\mathbb{MN}$ нулевой элемент $\mathbb{O} = \mathbb{N}$, а для моноида $\mathbb{SN}$ нулевой элемент $\mathbb{O} = \emptyset$. Заметим, что для подмоноида $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus \{\emptyset\}$ нулевой элемент отсутствует, так как если множество A не содержит 1, то $A \cdot \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

Определение 2. *Два подмножества A и B натурального ряда отличные от нулевого элемента называются делителями нуля, если их произведение $A \cdot B = \mathbb{O}$.*

Теорема 1. *В моноиде $\mathbb{SN}$ нет делителей нуля.*

В моноиде $\mathbb{MN}$ делителями нуля являются только те моноиды, которые содержат хотя бы одно простое число.

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно, так как произведение двух непустых множеств снова непусто.

Пусть моноид A не содержит ни одного простого числа, тогда $A \cdot B = \mathbb{N}$, если моноид B содержит все простые числа. А значит, $B = \mathbb{N}$.

Если $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $A \neq \mathbb{N}$, $A \bigcap \mathbb{P} = P_1 \neq \emptyset$, то минимальный моноид B, порожденный множеством простых $P_2 = \mathbb{P} \setminus P_1$, будет удовлетворять равенству $A \cdot B = \mathbb{N}$, и моноиды A и B являются делителями нуля. □

Опишем все идемпотенты моноида $\mathbb{SN}$.

Лемма 1. *Если для непустого множества A выполнено равенство $A \cdot A = A$, то A является моноидом.*

Доказательство. Действительно, пусть m наименьший элемент в множестве A, тогда m^2 будет наименьшим элементом в $A \cdot A$. Поэтому, если A идемпотент, то $m = m^2$. Следовательно $m = 1$ и $A \subseteq A \cdot A$. Но $A \cdot A = A$, следовательно A замкнуто относительно умножения, а это означает что A является моноидом. □

Теорема 2. *Множество всех идемпотентов в моноиде $\mathbb{SN}$ кроме нулевого элемента совпадает с множеством идемпотентов моноида $\mathbb{SN}^*$ и образует моноид $\mathbb{MN}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из предыдущей леммы. □

Определение 3. *Для произвольного непустого множества A назовём его сопряженным множеством A^* максимальное множество натуральных чисел b таких, что $b \cdot A \subseteq A$.*

Из определения непосредственно следует, что для любого множества A его сопряженное множество A^* является моноидом. Отсюда следует, что $A \cdot A^* = A$.

3. А-решётка моноидов натуральных чисел

Из результатов предыдущего раздела вытекает, что моноид $\mathbb{MN}$ — коммутативная полугруппа идемпотентов. Как известно, для множества идемпотентов полугруппы или ассоциативного кольца определяется естественный порядок: $e \leqslant f \iff ef = fe = e$.

В случае моноида $\mathbb{MN}$ — моноида моноидов натуральных чисел имеем: $A \leqslant B \iff A \supseteq B$.

Определим на $\mathbb{MN}$ две бинарные операции

$$A \wedge B = \inf\{A, B\} = A \cdot B, \quad A \vee B = \sup\{A, B\} = A \bigcap B.$$

Нетрудно видеть, что так как A и B — моноиды, то $A \cdot B \supseteq A \bigcup B$.

Теорема 3. *Относительно порядка $A \leqslant B$ и бинарных операций* $\inf$, $\sup$ *моноид* $\mathbb{MN}$ *является не модулярной, полной А-решёткой.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что так как $1 \in A \bigcap B$, то $A \cdot B \supseteq A \bigcup B$ и, следовательно, $\inf\{A, B\} = A \cdot B \leqslant A, B$. Аналогично, имеем $\sup\{A, B\} = A \bigcap B \subseteq A, B$ и, следовательно, $\sup\{A, B\} \geqslant A, B$. Очевидно, что $\inf\{A, A\} = A \cdot A = A$, $\sup\{A, A\} = A \bigcap A = A$. Таким образом, каждый моноид $A \in \mathbb{MN}$ является идемпотентом относительно каждой из бинарных операций inf, sup. Следовательно, моноид $\mathbb{MN}$ — А-решётка.

$$\sup\{A_i | i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad \inf\{A_i | i \in I\} = \{a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k} | k \geqslant 0, a_{i_j} \in A_{i_j} (j = 1, \ldots, k)\}.$$

Таким образом, моноид $\mathbb{MN}$ является полной А-решёткой.

Покажем теперь, что решётка не модулярна. Будем пользоваться следующим определением модулярной решётки (см. [1], гл. 2, §1, теорема 2):

решётка L модулярна, если

$$\forall x, y, z \in L \quad x \leqslant y,\ x \wedge z = y \wedge z, x \vee z = y \vee z \to x = y. \tag{2}$$

Пусть p и q — два различных простых числа. Зададим моноиды X, Y и Z равенствами:

$$X = \{p^i q^j | i \geqslant j \geqslant 0\}, \quad Y = \{p^i | i \geqslant 0\}, \quad Z = \{q^i | i \geqslant 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $X \leqslant Y$,

$$X \wedge Z = X \cdot Z = \{p^i q^j | i, j \geqslant 0\} = Y \wedge Z, \quad X \vee Z = X \cap Z = \{1\} = Y \vee Z,$$

но $X \neq Y$, и, значит, (2) не выполняется и А-решётка $\mathbb{MN}$ не является модулярной решёткой.

Тот факт, что А-решётка $\mathbb{MN}$ не модулярна, влечёт, что эта решётка не дистрибутивна. □

Пусть P — произвольное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$ и $M(P)$ — минимальный моноид, порожденный множеством простых чисел P. При этом считаем, что $M(\emptyset) = \{1\}$. Нетрудно видеть, что $M(P)$ состоит в точности из таких натуральных чисел, разложение на простые множители которых содержит лишь числа из P. Очевидно, что $M(P)$ — моноид с однозначным разложением на простые множители. Обозначим через $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ множество всех таких моноидов. Ясно, что $P \subseteq P' \Leftrightarrow M(P) \subseteq M(P')$.

Лемма 2. *Для произвольных моноидов $M(P_1)$ и $M(P_2)$ из $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ справедливо равенство*

$$M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_1 \setminus P_2) \cdot M(P_2 \setminus P_1) \cdot M(P_1 \cap P_2) = M(P_3), \quad P_3 = P_1 \bigcup P_2.$$

Доказательство. Рассмотрим три множества простых чисел $P_4 = P_1 \setminus P_2$, $P_5 = P_2 \setminus P_1$, $P_6 = P_1 \cap P_2$. Очевидно, что они попарно не пересекаются: $P_\nu \cap P_\mu = \emptyset$ $(4 \leqslant \nu < \mu \leqslant 6)$. Так как $P_1 = P_4 \bigcup P_6$, $P_2 = P_5 \bigcup P_6$, $P_3 = P_4 \bigcup P_5 \bigcup P_6$, то $M(P_1) = M(P_4) \cdot M(P_6)$, $M(P_2) = M(P_5) \cdot M(P_6)$, $M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_4) \cdot M(P_5) \cdot M(P_6) = M(P_3)$. □

Теорема 4. *Относительно порядка $A \leqslant B$ и бинарных операций* inf, sup *моноид* $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ *является дистрибутивной, модулярной, полной А-решёткой.*

Доказательство. Так как $\inf\{M(P_1), M(P_2)\} = M(P_1) \cdot M(P_2) = M(P_1 \bigcup P_2) \in \mathbb{MN}(\mathbb{P})$, $\sup\{M(P_1), M(P_2)\} = M(P_1) \bigcap M(P_2) = M(P_1 \bigcap P_2) \in \mathbb{MN}(\mathbb{P})$, то $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ замкнуто относительно операций inf и sup. Следовательно, $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ — подрешётка решётки $\mathbb{MN}$.

Заметим, что

$$\sup\{M(P_i) | i \in I\} = M\left(\bigcap_{i \in I} P_i\right), \quad \inf\{M(P_i) | i \in I\} = M\left(\bigcup_{i \in I} P_i\right).$$

Таким образом, моноид $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ является полной А-решёткой.

Далее имеем:

$$M(P_1) \cdot M(P) \bigcap M(P_2) \cdot M(P) = M\left(P_1 \bigcup P\right) \bigcap M\left(P_2 \bigcup P\right) = M\left(\left(P_1 \bigcup P\right) \bigcap \left(P_2 \bigcup P\right)\right).$$

Так как $(P_1 \bigcup P) \bigcap (P_2 \bigcup P) = (P_1 \bigcap P_2) \bigcup P$, то

$$M\left(\left(P_1 \bigcup P\right) \bigcap \left(P_2 \bigcup P\right)\right) = M\left(\left(P_1 \bigcap P_2\right) \bigcup P\right) = M\left(\left(P_1 \bigcap P_2\right)\right) \cdot M(P) =$$
$$= \left(M(P_1) \bigcap M(P_2)\right) \cdot M(P).$$

Таким образом, $M(P_1) \cdot M(P) \bigcap M(P_2) \cdot M(P) = (M(P_1) \bigcap M(P_2)) \cdot M(P)$, и, следовательно, $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$ — дистрибутивная решётка. Так как любая дистрибутивная решётка является модулярной, то теорема полностью доказана. □

Замечание 1. *Рассмотрим отображение* $P \longmapsto M(P)$, $2^{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{MN}(\mathbb{P})$. *Из предыдущего следует, что это отображение является изоморфизмом решётки* $2^{\mathbb{P}}$ *всех подмножеств множества* $\mathbb{P}$ *и решётки* $\mathbb{MN}(\mathbb{P})$. *Отсюда получаем другое доказательство теоремы 4 и она становится очевидной.*

4. Метрическое пространство подмножеств натурального ряда

Рассмотрим два различных множества A и B натуральных чисел, тогда их симметрическая разность $A\triangle B \neq \emptyset$ и существует наименьшее натуральное число $m(A,B)$ в этой симметрической разности.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$[1, m(A,B)-1]\bigcap A = [1, m(A,B)-1]\bigcap B.$$

Доказательство. Если $m(A,B) = 1$, то отрезок $[1,0]$ — пустой и утверждение леммы выполнено.

Пусть теперь $m(A,B) > 1$, тогда возможны два случая.

Либо $[1, m(A,B)-1]\bigcap A = \emptyset$, но тогда и $[1, m(A,B)-1]\bigcap B = \emptyset$, так как в противном случае найдётся натуральное n такое, что $n < m(A,B)$ и $n \in A\triangle B$.

Либо $[1, m(A,B)-1]\bigcap A \neq \emptyset$, но тогда и $[1, m(A,B)-1]\bigcap B = [1, m(A,B)-1]\bigcap A$, так как $[1, m(A,B)-1]\bigcap A\triangle B = \emptyset$ и каждое натуральное числа из $[1, m(A,B)-1]$ либо принадлежит пересечению $A\bigcap B$, либо не принадлежит их объединению $A\bigcup B$. $\square$

Определение 4. *Расстояние* $\rho(A,B)$ *между двумя подмножествами* A *и* B *натурального ряда задается равенством*

$$\rho(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B,\\ \frac{1}{m(A,B)}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Теорема 5. *Функция* $\rho(A,B)$ *задает неархимедову метрику на пространстве* $\mathbb{SN}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что для любых трёх подмножеств A, B, C натурального ряда справедливо неравенство

$$\rho(A,B) \leqslant \max(\rho(A,C), \rho(C,B)).$$

Пусть $m_1 = m(A,B)$, $m_2 = m(A,C)$, $m_3 = m(C,B)$ и предположим противное, что $m_1 < \min(m_2, m_3)$.

Тогда в силу леммы 3 получим $[1,m_1]\bigcap A = [1,m_1]\bigcap C$, $[1,m_1]\bigcap B = [1,m_1]\bigcap C$. Следовательно, $m_1 \in A, B, C$, что противоречит определению величины m_1. $\square$

Теорема 6. *Относительно метрики* $\rho(A,B)$ *пространство* $\mathbb{SN}$ *полное.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что для любой последовательности Коши A_1, A_2,...,A_n,... подмножеств натурального ряда существует подмножество A такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(A_n, A) = 0.$$

По определению фундаментальной последовательности (последовательности Коши) для любого натурального n найдется номер $N = N(n)$ такой, что для любых множеств A_m и A_k с $m, k \geqslant N(n)$ выполняется неравенство $\rho(A_m, A_k) < \frac{1}{n}$. Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$[1,n]\bigcap A_k = [1,n]\bigcap A_{N(n)}, \quad k \geqslant N(n).$$

Положим $B_n = [1,n] \bigcap A_{N(n)}$. Ясно, что мы получаем бесконечную последовательность вложенных подмножеств натурального ряда:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$$

Возможны два случая. Либо $B_n = \emptyset$ для любого натурального n, либо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

В первом случае имеем $A = \emptyset$ и

$$\lim_{n\to\infty} \rho(A_n, \emptyset) = 0.$$

Во втором случае последовательность Коши сходится к множеству $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. □

Теорема 7. *Для любого натурального $a > 1$ растяжение моноида $\mathbb{SN}$ в a раз, заданное равенством*

$$a \cdot \mathbb{SN} = \{a \cdot B | B \in \mathbb{SN}\},$$

является сжатием метрического пространства $\mathbb{SN}$.

Доказательство. Действительно, для любых подмножеств $B, C \subseteq \mathbb{N}$ имеем, если $a \cdot b = a \cdot c$ и $b \in B$, $c \in C$, то в силу однозначности разложения на простые множители имеем: $b = c \in B \bigcap C$. Отсюда следует, что $a \cdot (B \bigtriangleup C) = (a \cdot B) \bigtriangleup (a \cdot C)$. Это влечёт равенства $m(a \cdot B, a \cdot C) = a \cdot m(B, C)$ и $\rho(a \cdot B, a \cdot C) = \frac{\rho(B,C)}{a}$. □

Для любого непустого множества A натуральных чисел через $m(A)$ обозначим его наименьшее число.

Лемма 4. *Для любых трёх непустых множеств натуральных чисел A, B, C справедливо неравенство $m(A \cdot C, B \cdot C) \geqslant m(C) \cdot m(A, B)$.*

Доказательство. Предположим противное, что $m(A \cdot C, B \cdot C) < m(C) \cdot m(A, B)$. Тогда наименьший элемент $m(A \cdot C, B \cdot C) = n \cdot c$, где $c \in C$ и $c \geqslant m(C)$, а $n \in A \triangle B$ и $n < m(A, B)$. Но это противоречит определению величины $m(A, B)$. □

Теорема 8. *Для любого непустого множества C натуральных чисел отображение метрического пространства $\mathbb{SN}$ в себя, заданное равенством $\beta_C : \mathbb{SN} \to C \cdot \mathbb{SN}$ является коротким отображением метрического пространства.*

Доказательство. Действительно, согласно леммы 4 справедливо неравенство

$$\rho(A \cdot C, B \cdot C) \leqslant \frac{\rho(A, B)}{m(C)} \leqslant \rho(A, B).$$

□

Рассмотрим произвольную функцию $f(n)$, заданную на натуральном ряде $\mathbb{N}$, и ряд Дирихле $\zeta(f|\alpha)$, заданный равенством

$$\zeta(f|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\alpha}}, \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f),$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости.

Замечание 2. *Заметим, что не для любой функции $f(n)$ соответствующий ряд Дирихле сходится. Например, если $f(n) = n!$, то область абсолютной сходимости будет пустой, так как эта функция растёт быстрее любой степени n.*

Очевидно, что для любого множества A натуральных чисел существует ряд Дирихле $\zeta(A,f|\alpha)$, заданный равенством

$$\zeta(A,f|\alpha)=\sum_{n\in A}\frac{f(n)}{n^\alpha},\quad (\alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\sigma_{A,f}),$$

где $\sigma_{A,f}$ — абсцисса абсолютной сходимости и $\sigma_{A,f}\leqslant\sigma_f$.

Теорема 9. *Если справедливо равенство для множеств натуральных чисел*

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=0,$$

то для последовательности рядов Дирихле имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}|\zeta(A_n,f|\alpha)-\zeta(A,f|\alpha)|=0$$

в некоторой полуплоскости.

Доказательство. Действительно, справедливо равенсто

$$\zeta(A_n,f|\alpha)-\zeta(A,f|\alpha)=\zeta(A_n\backslash A,f|\alpha)-\zeta(A\backslash A_n,f|\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$|\zeta(A_n,f|\alpha)-\zeta(A,f|\alpha)|\leqslant\sum_{n\in A_n\triangle A}\frac{|f(n)|}{n^\sigma}\leqslant\sum_{n=m(A_n,A)}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma}.$$

Так как при $\sigma>\sigma_f$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma}=0,$$

то утверждение теоремы справедливо в полуплоскости $\sigma>\sigma_f$. $\square$

5. Основные свойства моноида произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел

Каждому моноиду M натуральных чисел поставим в соответствие дзета-функцию $\zeta(M|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(M|\alpha)=\sum_{x\in M}\frac{1}{x^\alpha}\quad (\alpha=\sigma+it,\,\sigma>\sigma_M),\tag{3}$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда. Если M отлично от единственного конечного моноида $M_0=\{1\}$, то $0\leqslant\sigma_M\leqslant 1$.

Только для M_0 справедливо тождество $\zeta(M_0|\alpha)\equiv 1$. Отсюда следует, что для любого моноида $M\neq M_0$ справедливо неравенство $\zeta(M|\alpha)\cdot\zeta(M|\alpha)\neq\zeta(M|\alpha)$. Таким образом, дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ не является идемпотентом относительно умножения, и, следовательно, моноиды $\mathbb{MN}$ и $\mathbb{MD}$ неизоморфны.

Остановимся более подробно на структуре моноида $\mathbb{MD}$ — моноида произведений дзета-функций моноидов натуральных чисел.

Обозначим через $\tau_{M_1,M_2}(n)$ количество решений уравнения $x\cdot y=n$ в натуральных числах $x\in M_1$, $y\in M_2$ для натурального числа $n\in M_1\cdot M_2$. Ясно, что

$$\tau_{M_1,M_2}(n)=\sum_{m\in M_1,m|n,\frac{n}{m}\in M_2}1=\sum_{m\in M_2,m|n,\frac{n}{m}\in M_1}1.$$

Пусть задана целочисленная функция $f_M(n)$, заданная на моноиде M. Через $\zeta(M,f_M|\alpha)$ будем обозначать ряд Дирихле

$$\zeta(M,f_M|\alpha)=\sum_{n\in M}\frac{f_M(n)}{n^\alpha},\quad (\alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\sigma_{M,f_M}),$$

где σ_{M,f_M} — абсцисса абсолютной сходимости.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\zeta(M_1|\alpha)\cdot\zeta(M_2|\alpha)=\zeta(M_1\cdot M_2,\tau_{M_1,M_2}|\alpha).$$

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(M_1|\alpha)\cdot\zeta(M_2|\alpha)=\left(\sum_{n\in M_1}\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(\sum_{m\in M_2}\frac{1}{m^\alpha}\right)=\sum_{n\in M_1\cdot M_2}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{m\in M_1,m|n,\frac{n}{m}\in M_2}1=$$
$$=\sum_{n\in M_1\cdot M_2}\frac{\tau_{M_1,M_2}(n)}{n^\alpha}=\zeta(M_1\cdot M_2,\tau_{M_1,M_2}|\alpha).$$

□

В работе [13] изучались алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел. Здесь мы пойдём другим путём, следуя подходу, описанному в монографиях [15], [18].

Рассмотрим кольцо Дирихле $\mathbb{RD}$ всех арифметических функций $f(n):\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C}$ с операциями поточечного сложения $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$ и операцией свёртка Дирихле:

$$(f*g)(n)=\sum_{m|n}f(m)g\left(\frac{n}{m}\right).$$

Прежде всего, заметим, что любую арифметическую функцию $f_M(n):\mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{C}$ на моноиде натуральных чисел M тривиальным образом можно продолжить до арифметической функции по формуле

$$f(n)=\begin{cases} f_M(n) & \text{при } n\in M,\\ 0 & \text{при } n\in\mathbb{N}\setminus M.\end{cases}$$

Обозначим через $f_{M_1,M_2}(n)$ свертку Дирихле двух функций $f_{M_1}(n)$ и $f_{M_2}(n)$:

$$f_{M_1,M_2}(n)=(f_{M_1}*f_{M_2})(n)=\sum_{m|n}f_{M_1}(m)f_{M_2}\left(\frac{n}{m}\right).$$

Лемма 6. *Справедливо равенство* $f_{M_1,M_2}(n)=f_{M_1\cdot M_2}(n)$, *где*

$$f_{M_1\cdot M_2}(n)=\sum_{m\in M_1,k\in M_2,m\cdot k=n}f_{M_1}(m)f_{M_2}(k).$$

Доказательство. Действительно, если $m|n$ и $m \notin M_1$ или $k = \frac{n}{m} \notin M_2$, то $f_{M_1}(m)f_{M_2}(k) = 0$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Из предыдущего следует, что для любого моноида M натуральных чисел можно рассмотреть подкольцо Дирихле $\mathbb{RD}(M)$, состоящее из всех арифметических функций на моноиде M: $f_M(n) : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Нетрудно видеть, что кольцо $\mathbb{RD}(M)$ является коммутативным кольцом с единицей: $\epsilon(1) = 1$, $\epsilon(n) = 0$ при $n > 1$. Отметим, что единица кольца не зависит от моноида M.

Каждой арифметической функции $f_M(n)$ из кольца $\mathbb{RD}(M)$ можно поставить в соответствии формальный ряд Дирихле $\zeta(M, f_M|\alpha)$.

Теорема 10. *Если формальные ряды Дирихле для* $\alpha = \sigma + it$

$$\zeta(M, f_M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{f_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \sigma_{M,f_M}), \quad \zeta(M, g_M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{g_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \sigma_{M,g_M})$$

имеют не пустые области абсолютной сходимости, то и их произведение имеет непустую область абсолютной сходимости

$$\zeta(M, f_M|\alpha) \cdot \zeta(M, g_M|\alpha) = \zeta(M, f_M * g_M|\alpha) = \sum_{n\in M} \frac{f_M * g_M(n)}{n^\alpha}, \quad (\sigma > \max(\sigma_{M,f_M}, \sigma_{M,g_M})).$$

Доказательство. В силу абсолютной сходимости имеем:

$$\zeta(M, f_M|\alpha)\cdot\zeta(M, g_M|\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n,m\in M}^{N} \frac{f_M(n)\cdot g_M(m)}{(n\cdot m)^\alpha} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n\in M}^{N} \frac{f_M * g_M(n)}{n^\alpha} + R(M, N|\alpha) \right),$$

где

$$R(M, N|\alpha) = \sum_{k\in M, k>N}^{N^2} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{n,m\in M, k=n\cdot m} f_M(n)\cdot g_M(m).$$

Пусть

$$R_1(M, N|\sigma) = \sum_{n\in M, n>N} \frac{|f_M(n)|}{n^\sigma}, \quad R_2(M, N|\sigma) = \sum_{n\in M, n>N} \frac{|g_M(n)|}{n^\sigma},$$

тогда

$$|R(M, N|\alpha)| \leqslant \zeta(M, |f_m||\sigma)R_2(M, N|\sigma) + \zeta(M, |g_m||\sigma)R_1(M, N|\sigma).$$

Так как

$$\lim_{N\to\infty} R_1(M, N|\sigma) = \lim_{N\to\infty} R_2(M, N|\sigma) = 0$$

при $\sigma > \max(\sigma_{M,f_M}, \sigma_{M,g_M})$, то утверждение теоремы доказано. $\square$

Тем самым определено кольцо $\mathbb{RD}^*(M)$ рядов Дирихле на моноиде M, состоящее из рядов Дирихле с непустой областью абсолютной сходимости. При этом справедливо равенство $\zeta(M, f_M|\alpha) \cdot \zeta(M, g_M|\alpha) = \zeta(M, f_M * g_M|\alpha)$. Последнее равенство можно обобщить на произведение рядов Дирехле на разных моноидах:

$$\zeta(M_1, f_{M_1}|\alpha) \cdot \zeta(M_2, g_{M_2}|\alpha) = \zeta(M_1 \cdot M_2, f_{M_1} * g_{M_2}|\alpha).$$

Очевидно, что для этого случая справедлива обобщённая теорема 10 и

$$\sigma_{M_1\cdot M_2, f_{M_1} * g_{M_2}} = \max(\sigma_{M_1,f_{M_1}}, \sigma_{M_2,g_{M_2}}).$$

Рассмотрим характеристическую функцию моноида M:

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \in M, \\ 0 & \text{при } n \notin M. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\zeta(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M|\alpha)$. Можно рассмотреть бесконечную функциональную геометрическую прогрессию 1, $\zeta(M|\alpha)$, $\zeta^2(M|\alpha)$, ..., $\zeta^n(M|\alpha)$,..., которая, очевидно, является мультипликативным моноидом $D_0(M)$. Из теоремы 10 следует, что все члены этой последовательности, начиная со второго, имеют одну и туже область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Рекуррентно определим степенную свертку Дирихле:

$$f^* = f * f, \quad f^{*2} = f^* * f, \ldots, f^{*(n+1)} = f^{*n} * f, \ldots$$

Из предыдущего следует, что $\zeta^n(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M^{*n}|\alpha)$. Если через $\tau_{M,k}(n)$ обозначим количество решений уравнения $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k \in M$ для натурального числа $n \in M$, то $\tau_{M,k}(n) = \chi_M^{*k}(n)$.

Для описания структуры моноида $\mathbb{MD}$ введём обобщенную функцию числа делителей $T(n)$ следующим образом:

$$T_{\vec{M},\vec{k}}(n) = (\tau_{M_1,k_1} * \ldots * \tau_{M_l,k_l})(n).$$

Нетрудно видеть, что $T_{\vec{M},\vec{k}}(n)$ равно количеству решений в натуральных числах следующего уравнения:

$$\prod_{\nu=1}^{l} \prod_{\mu_\nu=1}^{k_\nu} x_{\nu,\mu_\nu} = n,$$

где $x_{\nu,\mu_\nu} \in M_\nu$ ($\mu_\nu = 1, \ldots, k_\nu$, $\nu = 1, \ldots, l$) и $n \in M_1 \cdot \ldots \cdot M_l$.

Теорема 11. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{MD} = \{1\} \bigcup \{\zeta(T_{\vec{M},\vec{k}}(n)|\alpha)|M_\nu \, (\mu_\nu = 1, \ldots, k_\nu, \, \nu = 1, \ldots, l)\},$$

при этом каждый ряд Дирихле из этого моноида кроме одного имеет абсциссу абсолютной сходимости не превосходящую единицы и не меньшую нуля.

Доказательство. Действительно, имеется единственный конечный моноид $M_0 = \{1\}$ и ему соответствует единственная дзета-функция $\zeta(M_0|\alpha) \equiv 1$, которая определена на всей комплексной плоскости. Для неё абсцисса абсолютной сходимости $\sigma_{M_0} = -\infty$.

Теперь рассмотрим произвольный бесконечный моноид $M \in \mathbb{MN}$. Для дзета-функции этого моноида $\zeta(M|\alpha) = \zeta(M, \chi_M|\alpha)$ имеем $0 \leqslant \sigma_M \leqslant 1$. Поэтому и для любого ряда Дирихле из мультипликативного моноида $D_0(M)$ будет та же самая область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Для моноида $D(M)$ всех рядов Дирихле, порождённых дзета-функциями моноидов натуральных чисел таких, что $M = M_1 \cdot M_2$, мы получаем очевидное равенство

$$D(M) = \bigcup_{M_1 \cdot M_2 = M} D(M_1) \cdot D(M_2).$$

При этом, аналогично предыдущему, мы имеем для всех рядов Дирихле, отличных от единицы, одну и ту же область абсолютной сходимости $\sigma > \sigma_M$.

Так как $\mathbb{DN} = \bigcup_{M \in \mathbb{MN}} D(M)$, то теорема полностью доказана. $\square$

6. Малая категория моноидов натуральных чисел

Определим две малых категории $\mathcal{MN}$ и $\mathcal{SN}$ следующим образом.

- Класс объектов является континуальным множеством: $Ob_{\mathcal{MN}} = \mathbb{MN}$, $Ob_{\mathcal{SN}} = \mathbb{SN}$.
- Для каждой пары объектов A и B из категории $\mathcal{K}$ [3] задан морфизм $\beta : A \to B$, если

[3] Здесь и далее либо $\mathcal{K} = \mathcal{MN}$, либо $\mathcal{K} = \mathcal{SN}$.

есть объект $C \in Ob_{\mathcal{K}}$ такой, что $A \cdot C = B$. Будем такой морфизм обозначать через $\beta_{A,C}$. Таким образом, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B) = \{\beta_{A,C} | B = A \cdot C, C \in Ob_{\mathcal{K}}\}$.

- Для каждого объекта $A \in Ob_{\mathcal{K}}$ задан тождественный морфизм

$$\mathbf{id}_A = \beta_{A,\{1\}} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, A).$$

- Для пары морфизмов $\beta_{A,D} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$ и $\beta_{B,G} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(B, C)$ определена композиция $\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,D \cdot G} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, C)$.

Нетрудно проверить, что выполнены две аксиомы:

- Операция композиции ассоциативна: $\beta_{C,F} \circ (\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D}) = (\beta_{C,F} \circ \beta_{B,G}) \circ \beta_{A,D}$.
- Тождественный морфизм действует тривиально: $\beta_{A,F} \circ \mathbf{id}_A = \mathbf{id}_B \circ \beta_{A,F} = \beta_{A,F}$ для любого $\beta_{A,F} \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$.

Действительно,

$$\beta_{C,F} \circ (\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D}) = \beta_{C,F} \circ \beta_{A,G \cdot D} = \beta_{A,F \cdot G \cdot D}, \ (\beta_{C,F} \circ \beta_{B,G}) \circ \beta_{A,D} = \beta_{B,F \cdot G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,F \cdot G \cdot D},$$

и, следовательно, аксиома ассоциативности выполнена.

Аналогично, имеем:

$$\beta_{A,F} \circ \mathbf{id}_A = \beta_{A,F} \circ \beta_{A,\{1\}} = \beta_{A,F}, \quad \mathbf{id}_B \circ \beta_{A,F} = \beta_{B,\{1\}} \circ \beta_{A,F} = \beta_{A,F},$$

то есть тождественный морфизм действует тривиально.

Так как из $\beta_{B,G} \circ \beta_{A,D} = \beta_{A,G \cdot D} = \mathbf{id}_A$ следует, что $G \cdot D = \{1\}$, что влечёт $G = D = \{1\}$. Отсюда вытекает, что все изоморфизмы в категории $\mathcal{K}$ являются тождественными морфизмами и любой объект этой категории изоморфен только самому себе.

При рассмотрении понятия эндоморфизмов случаи категорий $\mathcal{MN}$ и $\mathcal{SN}$ необходимо различать.

Лемма 7. *Для категории $\mathcal{MN}$ для любого моноида $M \in \mathbb{MN}$ его моноид эндоморфизмов $\mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{MN}}(M, M)$ удовлетворяет равенству*

$$\mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M) = \{\beta_{M,A} | A \subseteq M, A \in \mathbb{MN}\}.$$

Доказательство. Действительно, морфизм $\beta_{M,A} \in \mathbf{End}_{\mathcal{MN}}(M)$ тогда, и только тогда, когда моноид A удовлетворяет равенству $M \cdot A = M$. Но это возможно только при условии $A \subseteq M$. □

Из доказанной леммы следует, что для любого объекта $M \in Ob_{\mathbb{MN}}$ имеется единственный автоморфизм $\beta_{M,\{1\}}$ и $\mathbf{Aut}_{\mathcal{MN}}(M) = \{\beta_{M,\{1\}}\}$.

Рассмотрим множество $\mathbb{SN}^* = \mathbb{SN} \setminus (\{\emptyset\} \bigcup \mathbb{MN})$. Для любого множества натуральных чисел $A \in \mathbb{SN}^*$ из равенства $A \cdot B = A$ следует, что $1 \in B$. Если A — конечное множество, то отсюда следует, что $B = \{1\}$.

Лемма 8. *Для категории $\mathcal{SN}$ для любого множества $A \in \mathbb{SN}^*$ его моноид эндоморфизмов $\mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{SN}}(A, A)$ удовлетворяет равенству*

$$\mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A) = \{\beta_{A,B} | B \subseteq A^*, 1 \in B\}.$$

Доказательство. Действительно, морфизм $\beta_{A,B} \in \mathbf{End}_{\mathcal{SN}}(A)$ тогда и только тогда, когда множество B удовлетворяет равенству $B \cdot A = A$. Но это возможно только при условии $B \subseteq A^*$ и $1 \in B$. □

7. Заключение

В работе заложены основы алгебраической теории дзета-функций моноидов натуральных чисел. Возникают естественные вопросы, как те или иные общие алгебраические и функциональные конструкции реализуются в конкретной структуре множества дзета-функций моноида натуральных чисел. Решение этих вопросов предполагается осуществить в последующих работах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гретцер Г. Общая теория решёток. — М., Мир, 1982, 456 с.

2. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени // Научн. тр. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1940. Т.11.

3. Н. Н. Добровольский. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

4. Н. Н. Добровольский. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

5. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

7. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

8. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

9. Добровольский Н. Н. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 3. С. 109–134.

10. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

11. Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

12. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

13. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

14. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном обобщенном эйлеровом произведении, задающем мероморфную функцию на всей комплексной плоскости // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2, С. 156–168.

15. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. — М.: МЦНМО, 2014. — 712 с.

16. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

17. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

18. Chan Heng Huat. Analytic Number Theory for Undergraduates (англ.). — World Scientific Publishing Company, 2009. — ISBN 981-4271-36-5.

REFERENCES

1. Grätzer G., 1998, "General lattice theory" , 2nd ed., *Birkhäuser*, 663 pp.

2. Delone B.N., Faddeev D.K., 1940, “Theory of Irrationalities of the Third Degree”, trudy matematicheskogo instituta imeni Steklova V.A., vol. 11., pp. 3–340.

3. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4 pp. 188–208.

4. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

5. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 142–150.

7. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

8. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

9. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 109–134.

10. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.

11. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.

12. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

13. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

14. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2019, "On a generalized Eulerian product defining a meromorphic function on the whole complex plane" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 156–168.

15. Ivanets H., Kovalsky E., 2014, "Analytical number theory" . — *Moscow: ICNMO*, — 712 p.

16. Titchmarsh E. K., 1952, "Teorija dzeta-funkcii Rimana" , *Izd-vo I-L, Moskva*, 407 p.

17. Chandrasekharan K., 1974, "Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel" , *Izd-vo Mir, Moskva*, 188 p.

18. Chan Heng Huat, 2009, "Analytic Number Theory for Undergraduates" — *World Scientific Publishing Company* — ISBN 981-4271-36-5.

Получено 18.07.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-118-132

О подгруппах в группах Артина с древесной структурой[1]

И. В. Добрынина

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

В статье автор продолжает рассматривать вопросы, связанные с проблемой свободы в группах Артина с древесной структурой и опубликованные совместно с В. Н. Безверхним в Чебышевском сборнике в 2014 году. В частности, доказывается следующая теорема о подгруппах для групп Артина с древесной структурой: если H – конечно порожденная подгруппа группы Артина с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной циклической подгруппе. порожденной образующим элементом группы, есть единичная подгруппа, то существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

Изучением свободных подгрупп в различных классах групп занимались многие выдающиеся математики, основополагающие результаты изложены в ряде учебников по теории групп, монографиях и статьях.

Группы Артина активно изучаются с начала прошлого века. Если группе Артина соответствует конечный дерево-граф такой, что его вершинам соответствуют образующие группы, а всякому ребру, соединяющему вершины, соответствует определяющее соотношение, связывающее соответствующие образующие, то мы имеем группу Артина с древесной структурой.

Группу Артина с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам.

В процессе доказательства основного результата использовались: приведение множества образующих к специальному множеству, введенному В. Н. Безверхним как обобщение нильсеновского множества на свободные произведения групп с объединением, а также представление подгруппы в виде свободного произведения групп и задание группы с помощью графа.

Ключевые слова: группа Артина с древесной структурой, подгруппа, свободное произведение групп с объединением.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
И. В. Добрынина. О подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 118–132.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-710002 р_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-118-132

On subgroups in Artin groups with a tree structure

I. V. Dobrynina

Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia (Moscow).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

In the article, the author continues to consider issues related to the problem of freedom in Artin groups with a woody structure, and published jointly with V. N. Bezverkhnim in the Chebyshev Collection in 2014. In particular, the following subgroup theorem is proved for Artin groups with a tree structure: if H is a finitely generated subgroup of the Artin group with a tree structure, and the intersection of H with any subgroup conjugate to a cyclic subgroup. generated by the generating element of the group, there is a unit subgroup, then there is an algorithm describing the process of constructing free subgroups in H.

The study of free subgroups in various classes of groups was carried out by many outstanding mathematicians, the fundamental results are presented in a number of textbooks on group theory, monographs and articles.

Artin's groups have been actively studied since the beginning of the last century. If the Artin group corresponds to a finite tree graph such that its vertices correspond to generating groups, and every edge connecting the vertices corresponds to a defining relation connecting the corresponding generators, then we have an Artin group with a tree structure.

An Artin group with a woody structure can be represented as a tree product of two-generators Artin groups united by infinite cyclic subgroups.

In the process of proving the main result, the following methods were used: the reduction of the set of generators to a special set introduced by V. N. Bezverkhnim as a generalization of the Nielsen set to amalgamated products of groups, as well as the representation of a subgroup as a free product of groups and the assignment of a group using a graph.

Keywords: Artin group with tree structure, subgroup, amalgamated product of groups.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
I. V. Dobrynina, 2022, "On subgroups in Artin groups with a tree structure" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 118–132.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2 \cup \{\infty\}, i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1, n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими

a_i и a_j, соответствует соотношение $\langle a_i a_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i\rangle^{m_{ji}}, m_{ij} \neq \{\infty\}, i \neq j$, то мы имеем группу Артина с древесной структурой [1].

В [1] для данного класса групп доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов.

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих G_{ij}, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j\rangle$ [1].

Строение подгрупп свободных групп и свободных произведений групп можно найти в работах [2], [3]. В. Магнус [4] доказал теорему о свободе для групп с одним определяющим соотношением, а Н. С. Романовский [5] — обобщенную теорему о свободе. С. И. Адян, В. Г. Дурнев рассматривали проблему свободы в работе [6].

В [7] рассматривался вопрос об общности класса m-порожденных групп, где любая k-порожденная подгруппа (для произвольного $k < m$) свободна. Решение получено Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанским [8]. В [9] удалось снять ограничение $k < m$.

Используя методы Г. Н. Аржанцевой и А. Ю. Ольшанского, для групп Кокстера, соответствующих матрице Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, с $m_{ij} \geq 3k + 1$ И. Каповичем и П. Шуппом [10] доказано, что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной в G.

Для групп Кокстера с древесной структурой свободные подгруппы изучались в [11] с помощью методов работы [12].

Свободные подгруппы в группах Артина с древесной структурой изучались в [13].

В настоящей работе доказываются следующие теоремы:

1. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой на образующих $a_i, i = \overline{1,n}$, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i\rangle, i = \overline{1,n}$, есть единичная подгруппа, тогда существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

2. В группах Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

2. Базовые понятия

Пусть $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$ – свободное произведение групп G_1, G_2, объединенных по изоморфным подгруппам U_1, U_2, где $U_1 < G_1, U_2 < G_2$ с помощью фиксированного конструктивного изоморфизма ϕ.

Рассмотрим слово из группы $\overline{G}$ и представим его в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_1 по U_1 и G_2 по U_2, при этом r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) являются элементами из разных сомножителей группы $\overline{G}$. Элемент K_g назовем ядром слова g.

Если ядро K_g не является элементом из объединяемой подгруппы, то элементы (слоги) l_{ng} и r_{ng} лежат в одном сомножителе группы $\overline{G}$, а ядро K_g — в другом. В данном случае слоговая длина слова из (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1. *[12] Трансформой называется слово вида*

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1}, \tag{2}$$

то есть в (1) выполнено условие $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$.

Если ядро $h_g = K_g$ лежит в объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng}, r_{ng} в (1) лежат в разных сомножителям группы $\overline{G}$. Тогда слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

равна $L(g) = 2n$.

Нетрансформой нечетной длины будем называть слово вида (1), нетрансформой четной длины — слово вида (3) [12].

Определение 2. *[12] Левой (правой) половиной слов (1), (3) называется подслово $g = l_{1g} \dots l_{ng} (r_{ng} \dots r_{1g})$. Большим начальным (конечным) отрезком называется подслово $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ $(K_g r_{ng} \dots r_{1g})$.*

Определение 3. *[12] Левую (правую) половину слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

будем называть изолированной в множестве $\{w_j\}_{j \in \overline{1,N}}$, если ни у одного из слов $w_j^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$ множества $(\{w_j\}_{j \in \overline{1,N}} \setminus \{w_i\}) \cup (\{w_j^{-1}\}_{j \in \overline{1,N}} \setminus \{w_i^{-1}\})$ невозможно выделить подслово $l_{1w_i} \dots l_{mw_i} (r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова, то есть

$$w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^{\varepsilon} (w_j^{\varepsilon} \neq w_{j1}^{\varepsilon} r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}).$$

Определение 4. *[12] Специальным назовем конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$, из группы $\overline{G}$, если для него выполнены следующие условия:*

1. Левая половина нетрансформы из множества W изолирована в нем. Для нетрансформы четной длины изолирована и левая, и правая половины.

2. Нельзя уменьшить длину нетрансформы w_j, умножая ее слева и справа на элементы из подгруппы, порожденной множеством $W \setminus \{w_j\}$. Длину произвольного слова w_j нельзя уменьшить, умножая на элемент w длины меньше $L(w_j)$, принадлежащий подгруппе $\langle W \rangle$.

3. Если $w_i'^{\varepsilon} = l_{1w_i'} \dots l_{nw_i'} K_{w_i'} r_{nw_i'} \dots r_{s+1w_i'} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1, s < n,$ — нетрансформа из W и $\{w_i''^{\varepsilon} = l_{1w_i''} \dots l_{nw_i''} K_{w_i''} r_{nw_i''} \dots r_{s+1w_i''} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1\}$ — подмножество нетрансформ из $(W \setminus \{w_i'\}) \cup (W \setminus \{w_i'^{-1}\})$, правые половины которых оканчиваются подсловом $r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, тогда если подгруппа $\langle W \rangle \cap$ $r_{1w_i'}^{-1} \dots r_{sw_i'}^{-1} D r_{sw_i'} \dots r_{1w_i}' = B$, где $D = G_1$, если $r_{s+1w_i'} \in G_1$, либо $D = G_2$, если $r_{s+1w_i'} \in G_2$, $D \neq E$, то для $u \in B$ выполняются неравенства $L(w_i' u) \geq L(w_i'), L(w_i' u w_i''^{\varepsilon}) \geq L(w_i')$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}, w_j = l_{1w_j}$ $\dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ — слова из W, не обязательно различные, $s \leq m \leq n$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы, порожденной W, такого, что если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l_{nw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

3. Вспомогательные утверждения

Теорема 1. *[12] Пусть $G = G_1 *_U G_2$, U обладает свойством максимальности. Тогда любое конечное множество слов группы G сводится к конечному специальному множеству, соответствующему данному.*

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2 \rangle$.

Множество образующих $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ подгруппы H приведем к специальному. Разобьем его следующим образом на подмножества: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножеству $M_i, i = \overline{1,k}$, принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из G_1 или G_2. С каждым из множеств $M_i, i = \overline{1,k}$, связана подгруппа $(M_i) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппа из G_1 или G_2, порожденная ядрами трансформ из M_i. Упорядочим (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k) \tag{4}$$

Лемма 1. *[12] Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$(M_1') \leq (M_2') \dots \leq (M_{k'}'), \tag{4$'$}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp((M_0), (M_1), (M_2), \dots, (M_k)) = gp((M_0), (M_1'), (M_2'), \dots, (M_{k'}'))$.

2. Если подгруппе $(M_j') = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C_j' r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$ принадлежит трансформа $u = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h_u r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$, где h_u принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (4') имеется подгруппа

$$(M_l') = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{n-1j}^{-1} C_l' r_{n-1j} \dots r_{2j} r_{1j},$$

содержащая u.

3. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C_j' r_{nj} \dots r_{1j}$, $(M_s') = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1s}^{-1} \dots r_{ms}^{-1} C_s' r_{ms} \dots r_{n+1s} r_{nj} \dots r_{1j}$ подгруппы ряда (4') и подгруппа (M_j') содержит трансформу $u = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h_u r_{nj} \dots r_{1j}$ либо $u' = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K_u r_{nj} \dots r_{1j}$, $K_u = r_{n+1s}^{-1} h_u r_{n+1s}$, то существует подгруппа ряда $(4')$ $(M_k') = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1s}^{-1} C_k' r_{n+1s} r_{nj} \dots r_{1j}$, содержащая в первом случае трансформу u, во втором — u'.

4. Если $(M_j') = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C_j' r_{nj} \dots r_{1j}$ — подгруппа ряда $(4')$ и

$$y^{\varepsilon} = l_{1y}^{-1} \dots l_{my}^{-1} K_y r_{my} \dots r_{n+1y} r_{nj} \dots r_{1j}, \varepsilon = \pm 1,$$

— элемент специального множества, причем подслово $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы $w^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, и, если подгруппа (M_j') содержит трансформу $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h r_{nj} \dots r_{1j}$ либо трансформу $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K r_{nj} \dots r_{1j}$, где $K = r_{n+1y}^{-1} h r_{n+1y}$ то существует подгруппа ряда $(4')$ $(M_l') = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1y}^{-1} C_l' r_{n+1y} r_{nj} \dots r_{1j}$, содержащая эту трансформу.

5. Если для некоторой трансформы $u = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K_u r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$, принадлежащей подгруппе $(M_j') = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C_j' r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$ и нетрансформы y (левая половина y изолирована) из M_0 выполняется соотношение $L(y^{-1} u y) \leq L(y)$, то существует подгруппа (M_s') ряда $(4')$, содержащая трансформу

$$y^{-1} r_{1u}^{-1} r_{2u}^{-1} \dots r_{nu}^{-1} K_u r_{nu} \dots r_{2u} r_{1u} y,$$

а если $L(y u y^{-1}) < L(y)$, то существует подгруппа (M_s') из $(4')$, содержащая трансформу $y r_{1u}^{-1} r_{2u}^{-1} \dots r_{nu}^{-1} K_u r_{nu} \dots r_{2u} r_{1u} y^{-1}$.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $W = \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ обозначим через $gp(M_0, S)$, где S — подгруппа, порожденная подгруппами ряда $(4')$.

Определение 5. *[12] Произведение $u_1u_2\dots u_m$, где $u_i \neq 1$, $u_i \in W \cup W^{-1}, i = \overline{1,m}$, из подгруппы $gp(M_0, S)$ назовем словом группы $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$, если*

1. $u_i \neq 1$.

2. $u_i \in M_0 \cup M_0^{-1}$ либо u_i принадлежат некоторой подгруппе из ряда $(4')$.

3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}, i = \overline{1, m-1}$.

4. $u_i, u_{i+1}, i = \overline{1, m-1}$, не содержатся в одной подгруппе ряда $(4')$.

5. В $u_1u_2\dots u_m$ нет произведения $u_iu_{i+1}u_{i+2}, i = \overline{1, m-2}$, где $u_i = u_{i+2}^{-1}, u_i \in M_0 \cup M_0^{-1}$, $u_{i+1} \in (M'_j), u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M'_s)$, где $(M'_j), (M'_s)$ из ряда $(4')$.

Лемма 2. *[12] Всякое произведение $w_{i1}^{\varepsilon 1}w_{i2}^{\varepsilon 2}\dots w_{in}^{\varepsilon n}, \varepsilon = \pm 1$, где w_{ij} — образующие подгруппы $\langle W\rangle$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i1}u_{i2}\dots u_{im}, m \leq n$, подгруппы $gp(M_0, S) = \langle W\rangle$.*

Определение 6. *[12] Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин $L(v_1), L(v_2)$.*

Определение 7. *[12] Слово $u_1u_2\dots u_m$ будем называть простым, если*

$$L(u_1u_2\dots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_m)\}$$

.

Лемма 3. *[12] Пусть $u_1u_2\dots u_m$ — слово из подгруппы $gp(M_0; S)$. Тогда*

$$L(u_1u_2\dots u_m) \geq L(u_i), i = \overline{1,m}.$$

Следствие 1. *[12] Если в слове $u_1u_2\dots u_m$ выполнить сокращение в группе $\overline{G}$, то оно не затронет, по крайней мере, левую половину слова u_1.*

Следствие 2. *[12] Всякое слово подгруппы $gp(M_0; S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Лемма 4. *[12] Пусть W — специальное множество слов группы $\overline{G}$ и $H = \langle W\rangle$ — подгруппа $\overline{G}$ и пусть $w_i^\varepsilon = l_1\dots l_mK_{w_i}r_m\dots r_1$ — элемент специального множества, $v = l_1\dots l_t, t \leq m$, — начальное подслово левой половины w_i^ε, причем v не является изолированной левой половиной w_i^ε. Тогда если $A_v = H \cap l_1\dots l_tA_jl_t^{-1}\dots l_1^{-1} \neq E$, где $A_j = G_1$, если $l_t \in G_2$ либо $A_j = G_2$, если $l_t \in G_1$, то ряд $(4')$ содержит подгруппу $(M'_s) = A_v$.*

Лемма 5. *[12] Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна.*

Лемма 6. *[12] $(M_0) \cap (S)^{gp(M_0;S)} = E$, где E — единичная подгруппа.*

Лемма 7. *Пусть $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$, S — древесное произведение подгрупп $(M'_i), i = \overline{1,k'}$. Если пересечение H с любой подгруппой, сопряженной U_1, U_2, есть E, то $H = (M_0) * (M'_1) * \dots * (M'_{k'})$.*

Доказательство непосредственно следует из строения подгруппы H и леммы 4.

4. Основные теоремы

Теорема 2. *[13] Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы G_{ij} выполнено равенство $H \cap gG_{ij}g^{-1} = E$, то H является свободной.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема вхождения, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ установить, принадлежит ли w подгруппе H.

Теорема 3. *[12] Пусть $\overline{G} = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2\rangle$, и (1) $U_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством максимальности, (2) в G_1, G_2 разрешимы проблемы вхождения; (3) существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и любого элемента $v \in G_i, i = \overline{1,2}$, установить, пусто или нет пересечение $vH \cap U_i$; (4) существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i, i = \overline{1,2}$, и подгруппы U_i образующие их пересечения, то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G в специальное.*

Теорема 4. *Существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H группы Артина G с древесной структурой, установить, является или нет единичной подгруппой E пересечение H с произвольной циклической подгруппой $\langle w\rangle$ из G_{ij}.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$ и конечно порожденной подгруппы H выяснить, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, где $\langle w\rangle \in G_{ij}$.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции.

Пусть $m_{ij} = 2k+1, i \neq j$, тогда $G_{ij} \simeq B = \langle x, y; x^{2k+1} = y^2\rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f : a_i \to x^{k+1}y^{-1}, a_j \to yx^{-k}$ [14]. Доказательство будем проводить для группы B.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $B, \langle w\rangle < B$. Будем считать, что образующие H приведены к специальному множеству $H = qp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $(4')$.

Профакторизуем B по подгруппе $N = \langle x^{2k+1}\rangle$. Очевидно, что $N = \langle x^{2k+1}\rangle^B$, $N < B$. Получим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; x^{2k+1}, y^2\rangle$. В данной группе разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп [15] и смежного класса с циклической подгруппой [16].

Пусть w — циклически несократимо, $L(w) = 1$, тогда $w \in \langle x\rangle$ либо $w \in \langle y\rangle$. Допустим $w \in \langle x\rangle$, если $H \cap \langle x\rangle \neq E$ (E — единичная подгруппа), то по лемме 4 ряд $(4')$ содержит подгруппу (M'), $(M') = H \cap \langle x\rangle$ и $H \cap \langle w\rangle = \langle M'\rangle \cap \langle w\rangle$. Аналогично получаем, если $w \in \langle y\rangle$.

Пусть $\forall i$, $i = \overline{1,k}$, $(M_i') = E$, тогда H — свободная подгруппа, порожденная множеством M_0 по лемме 5 и $H \cap \langle w\rangle = E$.

Пусть $L(w) \geq 2$, w — циклически несократимое слово в группе B, в противном случае добьемся циклической несократимости w, сопрягая одновременно w и H.

Рассмотрим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; : x^{2k+1}, y^2\rangle$. Пусть Ψ — гомоморфизм B на B_1, $\Psi(B) = B_1$. Представим w в виде: $w = h_0\overline{w}$, где $\Psi(w) = \overline{w}$, $h_0 \in \langle x^{2k+1}\rangle$, и каждый образующий w_i подгруппы H запишем в виде $w_i = h_i\overline{w}_i$, $i = \overline{1, N_1}$, $h_i \in \langle x^{2k+1}\rangle$, $\Psi(w) = \overline{w}$. Множество $\{\overline{w}_i\}_{i=\overline{1,N_1}} \backslash \{E\}$ является специальным множеством образующих подгруппы $\Psi(H)$ в группе $B_1 = \langle x, y; : x^{2k+1}, y^2\rangle$, которая представляет свободное произведение групп $\langle x; : x^{2k+1}\rangle$, $\langle y; : y^2\rangle$.

Как отмечено выше, в группе B_1 разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп, поэтому можно эффективно выписать образующие пересечения $\langle\overline{w}\rangle \cap \Psi(H)$.

Если $\overline{w}_{i1}\overline{w}_{i2}\ldots\overline{w}_{is} = \overline{w}^p$, то в группе B: $w_{i1}w_{i2}\ldots w_{is} = x^{\alpha(2k+1)}\overline{w}_{i1}\overline{w}_{i2}\ldots\overline{w}_{is}$, $w^p =$
$= x^{\beta(2k+1)}\overline{w}^p$.

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда $H \cap \langle w \rangle = \langle w^p \rangle$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Пусть $C(B) \cap H \neq E$ и $\alpha \neq \beta$, тогда по лемме 4 имеем $C(B) \cap H = (M_1')$, где (M_1') — подгруппа ряда $(4')$, $(M_1') = \langle x^{\alpha_0(2k+1)} \rangle$. Чтобы проверить $H \cap \langle w \rangle \neq E$, рассмотрим соотношение:

$$(x^{\alpha_0(2k+1)})^m (x^{\alpha(2k+1)} \overline{w}_{i1} \overline{w}_{i2} \dots \overline{w}_{is})^n = (x^{\beta(2k+1)})^n (\overline{w}^p)^n. \tag{5}$$

Но $\overline{w}^p$ циклически несократимо, следовательно и $\overline{w}_{i1} \overline{w}_{i2} \dots \overline{w}_{is}$ — циклически несократимо, поэтому для (5) получим:

$$\alpha_0 m + \alpha n = \beta n \tag{6}$$

Определяем пересечение $H \cap \langle w \rangle$, решая уравнение (6).

Рассмотрим теперь проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы H с циклической подгруппой $\langle w \rangle$ в группе B. Пусть v — слово группы B и $v \notin H$. Выясним, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, то есть

$$v u_1 u_2 \dots u_k = w^p \tag{7}$$

где $u_1 u_2 \dots u_k$ — слово подгруппы H, образующие которой приведены к специальному множеству, w — циклически несократимое слово.

Рассмотрим случай, когда $L(w) = 1$, то есть $w = x^{(2k+1)\alpha_0} x^s$, $0 \leq s < 2k+1$.

Если $L(v) > 1$, то эффективно определяется слово $u = u_1 u_2 \dots u_k \in H$, максимально сокращающее длину v. Покажем это, то есть постоим алгоритм, выписывающий слово $u = u_1 u_2 \dots u_k$ из H с данным свойством.

Рассмотрим группу $G = \langle G_1 * G_2; \phi(U_1) = U_2 \rangle$, являющуюся свободным произведением групп $G_1, : G_2$ с объединением, в G выполняются условия теоремы 3.

Рассмотрим слово $v \in G, : L(v) > 1$, v — циклически несокатимо в G и пусть H, $H < G$, конечно порожденная подгруппа, образующие W которой приведены к специальному множеству; $H = qp(M_0, S)$, где M_0 — нетрансформы из W, S — подгруппа порожденная подгруппами $\{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$:

1) выделим в v максимальное подслово g^{-1}, $v = v_1 K_0 g^{-1}$, где g — левая половина некоторого w_j^ϵ , $\epsilon = \pm 1$, $w_j^\epsilon \in W \cup W^{-1}$, пусть $K_0 \in A_i$, $i = 1, 2$;

2) допустим, что g — левая половина трансформы подгруппы $(M_s') = g A_s' g^{-1}$, определим пересечение $K_0 A_s' \cap U_i$; если $K_0 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то (M_s') содержит трансформу $g K_1 g^{-1}$, с помощью которой сокращаем v;

3) пусть $K_0 A_s' \cap U_i = \varnothing$ и g является неизолированной левой половиной нетрансформы $g K_2 g' \in M_0$ и пусть подгруппа $(M_s') = g A_s' g^{-1} \in \{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$; определим пересечение: $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i$. Если $K_0 K_2 (K_2^{-1} A_s' K_2) \cap U_i \neq \varnothing$, то в этом случае длину v умножением справа на слово $g K_1 g^{-1} g K_2 g'$ можно уменьшить;

4) пусть $K_0 A_s' K_2 \cap U_i = \varnothing$; допустим, что g является изолированной левой половиной нетрансформы $u \in M_0$; если u — нетрансформа четной длины, то $L(vu) < L(v)$; пусть $u = g K_1 g'$ — нетрансформа нечетной длины и пусть существует подгруппа $(M_s') = g_1^{-1} A_s' g' \in \{(M_i')\}_{i=\overline{1,k'}}$; рассмотрим пересечение $K_0 K_1 A_s' \cap U_i$; если $K_0 K_1 A_s' \cap U_i \neq \varnothing$, то производим сокращение слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot g'^{-1} K_2 g'$.

5) пусть $K_0 K_1 A_s' = \varnothing$ и M_0 содержит нетрансформу $g'^{-1} K_3 g''$. Рассмотрим пересечение $K_0 K_1 A_s' K_3 \cap U_i = K_0 K_1 K_3 (K_3^{-1} A_s' K_3) \cap U_i$; если пересечение не пусто, то произведем сокращение длины слова v, умножая его справа на слово $g K_1 g' \cdot g'^{-1} K_2 g' \cdot g'^{-1} K_3 g''$.

6) пусть $K_0 K_1 A_3' K_3 \cap U_i = \varnothing$, тогда в слове $v = v_1 K_0 g^{-1}$ подслово $K_0 g^{-1}$ с помощью преобразования (2) или (4) преобразуем, если это возможно, в подслово правой половины либо в правую половину некоторого w_j^ϵ , $\epsilon = \pm 1$, $w_j \in W$. Если преобразование (6) не удается выполнить, то мы построили слово $u = u_1 u_2 \dots u_n$, иначе перейдем к преобразованию (1).

Выполнив (1)-(6) конечное число раз, построим слово $u = u_1 u_2 \dots u_n$, такое, что $v \cdot u_1 u_2 \dots \dots u_n = v' u_n''$, где $v = v'v'', u_n = u_n' u_n''$. Используя свойства специального множества можно показать, что длину слова $v' u_n''$ нельзя уменьшить, умножая на слова из H.

Применяя к слову v и подгруппе H из B преобразования (1)-(6), получим слово $v' u_n''$. Если $L(v' u_n'') > 1$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$.

Пусть $L(v' u_n'') = 1$, то есть $v' u_n'' = x^t x^{(2k+1)\gamma_0}$, и ряду ($4'$) принадлежит подгруппа $(M) = \langle x^\beta \cdot x^{(2k+1)\gamma_1} \rangle$, где $0 \leq \beta < 2k+1$. Тогда

$$vH \cap \langle w \rangle = (v' u_n'')(M) \cap \langle w \rangle \tag{8}$$

Из (8) следует соотношение:

$$x^t x^{(2k+1)\gamma_0} \cdot (x^\beta x^{(2k+1)\gamma_1})^m = (x^s x^{(2k+1)\alpha_0})^n \tag{9}$$

из которого получаем:

$$t + (2k+1)\gamma_0 + (\beta + (2k+1)\gamma_1)m = (s + (2k+1)\alpha_0) \cdot n \tag{10}$$

Из решения уравнения (10) относительно m, n выясняем справедливы ли равенства (9) и (8).

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда подгруппа H свободна и порождается множеством M_0. Данный случай сводится к проблеме вхождения $v'u''$ в циклическую подгруппу $\langle w \rangle$.

Рассмотрим теперь случай, когда $L(w) > 1$. В этом случае проверяем, справедливо ли равенство (7) в группе B_1. Обозначим: $\Psi(v) = \overline{v}$, $\Psi(w) = \overline{w}$, $\Psi(H) = \overline{H}$, $\Psi(u_1 \dots u_k) = \Psi(u_1) \dots \dots \Psi(u_k) = \overline{u}_1 \dots \overline{u}_k$.

Из ранее сказанного следует, что можно эффективно установить в группе B_1 пусто или не пусто пересечение $\overline{v}\overline{H} \cap \langle \overline{w} \rangle$, то есть справедливо ли в B_1 равенство:

$$\overline{v}\overline{u}_1 \dots \overline{u}_k = \overline{w}_p \tag{11}$$

Так как слово $\overline{w}$ циклически несократимо, то циклически несократимо слово $\overline{T} = \overline{v}\overline{u}_1 \dots \overline{u}_k$. Пусть слову $\overline{T}$ в группе B соответствует слово $x^{(2k+1)\beta_0}\overline{T}$, а $\overline{w}_p$ — $x^{(2k+1)\alpha_0}\overline{w}_p$. Тогда (11) в группе B соответствует равенство

$$c x^{(2k+1)\beta_0} \overline{T} = x^{(2k+1)\alpha_0} \overline{w}_p, \tag{12}$$

где $c \in C(B)$.

Пусть $C(B) \cap H = E$, тогда $c = 1$ и соотношение (12) имеет место, если $\beta_0 = \alpha_0$.

Пусть $C(B) \cap H \neq E$, тогда среди подгрупп ряда ($4'$) по лемме 4 содержится подгруппа $(M) = C(B) \cap H$, $(M) = \langle x^{(2k+1)\gamma_0} \rangle$.

Пусть $\alpha_0 \neq \beta_0$. Выясним, существуют ли m, n и $c \in (M)$ такие, что

$$(x^{(2k+1)\beta_0}\overline{T})^m (x^{(2k+1)\gamma_0})^n = (x^{(2k+1)\alpha_0}\overline{w}_p)^m, \tag{13}$$

из которого получаем:

$$\beta_0 m + \gamma_0 n = \alpha_0 m, \tag{14}$$

из решения уравнения (14) получаем (13).

Пусть $m_{ij} = 2k, i \neq j, k > 1$. Тогда $G \simeq \langle t, x; t x^k t^{-1} = x^k \rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f : a_i \to t, a_j \to x t^{-1}$ [15]. Существование первого алгоритма следует из работы [13]. Из работы [18] следует существование второго алгоритма.

Пусть $m_{ij} = 2, i \neq j$, тогда G_{ij} является абелевой. В данном случае доказательство теоремы очевидно.

Рассмотрим группу $G = \langle a_i, a_j, a_j', a_k; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, \langle a_j' a_k \rangle^{m_{jk}} = \langle a_k a_j' \rangle^{m_{kj}}, a_j = a_j' \rangle$, которую далее будем обозначать $G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$.

Пусть $H < G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$, причем H — конечно порожденная подгруппа. Пусть слово $w \in G_{ij}, w \neq 1$. Докажем, что существует алгоритм, выписывающий образующие $H \cap \langle w \rangle$. Приведем образующие подгруппы H к специальному виду $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда $(4')$. Выясним, существует ли в множестве подгрупп ряда $(4')$: $(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k)$, подгруппа, содержащаяся в G_{ij}. Допустим $(M_1) < G_{ij}$, подгруппа (M_1) находится в начале ряда $(4')$ и состоит из трансформ с крыльями, равными 1. Тогда определяем пересечение $(M_1) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$.

Покажем теперь существование второго алгоритма. Пусть $H < G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$ и $v \in G$ — произвольное слово, причем v не принадлежит H. Найдем пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle \subset G_{ij}$.

Рассмотрим слово $u \in H, u = u_1 u_2 \ldots u_n$. Используя преобразования 1)-6), через конечное число шагов построим приведенное слово vu. Если $L(vu) > 1$, то пересечение $vH \cap \langle w \rangle$ пусто. Если $L(vu) = 1, vu \in G_{ij}$, выясним существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда $(4')$ подгруппа с единичными крыльями $(M_{s_1}) = A_{s_1} < G_{ij}$, и рассматриваем пересечение $vu(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Возможно, что подгруппа $\langle w \rangle$ принадлежит объединяемой подгруппе.

Рассмотрим этот случай подробнее. Итак, $\langle w \rangle = \langle a_j^t \rangle$.

Пусть $L(v) = 1$, $v \in G_{ij}$. Выясним, будет ли $vH \cap \langle w \rangle \neq \varnothing$, либо $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$. Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, тогда ряду $(4')$ принадлежит подгруппа $(M_i), (M_i) = H \cap G_{ij}$ (лемма 4) и проблема пресечения $vH \cap \langle w \rangle = v(M_i) \cap \langle w \rangle$. Данный случай рассмотрен выше. Если $H \cap G_{ij} = E$, то $vH \cap \langle w \rangle = \varnothing$. Пусть $v \in G_{jk}$. Выясним, будет ли выполняться соотношение $vH \cap \langle w \rangle \neq \varnothing$.

Если $H \cap G_{jk} \neq E$, то $H \cap G_{jk} = (M_j')$ — подгруппа ряда $(4')$. Выясним пусто или не пусто пересечение $v(M_j') \cap \langle a_k \rangle$. Допустим, что $vu = a_k^m, u \in (M_j')$, при этом $a_k^m \notin H$, так как в противном случае $v \in H$. Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, $H \cap G_{ij} = (M_i)$, рассматриваем пересечение $a_k^m (M_i) \cap \langle w \rangle$. Пусть получили, что $a_k^m (M_i) \cap \langle w \rangle = \varnothing$.

Допустим, что M_0 содержит нетрансформу $lh_0 r, L(lh_0 r) = 2,\ l \in G_{jk},\ r \in G_{ij},\ h_0 \in \langle a_k \rangle$, такую, что

$$vu(lh_0 r) = h' r,$$

где $u \in (M_j'), h' \in \langle a_k \rangle$ (u может быть равно единице). Заметим, что u, h' могут быть эффективно вычислены подобно тому, как это показано выше.

Пусть $H \cap G_{ij} \neq E$, тогда $H \cap G_{ij} = (M_i)$, (M_i) принадлежит ряду $(4')$, определяем пересечение $h' r(M_i) \cap \langle w \rangle$; в группе G_{ij} данная проблема алгоритмически разрешима.

Для определения пересечения смежного класса vH, $L(v) = 1$ с циклической подгруппой $\langle a_j \rangle$ рассуждения аналогичны.

Если $vu(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = E$, аналогичные рассуждения нужно провести для $\langle w \rangle \in G_{jk}$, если $vu \in G_{jk}$.

Имея базу индукции, предполагаем, что утверждение справедливо для группы G, имеющей меньше n сомножителей в графе $\overline{\Gamma}$, и докажем для n сомножителей.

Покажем, что существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы H группы Артина G с древесной структурой, установить пересечение H с произвольной циклической подгруппой $\langle w \rangle$ из G_{ij}. Более того, существует алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G$ и конечно порожденной подгруппы H выяснить, пусто или нет пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $\langle w \rangle$ из G_{ij}. Выделим в дереве $\overline{\Gamma}$ группы G ребро e_i, которое связывает графы $\overline{\Gamma}_i$ и $\overline{\Gamma}_j$, где v_i и v_j — вершины ребра e_i, причем вершине v_i соответствует группа $G_{ij} \in G_{\overline{\Gamma}_i}$. Вершине v_j соответствует группа G_{jk}, группы G_{ij} и G_{jk} объединены по циклической подгруппе $\langle a_j \rangle$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа, такая что $H < G = G_{\overline{\Gamma}_i} *_{\langle a_j \rangle} G_{\overline{\Gamma}_j}$. Для подгрупп $G_{\overline{\Gamma}_i}$ и $G_{\overline{\Gamma}_j}$ выполняются все условия теоремы 1, а следовательно образующие подгруппы H можно привести к виду $H = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $(M_1) \leq (M_2) \leq \ldots \leq (M_k)$. Выберем слово $w \in G_{\overline{\Gamma}_i}$, $w \neq 1$, $w \in G_{ij} < G_{\overline{\Gamma}_i}$, и рассмотрим существование алгоритма, выписывающего пересечение $H \cap \langle w \rangle$. Выясняем существует ли в S подгруппа (M_{s_1}), состоящая из трансформ длины 1, которая содержится в $G_{\overline{\Gamma}_i}$. Используя индуктивное предположение, определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Таким образом, $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$.

Пусть подгруппа $H < G$ и слово $v \in G$, причем v не принадлежит H. Найдем пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, $\langle w \rangle < G_{ij}$, где группа G_{ij} соответствует вершине v_i графа $\overline{\Gamma}$. Приведем образующие подгруппы H к специальному множеству: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда $(4')$. Возьмем произвольное слово $u \in H$, перепишем его в специальных образующих $u = u_1 u_2 \dots u_n$, выясним, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения, как в случае группы $G = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$. В результате через конечное число шагов построим слово vu. Если $L(vu) = 1, vu \in G_{\overline{\Gamma}_i}$ выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда $(4')$ подгруппа $(M_{s1}) = A_{s1} < G_{\overline{\Gamma}_i}$ и рассматриваем $vu(M_{s1}) \cap \langle w \rangle$.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 5. *Существует алгоритм, позволяющий всякое конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ группы Артина G с древесной структурой привести к конечному специальному, порождающему ту же подгруппу.*

В группе Артина G с древесной структурой разрешима проблема вхождения.

Доказательство. Заметим, что условие (1) теоремы 3 выполняется всегда. Выполнение условия (2) следует из работ [18] и [19]. Условия (3)-(4) выполняются на основе теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i \rangle, i = \overline{1,n}$, есть единичная подгруппа, тогда существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.*

Доказательство. 1. Пусть H — конечно порожденная подгруппа двупорожденной группы Артина G_{ij}.

Если $m_{ij} = 2, i \neq j$, тогда G_{ij} абелева. Так как H не может быть ни подгруппой из $\langle a_i \rangle$, ни подгруппой из $\langle a_j \rangle$, то $H = \langle a^l b^m \rangle, l \neq 0, m \neq 0$.

Рассмотрим группу Артина большого типа G_{ij}, то есть $m_{ij} \geq 3, i \neq j$.

Пусть $m_{ij} = 2k+1, i \neq j$, тогда $G_{ij} \simeq B = \langle x, y; x^{2k+1} = y^2 \rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f: a_i \to x^{k+1} y^{-1}, a_j \to y x^{-k}$. Так как G_{ij} является свободным произведением с объединением, то множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H приведем к специальному. Из леммы 5 получаем, что подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна. Допустим, что существует только одна из подгрупп $(M_i'), i \in \overline{1,k'}$ из $4'$, тогда в качестве свободной подгруппы возьмем $(M_0) \neq E$. Если $(M_0) = E$, то свободной берем подгруппу $(M_i'), i \in \overline{1,k'}$. Если таких подгрупп несколько, то рассмотрим подгруппу $T = (M_1') *_{N_1'} (M_2') *_{N_2'} \dots *_{N_{k'-1}'} (M_{k'}')$, где $N_i', i \in \overline{1, k'-1}$, — подгруппы из центра и $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппы из $\langle x \rangle$ или $\langle y \rangle$, порожденные ядрами трансформ вида $x^{\pm t}, 1 \leq t < 2k+1$, или $y^{\pm 1}$. Профакторизуем B по нормальному делителю $N =< x^{2k+1} >^B$. Получим группу $B_1 = B/N = \langle x, y; x^{2k+1}, y^2 \rangle$. В образе подгруппы $T' = (M_1'') * (M_2'') * \dots * (M_{k'}'')$ возьмем любую конечно порожденную подгруппу L. Приведем ее образующие к специальному множеству (нильсеновским образующим) аналогично описанному в определении 4. Выделим в L свободную подгруппу P аналогично тому, как выделялась (M_0). По теореме Куроша [3] L представляет собой свободное произведение свободной группы P и групп, которые сопряжены с подгруппами свободных множителей $(M_i''), i = \overline{1,k'}$, группы T'. Возьмем свободную группу P, а остальные группы отбросим. Восстановим P в группе G_{ij}. К ее образующим добавятся только элементы из центра. Поэтому в G_{ij} она будет свободна. Присоединим ее к (M_0). Обозначим рассматриваемую свободную подгруппу группы G_{ij} через (M_0').

Пусть $m_{ij} = 2k, i \neq j$. Тогда $G \simeq B = \langle t, x; tx^k t^{-1} = x^k \rangle$, где изоморфизм определяется отображением $f : a_i \to t, a_j \to xt^{-1}$. Так как G_{ij} является HNN-расширением, то множество образующих $W = \{w_i\}, i = \overline{1, N}$, подгруппы H приведем к специальному [12], аналогично указанному выше. Вновь разобьем специальное множество на подмножество M_0, которому принадлежат все нетрансформы, и подмножества $M_i, i = \overline{1, k}$, которым принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями. Для специального множества выполняются леммы 1-3, 5,6 и $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, как в лемме 1. Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна. Далее свободные подгруппы строим как в случае $m_{ij} = 2k + 1$, используя при необходимости фактор-группу $B/N = \langle t, x; x^k \rangle$ группы B по нормальному делителю $N = \langle x^k \rangle^B$. В этом случае аналогично получим свободную подгруппу (M_0').

2. Пусть теперь H — конечно порожденная подгруппа группы Артина $\widetilde{G} = G_{ij} *_{\langle a_j \rangle} G_{jk}$ с древесной структурой, удовлетворяющая условиям теоремы. Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H к специальному как описано выше. $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, из $(4')$.

Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, по лемме 5 свободна.

Подгруппы $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, имеют вид $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппы из G_{ij}, либо C_i — подгруппы из G_{jk}.

Для подгрупп C_i выполним пункт 1, рассмотренный ранее для группы G_{ij}.

Таким образом, мы эффективно выделим в каждой подгруппе $C_i, i = \overline{1, k'}$, свободную часть, которую обозначим $(M_{0i}'), i = \overline{1, k'}$. Присоединим к (M_0') подгруппы $(M_{0i}'') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots \ldots r_{ni}^{-1} (M_{0i}') r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}, i = \overline{1, k'}$, образующие которых мы можем выписать. Для данного случая теорема справедлива. Кроме того, свободная часть по лемме 7 будет иметь вид

$$(\tilde{M}_0) = (M_0') * (M_{01}'') * \ldots * (M_{0k'}''). \tag{15}$$

3. Рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой G, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам:

$$G = \langle \prod_{s=1}^{n} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, n}\} \rangle$$

.

В данном случае группе Артина G соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}$ такой, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $\langle a_j \rangle$. Рассмотрим древесное произведение $n - 1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Обозначим группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель, подгруппа G_{xy}, соответствует конечной вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа $< a_x >$. Таким образом, группа G представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе $< a_x >$, то есть $G = \overline{G}_{n-1} *_{< a_x >} G_{xy}$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой. Тогда $H = gp(M_0, S)$, S — древесное произведение подгрупп $(M_i'), i = \overline{1, k'}$, как в лемме 1, где (M_0) принадлежит свободной части подгруппы H. Отделим ее и рассмотрим подгруппы $(M_i'), i = \overline{1, k'}$. Они имеют вид $(M_i') = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}, i = \overline{1, k'}$, где выполняется одно из условий:

3.1. C_i — подгруппы из G_{xy}. В данном случае воспользуемся пунктом 1 и присоединим свободную часть $r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \ldots r_{ni}^{-1} (M_{0i}') r_{ni} \ldots r_{2i} r_{1i}$ к (M_0').

3.2. C_i — подгруппы из $\overline{G}_{n-1}$. Рассмотрим конечно порожденную группу Артина с древесной структурой $\overline{G}_{n-1}$, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Артина, объединенных по циклическим подгруппам:

$$\overline{G}_{n-1} = \langle \prod_{s=1}^{n-1} *G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1, n-1} \rangle$$

.

В этом случае группе Артина $\overline{G}_{n-1}$ соответствует дерево - граф $\overline{\Gamma}_{n-1}$ так, что, вершинам графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$ соответствуют группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk}, — циклическая подгруппа $\langle a_j \rangle$.

Рассмотрим древесное произведение $n-2$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-2}, \overline{\Gamma}_{n-2} \subset \overline{\Gamma}_{n-1}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-2}$ обозначим через $\overline{G}_{n-2}$. Пусть $(n-1)$-ый сомножитель, подгруппа G_{vz}, соответствует конечной вершине дерева - графа $\overline{\Gamma}_{n-1}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-2}$ ребром e_p. При этом ребру e_p соответствует циклическая подгруппа $\langle a_v \rangle$. Таким образом, группа $\overline{G}_{n-1}$ представлена как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-2}$ и G_{vz}, объединенных по циклической подгруппе $\langle a_v \rangle$, то есть $\overline{G}_{n-1} = \overline{G}_{n-2} *_{\langle a_v \rangle} G_{vz}$.

Для группы $\overline{G}_{n-1}$ справедливы теоремы 1–4 и леммы 1–7.

К подгруппам $C_i, i = \overline{1, k'}$, применим выше изложенные рассуждения и присоединим к M'_0 свободные части, сопряженные (M'_{0i}), то есть $(M''_{0i}) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} (M'_{0i}) r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$. По лемме 7 имеем $(M'_0) * (M''_{01}) * \dots * (M''_{0k'})$.

Далее $(M'_{li}) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_{li} r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_{li} — подгруппы из G_{vz}, либо C_{li} — подгруппы из $\overline{G}_{n-2}$. Теперь рассуждения аналогичны 3.1, 3.2. Либо на данном шаге происходит остановка, либо мы переходим к группе $\overline{G}_{n-3}$, и так далее. Через конечное число таких шагов получим подгруппы, являющиеся подгруппами из свободного произведения двух сомножителей вида $\widetilde{G}$, для которых в пункте 2 доказано, что можно эффективно выделить свободную часть.

На последнем шаге свободная часть есть свободное произведение $(\tilde{M}_0)$ из (15). $(\tilde{M}_0)$ как свободный множитель присоединим к свободному произведению свободной части предпоследнего шага. Таким образом, свободная часть подгруппы H представляет собой свободное произведение свободных частей каждого шага.

5. Заключение

В настоящей работе доказана теорема о подгруппах для групп Артина с древесной структурой: если H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной структурой, причем пересечение H с любой подгруппой, сопряженной $\langle a_i \rangle, i = \overline{1, n}$, есть единичная подгруппа, то существует алгоритм, описывающий процесс построения свободных подгрупп в H.

В процессе доказательства использовались приведение множества образующих к специальному множеству, представление подгруппы в виде свободного произведения групп, задание группы с помощью графа.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Безверхнего за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 67-82.

2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

3. Курош А. Г. Теория групп. М.: Физматлит, 2011.

4. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

5. Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно определенных группах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, №1. С. 88-97.

6. Адян С. И., Дурнев В. Г. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // УМН. 2000.Т. 55, № 2. С. 3-94.

7. Губа В. С. Об условиях, при которых 2-порожденные подгруппы в группах с малым сокращением свободны // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. №7. С. 12-19.

8. Аржанцева Г. Н., Ольшанский А. Ю. Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны // Математические заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 489-496.

9. Аржанцева Г. Н. О группах, в которых подгруппы с заданным числом порождающих свободны // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. №3. С. 675-683.

10. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // Proc. London Math. Soc. 2004. Т. 88, №1. С. 89-113.

11. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Т. 1, №1. С. 5-13.

12. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, №1. С. 199-222.

13. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, №1. С. 32-42.

14. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 26, №5. С. 27-42.

15. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Т. 1. С. 16-31.

16. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 102-116.

17. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 20-61.

18. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. 1972. С. 3-86.

19. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1986. С. 3-21.

REFERENCES

1. Bezverkhnii, V. N.. Karpova, O. Yu. 2006, “Problems of words and conjugacy of words in Artin groups with a tree structure“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 12, no. 1, pp. 67-82.
2. Lindon, P. & Shupp, P. 1980, “Combinatory theory of groups“, Mir, Moscow.
3. Kurosh, A. G. 2021, “ Group theory“, Fizmatlit, Moscow.
4. Magnus, W., Karras, A. & Solitar, D. 1974, “Combinatorial group theory“, Nauka, Moscow.
5. Romanovskii, N. S. 1977, “ Free subgroups of finitely-presented groups“, *Algebra and Logic*, vol. 16, no. 1, pp. 88-97.
6. Adyan, S. I. & Durnev, V. G. 2000, “Algoritmicheskie problemy dlya grupp i polugrupp“, *UMN*, vol. 55, no. 2, pp. 3-94.
7. Guba, V. S. 1986, “Conditions under which 2-generated subgroups in small cancellation groups are free“, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, vol. 7, pp. 12-19.
8. Arzhantseva, G. N. & Ol’shanskii, A. Yu. 1996, “The class of groups all of whose subgroups with lesser number of generators are free is generic“, *Mat. Zametki*, vol. 59, no. 4, pp. 489-496.
9. Arzhantseva, G. N. 1997, “On the groups in which the subgroups with fixed number of generators are free“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 3, no. 3, pp. 675-683.
10. Kapovich, I. & Schup, P. 2004, “Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion“, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 88, no. 1, pp. 89-113.
11. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2014, “ On the problem of freedom in Coxeter groups with a tree structure“, *Izvestia of Tula state University. Estestven nauki*, vol. 1, no. 1, pp. 5-13.
12. Bezverkhnii, V. N. 1998, “On the intersection subgroups HNN-groups“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 199-222.
13. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2014, “On free subgroups in Artin group with tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, no. 1, pp. 32-42.
14. Bezverkhnii, V. N. 1995, “Unsolvability of the problem of occurrence in Artin groups of finite type“, *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 26, no. 5, pp. 27-42.
15. Bezverkhnii, V. N. & Rollov E. V., 1974, “On subgroups of free products of groups“, *Sovremen. algebra*, vol. 1, pp. 16-31.
16. Bezverkhnyaya, I. S. 1981, “On the conjugacy of finite sets of subgroups in the free product of groups“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 102-116.
17. Bezverkhnii, V. N. 1981, “Solving the problem of occurrence in the class of HNN-groups“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 20-61.
18. Bezverkhnii, V. N. 1972, “Solution to the problem of occurrence for a class of groups“, *Questions of the theory of groups and semigroups*, pp. 3-86.
19. Bezverkhnii, V. N. 1986, “Solution of the occurrence problem in some classes of groups with one defining relation“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 3-21.

Получено 26.12.2021
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.9, 514.7 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-133-146

Аналитическое вложение для геометрий постоянной кривизны

В. А. Кыров

Кыров Владимир Александрович — кандидат физико-математических наук, Горно-Алтайский государственный университет (г. Горно-Алтайск).
e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Аннотация

В различных разделах современной математики и теоретической физики находят свое широкое применение геометрии постоянной кривизны. К числу таких геометрий относятся сферическая геометрия, геометрий Лобачевского, геометрия де Ситтера. n-мерные геометрии постоянной кривизны задаются метрическими функциями, которые являются инвариантами групп движений размерности $n(n+1)/2$, поэтому они являются геометриями локальной максимальной подвижности. В данной статье на примере геометрий постоянной кривизны решается задача вложения, суть которой состоит в нахождении $(n+1)$-мерных геометрий локальной максимальной подвижности по n-мерным геометриям постоянной кривизны. Ищутся все функции пары точек вида $f(A,B) = \chi(g(A,B), w_A, w_B)$, задающие $(n+1)$-мерные геометрии с группами движений размерности $(n+1)(n+2)/2$ по известным метрическим функциям $g(A,B)$ n-мерных геометрий постоянной кривизны. Эта задача сводится к решению функциональных уравнений специального вида в классе аналитических функций. Решение ищется в виде рядов Тейлора. Для упрощения анализа коэффициентов применяется пакет математических программ Maple 17. Результатами такого вложения n-мерных геометрий постоянной кривизны являются $(n+1)$-мерные расширения евклидовых и псевдоевклидовых n-мерных пространств. Кроме основной теоремы, доказываются вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельное значение.

Ключевые слова: метрическая функция, функциональное уравнение, геометрия постоянной кривизны, группа движений.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. А. Кыров. Аналитическое вложение для геометрий постоянной кривизны // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 133–146.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 517.9, 514.7 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-133-146

Analytical embedding for geometries of constant curvature

V. A. Kyrov

Kyrov Vladimir Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Gorno-Altaisk State University (Gorno-Altaisk).
e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Abstract

In various sections of modern mathematics and theoretical physics find their wide application of geometry of constant curvature. These geometries include spherical geometry, Lobachevsky geometry, de Sitter geometry. n-dimensional geometries of constant curvature are defined by metric functions that are invariants of motion groups of dimension $n(n+1)/2$, therefore they are geometries of local maximum mobility. In this article, by the example of geometries of constant curvature, the embedding problem is solved, the essence of which is to find $(n+1)$ -dimensional geometries of local maximum mobility from n-dimensional geometries of constant curvature. We search for all functions of a pair of points of the form $f(A,B) = \chi(g(A,B), w_A, w_B)$ that define $(n+1)$-dimensional geometries with motion groups of dimension $(n+1)(n+2)/2$ by the well-known metric functions of $g(A,B)$ n-dimensional geometries of constant curvature. This problem reduces to solving functional equations of a special form in the class of analytic functions. The solution is sought in the form of Taylor series. To simplify the analysis of coefficients, the Maple 17 mathematical program package is used. The results of this embedding of n-dimensional geometries of constant curvature are $(n+1)$-dimensional extensions of Euclidean and pseudo-Euclidean n-dimensional spaces. In addition to the main theorem, auxiliary statements of independent significance are proved.

Keywords: metric function, functional equation, geometry of constant curvature, group of motions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. A. Kyrov, 2022, "Analytical embedding for geometries of constant curvature", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 133–146.

Введение

В современной математике хорошо известны геометрии постоянной ненулевой кривизны: сферическая геометрия, геометрия Лобачевского, геометрия де Ситтера и т.д. Метрические функции этих геометрий можно записать единым образом:

$$g(A,B) = \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}{(\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon)(\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon)}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$, n — размерность многообразия, A, B — точки этого многообразия, а $(x_A^1, \ldots, x_A^n)$ и $(x_B^1, \ldots, x_B^n)$ — их локальные координаты. Заметим, что если $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = -1, \varepsilon = -1$, то метрическая функция (1) задаёт сферическую геометрию, а если $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1, \varepsilon = -1$ или $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = -1, \varepsilon = 1$ — геометрию Лобачевского. Отметим, что с помощью подходящей заменой координат и некоторого преобразования метрической функции, от (1) переходим к новому выражению для метрической функции геометрии постоянной кривизны на псевдосфере (исключается случай $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon = \pm 1$):

$$l(A,B) = \frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}(x_A^{n-1} - x_B^{n-1})^2 + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}{x_A^n x_B^n}. \tag{2}$$

Следует отметить, что для современной математики важны геометрии максимальной подвижности. Одна из классификаций таких геометрий построена Тёрстоном [1, 2]. Эта классификация содержит все трехмерные максимально односвязные геометрии, допускающие компактные фактор-геометрии. Отметим, что трехмерные геометрии постоянной кривизны содержатся в классификации Тёрстона.

Основная цель данной работы — решение задачи вложения для геометрии с метрической функцией (1), то есть нахождение на $(n+1)$-мерном многообразии метрических функций вида:

$$f(A,B) = \chi\left(g(A,B), w_A, w_B\right),$$

где $(x_A^1, \ldots, x_A^n, w_A)$ и $(x_B^1, \ldots, x_B^n, w_B)$ — координаты точек A и B $(n+1)$-мерного пространства, сохраняющих свой вид относительно групп преобразований размерности $(n+1)(n+2)/2$. Решение этой задачи сводится к аналитическому решению функционального уравнения специального вида:

$$2[p(A,B)]\frac{\partial\chi}{\partial g} + W(A)\frac{\partial\chi}{\partial w_A} + W(B)\frac{\partial\chi}{\partial w_B} = 0,$$

где

$$p(A,B) = \Big[\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2}$$
$$-\frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon}\Big]g,$$

$X_1, \ldots, X_n$, W, χ — неизвестные, являющиеся аналитическими функциями. Неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Данный метод апробирован в работах [3] – [6], в которых аналитически решается задача вложения для евклидовых и псевдоевклидовых пространств [3] и [4], для пространств постоянной кривизны на псевдосфере, задаваемых метрической функции (2) [5] и для особого расширения евклидовых и псевдоевклидовых пространств [6].

Функциональные уравнения также применяются и при изучении связи одномерной геометрии локальной максимальной подвижности с алгебраическими системами [7], что приводит к решению особых функциональных уравнений:

$$\varphi(\varphi(x,z), \varphi(y,z)) = \varphi(x,y),$$

где φ — неизвестная. Отметим, что задача классификации геометрий локальной максимальной подвижности выросла из теории физических структур. Другой важной задачей этой теории является классификация и изучение феноменологически симметричных геометрий на двух множествах, которая применяет методы, также сводящиеся к решению специальных функциональных уравнений [8]. В последние годы активно изучается связь геометрий на двух множествах с алгебраическими системами, в частности, с обобщенными точно транзитивными группами и псевдоматричными группами [9, 10]. Изучение этой связи сводится к исследованию особого функционального уравнения, возникающего в алгебраических системах

$$\phi(x\phi(y^{-1}))y = \phi(\phi(x)\phi(y)),$$

дополненного условием

$$\phi(\phi(x)) = x,$$

где ϕ — неизвестная.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим $(n+1)$-мерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению n-мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L, $n \geq 2$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и аналитическую функцию $\chi : R \times L \times L \to R$. Определим проекции $p_1 : M \times M \to M$ и $p_2 : M \times M \to M$, которые на точках действуют так: $p_1 : \langle A, B\rangle \mapsto A$ и $p_2 : \langle A, B\rangle \mapsto B$, где $\langle A, B\rangle$ — произвольная точка в $M \times M$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))), \pi_2(h(p_1)), \pi_2(h(p_2))),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. Эта функция называется метрической или функцией пары точек. На точках

$$f(A,B) = \chi(g(\pi_1(h(p_1(\langle A,B\rangle))),\pi_1(h(p_2(\langle A,B\rangle)))),\pi_2(h(p_1(\langle A,B\rangle))),\pi_2(h(p_2(\langle A,B\rangle)))), \tag{3}$$

где A,B — произвольные две точки из M, причем $\langle A,B\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $A',B' \in U$, $\langle A',B'\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(A') \subset U$, $U(B') \subset U$ такие, что $\langle A,B\rangle \in S_f$, $\forall A \in U(A')$, $\forall B \in U(B')$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1,\ldots,x^n)$, а координату в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (3) принимает следующий вид:

$$f = f(A,B) = \chi(\theta, w_A, w_B), \tag{4}$$

где $g(\pi_1(h(A)),\pi_1(h(B))) = \theta = \theta(x_A^1,\ldots,x_A^n,x_B^1,\ldots,x_B^n)$ — метрическая функция n-мерной геометрии постоянной кривизны:

$$\theta = \frac{\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)^2}{(\varepsilon_1(x_A^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n)^2+\varepsilon)(\varepsilon_1(x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_B^n)^2+\varepsilon)}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon = \pm 1$. $\pi_2(h(A)) = w_A$, $\pi_2(h(B)) = w_B$. Пусть выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (3) в произвольной точке из области определения справедливы неравенства

$$\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \neq 0,\ \frac{\partial\chi}{\partial w_A} \neq 0,\ \frac{\partial\chi}{\partial w_B} \neq 0. \tag{6}$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1). $\lambda(A,e) = A$, $e \in G$ — единица, $A \in U$;

2). $\lambda(\lambda(A,a),b) = \lambda(A,ab)$, для любых $a,b \in G$ и $A \in U$;

3). Для любого $A \in U$ $\lambda(A,a) = A$, только если $a = e$.

Действие $\lambda_a : U \to U'$, определяемое произвольным элементом $a \in G$ (ограничение отображения λ по второму аргументу), называется *движением*, если для любых точек $A,B \in U$ таких, что $\langle A,B\rangle \in S_f$, $\langle\lambda_a(A),\lambda_a(B)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(A),\lambda_a(B)) = f(A,B).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(A)$ и $U(B)$ точек A и B, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают ([11], §1). Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G максимальная и равна $\dim G = (n+1)(n+2)/2$.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (3), являющихся двухточечными инвариантами $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений.

Алгебра Ли группы движений образована операторами ([12], §16):

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_n\partial_{x^n} + W\partial_w, \tag{7}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x^1, \ldots, x^n, w)$, $W = W(x^1, \ldots, x^n, w)$ — аналитические функции в U, $\alpha = 1, \ldots, n$. Через операторы (7) записывается условие локальной инвариантности метрической функции ([12], §17):

$$X(A)f(A,B) + X(B)f(A,B) = 0, \tag{8}$$

которое выполняется в окрестностях $U(A')$ и $U(B')$ произвольных точек A' и B' из U, причём A и B — произвольные точки из $U(A')$ и $U(B')$ соответственно.

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0, \ldots, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (7) ([13], гл. 11):

$$\begin{cases} X_1 = X_1(w) + D_1(X_1)(w)x^1 + \cdots + D_{n+1}(X_1)(w)x^n + \cdots\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = X_n(w) + D_1(X_n)(w)x^1 + \cdots + D_n(X_n)(w)x^n + \cdots\,, \\ W = W(w) + D_1(W)(w)x^1 + \cdots + D_n(W)(w)x^n + \cdots\,, \end{cases} \tag{9}$$

где, например,

$$X_\gamma(w) = X_\gamma(0, \ldots, 0, w),\ D_\alpha(X_\gamma)(w) = \frac{\partial X_\gamma(x^1, \ldots, x^n, w)}{\partial x^\alpha}|_{x=0},$$

$$D_{\alpha\beta}(X_\gamma)(w) = \frac{\partial^2 X_\gamma(x^1, \ldots, x^n, w)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}|_{x=0},$$

$x = (x^1, \ldots, x^n)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$. Основной результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Рассмотрим $(n+1)$-мерное аналитическое многообразие M и произвольную точку $k \in M$ с координатной окрестностью U. Возьмем так же две точки $A', B' \in U$ с окрестностями $U(A')$ и $U(B')$ такие, что $U(A') \cup U(B') \subset U$, причем $\langle A, B\rangle, \langle A', B'\rangle \in S_f, \forall A \in U(A')$, $\forall B \in U(B')$. Тогда метрическая функция $f(A,B)$ вида (4), в аналитическом многообразии M задающая $(n+1)$-мерную геометрию локальной максимальной подвижности, в окрестности $U(A) \times U(B)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании $(\varphi(f) \to f)$ имеет вид:*

$$f(A,B) = [\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2]e^{2w_A + 2w_B}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$.

Геометрия, задаваемая функцией (10) является геометрией локальной максимальной подвижности, то есть группа ее движений имеет размерность $(n+1)(n+2)/2$ [6]. Она называется особым расширением евклидова пространства при $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = \pm 1$, и особым расширением псевдоевклидова пространства в остальных случаях. Эти геометрии относятся к классу геометрий с вырожденной римановой метрикой [14].

2. Доказательство теоремы

Запишем в явном виде условие локальной инвариантности (8) метрической функции (4) относительно $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений:

$$2[p(A,B)]\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta} + W(A)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A} + W(B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B} = 0, \tag{11}$$

где

$$p(A,B)=\\ \Big[\frac{\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)(X_1(A)-X_1(B))+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)(X_n(A)-X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)^2}\\ -\frac{\varepsilon_1x_A^1X_1(A)+\cdots+\varepsilon_nx_A^nX_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n)^2+\varepsilon}-\frac{\varepsilon_1x_B^1X_1(B)+\cdots+\varepsilon_nx_B^nX_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_B^n)^2+\varepsilon}\Big]\theta. \tag{12}$$

Заметим, что выражение (11) выполняется тождественно по координатам точек A и B из некоторых окрестностей $U(A')$ и $U(B')$, причем $U(A')\cup U(B')\subset U$, где $U(k)$ — координатная окрестность. Ниже доказываются леммы из предположения принадлежности входящих в тождество (11) функций классу C^3 в $U(A')\times U(B')$.

Лемма 1. *В некоторой окрестности $U(A')\times U(B')$ произвольной точки $\langle A',B'\rangle\in M\times M$, где $A',B'\in U$ для тождества (11) выполняется неравенство $p(A,B)\neq 0$, причём $A\in U(A')$ и $B\in U(B')$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть для произвольной точки $\langle A,B\rangle$ из $U(A')\times U(B')$ выполняется равенство

$$\frac{\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)(X_1(A)-X_1(B))+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)(X_n(A)-X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)^2}\\ -\frac{\varepsilon_1x_A^1X_1(A)+\cdots+\varepsilon_nx_A^nX_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n)^2+\varepsilon}-\frac{\varepsilon_1x_B^1X_1(B)+\cdots+\varepsilon_nx_B^nX_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_B^n)^2+\varepsilon}=0. \tag{13}$$

Дифференцируя это равенство по переменной w_A и приводя к общему знаменателю, имеем:

$$(\varepsilon_1(x_A^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n)^2+\varepsilon)(\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)X'_{1w_A}+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)X'_{nw_A})-$$

$$-(\varepsilon_1x_A^1X'_{1w_A}+\cdots+\varepsilon_nx_A^nX'_{nw_A})(\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)^2+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)^2)=0.$$

Новое равенство дважды продифференцируем по x_B^1, в результате получим

$$\varepsilon_1x_A^1X'_{1w_A}+\cdots+\varepsilon_nx_A^nX'_{nw_A}=0,$$

следовательно

$$\varepsilon_1(x_A^1-x_B^1)X'_{1w_A}+\cdots+\varepsilon_n(x_A^n-x_B^n)X'_{nw_A}=0.$$

Далее последнее равенство дифференцируем по переменным $x_B^1,\ldots,x_B^n$, в результате имеем $X'_{1w}=0,\ldots,X'_{nw}=0$, то есть $X_m=X_m(x^1,\ldots,x^n)$. Тогда выражение (12) превращается в функциональное уравнение на операторы алгебры Ли группы движений n-мерной геометрии локально максимальной подвижности с метрической функцией (5). Размерность этой группы движений $n(n+1)/2$. Тогда произвольный оператор линейно выражается через $n(n+1)/2$ базисных операторов.

Запишем теперь тождество (11) с учетом (13):

$$W(A)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A}+W(B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B}=0. \tag{14}$$

Пусть сначала $W=0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений геометрии с метрической функцией (4) является линейной комбинацией $n(n+1)/2$ базисных операторов, а должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие.

Пусть теперь $W\neq 0$. Тогда от выражения (14) переходим к тождеству

$$\frac{W(A)}{W(B)}=\varphi(\theta,w_A,w_B), \tag{15}$$

для чего левую и правую части делим на произведение $W(B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, w_A, w_B) = -\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B}/\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A} \neq 0$. Из тождества (15) вытекает $\varphi_\theta = 0$. Тогда $W'_{x^l} = 0$, $\forall l$ или $W = c(w) \neq 0$.

Подставляя найденное в (14), имеем

$$c(w_A)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A} + c(w_B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B} = 0.$$

Вводим замену: $\int dw/c(w) = \overline{w}$. Тогда в новых координатах $W = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений $(n+1)$-мерной геометрии локальной максимальной подвижности с метрической функцией (4) является линейной комбинацией $n(n+1)/2+1$ базисных операторов, которых должно быть $(n+1)(n+2)/2$. Противоречие. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *В некоторой окрестности $U(A')\times U(B')$ произвольной точки $\langle A', B'\rangle \in M\times M$, где $A', B' \in U$ для тождества (11) выполняется неравенство $W \neq 0$, причём $A \in U(A')$ и $B \in U(B')$.*

Лемма 3. *В некоторой окрестности $U(A')\times U(B')$ произвольной точки $\langle A', B'\rangle \in M\times M$, где $A', B' \in U$ для тождества (11) справедливо неравенство:*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n}\right)^2 \neq 0.$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы индексы m, k, l, i, j, s принимают значения $1, \ldots, n$.

Предположим противное, пусть для произвольной точки $\langle A, B\rangle$ из $U(A') \times U(B')$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x^n}\right)^2 = 0,$$

поэтому $W = W(w) \neq 0$.

Тогда в (11) осуществляем замену координат: $\displaystyle\int dw/W(w) = \overline{w}$. Очевидно, в новых координатах $W(\overline{w}) = 1$. В результате (11) примет вид

$$2p(A,B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(A,B)}{\partial \overline{w}_A} + \frac{\partial f(A,B)}{\partial \overline{w}_B} = 0.$$

Деля последнее тождество на ненулевое выражение $2\dfrac{\partial f(A,B)}{\partial \theta}$, получаем функциональное уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} \\ -\frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1 (x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1 (x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x_B^n)^2 + \varepsilon} = \\ = \phi(\theta, \overline{w}_A, \overline{w}_B),\end{gathered} \tag{16}$$

где введено обозначение

$$\phi(\theta, \overline{w}_A, \overline{w}_B) = -\frac{1}{2\theta}\Big(\frac{\partial f(A,B)}{\partial \overline{w}_A} + \frac{\partial f(A,B)}{\partial \overline{w}_B}\Big)/\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta},$$

причем по лемме 1 $\phi \neq 0$.

Дифференцируя (16) по $\overline{w}_A$, а результат по $\overline{w}_B$, получаем $\varphi_{\overline{w}_A\overline{w}_B} = 0$, следовательно $\phi(\theta, \overline{w}_A, \overline{w}_B) = \phi_1(\theta, \overline{w}_A) + \phi_2(\theta, \overline{w}_B) + \phi_3(\theta)$. Подставляя найденное в (16) и дифференцируя результат по $\overline{w}_A$ и по $\overline{w}_B$, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1\overline{w}_A} + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{n\overline{w}_A}}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} \\ -\frac{\varepsilon_1 x_A^1 X'_{1\overline{w}_A} + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X'_{n\overline{w}_A}}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} = \phi_{1\overline{w}_A}(\theta, \overline{w}_A), \\ -\frac{\varepsilon_1(x_B^1 - x_A^1)X'_{1\overline{w}_B} + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n - x_A^n)X'_{n\overline{w}_B}}{\varepsilon_1(x_B^1 - x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n - x_A^n)^2} \\ -\frac{\varepsilon_1 x_B^1 X'_{1\overline{w}_B} + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X'_{n\overline{w}_B}}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = \phi_{2\overline{w}_B}(\theta, \overline{w}_B).\end{gathered} \tag{17}$$

Во втором равенстве из (17) заменяя $B \to A$, получаем $\phi_{2\overline{w}_A}(\theta, \overline{w}_A) = \phi_{1\overline{w}_A}(\theta, \overline{w}_A)$. Вычитая в (17) из первого равенства второе и полагая $\overline{w}_A = \overline{w}_B = \overline{w}$, $Y_l(A) = Y_l(x_1^1, \ldots, x_A^n, \overline{w}) = X'_{l\overline{w}}(A) = \partial X_l(x_1^1, \ldots, x_A^n, \overline{w})/\partial\overline{w}$, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(Y_1(A) - Y_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(Y_n(A) - Y_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} - \\ -\frac{\varepsilon_1 x_A^1 Y_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n Y_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 Y_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n Y_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Вводим сокращающие обозначения:

$$\vartheta = \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2, \psi = \frac{\varepsilon_1 x^1 Y_1 + \cdots + \varepsilon_n x^n Y_n}{\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2 + \varepsilon}.$$

Тогда уравнение (18) можно привести к виду

$$\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(Y_1(A) - Y_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(Y_n(A) - Y_n(B)) = (\psi(A) + \psi(B))\vartheta. \tag{19}$$

Далее дифференцируем (19) по x_A^l, а результат по x_B^k:

$$-\varepsilon_l Y_{lx_B^k} - \varepsilon_k Y_{kx_A^l} = -\psi_{x_A^l} 2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k) + \psi_{x_B^k} 2\varepsilon_l(x_A^l - x_B^l) - 2\varepsilon_l\delta_{kl}(\psi(A) + \psi(B)). \tag{20}$$

Дифференцируя последнее тождество по x_A^l, а результат по x_B^l, получаем при $k \neq l$ $\psi_{x^k x^l} = 0$, а при $k = l$ $\psi_{x^k x^k}(A) + \psi_{x^k x^k}(B) = 0$. Разделяя переменные, имеем $\psi_{x^k x^l} = 0$. Интегрируя последнее, получаем

$$\psi = a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + a_n(\overline{w})x^n + c(\overline{w}).$$

С учетом последнего, уравнение (20) принимает вид:

$$-\varepsilon_l Y_{lx_B^k} - \varepsilon_k Y_{kx_A^l} = -a_l(\overline{w})2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k) + a_k(\overline{w})2\varepsilon_l(x_A^l - x_B^l) - 2\varepsilon_l\delta_{kl}(\psi(A) + \psi(B)).$$

Разделяя переменные, получаем

$$Y_{kx^k} = 2a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + 2a_n(\overline{w})x^n + 2c(\overline{w}),\ Y_{kx^l} = 2a_l(\overline{w})x^k - 2\varepsilon_k\varepsilon_l a_k(\overline{w})x^l + a_{kl}(\overline{w}),$$

где $\varepsilon_k a_{kl}(\overline{w}) + \varepsilon_l a_{lk}(\overline{w}) = 0$, $k \neq l$. Интегрируя, находим

$$Y_k = -\varepsilon_k a_k(\overline{w})(\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) +$$

$$2x^k(a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + a_n(\overline{w})x^n + c(\overline{w})) + a_{kl}(\overline{w})x^l + b_k(\overline{w}).$$

Теперь подставляя найденное в равенство

$$\frac{\varepsilon_1 x^1 Y_1 + \cdots + \varepsilon_n x^n Y_n}{\varepsilon_1 (x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x^n)^2 + \varepsilon} = a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + a_n(\overline{w})x^n + c(\overline{w}),$$

получим $c(\overline{w}) = 0$, $b_k(\overline{w}) = \varepsilon\varepsilon_k a_k(\overline{w})$. Поэтому

$$Y_k = -\varepsilon_k a_k(\overline{w})(\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) +$$

$$2x^k(a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + a_n(\overline{w})x^n) + a_{kl}(\overline{w})x^l + \varepsilon\varepsilon_k a_k(\overline{w}),$$

$$\psi = a_1(\overline{w})x^1 + \cdots + a_n(\overline{w})x^n.$$

Полученные выражения подставляя в (18), имеем

$$\varepsilon[a_1(\overline{w})(x_A^1 - x_B^1) + \cdots + a_n(\overline{w})(x_A^n - x_B^n)] = 0,$$

следовательно $a_1(\overline{w}) = \cdots = a_n(\overline{w}) = 0$. Тогда

$$Y_k = a_{kl}(\overline{w})x^l.$$

С этим выражением возвращаемся в (17):

$$\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(a_{1l}(\overline{w})x_A^l) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(a_{nl}(\overline{w})x_A^l)}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} = \phi_{1\overline{w}}(\theta, \overline{w})$$

или

$$\varepsilon_1 a_{1l}(\overline{w})x_A^l x_B^1 + \cdots + \varepsilon_n a_{nl}(\overline{w})x_A^l x_B^n = \varepsilon_k a_{kl}(\overline{w})x_A^l x_B^k = -\vartheta\phi_{1\overline{w}}(\theta, \overline{w}).$$

Переобозначая точки A и B, имеем $\varepsilon_k a_{kl}(\overline{w})x_B^l x_A^k = \varepsilon_k a_{kl}(\overline{w})x_A^l x_B^k = -\vartheta\phi_{1\overline{w}}(\theta, \overline{w})$. Тогда $Y_k = 0$ и $\phi_1 = \phi_1(\theta)$. Аналогично $\phi_2 = \phi_2(\theta)$.

С учетом найденного функциональное уравнение (16) принимает вид:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B))}{\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2} - \\ - \frac{\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)}{\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)}{\varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon} = \phi(\theta) \neq 0,\end{gathered} \tag{21}$$

где $X_i = X_i(x^1, \ldots, x^n)$.

Заметим, что доказательство леммы проводится в окрестности $U(k)$ точки k, причем система координат в этой окрестности выбрана так, чтобы $k(0, 0, \ldots, 0)$. Точки A и B принадлежат этой окрестности. Будем считать эти точки достаточно близкими к k, то есть полагаем $\varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots \varepsilon_n(x_A^n)^2 = \varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots \varepsilon_n(x_B^n)^2 = 0$. Тогда уравнение (21) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B)) = \\ \varepsilon\vartheta(\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A) + \varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)) + \vartheta\phi(\vartheta),\end{gathered} \tag{22}$$

Решая это уравнение, найдем функцию $\phi(\vartheta)$, а затем с результатом вернемся в (21). Для удобства введем обозначения $\kappa(\vartheta) = \vartheta\phi(\vartheta)$, $P(A) = \varepsilon(\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A))$, $P(B) = \varepsilon(\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B))$.

Дифференцируем последнее равенство по x_A^k и по x_B^k:

$$\begin{gathered}\varepsilon_k(X_k(A) - X_k(B)) + \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1x_A^k} + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{nx_A^k} = \\ = 2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k)(P(A) + P(B)) + \vartheta P'_{x_A^k} + 2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k)\kappa'_\vartheta, \\ -\varepsilon_k(X_k(A) - X_k(B)) - \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)X'_{1x_B^k} - \cdots - \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)X'_{nx_B^k} = \\ = -2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k)(P(A) + P(B)) + \vartheta P'_{x_B^k} - 2\varepsilon_k(x_A^k - x_B^k)\kappa'_\vartheta.\end{gathered}$$

Далее складываем полученные равенства:

$$\varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X'_{1x_A^k} - X'_{1x_B^k}) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X'_{nx_A^k} - X'_{nx_B^k}) = \vartheta(P'_{x_A^k} + P'_{x_B^k}).$$

Это функциональное уравнение решая как (19), получаем

$$\begin{array}{c} P'_{x^k} = \varepsilon(\sum_m \varepsilon_m x^m X_m)'_{x^k} = a_1^k x^1 + \cdots + a_n^k x^n + c^k, \\ X'_{mx^k} = -\varepsilon_m a_m^k(\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2) + \\ +2x^m(a_1^k x^1 + \cdots + a_n^k x^n + c^k) + \sum_l a_{ml}^k x^l + b_m^k, \\ X''_{mx^k x^s} = -2\varepsilon_m\varepsilon_s a_m^k x^s + 2\delta_{ms}(a_1^k x^1 + \cdots + a_n^k x^n + c^k) + 2a_s^k x^m + a_{ms}^k, \\ X'''_{mx^k x^s x^q} = -2\varepsilon_m\varepsilon_s a_m^k \delta_{sq} + 2\delta_{ms} a_q^k + 2a_s^k \delta_{mq}, \end{array} \tag{23}$$

причем $c^k, a_i^k, b_i^k, a_{ij}^k = \mathrm{const}$, $\varepsilon_m a_{ml}^k + \varepsilon_l a_{lm}^k = 0$, $m \neq l$, δ_{ij} — симметричный символ Кронекера. Из равенств $X''_{mx^k x^s} = X''_{mx^s x^k}$, $X'''_{mx^k x^s x^m} = X'''_{mx^s x^k x^m}$ при условии $s \neq m$ вытекают дополнительные соотношения $a_s^k = a_k^s$, $a_{ms}^k = a_{mk}^s$.

Выше введенное обозначение для P продифференцируем три раза по x^k:

$$\begin{array}{c} P = \varepsilon\sum_i \varepsilon_i x^i X_i,\ P'_{x^k} = \varepsilon(\varepsilon_k X_k + \sum_i \varepsilon_i x^i X'_{ix^k}),\ P''_{x^k x^k} = \varepsilon(2\varepsilon_k X'_{kx^k} + \sum_i \varepsilon_i x^i X''_{ix^k x^k}), \\ P'''_{x^k x^k x^k} = \varepsilon(3\varepsilon_k X''_{kx^k x^k} + \sum_i \varepsilon_i x^i X'''_{ix^k x^k x^k}). \end{array} \tag{24}$$

Подставляем в последнее равенство системы (24) производные из (23):

$$0 = 6\varepsilon_k\Big(\sum_i a_i^k x^i + c^k\Big) - 2\varepsilon_k\sum_i a_i^k x^i + 4\varepsilon_k a_k^k x^k.$$

Из данного равенства, очевидно, следует $c^k = a_i^k = 0$. Далее идем в третье равенство системы (24):

$$0 = 2\varepsilon_k\Big(\sum_i a_{ki}^k x^i + b_k^k\Big) + \sum_i \varepsilon_i a_{ik}^k x^i.$$

Тогда $a_{ki}^k = b_k^k = 0$. Поэтому

$$X_m = 1/2\sum_{k,l} a_{ml}^k x^l x^k + \sum_k b_m^k x^k + b_m,\ P = \mathrm{const}.$$

Потом с найденным возвращаемся в первое равенство из (24):

$$P = \varepsilon\left(1/2\sum_{k,m,l}\varepsilon_m a_{ml}^k x^l x^k x^m + \sum_{k,m}\varepsilon_m b_m^k x^k x^m + \varepsilon_m b_m x^m\right) = \mathrm{const}.$$

Значит $\varepsilon_m b_m^k + \varepsilon_k b_k^m = 0$, $b_m = 0$, $P = 0$, $\varepsilon_m a_{ml}^k + \varepsilon_l a_{lk}^m + \varepsilon_k a_{km}^l = 0$. Воспользовавшись выше доказанными равенствами $a_{kl}^m + a_{km}^l = 0$ и $\varepsilon_l a_{lk}^m + \varepsilon_k a_{kl}^m = 0$, получаем $a_{kl}^m = 0$. В итоге будем иметь

$$X_m = \sum_k b_m^k x^k,\ P = \mathrm{const},\ \varepsilon_m b_m^k + \varepsilon_k b_k^m = 0.$$

И, наконец, найденное подставляя в (22), имеем $\phi(\vartheta) = 0$. Возвращаясь к общей ситуации, идем в функциональное уравнение (16), в котором $\phi = 0$. Противоречие. Лемма 3 доказана. □

Приступим теперь к доказательству теоремы.

Функциональное уравнение (11) удобно переписать в виде:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)(X_1(A) - X_1(B)) + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)(X_n(A) - X_n(B)) \\ -\vartheta(A,B)[\varepsilon_1 x_A^1 X_1(A) + \cdots + \varepsilon_n x_A^n X_n(A)]/\vartheta(A) \\ -\vartheta(A,B)[\varepsilon_1 x_B^1 X_1(B) + \cdots + \varepsilon_n x_B^n X_n(B)]/\vartheta(B) \\ +\vartheta(A)\vartheta(B)[F_1 W(A) + F_2 W(B)] = 0, \end{array} \tag{25}$$

где введены обозначения

$$\vartheta(A) = \varepsilon_1(x_A^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n)^2 + \varepsilon,\ \vartheta(B) = \varepsilon_1(x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_B^n)^2 + \varepsilon,$$

$$\vartheta(A,B) = \varepsilon_1(x_A^1 - x_B^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_A^n - x_B^n)^2,\ \theta = \vartheta(A,B)/\vartheta(A)\vartheta(B),$$

а также

$$F_1(\theta, w_A, w_B) = \frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A}/2\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta},\ F_2(\theta, w_A, w_B) = \frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B}/2\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta}. \qquad (26)$$

Из аналитичности функции (4) и справедливости неравенств (6) в $U(A) \times U(B)$, следует аналитичность функций (26). Тогда имеем разложения в ряд Тейлора ([13], гл. 11):

$$\begin{array}{c} F_1(\theta, w_A, w_B) = f_1(w_A, w_B) + D_1(f_1)(w_A, w_B)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(w_A, w_B)\theta^2 + \cdots \\ F_2(\theta, w_A, w_B) = f_2(w_A, w_B) + D_1(f_2)(w_A, w_B)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(w_A, w_B)\theta^2 + \cdots, \end{array} \qquad (27)$$

где, например,

$$f_1(w_A, w_B) = F_1(0, w_A, w_B),\ D_1(f_1)(w_A, w_B) = \frac{\partial F_1(\theta, w_A, w_B)}{\partial \theta}|_{\theta=0},$$

$$f_2(w_A, w_B) = F_2(0, w_A, w_B),\ D_1(f_2)(w_A, w_B) = \frac{\partial F_2(\theta, w_A, w_B)}{\partial \theta}|_{\theta=0}.$$

Разложения (9) и (27) подставляем в тождество (25) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных $x_A^1, \ldots, x_A^n,\ x_B^1, \ldots, x_B^n$. Эта задача существенно упрощается с применением пакета программ MAPLE 17 ([15], гл. 8).

Из леммы 3 вытекает, что в последовательности

$$D_1(W)(w),\ D_2(W)(w), \ldots, D_n(W)(w),\ D_{11}(W)(w),\ D_{12}(W)(w), \ldots$$

есть хотя-бы один ненулевой член. Сравнивая тогда коэффициенты в (25), имеем

$$D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_A)D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_A, w_B) = 0,\ D_{\alpha_1\alpha_2\cdots}(W)(w_B)D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_A, w_B) = 0,$$

где $\alpha_k = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, $\gamma_l = 1$, $l = 2, 3, 4, \ldots$ Тогда

$$D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_1)(w_A, w_B) = D_{\gamma_1\gamma_2\cdots}(f_2)(w_A, w_B) = 0.$$

Поэтому система (27) принимает вид:

$$\begin{array}{c} F_1(\theta, w_A, w_B) = f_1(w_A, w_B) + D_1(f_1)(w_A, w_B)\theta, \\ F_2(\theta, w_A, w_B) = f_2(w_A, w_B) + D_1(f_2)(w_A, w_B)\theta. \end{array}$$

Из сравнения коэффициентов, также получаем

$$\begin{array}{c} f_1(w_A, w_B) = 0,\ D_1(f_1)(w_A, w_B) = 1/\psi(w_A), \\ f_2(w_A, w_B) = 0,\ D_1(f_2)(w_A, w_B) = 1/\psi(w_B). \end{array}$$

Подставляя найденное в (26), получаем систему дифференциальных уравнений

$$2\theta\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta} = \psi(w_A)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_A},\ 2\theta\frac{\partial f(A,B)}{\partial \theta} = \psi(w_B)\frac{\partial f(A,B)}{\partial w_B},$$

решая которую, находим

$$f(A,B) = \chi(\ln|\theta| + \varphi(w_A) + \varphi(w_B)).$$

Вводя переобозначение координат $e^{\varphi(w)}/|\varepsilon_1(x^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x^n)^2 + \varepsilon| \to e^{2w}$ и масштабное преобразование $f \to e^{\chi^{-1}(f)}$, получаем метрическую функцию (10). Теорема доказана. $\square$

Заключение

Выше поставленная задача об аналитическом вложении геометрий постоянной кривизны полностью решена. Её можно распространить на класс дифференцируемых функция из C^3. Эта задача тогда сведётся к решению функционального уравнения (25), которое надо дифференцировать, а затем разделять переменные.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность профессору Михайличенко Геннадию Григорьевичу за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bulletin of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 6, №3. P. 357–381. DOI. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0
2. Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.
3. Кыров В. А. Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 741–758. DOI. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060
4. Кыров В. А. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Труды института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 167–181. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181
5. Кыров В. А. Аналитическое вложение геометрий постоянной кривизны на псевдосферей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, № 3. С. 246–257. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257
6. Кыров В. А. Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий // Челяб. физ.-матем. журн. 2018. Т. 3, № 4. С. 408–420. DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13403
7. Михайличенко Г. Г., Малышев В. М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения // Известия вузов. Математика. 2001. № 7. С. 77–79.
8. Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.
9. Симонов А. А. Обобщение точно транзитивных групп // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178. DOI. https://doi.org/10.4213/im8214
10. Симонов А. А. Псевдоматричные группы и физические структуры // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 1. С. 211–226.
11. Михайличенко Г. Г. Математические основы и результаты теории физических структур. – Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2016.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1963.

14. Белько И. В. О вырожденных римановых метриках// Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 5. С. 767–774.

15. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчётах. – М.: ДМС Пресс, 2014.

REFERENCES

1. Thurston, W. P. 1982, “Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 6, no. 3, pp. 357–381. DOI. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1982-15003-0

2. Berdinsky, D. A., Taimanov, I. A. 2005, “Surfaces in three-dimensional Lie groups”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 46, no. 6, pp. 1005–1019. DOI. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0096-9

3. Kyrov, V. A. 2018, “The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries”, *Siberian Electronic Mathematical Report*, vol. 15, pp. 741–758. (Russian) DOI. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.060

4. Kyrov, V. A. 2017, “The analytical embedding method of Euclidean and pseudo-Euclidean geometries”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAN*, vol. 23, no. 2, pp. 167–181. (Russian) DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181

5. Kyrov, V. A. 2019, “Analytical embedding of geometries of constant curvature on the pseudosphere”, *Proceedings of Saratov University. New Series. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 19, no. 3, pp. 246–257. (Russian) DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-246-257

6. Kyrov, V. A. 2018, “Embedding of multidimensional singular extensions of pseudo-Euclidean geometries”, *Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*, vol. 3, no. 4, pp. 408–420. (Russian) DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13403

7. Mikhailichenko, G. G., Malyshev, V. M. 2001, “Phenomenological symmetry and functional equations”, *Russian Mathematics*, vol. 45, no. 7, pp. 75–76.

8. Mikhailichenko, G. G. 1972, “The solution of functional equations in the theory of physical structures”, *Soviet Mathematics. Doklady*, vol. 13, pp. 1377–1380. DOI. https://zbmath.org/?q=an:0268.50003

9. Simonov, A. A. 2014, “On generalized sharply n-transitive groups”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 78, no. 6, pp. 1207–1231. DOI. https://doi.org/10.1070/IM2014v078n06ABEH00272

10. Simonov, A. A. 2015, “Pseudomatrix groups and physical structures”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 56, no. 1, pp. 177–190. DOI. https://doi.org/10.1134/S0037446615010176

11. Mikhailichenko, G. G. 2016, “Mathematical foundations and results of the theory of physical structures”, Gorno-Altaisk: Gorno-Altaisk State University. (Russian)

12. Ovsyannikov, L. V. 1978, “Group analysis of differential equations”, M.: Nauka. (Russian)

13. Fikhtengol’ts, G. M. 1963, “A course of differential and integral calculus. Vol. 2”, M.: Fizmatgiz. (Russian)

14. Bel'ko, I. V. 1975, "Degenerate Riemannian metrics", *Mathematical Notes*, vol. 18, no. 5, pp. 1046–1049. DOI. ttps://doi.org/10.1007/BF01153574

15. D'yakonov, V. P. 2014, "Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations)", M.: DMS Press. (Russian)

Получено 22.11.2021
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.812.4 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-147-155

Связь между кольцом Ad^*-инвариантных полиномов и инвариантами Жордана — Кронекера нильпотентных алгебр Ли малой размерности[1]

В. В. Пономарёв

Пономарёв Владимир Владимирович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: boba1997@yandex.ru

Аннотация

Эта статья посвящена исследованию взаимосвязи между инвариантами Жордана — Кронекера и свободной порождённостью кольца Ad^*-инвариантных полиномов алгебр Ли размерности меньше или равной семи. На коалгебре алгебры Ли можно задать скобку Пуассона с постоянными коэффициентами, а также скобку Ли-Пуассона. Таким образом, любая пара элементов коалгебры Ли задаёт однопараметрическое семейство кососимметричных билинейных форм, называемое пучком. Для двух любых форм из пучка можно построить базис, в котором они одновременно примут блочно-диагональный вид с блоками двух типов. Этот вид называется разложением Жордана — Кронекера. При этом количество и размеры блоков будут одинаковыми для любой пары форм из пучка. Алгебраическим типом пучка называют количество и размеры блоков в разложении Жордана — Кронекера любой его пары. Почти все пучки одной алгебры Ли имеют одинаковый алгебраический тип, который является инвариантом Жордана — Кронекера данной алгебры Ли. Имеется теорема, которая утверждает, что для нильпотентной алгебры Ли существование двух кронекеровых пучков одного ранга, но различного алгебраического типа означает, что кольцо Ad^*-инвариантных полиномов обязано быть несвободно порождённым. В данной работе рассмотрены все кронекеровы алгебры Ли (из известного списка семимерных нильпотентных алгебр Ли), для которых имеется возможность существования кронекеровых пучков того же ранга, что и ранг алгебры. В результате проверки был получен отрицательный ответ на вопрос о том, верно ли обратное утверждение к сформулированной теореме.

Ключевые слова: алгебра Ли, инварианты Жордана — Кронекера, инварианты коприсоединённого представления.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. В. Пономарёв. Связь между кольцом Ad^*-инвариантных полиномов и инвариантами Жордана — Кронекера нильпотентных алгебр Ли малой размерности // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 147–155.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.812.4 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-147-155

Connection between the ring of Ad^*-invariant polynomials and the Jordan–Kronecker invariants of nilpotent low-dimensional Lie algebras

V. V. Ponomarev

Ponomarev Vladimir Vladimirovich — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: boba1997@yandex.ru

Abstract

This article is concerned with the study of connections between the Jordan–Kronecker invariants and free generatedness of the ring of Ad^*-invariant polynomials of Lie algebras of dimension less than or equal to seven. At the dual space of the Lie algebra it is possible to define the Poisson bracket with the constant coefficients and the Lie-Poisson bracket. Thus, any pair of points from this dual space defines an one-parameter family of skew-symmetric bilinear forms, called a pencil. For any two bilinear forms from the pencil there exists a basis, in which their matrices can be simultaneously reduced to the block-diagonal form with the blocks of two types. This form is called the Jordan-Kronecker decomposition. At the same time, the number and sizes of blocks will be the same for any pair of bilinear forms from the pencil. The algebraic type of a pencil is the number and sizes of blocks in the Jordan-Kronecker decomposition of any pairs of bilinear forms from the pencil. Almost all pencils of the same Lie algebra have the same algebraic type, which is the Jordan-Kronecker invariant of a given Lie algebra. There is a theorem that states that for a nilpotent Lie algebra, the existence of two Kronecker pencils of the same rank but of different algebraic types means that the ring of Ad^*-invariant polynomials must be non-freely generated. In this paper, we considered all Kronecker Lie algebras (from the certain list of 7-dimensional nilpotent Lie algebras) for which there was a possibility of the existence of a Kronecker pencils of the same rank as the rank of the algebra. As a result of the research, a negative answer was obtained to the question of whether the converse statement to the previous theorem is true.

Keywords: Lie algebra, Jordan–Kronecker invariants, coadjoint invariants.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. V. Ponomarev, 2022, “Connection between the ring of Ad^*-invariant polynomials and the Jordan–Kronecker invariants of nilpotent low-dimensional Lie algebras” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 147–155.

1. Введение

Классификация алгебр Ли — одна из основных задач теории групп и алгебр Ли. Для больших размерностей не существует списков алгебр Ли. Однако, в случае малых размерностей мы имеем некоторое количество списков алгебр Ли определённых типов. Их свойства изучались многими геометрами и алгебраистами. Для нильпотентных алгебр Ли мы знаем полный список алгебр размерности меньшей или равной семи [9]. А. Ю. Грознова в своей дипломной работе [10] вычислила инварианты Жордана — Кронекера для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли. С другой стороны, статья [14], написанная А. Оомсом, посвящена изучению свойств колец инвариантов коприсоединённого представления тех же самых алгебр Ли. То, что списки алгебр в статьях [14] и [9] совпадают, доказывается в [12]. Вычисления Грозновой показали, что для некоторых алгебр можно найти пары точек, задающие пучки одного ранга, но разного алгебраического типа. Это натолкнуло А. В. Болсинова на мысль, что существование кронекеровых пучков разного алгебраического типа и одинакового ранга может являться характеристическим свойством для несвободной порождённости колец инвариантов коприсоединённого представления для кронекеровых нильпотентных алгебр Ли. Таким образом, эта статья посвящена поиску таких пучков для семимерных алгебр Ли кронекерова типа, имеющих несвободно порождённое кольцо Ad*-инвариантных полиномов. Результаты этого исследования сформулированы в Теореме 3, а также в разделе 4.

2. Основные определения и свойства

Для начала, давайте вспомним некоторые определения, которые мы будем использовать далее в этой статье. Читатели, желающие узнать подробнее о теории инвариантов Жордана — Кронекера могут прочесть [4, 1], для ознакомления с историей и предпосылками к данным исследованиям можно ознакомиться с [3, 5, 11, 13], а применения данной теории можно увидеть в [2, 6, 7, 8].

На коалгебре g^* алгебры Ли g зададим *скобку Ли–Пуассона*

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \langle x, [df(x), dg(x)] \rangle = \mathcal{A}_x(f, g),$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, а x — точка на коалгебре, и *скобку Пуассона с постоянными коэффициентами*

$$\{f, g\}_a(x) = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \langle a, [df(x), dg(x)] \rangle = \mathcal{A}_a(f, g),$$

где a — фиксированная точка на коалгебре.

Следующее утверждение называют теоремой Жордана — Кронекера.

Теорема 1 ([4, 15]). *Для двух кососимметричных билинейных форм A и B на одном конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем существует базис этого пространства, в котором формы одновременно приводятся к блочно-диагональному виду со следующими типами блоков:*

1) жорданов блок с собственным значением λ

$$A_i : \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^T(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_i : \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

2) жорданов блок с собственным значением ∞

$$A_j : \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_j : \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J(0) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

3) кронекеров блок

$$A_k:\begin{pmatrix} & & & & & 1 & & \dots & & 0\\ & & & & & & 1 & \dots & & 0\\ & & & & & & & \dots & & \\ & & & & & & & \dots & 1 & 0\\ -1 & & \dots & & & & & & & \\ & -1 & \dots & & & & & & & 0\\ & & \dots & & & & & & & \\ & & \dots & & -1 & & & & & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_k:\begin{pmatrix} & & & & & 0 & 1 & \dots & & \\ & & & & & & & \dots & & \\ & & & & & 0 & & \dots & 1 & \\ & & & & & 0 & & \dots & & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & & \dots & & & 0 & & & & \\ & & \dots & & & & & & & \\ & & \dots & -1 & & 0 & & & & \\ & & \dots & & -1 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Для любой фиксированной пары точек (x, a) существует однопараметрическое семейство $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$, называющееся *пучком* скобок Пуассона, заданным парой точек (x, a). Количество и размеры блоков каждого вида в разложении Жордана — Кронекера пары кососимметричных билинейных форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ называются *алгебраическим типом* пучка.

Утверждение 1 ([4]). *Существует непустое открытое в топологии Зарисского множество U, лежащее в $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, такое, что для любой пары (x, a) из U алгебраические типы пучков $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$ будут одинаковыми.*

Это утверждение означает, что алгебраический тип почти всех пучков одинаков. Поэтому мы можем называть алгебраический тип пучка, заданного парой точек общего положения, *инвариантами Жордана — Кронекера* алгебры Ли.

Пучок, у которого в разложении Жордана — Кронекера форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ присутствуют только кронекеровы блоки, называется *кронекеровым пучком.* Аналогично, алгебра Ли, у которой пучок, заданный парой точек общего положения, является кронекеровым, называется *кронекеровой алгеброй.*

Тривиальный кронекеров блок — это нулевой 1×1 блок. Следовательно, мы получаем:

Утверждение 2 ([4]). *Число тривиальных кронекеровых блоков равно размерности общего ядра (подпространства ковекторов, принадлежащих ядру любой скобки из пучка).*

Рангом пучка будем называть максимальный ранг билинейных форм $\mathcal{A}_x - \lambda\mathcal{A}_a$, составляющих пучок. *Рангом алгебры*, соответственно, назовём ранг пучка, заданного точками общего положения.

Утверждение 3 ([4]). *Число кронекеровых блоков равно корангу пучка.*

Теорема 2. *Для нильпотентной кронекеровой алгебры Ли существование двух кронекеровых пучков одного ранга, но различного алгебраического типа означает, что кольцо* Ad**-инвариантных полиномов является несвободно порождённым.*

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием Remark 7 и Theorem 9 из [4]. Для их применения необходимо проверить, что данные алгебры Ли являются унимодулярными и их фундаментальный полуинвариант является инвариантом. Но в статье [4] мы можем видеть, что у семимерных кронекеровых алгебр Ли отсутствует фундаментальный полуинвариант, а унимодулярность данных алгебр Ли следует из их нильпотентности. Таким образом, для них работает вторая чать из Remark 7, из которой следует, что пункт (2) из Theorem 9 не выполняется. Theorem 9 же утверждает, что для унимодулярных алгебр, для которых фундаментальный полуинвариант является инвариантом, пункт (2) эквивалентен свободной порождённости кольца Ad*-инвариантных полиномов. Таким образом, получается, что данные алгебры не могут обладать свободнопорождённым кольцом Ad*-инвариантных полиномов. □

3. Постановка задачи и алгоритм её решения

Перейдем к рассмотрению примеров семимерных нильпотентных алгебр Ли, связанных со следующей гипотезой.

Гипотеза. *Для нильпотентной кронекеровой алгебры Ли несвободная порождённость кольца* Ad**-инвариантных полиномов означает существование по крайней мере двух пар точек* (x, a)*, таких что заданные ими пучки являются кронекеровыми и имеют одинаковый ранг, но различный алгебраический тип.*

Алгебраический тип пучка будем обозначать набором чисел, задающих размеры блоков в разложении Жордана — Кронекера: $k_1\ k_2\ \ldots\ k_n$.

Утверждение 4. *Для семимерных алгебр Ли кронекерова типа возможны только следующие алгебраические типы пучков:*

$$1\,1\,1\,1\,1\,1\,1, \qquad 1\,1\,1\,1\,3, \qquad 1\,1\,5, \qquad 1\,3\,3, \qquad 7.$$

Как можно заметить из предыдущего утверждения и Утверждения 2, мы можем найти две пары одного ранга, но с различными алгебраическими типами только для алгебр с инвариантами Жордана — Кронекера 1 3 3, потому что только алгебры ранга 4 имеют два возможных набора инвариантов, а размерность общего ядра для пучков, заданных некоторыми специальными парами точек, не может быть меньше, чем в случае пар точек общего положения.

Замечание 1. *Аналогично, для кронекеровых алгебр Ли размерности меньше семи две возможности алгебраических типов существуют только в случае шестимерных алгебр ранга 4. Соответственно, мы можем найти две пары одного ранга, но с различными алгебраическими типами только для алгебр с инвариантами Жордана — Кронекера 3 3. Однако из [10] мы знаем, что алгебр Ли с такими инвариантами Жордана — Кронекера не существует, а значит, минимальная размерность, для которой Гипотеза имеет смысл, равна семи.*

Таким образом, мы можем сказать, что в общем случае Гипотеза неверна, так как существуют примеры нильпотентных алгебр Ли с несвободно порождённым кольцом Ad*-инвариантных полиномов, но имеющие инварианты Жордана — Кронекера 1 1 1 1 3. Однако полезно проверить это утверждение для алгебр ранга 4.

Как мы можем увидеть в [10], не существует семимерных нильпотентных алгебр Ли с инвариантами Жордана — Кронекера 1 1 5. Это означает что нам надо проверить все семимерные нильпотентные алгебры Ли с несвободно порождённым кольцом Ad*-инвариантных полиномов ранга четыре. Таких алгебр 11 штук.

Нам надо найти по краней мере два пучка различных алгебраических типов 1 3 3 и 1 1 5. Опишем алгоритм их нахождения.

Рассмотрим в качестве первого пучка любой пучок общего положения. Его алгебраический тип 1 3 3.

Теперь, если мы запишем тензор Пуассона пучка в матричном виде, то увидим, что он зависит от координат точек (x, a) и от параметра λ. Изменяя координаты точек, мы должны найти пару, у которой в общем ядре лежат два вектора (или два столбца нулей в матрице), а ранг равен четырём для любого λ.

Рассмотрим некоторые типичные примеры. Алгебры Ли будем записывать в виде (X,Y), где X — номер алгебры из статьи [14], а Y — соответствующее ей обозначение из статьи [9].

Пример 1. Алгебра Ли (152, 12357A).

Пучки общего положения 1 3 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & x_7-\lambda a_7 & 0\\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_6+\lambda a_6 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0\\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $x_7 = a_7 = 0$, то тип пучка 1 1 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0\\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0\\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае решение можно просто заметить, однако это не так легко для других матриц.

Пример 2. Алгебра Ли (147, 1357B).

$$\begin{pmatrix} 0 & x_4-\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0\\ -x_4+\lambda a_4 & 0 & x_5-\lambda a_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0\\ -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко увидеть, что последний вектор базиса лежит в общем ядре. Это значит, что нам достаточно найти ещё один такой вектор. Чтобы это сделать, мы умножим матрицу тензора Пуассона справа на столбец неопределённых коэффициентов $(a, b, c, d, e, f, 0)$ и получим систему линейных уравнений на эти коэффициенты. Эта система не должна зависеть от λ, поэтому мы приравниваем сумму коэффициентов при λ к нулю и добавляем новые уравнения в систему. Теперь у нас имеется 12 уравнений на 6 переменных.

Некоторые уравнения решаются моментально, так как имеют тривиальный вид: $ax = 0$. Ограничивая исходную систему на существенные переменные, мы получаем условие существования единственного решения новой системы. Далее, необходимо проверить, что пучки точек, удовлетворяющих этому условию, имеют кронекеров тип.

Ниже приведена матрица линейной системы уравнений для Примера 2 (только на переменные b, d, e, f, так как $a = c = 0$):

$$\begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_7 & 0\\ -x_5 & -x_7 & 0 & x_7\\ a_4 & a_5 & a_7 & 0\\ -a_5 & -a_7 & 0 & a_7 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $(x_5a_7 - x_7a_5)^2$. Следовательно, решение существует, если $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$. Однако, при $\lambda = \frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ ранг равен двум, что означает, что эти пучки больше не кронекерова типа и мы не можем найти пучки алгебраического типа 1 1 5. Таким образом, на самом деле Пример 2 — это контрпример к Гипотезе.

Пример 3. Алгебра Ли (149, 12457K).

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3-\lambda a_3 & x_4-\lambda a_4 & x_7-\lambda a_7 & x_6-\lambda a_6 & x_7-\lambda a_7 & 0 \\ -x_3+\lambda a_3 & 0 & x_5-\lambda a_5 & x_6-\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_4+\lambda a_4 & -x_5+\lambda a_5 & 0 & x_7-\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & -x_6+\lambda a_6 & -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6+\lambda a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7+\lambda a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Давайте рассмотрим уравнения для Примера 3 (только на переменные b, c, d, e, f, так как $a = 0$):

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_7 & x_6 & x_7 \\ 0 & x_5 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_7 & 0 & 0 \\ -x_6 & -x_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & a_7 & a_6 & a_7 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ -a_5 & 0 & a_7 & 0 & 0 \\ -a_6 & -a_7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эту систему можно разложить на две подсистемы размера 3×3 на переменные b, c, d. В общем случае, они имеют одномерное пространство решений, так что мы можем выразить b и c через d:

$$\frac{a_7}{a_5}d = b = \frac{x_7}{x_5}d, \qquad -\frac{a_6}{a_5}d = c = -\frac{x_6}{x_5}d.$$

Таким образом, решение существует, если $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но если приравнять это число к λ, то ранг упадёт до двух и поэтому Пример 3 тоже оказывается контрпримером.

В итоге мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Среди семимерных нильпотентных кронекеровых алгебр Ли, у которых кольцо* Ad*-*инвариантных полиномов не является свободно порождённым, есть ровно три алгебры, для которых существуют пары точек с пучками одного ранга, но различного алгебраического типа. Для остальных алгебр таких пар не существует.*

4. Заключение

Таким образом, исходная гипотеза была опровергнута для нильпотентных алгебр Ли размерности не больше семи. В случае размерностей строго меньше семи не существует нильпотентных кронекеровых алгебр, для которых была бы возможность найти два кронекеровых пучка одного ранга, но разного алгебраического типа.

Для семимерных алгебр Ли нашлось 11 претендентов на существование таких пучков, причём только у трёх из них такие пучки действительно существуют. Ниже приведён список этих алгебр и результатами работы алгоритма, описанного в предыдущем разделе.

141, 123457E: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таком λ ранг равен 2;
142, 12457B: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таком λ ранг равен 2;
144, 13457F: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ или $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таких λ ранг равен 2;
145, 1357I: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$ или $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_6}{a_6}$, но при таких λ ранг равен 2;
146, 123457D: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$, но при таком λ ранг равен 2;
147, 1357B: Решение существует при $\frac{x_7}{a_7} = \frac{x_5}{a_5}$, но при таком λ ранг равен 2;
149, 12457K: Решение существует при $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но при таком λ ранг равен 2;

150, 12457F: Решение существует при $\frac{x_5}{a_5} = \frac{x_6}{a_6} = \frac{x_7}{a_7}$, но при таком λ ранг равен 2;
152, 12357A: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$;
153, 123457H: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$;
154, 12357B: Существует пучок алгебраического типа 1 1 5 при $x_7 = a_7 = 0$.

Вычисления для первых пяти алгебр в этом списке получаются аналогичными Примеру 2, занимающему шестое место в приведенном выше списке. Вычисления для алгебры Ли с номером 150 аналогичны Примеру 3, а для последних двух алгебр Ли аналогичны Примеру 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V., Kozlov I. K. Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials // arXiv:1407.1878. 2014.

2. Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems // Regul. Chaotic Dyn. 2009. Vol. 14, №4-5. P. 431–454.

3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. // Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет». 1999. 444.

4. Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. 2016. Vol. 21, №1. P. 51 - 86.

5. Weierstrass K. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen formen // Monatsh. Akad. Wiss., Berlin. 1867. P. 310–338.

6. Gelfand I. M., Zakharevich I. Webs, Veronese curves, and bi-Hamiltonian systems // J. Funct. Anal. 1991. Vol. 99, №1. P. 150–178.

7. Gelfand I. M., Zakharevich I. On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure// The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkh¨auser Boston, Boston, MA. 1993. P. 51–112.

8. Gelfand I. M., Zakharevich I. Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures // Selecta Math. 2000. New Series Vol. 6, №2. P. 131–183.

9. Gong M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algibraically Closed Fields and R)// PhD thesis, University of Waterloo, Ontario. 1998.

10. Грознова А. Ю. Вычисление инвариантов Жордана — Кронекера для алгебр Ли малых размерностей // Дипломная работа, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Механико-Математический факультет. 2018.

11. Kronecker L. Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen // S.-B. Akad., Berlin. 1890. P. 763–776.

12. Magnin L. Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7// J. Geom. Phys. 1986. Vol. 3, №1. P. 119–144.

13. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. 42:2. 396–415.

14. Ooms A. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven// Journal of Algebra. 2012. №365. P. 83 - 113.

15. Thompson R. C. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra and its Appl. 1991. Vol. 147. P. 323–371.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V., Kozlov, I. K. 2014. “Jordan–Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials“, arXiv:1407.1878.

2. Bolsinov, A. V., Oshemkov, A. A. 2009. “Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems“, *Regul. Chaotic Dyn.*, vol. 14, no. 4-5, pp. 431–454.

3. Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T. 1999. *Integriruemye gamil'tonovy sistemy. Geometriya, topologiya, klassifikaciya. Tom 1.* [Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, topology, classification. Vol. 1], Izhevsk : Izdatel'skij dom «Udmurtskij universitet». pp. 444.

4. Bolsinov, A. V., Zhang, P. 2016. “Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras“, *Transformation Groups.*, vol. 21, no. 1, pp. 51 - 86.

5. Weierstrass, K. 1867. “Zur Theorie der bilinearen und quadratischen formen“, *Monatsh. Akad. Wiss., Berlin.*, pp. 310–338.

6. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 1991. “Webs, Veronese curves, and bi-Hamiltonian systems“, *J. Funct. Anal.*, vol. 99, no. 1, pp. 150–178.

7. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 1993. “On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure“, *The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkh ̈auser Boston, Boston, MA.*, pp. 51–112.

8. Gelfand, I. M., Zakharevich, I. 2000. “Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures“, *Selecta Math.*, New Series vol. 6, no. 2, pp. 131–183.

9. Gong, M.-P. 1998. “Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algibraically Closed Fields and R,“), *PhD thesis, University of Waterloo, Ontario.*

10. Groznova, A. Yu. 2018. “Calculation of Jordan-Kronecker invariants for Lie algebras of small dimension“, *Diploma work, Lomonosov Moscow State University, Moscow.*

11. Kronecker, L. 1890. “Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen“, *S.-B. Akad., Berlin.*, pp. 763–776.

12. Magnin, L. 1986. “Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7“, *J. Geom. Phys.*, vol. 3, no. 1, pp. 119–144.

13. Mischenko, A. S., Fomenko, A. T. 1978. “Euler equations on finite-dimensional Lie groups“, *Math. USSR–Izv.*, vol. 12, no. 2, pp. 371–389

14. Ooms, A. 2012. “The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven“, *Journal of Algebra.*, no. 365, pp. 83 - 113.

15. Thompson, R. C. 1991. “Pencils of complex and real symmetric and skew matrices“, *Linear Algebra and its Appl.*, vol. 147, pp. 323–371.

Получено 09.12.2021
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-156-168

Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях с растущей разностью

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для количества простых чисел $p_{\leqslant} x_1$, $p_2 \leqslant x_2$ таких, что $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$, $(al,q)=1$, при $q \leqslant x^{æ_0}$, $x_1 \geqslant x^{1-\alpha}$, $x_2 \geqslant x^{\alpha}$,

$$æ_0 = \frac{1}{2,5+\theta+\varepsilon}, \qquad \alpha \in \left[(\theta+\varepsilon)\,\frac{\ln q}{\ln x}, 1-2,5\frac{\ln q}{\ln x}\right],$$

где $\theta = 1/2$, если q — свободное от кубов, $\theta = 5/6$ в противном случае, являющимся уточнением и обобщением известной формулы А.А.Карацубы.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров с простыми числами

Библиография: 30 названия.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях с растущей разностью // Чебышёвский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 156–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-156-168

Distribution of products of shifted primes in arithmetic progressions with increasing difference

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zrahmonov@mitas.tj, zarullo-r@rambler.ru

Abstract

We obtain an asymptotic formula for the number of primes $p \leq x_1$, $p \leq x_2$ such that $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$ with $q \leq x^{æ_0}$, $x_1 \geq x^{1-\alpha}$, $x_2 \geq x^{\alpha}$,

$$æ_0 = \frac{1}{2.5+\theta+\varepsilon}, \quad \alpha \in \left[(\theta+\varepsilon)\frac{\ln q}{\ln x}, 1-2.5\frac{\ln q}{\ln x}\right],$$

where $\theta = 1/2$, if q is a cube free and $\theta = \frac{5}{6}$ otherwise. This is the refinement and generalization of the well-known formula of A.A.Karatsuba.

Keywords: Dirichlet character, shifted primes, short sum of characters with primes

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Z. Kh. Rakhmonov, 2022, “Distribution of products of shifted primes in arithmetic progressions with increasing difference” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 156–168.

1. Введение и вспомогательные утверждения

Для характера Дирихле χ по модулю q функция Чебышёва определяется равенством

$$\psi(y,\chi) = \sum_{n \leqslant y} \Lambda(n)\chi(n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. Далее будем пользоваться следующими обозначениями: $\varphi(q)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\mathscr{L} = \ln q$.

Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана имеют место оценки

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)| \ll x + x^{\frac{1}{2}} q (\ln xq)^2, \tag{1}$$

$$T(x;Q) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{y \leq x} |\psi(y,\chi)| \ll x^{\frac{1}{2}} Q^2 (\ln xQ)^2, \tag{2}$$

где * означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам по модулю q. При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $T(x;Q)$ и $t(x;q)$ имелись оценки, близкие к оценкам (1) и (2).

А.А. Карацуба [1, 2] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x;q)$ и решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью в следующей формулировке.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$; $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — простое число, $q \leqslant x^{æ_0}$, $æ_0 = 1/(4,6+\varepsilon)$; $(a,q)=1$, $(l,q)=1$, α — произвольное число из интервала*

$$\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\frac{\mathscr{L}}{\ln x}, 1-4,1\frac{\mathscr{L}}{\ln x}\right];$$

$x_1 \geqslant x^{1-\alpha}$, $x_2 \geqslant x^{\alpha}$; p_1, p_2 — простые числа; $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ — количество чисел $p_{\leqslant} x_1$, $p_2 \leqslant x_2$ таких, что $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$, $\delta > 0$ — сколь угодно малое число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{\pi(x_1)\pi(x_2)}{\varphi(q)} + O\left((x_1x_2)^{1+\delta} q^{-1-\frac{\varepsilon^2}{1024}}\right),$$

где константа в O зависит только от ε.

А.А. Карацуба [1] в этой работе отметил, что

- совершенно так же исследуется вопрос о распределении в арифметических прогрессиях чисел вида $(p_1^n + a)f(p_2)$, где p_1 и p_2 — простые числа, f — многочлен с целыми коэффициентами;

- этим же методом можно решать задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и другие задачи.

М.М. Петечук [3] применяя метод решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы, и используя оценки коротких сумм характеров, полученные В.Н. Чубариковым [4] доказал асимптотическую формулу для суммы

$$S = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l \pmod q}} \tau_k(n)$$

где $q = p^m$, p — фиксированное простое число, $(l, q) = 1$, $q \leqslant x^{\frac{3}{8}+\varepsilon}$. Затем А.А. Карацуба и М.М. Петечук получили асимптотическую формулу для суммы S в случае, когда q — простое, и $q \leqslant x^{\frac{4}{k}-\varepsilon}$, $k \geqslant k_0 \geqslant 7$ (1979 г., доклад на семинаре аналитической теории чисел в МГУ). Применение оценок коротких сумм характеров по модулю, свободному от кубических делителей, позволило Иванцу и Фридлендеру [5] перенести этот результат на случай бескубических модулей.

В 1989 г. автор [6], опираясь на метод А.А. Карацубы, элементарно доказал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\varepsilon}.$$

Этим же методом Пан Чен Донг и Пан Чен Бьяо [7] показали, что

$$T(x;Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}Q + x^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^4.$$

Следствием этой оценки является теорема о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в «среднем», на возможность получения которой было указано в [1].

Г.Монтгомери [8], пользуюсь своей плотностной теоремой о нулях L-рядов Дирихле, доказательство которой опирается на метод большого решета, показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)(\ln xq)^{16},$$
$$T(x;Q) \ll (xQ^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^{11}.$$

Этот результат уточнил Р.Вон [9]. Он, с помощью метода большого решета и специального представления логарифмической производной L-функции, доказал, что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}(\ln xq)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{\frac{7}{2}}, \tag{3}$$
$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{3}{4}}Q^{\frac{5}{4}}(\ln xQ)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^{\frac{7}{2}}. \tag{4}$$

Автор [10, 11, 12, 13, 14], воспользовавшись методом решения тернарных мультипликативных задач А.А. Карацубы в сочетании с новым аналитическим вариантом метода И.М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, методом работы Н.М. Тимофеева [15], в которой он исследует распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям, с последующим применением теоремы Г. Монтгомери [8] о четвёртом моменте L-рядов Дирихле, доказал,что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}(\ln xq)^{34} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{34}, \tag{5}$$
$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{4}{5}}Q(\ln xQ)^{34} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^{c}, \tag{6}$$

где $c = 34$, если $Q \leqslant x^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}$, $c = \frac{7}{2}$, если $Q > x^{\frac{5}{6}}(\ln x)^{-\frac{5}{6}}$.

Заметим, что оценки (5) и (6) точнее чем (3) и (4) соответственно при

$$x^{\frac{2}{5}}(\ln x)^{\frac{1}{5}} < q \leqslant x^{\frac{2}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}, \qquad\qquad x^{\frac{1}{5}} < Q \leqslant x^{\frac{1}{3}},$$

а для остальных q и Q они совпадают с точностью конечных степеней $\ln xq$ и $\ln xQ$.

Оценку (5) сформулируем в следующем виде, которым далее будем пользоваться при доказательстве теоремы 2. Имеем

Лемма 1. *При $x \geqslant 2$ и $q \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\sum_{\chi \bmod q} \max_{y \leq x} \left| \sum_{p \leqslant y} \chi(p) \right| \ll x\mathscr{L}_q^2 + x^{\frac{4}{5}} q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_q^{33} + x^{\frac{1}{2}} q \mathscr{L}_q^{33}.$$

Из оценки (6) следует теорема Бомбьери-Виноградова о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» в следующей формулировке, которой также будем пользоваться при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть A произвольное положительное число, тогда справедлива оценка*

$$\sum_{q \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,q)=1} \left| \pi(x;q,l) - \frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\ln x)^{A+1}}.$$

А.А. Карацуба решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью, существенно опираясь на свою оценку суммы значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел.

Задачу о распределении значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел впервые изучил И.М. Виноградов [16]. Он, воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, в 1938 г. доказал: *если q — простое нечётное, $(a,q) = 1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi, x) = \sum_{p \leqslant x} \chi(p + a) \ll x^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

В 1943 г. И.М. Виноградов [17] уточнил эту оценку, доказав, что

$$|T(\chi, x)| \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-\frac{1}{6}} \right). \tag{7}$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mathrm{mod} q$ *вида* $p + a$, $p \leqslant x$. М.Ютила [18], воспользовавшись оценкой (7), показал, что если q – нечётное простое число, то

$$G(q, l) \ll q^{\frac{11}{8}+\varepsilon},$$

где $G(q,l)$ — наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии с разностью q и начальным членом l. Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечётных простых чисел.

Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi, x)$ при $x \geqslant q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число [19, 20]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi, x)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L-функции Дирихле, тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi < x)$, получится нетривиальная оценка, но только при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник [21] в 1971 г. писал по этому поводу: *«Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0,75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что даёт непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.»*

А.А. Карацуба [2, 22, 23] в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он [2, 24, 25] доказал следующее утверждение: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi, x) \ll xq^{-\frac{\varepsilon^2}{1024}}, \tag{8}$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+a$ и количества произведений сдвинутых простых чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [1, 2].

Автор обобщил оценку (7) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [26, 27, 28]: *пусть D — достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T(\chi, x) \ll x\ln^4 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right)\tau(q). \tag{9}$$

Применяя эту оценку, он [26, 29] также доказал, для достаточно большого нечётного натурального числа D имеет место оценка

$$G(D, I) \ll D^{c+\varepsilon}, \tag{10}$$

где ε — положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A > 2$,

$$\sum_{\chi \bmod D} N(\alpha, T, \chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)}(\ln DT)^A.$$

Из «плотностной» теоремы Хаксли [30] следует, что при $A = 14$ в последней формуле $c \leqslant \frac{6}{5}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский [31] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q, x)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T(\chi_q, x) \ll xq^{-\delta}. \tag{11}$$

Автор [32, 33, 34] в 2013 году доказал, что *если q — достаточно большое натуральное число, χ_q — примитивный характер по модулю q, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое постоянное число, $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T(\chi_q, x) \ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

В 2021 г. Bryce Kerr в [35] доказал оценку (11), при $x \geqslant q^{\frac{3}{4}+o(1)}$.

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T(\chi, x)$, χ — неглавный характер по модулю q, q — простое число, были приложены в задачах о распределении произведений сдвинутых простых чисел и о наименьшей гольдбаховых числах в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля q, наряду с нетривиальными оценками суммы $T(\chi, x)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров.

Поэтому естественно рассматривать задачу о нетривиальной оценке сумм $T(\chi, x)$, где χ — неглавный характер по составному модулю q, не только для длинных сумм (оценка (9)), то есть, когда длинна суммы по порядку больше модуля характера χ, но и для коротких сумм, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Автором были получены следующие нетривиальные оценки.

Лемма **3.** [36, 37]. *Пусть q – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю q, χ_d – примитивный характер по модулю d, порождённый характером χ, d – свободное от кубов, $(a, q) = 1$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi, x) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

Лемма **4.** [38]. *Пусть q – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю q, $(a, q) = 1$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi, x) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

А.А. Карацуба в своей работе [1] также отметил, что в теореме 1 верхняя граница для q, в случае, когда q — простое число, может быть значительно увеличена, но не более, чем до $x^{æ_1}$, то есть величина

$$æ_0 = \frac{1}{4,6+\varepsilon}$$

может быть заменена на величину

$$æ_1 = \frac{1}{2,5+\varepsilon},$$

которая является следствием условной оценки (1).

В этой работе автору удалось, воспользовавшись новой оценкой для средних значений функций Чебышёва по всем характерам Дирихле заданного модуля (лемма 1), и нетривиальными оценками коротких сумм значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел (леммы 3 и 4), доказать теорему А.А. Карацубы о распределении чисел вида $p_1(p_2 + a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью при

$$æ_0 = \frac{1}{2,5+\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & q \text{ — число свободное от кубов;} \\[2mm] \dfrac{5}{6}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — натуральное число, $q \leqslant x^{æ_0}$, $æ_0$ определяется соотношением (12),*

$$\alpha \in \left[(\theta+\varepsilon)\frac{\ln q}{\ln x}, 1-2,5\frac{\ln q}{\ln x}\right], \qquad x_1 \geqslant x^{1-\alpha}, \qquad x_2 \geqslant x^{\alpha},$$

p_1, p_2 — простые числа; $(a,q)=(l,q)=1$, $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ — количество чисел $p_1 \leqslant x_1$, $p_2 \leqslant x_2$ таких, что $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$. Тогда для произвольного числа $A>0$ имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{1}{\varphi(q)}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\mathrm{Li}(x_1)\mathrm{Li}(x_2) + O\left(\frac{x_1x_2}{\varphi(q)\ln x_1 \ln x_2 \mathscr{L}^A}\right),$$

где константа в O зависит только от ε.

При доказательстве теоремы 2 также воспользуемся оценкой (6), а именно её следствием (лемма 1) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем» и теоремой Бруно-Титчмарша. (лемма 5).

Лемма 5. *Для $(a,q)=1$ и $q \leqslant x$ имеем*

$$\pi(x;q,a) \leqslant \frac{2x}{\varphi(q)\ln\left(\frac{2x}{q}\right)}.$$

2. Доказательство теоремы 2

Не ограничивая общности, с учётом условий теоремы будем считать, что для параметров x_1 и x_2 выполняются соотношения

$$q^{\frac{5}{2}} \leqslant x_1 \leqslant q^{\frac{5}{2}+c_1}, \qquad q^{\theta+\varepsilon} \leqslant x_2 \leqslant q^{\theta+\varepsilon+c_2}, \tag{13}$$

где c_1 и c_2 произвольные положительные фиксированные числа, поэтому

$$\ln x_1 \asymp \mathscr{L}, \qquad \ln x_2 \asymp \mathscr{L}. \tag{14}$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, найдём

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \sum_{p_1\leqslant x_1}\sum_{p_2\leqslant x_2}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(p_1(p_2+a))\overline{\chi}(l) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}T_1(x_2,\chi)\overline{\chi}(l)\sum_{p\leqslant x_1}\chi(p).$$

Разбивая последнюю сумму по χ на две части, находим

$$\begin{aligned} &\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \mathscr{M}_2(x_1,x_2,a,l) + \mathscr{R}_2(x_1,x_2,a,l), \\ &\mathscr{M}_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{1}{\varphi(q)}T_1(x_2,\chi_0)\sum_{p\leqslant x_1}\chi_0(p), \\ &\mathscr{R}_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}T_1(x_2,\chi)\overline{\chi}(l)\sum_{p\leqslant x_1}\chi(p). \end{aligned} \tag{15}$$

В этой формуле $\mathscr{M}_2(x_1,x_2,a,l)$ даёт предполагаемый главный член $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$, а $\mathscr{R}_2(x_1,x_2,$ $al)$ входит в его остаточный член.

Вычислим главный член. Воспользовавшись асимптотическим законом распределения простых чисел и соотношением (14), получим

$$\sum_{p\leqslant x_1}\chi_0(p)=\pi(x_1)+O\left((\ln x_1)^2\right)=\mathrm{Li}(x_1)+O\left(\frac{x_1}{\ln x_1\mathscr{L}^A}\right). \tag{16}$$

Теперь представим сумму $T_1(x_2,\chi_0)$ в виде

$$\begin{aligned}
T_1(x_2,\chi_0)=&\sum_{\substack{p\leqslant x_2\\(p+a,q)=1}}1=\mathrm{Li}(x_2)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}+\sum_{d|q}\mu(d)\left(\pi(x_2;d,-a)-\frac{\mathrm{Li}(x_2)}{\varphi(d)}\right)=\\
&=\mathrm{Li}(x_2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)+R_1(x_2)+R_2(x_2), \qquad (17)\\
&R_1(x_2)=\sum_{\substack{d|q\\d\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}}}\left(\pi(x_2;d,-a)-\frac{\mathrm{Li}(x_2)}{\varphi(d)}\right),\\
&R_2(x_2)=\sum_{\substack{d|q\\d>\sqrt{x}(\ln x)^{-A-3,5}}}\left(\pi(x_2;d,-a)-\frac{\mathrm{Li}(x_2)}{\varphi(d)}\right).
\end{aligned}$$

Оценим $R_1(x_2)$ и $R_2(x_2)$, воспользовавшись соответственно теоремой Бомбери-Виноградова (лемма 2) и теоремой Бруно-Титчмаршем (лемма 5). Имеем

$$\begin{aligned}
R_1(x_2)\ll&\sum_{\substack{d|q\\d\leqslant\sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}}\left|\pi(x_2;d,-a)-\frac{\mathrm{Li}(x_2)}{\varphi(d)}\right|\ll\frac{x_2}{(\ln x_2)^{A+1}};\\
R_2(x_2)\leqslant&\sum_{\substack{d|q\\d>\sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}}\left(\pi(x_2;d,-a)+\frac{\mathrm{Li}(x_2)}{\varphi(d)}\right)\ll\sum_{\substack{d|q\\d>\sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-3,5}}}\left(\frac{x_2}{\varphi(d)\ln\left(\frac{x}{d}\right)}+\frac{x_2}{\varphi(d)\ln x_2}\right)\ll\\
&\ll\frac{x_2}{\ln x_2}\sum_{\substack{d|q\\d>\sqrt{x_2}(\ln x_2)^{-A-2,5}}}\frac{1}{\varphi(d)}\ll\frac{x_2}{(\ln x_2)^{A+1}}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (17), и воспользовавшись соотношением (14), имеем

$$T_1(x_2,\chi_0)=\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\mathrm{Li}(x_2)+O\left(\frac{x_2}{\ln x_2\mathscr{L}^A}\right).$$

Отсюда, из (16) и (15), находим

$$\mathscr{M}_2(x_1,x_2,a,l)=\frac{1}{\varphi(q)}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\mathrm{Li}(x_1)\mathrm{Li}(x_2)+O\left(\frac{x_1x_2}{\varphi(q)\ln x_1\ln x_2\mathscr{L}^A}\right).$$

Оценим остаточный член $\mathscr{R}_2(x;p^\alpha,l)$. Переходя к оценкам, а затем применяя для оценки суммы $T_1(x_2,\chi)$ при $\chi\neq\chi_0$ леммы 3 и 4, и воспользовавшись леммой 1, получим

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{R}_2(x_1,x_2,a,l)\leqslant\frac{1}{\varphi(q)}\max_{\chi\neq\chi_0}|T_1(x_2,\chi)|\sum_{\chi\bmod q}\left|\sum_{p\leqslant x_1}\chi(p)\right|\ll\\
&\ll\frac{1}{\varphi(q)}x_2\exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right)\left(x_1(\ln x_1q)^2+x_1^{\frac45}q^{\frac12}(\ln x_1q)^{33}+x_1^{\frac12}q(\ln x_1q)^{33}\right)=\\
&=\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\frac{x_1x_2}{\ln x_1\ln x_2}\Delta(x_1,x_2,q),\\
&\Delta(x_1,x_2,q)=\left((\ln x_1q)^{-31}+x_1^{-\frac15}q^{\frac12}+x_1^{-\frac12}q\right)(\ln x_1q)^{33}\ln x_1\ln x_2\exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right).
\end{aligned}
$$

Отсюда и из соотношений (13) и (14), имеем

$$
\Delta(x_1,x_2,q)\ll(\ln x_1q)^{33}\ln x_1\ln x_2\exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right)\ll\mathscr{L}^{35}\exp\left(-0,6\sqrt{\mathscr{L}}\right)\ll\mathscr{L}^{-A}.
$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. Вып. 4. С. 724 — 727.

2. Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Т. 63. В. 4(382). С. 43 — 92.

3. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечётного простого числа // Известия АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 892 – 908.

4. Чубариков В.Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ. 1973. № 2.С. 46 -— 52.

5. Friendlander J.B., Iwaniec H. The divisor problem for arithemetic progressions // Acta Arith. 1985. V. 45,№ 3. P. 273-277. doi:10.4064/aa-45-3-273-277.

6. Рахмонов З. Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.

7. Пан Чен Донг, Пан Чен Бьяо Основы аналитической теории чисел (на китайском языке). Пекин, 1991.

8. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.

9. Vaughan R. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. (2). 10(1975), 153 – 162.

10. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

11. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышёва // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331. № 3. С. 281 – 282.

12. Рахмонов З. Х., Нозиров О.О. О средних значениях функций Чебышёва и их приложениях // Чебышёвский сборник. 2021. Т. 22. № 5(81). С. 198 – 222.

13. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышёва //Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1994. Т. 58. № 3. С. 1277 – 139.

14. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Т. 349. № 5. С. 606 – 607.

15. Тимофеев Н.М. Распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям // Известия АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 341 – 362.

16. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. № 45. С. 311 – 320.

17. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1943.Т. 7, С. 17 – 34.

18. Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).

19. Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

20. Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 285 – 290.

21. Линник Ю.В. Новейшие работы И. М. Виноградова // Тр. МИАН. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

22. Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287 – 1289.

23. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

24. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

25. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

26. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41.№ 1. С. 201 – 202.

27. Рахмонов З.Х. Об опенке суммы характеров с простыми числами // ДАН Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

28. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

29. Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

30. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematicae June 1971, Volume 15, Issue 2, pp 164–170.

31. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

32. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.

33. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т. 13. В. 4(2). С. 113 – 117.

34. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышёвский сборник. 2014. Т. 15. В. 2(50). С. 73 – 100.

35. Керр Б. Оценки для сумм мультипликативных характеров по сдвинутым простым числам // Труды МИАН. 2021. Т. 314. С. 71 – 96.

36. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1 – 27.

37. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН РТ. 2017. Т. 60. № 9. С. 378-382.

38. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

REFERENCES

1. Karatsuba A. A., 1970, “The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, Is. 4, pp. 724–727.

2. Karatsuba, A. A., 2008, “Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters”, *Russian Mathematical Surveys*, vol 63, Is. 4, pp. 641-690.

3. Petečuk M. M., 1980,“The sum of the values of the divisor function in arithmetic progressions whose difference is a power of an odd prime”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 15, Is. 1, pp. 145-160.

4. Chubarikov V. N., 1973, “A more precise bound for the zeros of Dirichlet L-series modulo with a power of prime”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 28, no 1-2, pp. 76–81.

5. Friendlander J. B., & Iwaniec H., 1985, “The divisor problem for arithemetic progressions”, *Acta Arith.*, vol. 45, Is. 3, pp. 273-277.

6. Rakhmonov Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213-228.

7. Pan Chengdong, & Pan Chengbiao, 1991,“Foundation to Analytic Number Theory”, *Science Press, Beijing, 1991*, (in Chinese).

8. Montgomery, H., 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory*, vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York.

9. Vaughan, R. O., 1975, “Mean value theorems in prime number theory”, *J.London Math. Soc.*, vol. s2-10, Is. 2, pp. 153-162, https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.2.153.

10. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Theorem on the mean value of $\psi(x, \chi)$ and its applications", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64.

11. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Mean values of the Chebyshev function", *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85-87.

12. Rakhmonov, Z. Kh., & Nozirov O. O., 2021, "On the mean values of the Chebyshev function and their applications", , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no 5(81), pp. 198–222.

13. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, "A mean-value theorem for Chebyshev functions", *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 44, Is. 3, pp. 555–569.

14. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, "The mean-value theorem in prime number theory", *Doklady Mathematics*, vol. 54, Is. 1, pp. 597-598.

15. Timofeev, N. M., 1988, "Distribution in the mean of arithmetic functions in short intervals in progressions", *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 30, Is. 2, pp. 315–335.

16. Vinogradov, I. M., 1938, "On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 3(45), no 2, pp. 311–319.

17. Vinogradov, I. M., 1943, "An improvement of the estimation of sums with primes", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 7, no 1, pp. 17–34.

18. Jutila, M., 1968, "On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference", *Ann. Univ. Turku; Ser. A,* I 118(5).

19. Vinogradov, I. M., 1952, "New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 3, pp. 197–210.

20. Vinogradov, I. M., 1953, "Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 17, Is. 4, pp. 285–290.

21. Linnik, Yu. V., 1975, "Recent works of I.M. Vinogradov", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 132, pp. 25–28.

22. Karatsuba, A. A., 1968, "Sums of characters, and primitive roots, in finite fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 180, Is. 6. № 6, pp. 1287-1289.

23. Karatsuba, A. A., 1970, "Estimates of character sums", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 1, pp. 19–29.

24. Karatsuba, A. A., 1970, "Sums of characters over prime number", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 2, pp. 303–326.

25. Karatsuba, A. A., 1970, "Sums of characters with prime numbers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 190, Is. 3, pp. 517–518.

26. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, "On the distribution of values of Dirichlet characters", *Russian Math. Surveys*, vol. 41, Is. 1, pp/ 237–238. doi:10.1070/RM1986v041n01ABEH0032

27. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, "Estimation of the sum of characters with primes", *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, vol. 29, Is. 1, pp. 16–20,, (in Russian).

28. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, "On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.

29. Rakhmonov, Z. Kh., 1986 "The least Goldbach number in an arithmetic progression", *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR. Otdel. Fiz.-Mat., Khim. i Geol. Nauk*, № 2(100), pp. 103-106, (in Russian).

30. Huxley, M. N., 1971, "On the difference between consecutive primes", *Inventiones mathematicae*, vol. 15, Is. 2, pp. 164–170.

31. Fridlander, Dzh. B., & Gong, K., & Shparlinskii, I. E., 2010, "Character sums over shifted primes", *Math. Notes*, vol. 88, Is. 3-4, pp. 585-598. doi:10.1134 S0001434610090312.

32. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, "Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, № 1, pp. 5-9, (in Russian).

33. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, "Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes", *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, Is. 4(2), pp. 113-117, (in Russian).

34. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, "Sums of characters over prime numbers", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, no 2, pp. 73-100, (in Russian).

35. Kerr, B., 2021, "Bounds of Multiplicative Character Sums over Shifted Primes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 314, pp. 64–89.

36. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, "Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299, pp. 219–245.

37. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, "On the estimation of the sum the values of Dirichlet character in a sequence of shifted primes", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 60, no 9, pp. 378-382, (in Russian).

38. Rakhmonov Z. Kh., 2018, "Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes", In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers, *Springer International Publishing*, pp. 187-217.

Получено 18.07.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.815.1+512.815.6 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-169-177

Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли

О. Г. Стырт

Стырт Олег Григорьевич — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: oleg_styrt@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена вопросу о том, является ли пространство орбит компактной линейной группы топологическим многообразием и гомологическим многообразием. В данной работе рассмотрен случай простой трёхмерной группы. Получена верхняя оценка для суммы целых частей половин размерностей неприводимых компонент представления, фактор которого является гомологическим многообразием, что усиливает прежний результат, дающий ту же оценку в случае, если фактор представления является гладким многообразием. Большинство представлений, удовлетворяющих данной оценке, также разобраны ранее. В рассуждениях использованы стандартные соображения линейной алгебры, теории групп и алгебр Ли и их представлений.

Ключевые слова: группа Ли, линейное представление группы, топологический фактор действия, топологическое многообразие, гомологическое многообразие.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
О. Г. Стырт. Топологические и гомологические свойства пространства орбит простой трёхмерной компактной линейной группы Ли // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 169–177.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 512.815.1+512.815.6 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-169-177

Topological and homological properties of the orbit space of a simple three-dimensional compact linear Lie group

O. G. Styrt

Styrt Oleg Grigorievich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: oleg_styrt@mail.ru

Abstract

The article is devoted to the question whether the orbit space of a compact linear group is a topological manifold and a homological manifold. In the paper, the case of a simple three-dimensional group is considered. An upper bound is obtained for the sum of the half-dimension integral parts of the irreducible components of a representation whose quotient space is a homological manifold, that enhances an earlier result giving the same bound if the quotient space of a representation is a smooth manifold. The most of the representations satisfying this bound are also researched before. In the proofs, standard arguments from linear algebra, theory of Lie groups and algebras and their representations are used.

Keywords: Lie group, linear representation of a group, topological quotient space of an action, topological manifold, homological manifold.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
O. G. Styrt, 2022, “Topological and homological properties of the orbit space of a simple three-dimensional compact linear Lie group” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 169–177.

1. Введение

Рассмотрим точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V. Требуется выяснить, является ли топологический фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гомологическим многообразием. Далее для краткости будем называть топологическое многообразие просто «многообразием».

Без ограничения общности можно считать, что V — евклидово пространство, G — подгруппа Ли группы $\mathbf{O}(V)$, а представление $G\colon V$ тавтологическое.

Исследования по данной тематике проводились в работах [1, 2] для конечных групп. Кроме того, в работах автора [3, 4, 5, 6] изучаются как топологические, так и дифференциально-геометрические свойства фактора для различных классов групп: для групп с коммутативной связной компонентой [3] и для простых групп классического типа [4, 5, 6]. В работах автора [7, 8, 9] также рассматриваются группы с коммутативной связной компонентой и усиливается «топологическая» часть результатов работы [3]. Настоящая же работа служит аналогичным усилением результатов работы [4] для простых трёхмерных групп.

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы группы G, а через $\mathfrak{g}$ — её касательную алгебру.

Допустим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$ — что равносильно, группа G^0 изоморфна одной из групп SU_2 и $\mathbf{SO}_3$.

Пусть $n_1, \ldots, n_L$ — размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}\colon V$ с учётом кратностей и в порядке убывания. Поскольку представление $G\colon V$ точное, имеем

$$n_1\mathbf{w} \geqslant \ldots \mathbf{w} \geqslant n_l > 1 = n_{l+1} = \cdots = n_L,$$

где $l \in \{1, \ldots, N\}$. Обозначим через $q(V)$ число $\sum\limits_{i=1}^{L} \mathbf{0}\frac{n_i}{2} = \sum\limits_{i=1}^{l} \mathbf{0}\frac{n_i}{2} \in \mathbb{N}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G — гомологическое многообразие, то $q(V) \leqslant 4$.*

2. Основной текст статьи

2.1. Обозначения и вспомогательные факты

В этом параграфе приведён ряд вспомогательных обозначений и утверждений, в том числе заимствованных из процитированных работ (все новые утверждения — с доказательствами).

Лемма 1. *Пусть X — топологическое пространство, а n — натуральное число.*

1. *Если X — односвязная гомологическая n сфера, то $X \cong S^n$.*
2. *Конус над пространством X является гомологическим $(n+1)$ многообразием тогда и только тогда, когда X — гомологическая n сфера.*

Доказательство. См. теорему 2.3 и лемму 2.6 в [2, § 2]. □

Традиционно будем обозначать через $\mathbb{T}$ группу Ли $\mathbf{c}\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = 1$ по умножению.

Допустим, что имеется евклидово пространство V и компактная группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ с касательной алгеброй $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(V)$. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Подпространства $\mathfrak{g}v$ и $N_v := (\mathfrak{g}v)^\perp$ пространства V инвариантны относительно стабилизатора G_v вектора v. Стационарная подалгебра $\mathfrak{g}_v$ вектора v совпадает с $\operatorname{Lie} G_v$. Положим $M_v := N_v \cap (N_v^{G_v})^\perp \subset N_v$. Ясно, что $N_v = N_v^{G_v} \oplus M_v \subset V$ и $G_v M_v = M_v$.

Утверждение 1. *В любом G^0 инвариантном подпространстве $V' \subset V$ существует вектор v, для которого $M_v \subset (V')^\perp$.*

Доказательство. См. утверждение 2.2 в [3, § 2]. □

Теорема 2. *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Если V/G — гомологическое многообразие, то N_v/G_v и M_v/G_v — гомологические многообразия.*

Доказательство. См. теорему 4 и следствие 5 в [8]. □

Определение 1. *Линейный оператор в пространстве над некоторым полем называется отражением (соотв. псевдоотражением), если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность* 1 *(соотв.* 2*).*

Определение 2. *Пусть K — группа Ли $\mathbf{c}v \in \mathbb{H}\colon \|v\| = 1$ по умножению, а $\Gamma \subset K$ — прообраз группы вращений додекаэдра при накрывающем гомоморфизме $K \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$. Группой Пуанкаре называется линейная группа, полученная ограничением действия $K\colon \mathbb{H}$ левыми сдвигами на подгруппу $\Gamma \subset K$.*

Теорема 3. *Если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна, а V/G — гомологическое многообразие, то имеются разложения $G = G_0 \times G_1 \mathbf{w} \times \ldots \mathbf{w} \times G_k$ и $V = V_0 \oplus V_1 \mathbf{w} \oplus \ldots \mathbf{w} \oplus V_k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, такие что*

- *подпространства $V_0, V_1, \ldots, V_k \subset V$ попарно ортогональны и G инвариантны*;
- *для любых $i, j = 0, \ldots, k$ линейная группа $(G_i)|_{V_j} \subset \mathbf{O}(V_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j > 0$ (в частности, $\dim V_j = 4$ для всякого $j = 1, \ldots, k$).*

Доказательство. См. предложение 3.13 в [2, § 3]. □

На пространстве $\mathfrak{g}$ имеется $\operatorname{Ad}(G)$ инвариантное скалярное умножение, с помощью которого мы в дальнейшем будем отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. Если $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ — одномерная подалгебра, а $V' \subset V$ — подпространство, то $\mathfrak{g}'V' \subset V$ — подпространство размерности не более $\dim V'$.

Напомним определения q *устойчивых* $(q \in \mathbb{N})$ и *неразложимых* множеств векторов конечномерных пространств над полями [3, § 1], необходимые и в данной работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди указанных линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовём *собственным*. Будем говорить, что множество векторов *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причём для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение 3. *Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учётом кратностей своих элементов, назовём q устойчивым ($q \in \mathbb{N}$), если его линейная оболочка сохраняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учётом кратностей).*

Для произвольного конечного множества P векторов в конечномерном пространстве над некоторым полем, рассматриваемого с учётом кратностей своих элементов, количество ненулевых векторов множества P (с учётом кратностей) будем обозначать через $\|P\|$.

Предположим, что группа G^0 коммутативна, т. е. является тором.

Любое неприводимое представление группы G^0 одномерно либо двумерно. Напомним введённое в [3, § 1] понятие веса её неприводимого представления.

Произвольное двумерное неприводимое представление группы G^0 обладает G^0 инвариантной комплексной структурой, и мы можем рассматривать его как одномерное комплексное представление группы G^0, сопоставив ему естественным образом вес — гомоморфизм групп Ли $\lambda\colon G^0 \to \mathbb{T}$ — и отождествив последний с его дифференциалом — вектором $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Одномерному представлению группы G^0 сопоставим вес $\lambda := 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, определёнными с точностью до умножения на (-1).

Пусть $P \subset \mathfrak{g}$ — множество весов $\lambda \in \mathfrak{g}$, соответствующее разложению представления $G^0 : V$ в прямую сумму неприводимых (с учётом кратностей). Множество $P \subset \mathfrak{g}$ не зависит от выбора указанного разложения (с точностью до умножения весов на (-1)). Поскольку представление $G\colon V$ точное, имеем $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$.

Теорема 4 (см. [9, теорема 4]). *Допустим, что V/G — гомологическое многообразие, а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2 устойчивое множество. Тогда представление $G\colon V$ есть прямое произведение представлений $G_l\colon V_l$ ($l = 0, \ldots, p$), таких что*

1. *для любого $l = 0, \ldots, p$ фактор V_l/G_l является гомологическим многообразием*;
2. $|G_0| < \infty$;
3. *для любого $l = 1, \ldots, p$ группа G_l бесконечна, а множество весов представления $G_l\colon V_l$ неразложимо, 2 устойчиво и не содержит нулей.*

Теорема 5. *Допустим, что* $\dim G = 1$, *а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2 устойчивым и не содержит нулей. Если V/G — гомологическое многообразие, то $\|P\| = 3$.*

Доказательство. Поскольку $0 \notin P$, пространство V обладает G^0 инвариантной комплексной структурой. Если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений, то утверждение вытекает из теоремы 6 работы [9]. Произвольный же случай можно свести (см. [3, §§ 3, 7]) к случаю представления одномерной группы без комплексных отражений, множество весов которого получается из P умножением всех весов на ненулевые скаляры. □

Следствие 1. *Допустим, что* $\dim G = 1$, *а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2 устойчивое множество. Если V/G — гомологическое многообразие, то $\|P\| = 3$.*

Доказательство. Вытекает из теорем 4 и 5. □

Следствие 2. *Если* $\dim G = 1$, *а* V/G — *гомологическое многообразие, то* $\|P\|\mathbf{w} \leqslant 3$ (*что равносильно,* $\dim(\mathfrak{g}V) \leqslant 6$).

Доказательство. Допустим, что $\|P\| > 3$. Тогда $P \subset \mathfrak{g}$ — 2 устойчивое множество. Согласно следствию 1, $\|P\| = 3$. Получили противоречие. □

2.2. Доказательства результатов

Данный параграф посвящён доказательству теоремы 1.

На протяжении дальнейшей части работы будем считать, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, т. е. что группа G^0 изоморфна SU_2 либо $\mathbf{SO}_3$. Положим $V_0 := V^{G^0} \subset V$. В обозначениях и соглашениях § 1, $L - l\mathbf{w} = \dim V_0$, $V_0 \neq V$, а числа $n_1, \ldots, n_l$ суть размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}\colon V_0^{\perp}$ (с учётом кратностей), причём каждое из них либо кратно 4, либо нечётно. Если $\mathfrak{g}'\mathbf{w} \subset \mathfrak{g}$ — собственная подалгебра, то $\dim \mathfrak{g}' = 1$, а подпространство $\mathfrak{g}'V \subset V$ имеет размерность $2q(V)$. Стало быть, $2q(V) \leqslant \dim V$.

Достаточно доказать теорему в случае $V_0 = 0$ (т. е. при отсутствии одномерных неприводимых компонент представления $G^0\colon V$). В самом деле, найдётся вектор $v \in V_0$, такой что $M_v \subset V_0^{\perp}$ (см. утверждение 1). Имеем $\mathfrak{g}v = 0$, $N_v = V$, $G_v \supset G^0$, $(G_v)^0\mathbf{w} = G^0$, $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$. Далее, $M_v = (V^{G_v})^{\perp}\mathbf{w} \supset (V^{G^0})^{\perp} = V_0^{\perp} \supset M_v$, откуда $M_v\mathbf{w} = V_0^{\perp}$. Согласно теореме 2, если V/G — гомологическое многообразие, то M_v/G_v — гомологическое многообразие. Что касается разложений на неприводимые компоненты представлений группы $G^0\mathbf{w} = (G_v)^0$ в пространствах V и M_v, то второе получается из первого удалением всех одномерных компонент. Значит, $q(V)\mathbf{w} = q(M_v)$.

Далее будем считать, что V/G — гомологическое многообразие, а $V_0 = 0$. Требуется доказать, что $q(V) \leqslant 4$.

Допустим, что найдётся вектор $v \in V$, для которого $\dim G_v = 1$. Тогда $\dim \mathfrak{g}_v = 1$, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$. Кроме того, в силу теоремы 2, N_v/G_v — гомологическое многообразие. Согласно следствию 2, $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leqslant 6$, $2q(V)\mathbf{w} = \dim(\mathfrak{g}_v V) \leqslant \dim(\mathfrak{g}_v N_v) + \dim(\mathfrak{g}v) \leqslant 8$, $q(V) \leqslant 4$.

Далее будем предполагать, что в пространстве V не существует вектора с одномерным стабилизатором, а также что $q(V) > 4$. Как следствие,

- $\dim V \geqslant 2q(V) > 8$;
- $G^0 \cong \mathrm{SU}_2$;
- каждая неприводимая компонента представления $G^0\colon V$ имеет размерность, кратную 4; то же можно сказать о любом его подпредставлении;
- $(\operatorname{Ker}\operatorname{Ad}) \cap G^0 = \mathcal{Z}(G^0) = \{\pm E\} \subset \mathbf{O}(V)$.

Произвольные операторы $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)}$ в пространстве V коммутируют. Значит, для всякого $g \in G$ подпространства $V^g, (E - g)V \subset V$ являются $(\mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)})$ инвариантными; при $\operatorname{Ad}(g) = E$ они $\mathfrak{g}$ инвариантны и потому $\operatorname{rk}(E - g) \,\vdots\, 4$.

Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Если подалгебра $\mathfrak{g}_v \subset \mathfrak{g}$ собственная, то $\dim \mathfrak{g}_v\mathbf{w} = 1$, что противоречит предположению. Поэтому $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$ либо $\mathfrak{g}_v = 0$. В первом случае имеем $G_v \supset G^0$, $v \in V^{G^0} = V_0 = 0$. Значит, если $v \neq 0$, то $\mathfrak{g}_v = 0$, $|G_v| < \infty$, отображение $\mathfrak{g}\mathbf{w} \to (\mathfrak{g}v)$, $\xi \to (\xi v)$ является линейным изоморфизмом, причём для любых $g \in G_v$ и $\xi \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство $g(\xi v) = \mathbf{r}\operatorname{Ad}(g)\xi v$, откуда $(\xi v \in V^g) \Leftrightarrow (\xi \in \mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)})$. Как следствие, если $v \neq 0$ и $g \in G_v$, то $(\mathfrak{g}v)^g = (\mathfrak{g}^{\operatorname{Ad}(g)})v$.

Для произвольных $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g}$ обозначим через $\varphi_{g,\xi}$ линейное отображение пространства V во внешнюю прямую сумму двух копий пространства $(E - g)V$, заданное формулой $v \to \mathbf{r}(E - g)v, (E - g)\xi v$.

Лемма 2. *Для любых $g \in G$ и $\xi \in \mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(g)})$ имеем* $\mathrm{Ker}\, \varphi_{g,\xi} = 0$.

Доказательство. Если $v \neq 0$ и $v \in \mathrm{Ker}\, \varphi_{g,\xi}$, то $(E-g)v = (E-g)\xi v = 0$, т. е. $g \in G_v$ и $\xi v \in V^g$, откуда $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(g)}$, что противоречит условию. □

Следствие 3. *Если $g \in G$ и $\mathrm{Ad}(g) \neq E$, то* $\dim V \leqslant 2 \cdot \mathrm{rk}(E-g)$.

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. *Для всякого $v \in V \setminus \{0\}$ имеем* $[G_v, G_v] = G_v \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{Ad}$.

Для доказательства теоремы 6 фиксируем произвольный вектор $v\mathbf{w} \in V \setminus \{0\}$.

Обозначим через π гомоморфизм $G_v \to \mathbf{O}(N_v)$, $g \to g|_{N_v}$, а через H_v — подгруппу $\pi(G_v)\mathbf{w} \subset \mathbf{O}(N_v)$. В силу теоремы 2, N_v/G_v — гомологическое многообразие. Кроме того, $|G_v| < \infty$. Согласно теореме 3, имеются разложения $H_v = H_0 \times H_1\mathbf{w} \times \ldots\mathbf{w} \times H_k$ и $N_v = W_0 \oplus W_1\mathbf{w} \oplus \ldots\mathbf{w} \oplus W_k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$, такие что

- подпространства $W_0, W_1, \ldots, W_k \subset N_v$ попарно ортогональны и G_v инвариантны;
- для любых $i, j = 0, \ldots, k$ линейная группа $(H_i)|_{W_j} \subset \mathbf{O}(W_j)$ тривиальна при $i \neq j$, порождена псевдоотражениями при $i = j = 0$ и изоморфна группе Пуанкаре при $i = j\mathbf{w} > 0$ (в частности, $\dim W_j = 4$ для всякого $j = 1, \ldots, k$).

Хорошо известно, что группа Пуанкаре совпадает со своим коммутантом; то же можно сказать о каждой из групп H_i, $i = 1, \ldots, k$.

Если $g \in G_v$, то $\mathrm{rk}(E-g) - \dim \mathbf{r}(E-g)N_v = \dim \mathbf{r}(E-g)(\mathfrak{g}v)\mathbf{w} = \mathrm{rk}\, \mathbf{r}E - \mathrm{Ad}(g)\mathbf{w} \leqslant 2$; при $\mathrm{Ad}(g) = E$ имеем $\mathrm{rk}(E-g) = \dim \mathbf{r}(E-g)N_v$.

Лемма 3. *Если $g \in G_v$ и $\dim \mathbf{r}(E-g)N_v \leqslant 2$, то $g = E$.*

Доказательство. Согласно условию, $\mathrm{rk}(E-g) \leqslant 4$. Если $\mathrm{Ad}(g) \neq E$, то $\dim V\mathbf{w} \leqslant$
$\leqslant 2\mathbf{w}{\cdot}\mathrm{rk}(E\mathbf{w}-g) \leqslant 8$, в то время как $\dim V > 8$. Значит, $\mathrm{Ad}(g) = E$, вследствие чего, во-первых, $\mathrm{rk}(E-g) \,\vdots\, 4$, а во-вторых, $\mathrm{rk}(E-g) = \dim \mathbf{r}(E-g)N_v \leqslant 2$. Таким образом, $\mathrm{rk}(E-g) = 0$, $g = E$. □

В силу леммы 3, $\mathrm{Ker}\, \pi = \{E\} \subset G_v$, т. е. π есть изоморфизм $G_v \to H_v$. Отсюда, полагая $G_i := \pi^{-1}(H_i) \subset G_v$ $(i = 0, \ldots, k)$, получаем, что

- $G_v = G_0 \times G_1\mathbf{w} \times \ldots\mathbf{w} \times G_k$;
- группа G_0 порождается элементами $g \in G_v$, такими что $\dim \mathbf{r}(E\mathbf{w} - g)N_v \leqslant 2$ (и, согласно лемме 3, тривиальна);
- каждая из групп G_i, $i = 1, \ldots, k$, совпадает со своим коммутантом;
- если $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $g \in G_i \setminus \{E\}$, то $N_v^g = N_v \cap W_i^{\perp}$ и $(E-g)N_v = W_i$ (как следствие, $\dim \mathbf{r}(E-g)N_v = 4$, $\mathrm{rk}(E-g) \leqslant 6$).

Ввиду вышесказанного, $G_v = G_1\mathbf{w} \times \ldots\mathbf{w} \times G_k = [G_v, G_v]$.

Лемма 4. *Каждая из групп $\mathrm{Ad}(G_i)$, $i = 1, \ldots, k$, коммутативна.*

Доказательство. Допустим, что найдутся число $i \in \{1, \ldots, k\}$ и элементы $g, h \in G_i$, такие что операторы $\mathrm{Ad}(g)$ и $\mathrm{Ad}(h)$ не коммутируют.

Имеем $\mathrm{Ad}(g), \mathrm{Ad}(h) \neq E$, причём $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(g)}, \mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(h)} \subset \mathfrak{g}$ — различные одномерные подпространства. Значит, $\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(h)} = \mathbb{R}\xi$ $(\xi \in (\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(h)}) \setminus (\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(g)}))$, и тогда $\xi V^h \subset V^h$, а также

$(\mathfrak{g}v)^h = (\mathfrak{g}^{\mathrm{Ad}(h)})v = \mathbb{R}(\xi v)$. Далее, $g, h \in G_i \setminus \{E\}$, и потому, во-первых, $\mathrm{rk}(E-h) \leqslant 6$, а во-вторых, $N_v^g = N_v^h = N_v \cap W_i^\perp$, $V^h = N_v^g \oplus \mathbf{r}\mathbb{R}(\xi v)$, $(E-g)\xi V^h \subset (E-g)V^h = \mathbb{R}\mathbf{r}(E-g)\xi v$, $\dim(\varphi_{g,\xi}V^h) \leqslant 2$. В силу леммы 2, $\operatorname{Ker}\varphi_{g,\xi} = 0$, откуда $\dim V^h = \dim(\varphi_{g,\xi}V^h) \leqslant 2$ и, следовательно, $\dim V = \mathrm{rk}(E-h) + \dim V^h \leqslant 8$, в то время как $\dim V > 8$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Для любого $i = 1, \ldots, k$ имеем $\mathrm{Ad}(G_i)\mathbf{w} = \mathrm{Ad}\,\mathbf{r}[G_i, G_i]\mathbf{w} = \mathbf{0}\mathrm{Ad}(G_i), \mathrm{Ad}(G_i)\mathbf{w} = \{E\}$, т.е. $G_i \subset \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$. Значит, $G_v = G_1\mathbf{w} \times \ldots \mathbf{w} \times G_k \subset \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$.

Тем самым теорема 6 полностью доказана.

Следствие 4. *Для всякого* $v \in V \setminus \{0\}$ *имеем* $G_v \cap G^0 = \{E\}$.

Доказательство. Согласно теореме 6, $G_v \subset \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$, $G_v \cap G^0 \subset (\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}) \cap G^0 = \{\pm E\}\mathbf{w} \subset \mathbf{O}(V)$. $\square$

Существует вложение $\mathbb{T} \hookrightarrow G^0$, и поэтому группу $\mathbb{T}$ можно отождествить с её образом при данном вложении и понимать как подгруппу группы G^0. В силу следствия 4, всякое неприводимое подпредставление представления $\mathbb{T}\colon V$ является точным, а значит, изоморфно представлению $\mathbb{T}\colon \mathbb{C}$ умножениями. Тем самым пространство V наделяется комплексной структурой, в соответствии с которой действие $\mathbb{T}\colon V$ осуществляется умножениями на скаляры. Все операторы группы $\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ коммутируют со всеми операторами группы $G^0 \supset \mathbb{T}$, причём $(\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}) \cap G^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{T}$. Значит, $\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ — конечная подгруппа группы $\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, каждый её оператор g полупрост над полем $\mathbb{C}$ и удовлетворяет соотношению $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g) \subset \mathbb{T} \subset G^0$.

В группе G обозначим через H подгруппу, порождённую объединением всех подгрупп G_v, $v \in V \setminus \{0\}$. Согласно теореме 6, $H \subset \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$.

Предложение 1. *Для любого* $g \in \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ *имеем* $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g) \subset (gH) \cap \mathbb{T}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $\lambda \in (\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g)$. Существует вектор $v\mathbf{w} \in V \setminus \{0\}$, такой что $gv = \lambda v$, и тогда $\lambda \in gG_v \subset gH$. $\square$

Лемма 5. *Для любого* $g \in \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ *имеем* $g^2 = E$.

Доказательство. Как отмечалось ранее, $H \subset \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$. Отсюда $gH \subset g(\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}) = \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$. В силу предложения 1, $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g) \subset (gH) \cap \mathbb{T} \subset (\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}) \cap \mathbb{T} = \{\pm 1\} \subset \mathbb{T}$. $\square$

Следствие 5. *Группа* $\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ *коммутативна.*

Следствие 6. *Для всякого* $v \in V \setminus \{0\}$ *имеем* $G_v = \{E\}$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 6 и следствия 5. $\square$

Следствие 7. *Подгруппа* $H \subset G$ *тривиальна.*

Лемма 6. *Имеем* $\operatorname{Ker}\mathrm{Ad} \subset G^0$.

Доказательство. Пусть $g \in \operatorname{Ker}\mathrm{Ad}$ — произвольный элемент. Из предложения 1 и следствия 7 вытекает, что $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g) \subset \{g\} \cap \mathbb{T}$. В то же время $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, g) \neq \varnothing$, откуда $g \in \mathbb{T} \subset G^0$. $\square$

Поскольку $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{In}(\mathfrak{g})$, имеем $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Ad}(G^0)$. Отсюда, а также из леммы 6 вытекает, что $G = G^0(\operatorname{Ker}\mathrm{Ad}) = G^0 \cong \mathrm{SU}_2$. Значит, $\pi_3(G)\mathbf{w} \cong \pi_3(\mathrm{SU}_2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$.

Пусть $S \subset V$ — единичная сфера, а M — фактор S/G.

Имеем $\dim V > 8$, $\dim S > 7$; значит, S и M — связные топологические пространства, причём $\pi_k(S) = \{e\}$ $(k = 1, \ldots, 7)$. Согласно следствию 6, действие $G\colon S$ свободное. Отображение факторизации $S \twoheadrightarrow M$ является локально тривиальным расслоением со слоем G. Соответствующая точная гомотопическая последовательность даёт соотношения $\pi_k(M) \cong \pi_{k-1}(G)$ $(k = 2, \ldots, 7)$ и $\pi_1(M) \cong G/G^0 = \{e\}$. В силу леммы 1, $M \cong S^m$ $(m := \dim S - 3 > 4)$; с другой стороны, $\pi_4(M) \cong \pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$. Получили противоречие, которое окончательно доказывает теорему 1.

3. Заключение

В работе получено необходимое условие для того, чтобы фактор линейного представления простой трёхмерной компактной группы Ли был гомологическим многообразием: сумма целых частей половин размерностей неприводимых компонент представления не должна превышать 4. Ранее было доказано, что данное условие необходимо для гладкости фактора и что в большинстве остальных случаев фактор гомеоморфен векторному пространству.

Полученный результат оставляет задел для аналогичного уточнения условия на фактор в более широком классе компактных линейных групп. Так, к текущему моменту доказано, что лишь для небольшого количества конкретных простых неприводимых линейных групп классических типов фактор может быть гладким многообразием. Ожидается, что даже гомологическим многообразием он может быть лишь в указанных случаях и что доказать это удастся схожими методами, ссылаясь на базовые классы линейных групп (связная компонента которых коммутативна либо проста и трёхмерна).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлова М. А. О факторпространстве по действию конечной группы, порожденной псевдоотражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Вып. 48, № 1. С. 104-126.

2. Lange C. When is the underlying space of an orbifold a topological manifold? // arXiv: math.GN/1307.4875.

3. Стырт О. Г. О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Труды ММО. 2009. Вып. 70. С. 235-287.

4. Стырт О. Г. О пространстве орбит трёхмерной компактной линейной группы Ли // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Вып. 75, № 4. С. 165-188.

5. Стырт О. Г. О пространстве орбит неприводимого представления специальной унитарной группы // Труды ММО. 2013. Вып. 74, № 1. С. 175-199.

6. Styrt O. G. On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B, C, and D // J. Algebra. 2014. Vol. 415. P. 137-161.

7. Styrt O. G. Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component // arXiv: math.AG/1607.06907.

8. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 3. С. 68-81.

9. Стырт О. Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой. Выводы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2018. № 6. С. 48-63.

10. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука. 1980. 440 с.

REFERENCES

1. Mikhailova, M. A. 1985, “On the quotient space modulo the action of a finite group generated by pseudoreflections“, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, no. 1, pp. 99-119. DOI: 10.1070/IM1985v024n01ABEH001216

2. Lange, C. 2013, “When is the underlying space of an orbifold a topological manifold?“, arXiv: math.GN/1307.4875.

3. Styrt, O. G. 2009, “On the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component“, *Tr. Mosk. Mat. O-va*, vol. 70, pp. 235-287.

4. Styrt, O. G. 2011, “On the orbit space of a three-dimensional compact linear Lie group“, *Izv. RAN, Ser. math.*, vol. 75, no. 4, pp. 165-188.

5. Styrt, O. G. 2013, “On the orbit space of an irreducible representation of a special unitary group“, *Tr. Mosk. Mat. O-va*, vol. 74, no. 1, pp. 175-199.

6. Styrt, O. G. 2014, “On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B, C, and D“, *J. Algebra*, vol. 415, pp. 137-161.

7. Styrt, O. G. 2016, “Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component“, arXiv: math.AG/1607.06907.

8. Styrt, O. G. 2018, “Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with a commutative connected component“, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki (Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.)*, no. 3, pp. 68-81.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81

9. Styrt, O. G. 2018, “More on the topological and homological properties of the orbit space in a compact linear Lie group featuring a commutative connected component“, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki (Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.)*, no. 6, pp. 48-63.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-48-63

10. Bredon, G. E. 1972, “Introduction to compact transformation groups“, *Academic Press*, 459 p.

Получено 12.05.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-178-193

Математическая оптимизация среднего размера частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У[1]

Е. В. Агеев, Е. В. Агеева, $\boxed{\text{А. Е. Гвоздев}}$, Е. А. Протопопов, В. О. Поданов

Агеев Евгений Викторович — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageev_ev@mail.ru

Агеева Екатерина Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru

$\boxed{\textbf{Гвоздев Александр Евгеньевич}}$ — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Протопопов Евгений Александрович — кандидат технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: pea_12@mail.ru

Поданов Вадим Олегович — аспирант, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: vadim.podanov@yandex.ru

Аннотация

В настоящее время одна из основных проблем использования жаропрочного никелевого сплава ЖС6У связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др. и необходимостью его повторного использования путем измельчения. Одним из эффективных, но недостаточно изученных металлургических способов измельчения металлоотходов является электродиспергирование. К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения о составе, структуре и свойствах частиц сплава ЖС6У, полученных в условиях электроэрозионной металлургии.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств изделий из полученной шихты требовалось провести оптимизацию режимов электроэрозионного диспергирования отходов сплава ЖС6У методом планирования эксперимента. Для шихты со сферической формой частиц одним из основных технологических параметров является оптимальный гранулометрический состав, поэтому оптимизацию процесса получения шихты из отходов сплава ЖС6У проводили по среднему размеру частиц. Электроэрозионное диспергирование отходов сплава ЖС6У осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859). В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались частицы различного размера. Оптимизация процесса электродиспергирования частиц, полученных ЭЭД отходов сплава ЖС6У, проводилась опытным определением сочетания уровней факторов, при котором достигалось необходимое значение среднего диаметра частиц электроэрозионной шихты. Для этого использовали метод крутого восхождения Бокса и Уилсона. Оптимизация процесса электродиспергирования отходов сплава

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-596.2022.4).

ЖС6У в дистиллированной воде и осветительном керосине осуществлялась с учетом таких факторов, как напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов.

Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации по среднему размеру электроэрозионных частиц, которые составили: для дистиллированной воды – 50,4 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц; для осветительного керосина – 58,4 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов жаропрочного никелевого сплава и повторное их использование при изготовлении ответственных деталей машиностроения.

Ключевые слова: отходы жаропрочного никелевого сплава ЖС6У, электроэрозионное диспергирование, частицы порошка, оптимизация, средний размер частиц.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
Е. В. Агеев, Е. В. Агеева, А. Е. Гвоздев, Е. А. Протопопов, В. О. Поданов. Математическая оптимизация среднего размера частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 178–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-178-193

Mathematical optimization of the average particle size of powders obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U

E. V. Ageev, E. V. Ageeva, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, V. O. Podanov

Ageev Yevgeniy Viktorovich — doctor of technical sciences, professor, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageev_ev@mail.ru
Ageeva Ekaterina Vladimirovna — candidate of technical sciences, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
Gvozdev Aleksander Evgenyevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Protopopov Yevgeniy Aleksandrovich — candidate of technical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: pea_12@mail.ru
Podanov Vadim Olegovich — postgraduate student, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: vadim.podanov@yandex.ru

Abstract

Currently, one of the main problems of using the heat-resistant nickel alloy ZhS6U is associated with the presence of expensive components in its composition, such as Ni, Ti, Mo, Co, etc. and the need to reuse it by grinding. One of the effective, but insufficiently studied metallurgical methods of grinding metal waste is electrodispersion. To date, in the modern scientific and technical literature there is no complete information about the composition, structure and properties of the particles of the ZhS6U alloy obtained in the conditions of electroerosive metallurgy.

In order to predict the high physical and mechanical properties of products from the resulting charge, it was necessary to optimize the modes of electroerosive dispersion of waste of the ZhS6U alloy by the method of experiment planning. For a charge with a spherical particle shape, one of the main technological parameters is the optimal granulometric composition, therefore, the optimization of the process of obtaining the charge from the waste of the ZhS6U alloy was carried out according to the average particle size. The electroerosive dispersion of the waste of the ZhS6U alloy was carried out on an experimental installation (RF Patent No. 2449859). As a result of exposure to short-term electrical discharges, particles of various shapes and sizes were formed. Optimization of the process of electrodispersion of particles obtained by the EED of the waste of the ZhS6U alloy was carried out by experimental determination of a combination of levels of factors at which the required value of the average diameter of the particles of the electroerosion charge was achieved. To do this, the method of steep ascent of Box and Wilson was used. Optimization of the process of electrodispersion of waste of the ZhS6U alloy in distilled water and lighting kerosene was carried out taking into account such factors as the voltage at the electrodes, the capacity of the discharge capacitors and the pulse repetition frequency.

According to the conducted series of experiments, the limiting values of the optimization parameter for the average size of electroerosive particles were determined, which were: for distilled water – 50.4 microns with a capacity of discharge capacitors of 65.5 UF, a voltage at the electrodes of 200 V, a pulse repetition frequency of 200 Hz; for lighting kerosene - 58.4 microns with a capacity of discharge capacitors of 65.5 UF, a voltage at the electrodes of 200 V, a pulse repetition frequency of 200 Hz.

Carrying out the planned measures will solve the problem of recycling heat-resistant nickel alloy waste and their reuse in the manufacture of critical parts of mechanical engineering.

Keywords: waste of heat-resistant nickel alloy ZhS6U, electroerosive dispersion, powder particles, optimization, average particle size.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

E. V. Ageev, E. V. Ageeva, A. E. Gvozdev, E. A. Protopopov, V. O. Podanov, 2022, "Mathematical optimization of the average particle size of powders obtained by electroerosive dispersion of heat-resistant nickel alloy ZHS6U" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 178–193.

1. Введение

В настоящее время жаропрочные сплавы нашли широкое распространение для изготовления лопаток турбин, самым распространенным из них является сплав ЖС6У. Данный сплав имеет предел сточасовой прочности при 1000 °C– 170. . . 180 МПа [1-4]. Верхний предел рабочих температур сплава ЖС6У составляет 1050. . . 1100 °C. Данный сплав обладает очень высокой жаропрочностью, что затрудняет процесс его переработки и повторного использования [5-8].

В настоящее время одна из основных проблем использования сплава ЖС6У связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др. и необходимостью его повторного использования путем измельчения [9-12]. Одним из эффективных, но недостаточно изученных металлургических способов измельчения металлоотходов является электродиспергирование [13-17].

К настоящему времени в промышленности данный способ практически не применяется, ввиду отсутствуя полноценных комплексных сведений о составе, структуре и свойствах диспергированных электроэрозией частиц, а также сплавов, полученных на их основе. Для этого требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований.

К настоящему времени в современной научно-технической литературе отсутствуют полноценные сведения о составе, структуре и свойствах частиц сплава ЖС6У, полученных в условиях электроэрозионной металлургии.

Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований. Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему рециклинга отходов сплавов ЖС6У и дальнейшее их использование и, тем самым, снизить себестоимость производства конечного продукта. Помимо того, актуальность рециклинга данного сплава связана с наличием в его составе дорогостоящих компонентов, таких как Ni, Ti, Mo, Co и др.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств изделий из полученной шихты требовалось провести оптимизацию режимов электроэрозионного диспергирования отходов сплава ЖС6У методом планирования эксперимента. Для шихты со сферической формой частиц одним из основных технологических параметров является оптимальный гранулометрический состав, поэтому оптимизацию процесса получения шихты из отходов сплава ЖС6У проводили по среднему размеру частиц.

Целью настоящей работы являлось проведение математической оптимизации среднего размера частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием жаропрочного никелевого сплава ЖС6У.

2. Основной текст статьи

Электродиспергирование отходов жаропрочного никелевого сплава ЖС6У в виде некондиционных «рабочих» лопаток турбины реактивного двигателя самолета осуществляли на экспериментальной установке (Патент РФ № 2449859) [14-20]. В результате воздействия кратковременных электрических разрядов образовывались частицы жаропрочного никелевого сплава различного размера.

Исследование формы и морфологии поверхности частиц, полученных электродиспергированием отходов жаропрочного никелевого сплава ЖС6У, проводили на электронно-ионном сканирующем (растровом) микроскопе с полевой эмиссией электронов «QUANTA 600 FEG» (Нидерланды). Методика исследования формы частиц представлена в виде блок-схемы на рис. 1.

Средний размер частиц полученной электроэрозионной шихты исследовали на лазерном анализаторе размеров частиц «Analysette 22 NanoTec» (Германия). Блок-схема методики исследования гранулометрического состава представлена на рис. 2.

Для шихты со сферической формой частиц одним из основных технологических параметров является оптимальный гранулометрический состав, поэтому оптимизацию процесса получения шихты из отходов сплава ЖС6У проводили по среднему размеру частиц.

Оптимизацию процессов диспергирования отходов проводили постановкой полного факторного эксперимента (ПФЭ) по среднему размеру получаемых электроэрозионных частиц согласно блок-схемам (рис. 3 и рис. 4).

Задача оптимизации сводится к опытному определению такого сочетания уровней факторов, при котором достигается максимальное (минимальное) значение выходного параметра. Для этого используют метод крутого восхождения Бокса и Уилсона. Блок-схема методики расчета крутого восхождения представлена на рис. 5.

В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов. Оптимальные параметры работы установки определяли для среды воды дистиллированной и керосина осветительного.

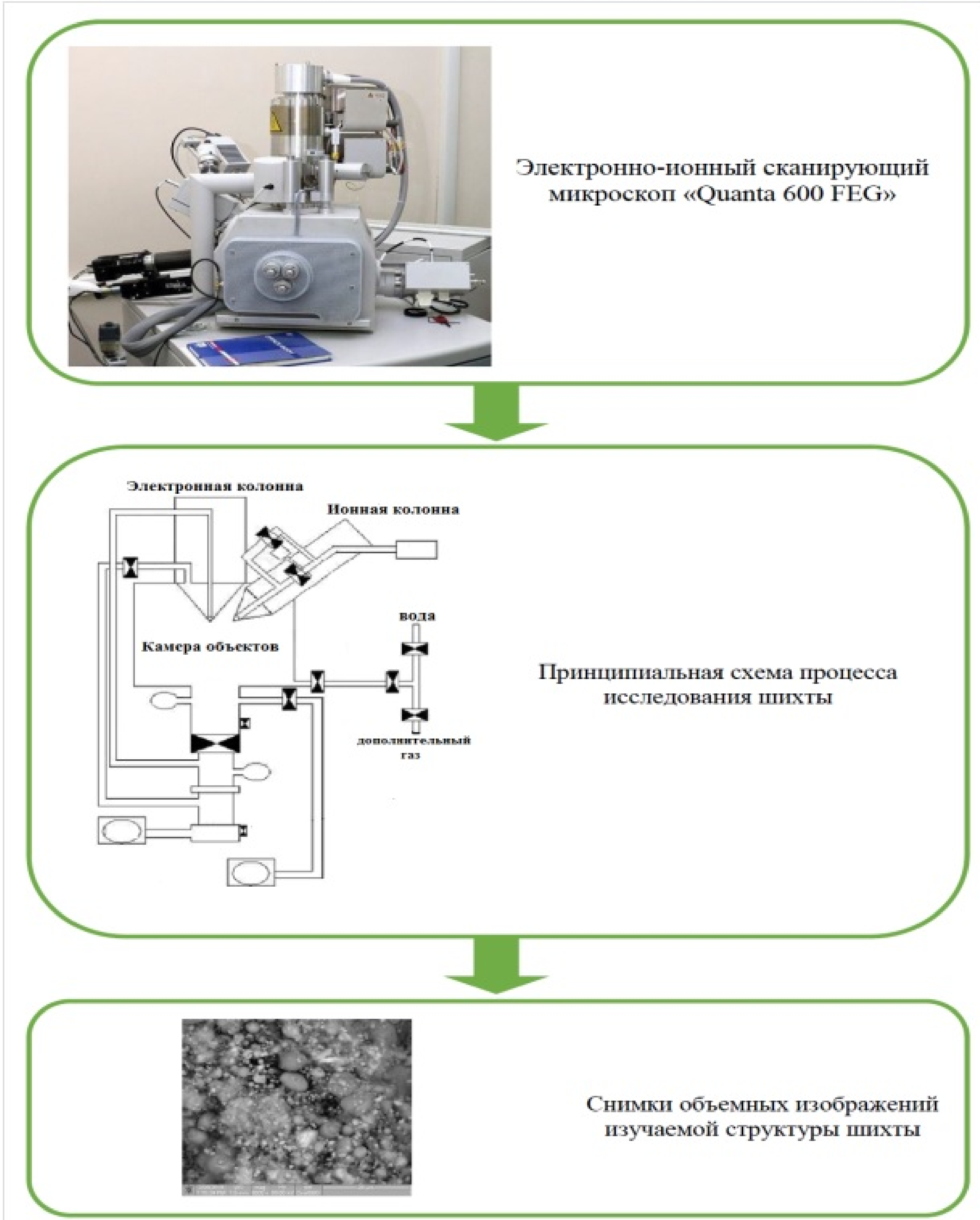


Рис. 1: Блок-схема методики исследования формы и морфологии частиц

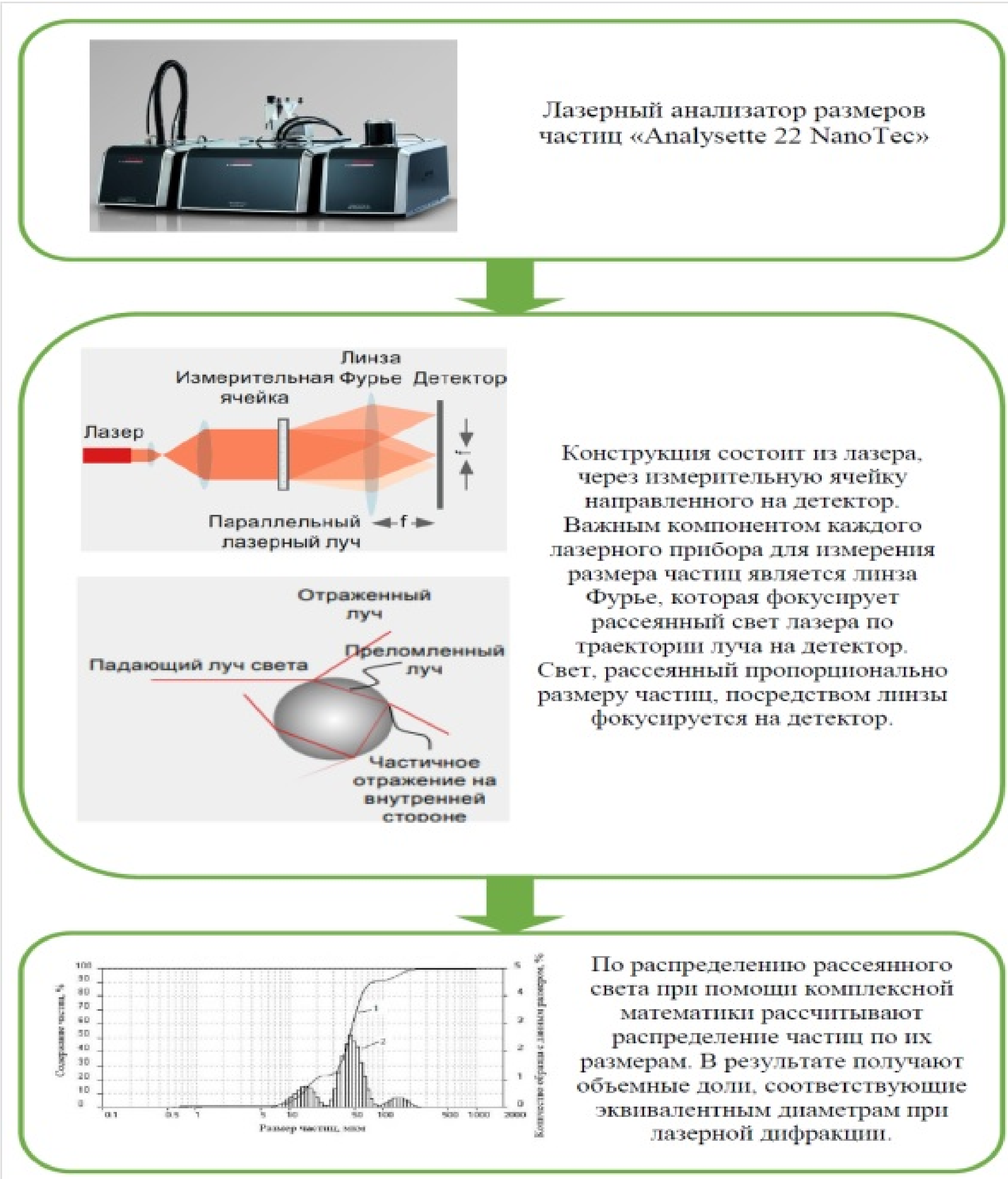


Рис. 2: Блок-схема методики определения среднего размера частиц

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$$

где X_1, X_2, X_3 – факторы,

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0			
Интервал варьирования	Δx_i			
Верхний уровень	+1			
Нижний уровень	-1			

Каждый опыт проводится трижды (y_1, y_2, y_3).

Используя уравнения $X_1 = \frac{U-O}{\Delta x_{i(U)}}$; $X_2 = \frac{v-O}{\Delta x_{i(v)}}$; $X_3 = \frac{C-O}{\Delta x_{i(C)}}$, перекодируем значения факторов и составим матрицу планирования эксперимента.

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\overline{y}_i$	$S^2_{\text{воспр}_i}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-					
2	+	+	-	-	-	-	+	+					
3	+	-	+	-	-	+	-	+					
4	+	+	+	-	+	-	-	-					
5	+	-	-	+	+	-	-	+					
6	+	+	-	+	-	+	-	-					
7	+	-	+	+	-	-	+	-					
8	+	+	+	+	+	+	+	+					

Рис. 3: Блок-схема постановки полного факторного эксперимента (1 этап)

1. $\overline{y_i} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

2. Определяем дисперсию параллельных опытов:

$$S^2_{\text{воспр}_i} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}\left(y_{ij} - \overline{y_i}\right)^2$$

3. Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех опытов $\sum_{i=1}^{8} S^2_{\text{воспр}_i}$

4. Осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена:

$$G_{\text{расч}} = \frac{S^2_{max}}{\sum_{i=1}^{n} S_{\text{воспр}_i}}$$

Сравниваем $G_{\text{расч}}$ и $G_{\text{табл}}$. Если $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$, принимаем гипотезу об однородности дисперсий. Если $G_{\text{расч}} > G_{\text{табл}}$, дисперсия неоднородная.

5. Вычисляем дисперсию воспроизводимости для всех экспериментов

$$S^2_{\text{восп}} = S^2_{(y)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S^2_{\text{воспр}_i}$$

6. Вычисляем ошибку всего эксперимента

$$S(y) = \sqrt{S^2_{(y)}}$$

7. Рассчитываем коэффициенты уравнения

$b_i = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{in}\overline{y_i}$, $b_0 = \frac{1}{N}\sum_1^N \overline{y_i}$, $b_{ij} = \frac{1}{N}\sum_1^N X_{in}X_{jn}\overline{y_i}$

8. Составление уравнения регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$$

9. Проверяем статистическую значимость коэффициентов.

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}}$$

Далее определяем доверительный интервал длиной $2\Delta b_i$:

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i)$$

Табличное значение $t_{табл}$ выбираем для числа степеней свободы $f = N(m-1)$

Сравниваем Δb_i *и* b_i. Если $\Delta b_i > b_i$, то коэффициент не значимый – исключаем из уравнения регрессии. Если $\Delta b_i < b_i$, то коэффициент значимый – оставляем в уравнении регрессии.

10. Проверяем уравнение на адекватность

Находят значения F- критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{расч} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{восп}} = \frac{S^2_{ад}}{S^2(y)}$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей F-критерия, необходимо определить число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ и $f_{\text{восп}}$: $f_{\text{ад}} = N - 1$, $f_{\text{восп}} = N(m-1)$.

Исходя из найденных значений *fад*, *fвосп* находим по таблице *Fтабл*. Если *Fрасч* < *Fтабл* , то уравнение считают адекватным.

Рис. 4: Блок-схема постановки полного факторного эксперимента (2 этап)

Рис. 5: Блок-схема расчета крутого восхождения

3. Результаты и их обсуждение

Анализ параметров формы частиц электроэрозионной шихты со средним размером 25…100 мкм по изображениям с растрового микроскопа показал, что электроэрозионные частицы жаропрочного никелевого сплава в основном имеют сферическую форму (рис. 6).

Согласно блок-схемам методики, представленным на рисунках 3-5, были выбраны уровни и интервалы варьирования (табл. 1) и составлены матрицы планирования для экспериментов, проведенных в воде дистиллированной (табл. 2) и керосине осветительном (табл. 3).

Согласно проведенным расчетам, были получены уравнения регрессии, моделирующие полный факторный эксперимент в воде дистиллированной (1) и керосине осветительном (2).

$$\hat{y} = 26,3 + 13,8X_1 + 3,7X_2 + 5,4X_3 + 0,18X_1X_2 + 0,3X_1X_3 + 0,15X_2X_3 + 0,6X_1X_2X_3 \quad (1)$$

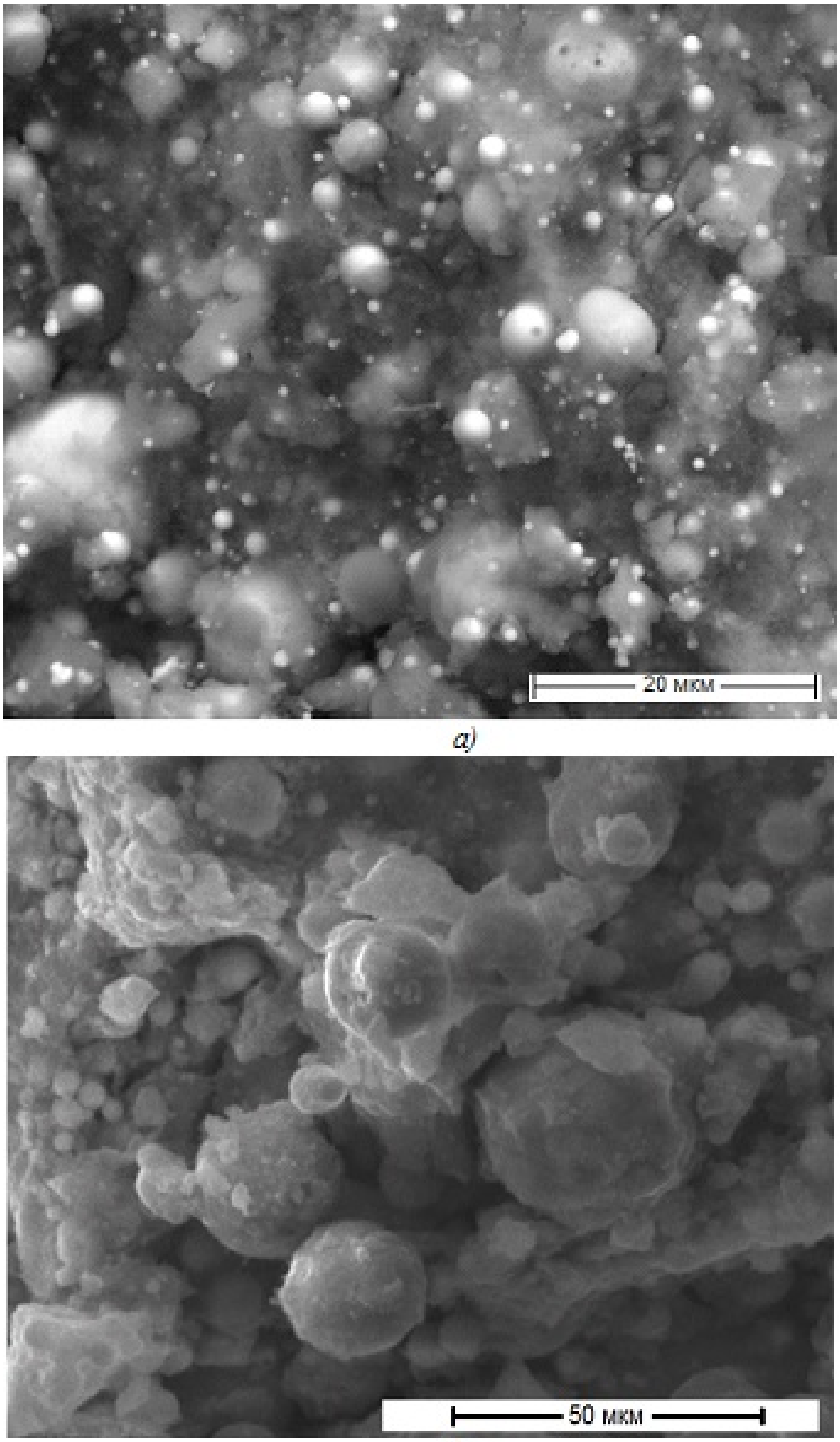


Рис. 6: Микрофотография частиц электроэрозионной шихты, полученной: а) в воде дистиллированной; б) керосине осветительном (растровый микроскоп QUANTA 600 FEG)

Таблица 1: Уровни и интервалы варьирования

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	U, В	ν, Гц	C, мкФ
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	150	150	45,5
Интервал варьирования	Δx_i	50	50	20
Верхний уровень	+1	200	200	65,5
Нижний уровень	-1	100	100	25,5

Таблица 2: Матрица планирования эксперимента (вода дистиллированная)

№ п/п	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_i	$S^2_{\text{воспр}}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	3,4	3,6	3,8	3,4	0,01
									11,6	11,5	11,4	11,5	0,01
2	+	+	-	-	-	-	+	+	31,6	31,4	30,2	31,1	0,57
									38,7	38,8	38,6	38,7	0,02
3	+	-	+	-	-	+	-	+	11,7	11,9	10,4	11,3	0,66
									21,1	21,3	21,1	21,1	0,02
4	+	+	+	-	+	-	-	-	38,4	36,4	37,8	37,5	0,57
									43,4	42,4	44,1	43,3	0,49
5	+	-	-	+	+	-	-	+	14,2	14,4	15,1	14,6	0,15
									24,6	24,8	25,0	24,8	0,04
6	+	+	-	+	-	+	-	-	41,6	41,2	41,0	41,3	0,09
									51,4	50,8	52,0	51,4	0,36
7	+	-	+	+	-	-	+	-	20,4	20,6	21,0	20,7	0,09
									31,1	30,2	30,1	30,4	0,25
8	+	+	+	+	+	+	+	+	50,1	51,1	50,2	50,5	0,31
									58,1	58,2	58,1	58,1	0,01

$$\hat{y} = 34,9 + 12,9X_1 + 3,3X_2 + 6,2X_3 - 3,3X_1X_2 + 0,59X_1X_3 - 0,21X_2X_3 + 0,8X_1X_2X_3 \quad (2)$$

В результате проверки статистической значимости коэффициентов все коэффициенты уравнения (1) оказались статистически значимыми. Все коэффициенты уравнения (2) оказались статистически значимыми.

Проверку уравнений на адекватность проводили с использованием критерия Фишера. В результате расчета установлено, что уравнения регрессии адекватны.

Полученные уравнения были использованы для расчета крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение начинали из нулевой точки (основные уровни): $X_1 = 150$ В, $X_2 = 150$ Гц, $X_3 = 45,5$ мкФ. Согласно проведенной серии опытов, результаты которых представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3: Расчет крутого восхождения (дистиллированная вода)

Наименование	X_1 (U, B)	X_2 (f, Гц)	X_3 (C, мкФ)	Y, мкм
Основной уровень	150	150	45,5	-
Коэффициент b_i	13,8	3,7	5,4	-
Интервал варьирования ξ_i	50	50	20	-
$b_i\xi_i$	690	185	108	-
Шаг Δ_i	34,5	9,25	5,4	-
Округленный шаг	35	10	5	-
Опыт 1	160	160	50,5	31,2
Опыт 2	195	170	55,5	43,2
Опыт 3	200	180	60,5	47,1
Опыт 4	200	190	65,5	49,5
Опыт 5 (max)	200	200	65,5	50,4

Таблица 4: Расчет крутого восхождения (керосин осветительный)

Наименование	X_1 (U, B)	X_2 (f, Гц)	X_3 (C, мкФ)	Y, мкм
Основной уровень	150	150	45,5	-
Коэффициент b_i	12,9	3,3	6,2	-
Интервал варьирования ξ_i	50	50	20	-
$b_i\xi_i$	645	165	124	-
Шаг Δ_i	32,2	8,25	6,2	-
Округленный шаг	32	8	6	-
Опыт 1	182	158	51,5	45,4
Опыт 2	200	166	57,5	52
Опыт 3	200	174	62,5	53,8
Опыт 4	200	182	65,5	55,0
Опыт 5	200	190	65,5	55,1
Опыт 6	200	198	65,5	55,2
Опыт 7 (max)	200	200	65,5	58,4

4. Заключение

1. Проведено определение оптимальных параметров работы установки ЭЭД методом постановки полного факторного эксперимента по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов. Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.

2. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации $\hat{y}$ (средний размер электроэрозионных частиц) для процесса ЭЭД, которые составили:

а) для образца, полученного в воде: 50,4 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц;

б) для образца, полученного в керосине: 58,4 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 200 В, частоте следования импульсов 200 Гц.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новикова О. В., Кочетков В. А., Виноградов А. И., Жуков А. А., Тихонов А. А., Маринин С. Ф. Применение газоизостатического прессования для повышения эксплуатационной надежности лопаток турбины из жаропрочного сплава типа ЖС6У // Заготовительные производства в машиностроении. 2007. № 8. С. 54-56.

2. Курихина Т. В. Кинетика образования интерметаллида на основе Ni3Al в жаропрочном никелевом сплаве ЖС6У // Технология машиностроения. 2017. № 1. С. 5-8.

3. Добрынин Д. А., Алексеева М. С., Афанасьев-Ходыкин А. Н. Ремонт деталей горячего тракта газотурбинного двигателя из жаропрочного никелевого сплава марки ЖС6У // Труды ВИАМ. 2021. № 5 (99). С. 3-13.

4. Михайленко С. В., Настольная В. В., Бородихин А. С., Голубь Р. С. Исследование производительности обработки жаропрочной стали ЖС6У керамическими пластинами // Актуальные научные исследования в современном мире. 2020. № 12-1 (68). С. 128-131.

5. Быков Ю. Г., Логунов А. В., Разумовский И. М., Фролов В. С. Изменение плотности сплава ЖС6У в процессе эксплуатации // Металловедение и термическая обработка металлов. 2007. № 7 (625). С. 29-32.

6. Оспенникова О. Г., Орлов М. Р. Повышение свойств жаропрочного сплава ЖС6У-ВИ путем горячего изостатического прессования и последующей термической обработки // Материаловедение. 2007. № 9. С. 32-37.

7. Ерёмин Е. Н., Филиппов Ю. О., Давлеткильдеев Н. А., Миннеханов Г. Н. Исследование структуры сплава ЖС6У методом атомно-силовой микроскопии // Омский научный вестник. 2011. № 1 (97). С. 24-29.

8. Ерёмин Е. Н., Филиппов Ю. О., Маталасова А. Е. Исследование карбидных фаз в сплаве ЖС6У // Омский научный вестник. 2014. № 3 (133). С. 59-63.

9. Ерёмин Е. Н., Филиппов Ю. О., Миннеханов Г. Н., Лопаев Б. Е. Исследование фазовых превращений в сплаве ЖС6У методами термического анализа // Омский научный вестник. 2013. № 1 (117). С. 63-68.

10. Равилов Р. Г., Петрова М. А., Древняк В. В., Саадатибаи М. Методика оценки долговечности покрытия на лопатках турбины из сплавов ЖС6У И ЖС26ВСНК // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2015. № 222 (12). С. 201-206.

11. Ageeva E. V., Khor'yakova N. M., Ageev E. V. Morphology of copper powder produced by electrospark dispersion from waste // Russian Engineering Research. 2014. Vol. 34 (11). P. 694-696.

12. Ageeva E. V., Khor'yakova N. M., Ageev E. V. Morphology and composition of copper electrospark powder suitable for sintering // Russian Engineering Research. 2015. Vol. 35 (1). P. 33-35.

13. Ageeva E. V., Ageev E. V., Latypov R. A., Ageeva E. V. Investigation into the properties of electroerosive powders and hard alloy fabricated from them by isostatic pressing and sintering // Russian Journal of Non-Ferrous Metals. 2015. Vol. 56 (1). P. 52-62.

14. Ageeva E. V., Ageev E. V., Karpenko V. Y. Nanopowder produced from high-speed steel waste by electrospark dispersion in water // Russian Engineering Research. 2015. Vol. 35 (3). P. 189-190.

15. Latypov R. A., Ageeva E. V., Kruglyakov O. V., Latypova G. R. Electroerosion micro- and nanopowders for the production of hard alloys // Russian Metallurgy (Metally). 2016. Vol. 2016 (6). P. 547-549.

16. Latypov R. A., Ageev E. V., Latypova G. R., Altukhov A. Y., Ageeva E. V. Elemental Composition of the Powder Particles Produced by Electric Discharge Dispersion of the Wastes of a VK8 Hard Alloy // Russian Metallurgy (Metally). 2017. Vol. 2017 (12). P. 1083-1085.

17. Latypov R. A., Ageev E. V., Altukhov A. Y., Ageeva E. V. Manufacture of Cobalt–Chromium Powders by the Electric Discharge Dispersion of Wastes and Their Investigation // Russian Metallurgy (Metally). 2018. Vol. 2018 (12). P. 1177-1180.

18. Latypov R. A., Ageev E. V., Altukhov A. Y., Ageeva E. V. Effect of Temperature on the Porosity of the Additive Products Made of the Dispersed Wastes of Cobalt–Chromium Alloys // Russian Metallurgy (Metally). 2019. Vol. 2019 (12). P. 1300-1303.

19. Ageev E. V., Altukhov A. Yu., Ageeva E. V., Pykhtin A. I. Structure and mechanical properties of powders obtained by electrodisperging cobalt-chromium alloy // Journal of Applied Engineering Science. 2021. Vol. 19 (1). P. 230–236.

20. Ageeva E. V., Ageev E. V., Latypov R. A. Properties of the VNZH Pseudoalloy Sintered from Spark Erosion Powders Fabricated in Distilled Water // Russian Metallurgy (Metally). 2021. Vol. 6. P. 119–123.

21. Ageeva E. V., Ageev E. V., Kuzovleva O. V., Gvozdev A. E. Mathematical optimization of the process of electrodispergation of the waste of the alloy of the residence permit // Chebyshevskii Sbornik. 2021. Vol. 22 (2). P. 389-401.

22. Ageeva E. V., Ageev E. V., Kuzovleva O. V., Gvozdev A. E. Development of scientific and technological foundations for a new environmentally friendly and waste-free process for grinding conductive waste into micro- and nanofractions powders // Chebyshevskii Sbornik. 2021. Vol. 21 (4). P. 314-326.

23. Ageev E. V., Ageeva E. V., Khoryakova N. M. X-Ray methods for studying the surface of powder obtained by electroerosion dispersion of the waste of W–Ni–Fe 95 pseudoalloy in kerosene // Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2021. Vol. 15. No. 4. P. 723–727.

24. Ageev E. V., Ageeva E. V. Wear Resistance of Hardened Components Produced from Electrospark Cobalt–Chromium Powder by Additive Manufacturing // Russian Engineering Research. 2021. Vol. 41. No. 8. P. 731–733.

REFERENCES

1. Novikova, O. V., Kochetkov, V. A., Vinogradov, A. I., Zhukov, A. A., Tikhonov, A. A. & Marinin, S. F. 2007, "The use of gas-static pressing to improve the operational reliability of turbine blades made of heat-resistant alloy type ZHS6U", *Procurement production in mechanical engineering*, no. 8. pp. 54-56.

2. Kurikhina, T. V. 2017, “Kinetics of formation based on Ni3Al intermetallic compound in heat-resistant nickel alloy ZhS6U1“, *Technology of mechanical engineering*, no. 1, pp. 5-8.

3. Dobrynin, D. A., Alekseeva, M. S. & Afanasiev-The Khodykin, A. N. 2021, “Repair of the hot gas path of a gas turbine engine from heat-resistant Nickel alloy grade ZhS6U“, *Trudy VIAM*, no. 5(99), pp. 3-13.

4. Mikhailenko, S. V., Nastol'naya, V. V., Borodikhin, A. S. & Golub, R. S. 2020, “Investigation of the performance of processing heat-resistant steel ZhS6U with ceramic plates“, *Actual scientific research in the modern world*, no. 12-1(68), pp. 128-131.

5. Bykov, Yu. G., Logunov, A. V., Razumovsky, I. M. & Frolov, V. S. 2007, “The change in the density of alloy ZhS6U in the process of operation“, *Metallology and heat treatment of metals*, no. 7(625), pp. 29-32.

6. Ospennikova, O. G. & Orlov, M. R. 2007, “Improving the properties of the heat-resistant alloy ZhS6U-VI by hot isostatic pressing and subsequent heat treatment“, *Materials science*, no. 9, pp. 32-37.

7. Eremin, E. N., Filippov, Yu. O., Davletkildeev, N. A. & Minnekhanov, G. N. 2011, “Investigation of the structure of the alloy ZhS6U by atomic force microscopy“, *Omsk Scientific Bulletin*, no. 1(97), pp. 24-29.

8. Eremin, E. N., Filippov, Yu. O. & Matalasova, A. E. 2014, “Investigation of carbide phases in the alloy ZhS6U“, *Omsk Scientific Bulletin*, no. 3(133), pp. 59-63.

9. Eremin, E. N., Filippov, Yu. O., Minnekhanov, G. N. & Lopaev, B. E. 2013, “Investigation of phase transformations in the alloy ZhS6U by methods of thermal analysis“, *Omsk Scientific Bulletin*, no. 1(117), pp. 63-68.

10. Ravilov, R. G., Petrova, M. A., Drevnyak, V. V. & Saadatibai, M. 2015, “Methodology for assessing the durability of the coating on turbine blades made of alloys ZhS6U and ZHS26VSNK“, *Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation*, no. 222(12), pp. 201-206.

11. Ageeva, E. V., Horyakova, N. M. & Ageev, E.V. 2014, “Morphology of copper powder obtained by electric spark dispersion from waste“, *Russian Engineering Research*, vol. 34(11), pp. 694-696.

12. Ageeva, E. V., Horyakova, N. M. & Ageev, E. V. 2015, “Morphology and composition of electric spark copper powder suitable for sintering“, *Russian Engineering Research*, vol. 35(1), pp. 33-35.

13. Ageeva, E. V., Ageev, E. V., Latypov, R. A. & Ageeva, E. V. 2015, “Investigation of the properties of electroerosive powders and hard alloys obtained from them by isostatic pressing and sintering“, *Russian Journal of Non-Ferrous Metally*, vol. 56(1), pp. 52-62.

14. Ageeva, E. V., Ageev, E. V. & Karpenko, V. Y. 2015, “Nanopowder obtained from the wastes of high speed steel by electro-spark dispersion in water“, *Russian engineering research*, vol. 35(3), pp. 189-190.

15. Latypov, R. A., Ageeva, E. V., Kruglyakov, O. V. & Latypova, G. R. 2016, “EDM micro - and nanopowders for the production of hard alloys“, *Russian metallurgy (Metally)*, vol. 2016(6), pp. 547-549.

16. Latypov, R. A., Ageev, E. V., Latypov, R. G., Altukhov, A. Yu. & Ageev, E. V. 2017, “The elemental composition of the powder particles obtained by dispersion of waste discharge hard alloy VK8“, *Russian metallurgy (Metally)*, vol. 2017(12), pp. 1083-1085.

17. Latypov, R. A., Ageev, E. V., Altukhov, A. Yu. & Ageev, E. V. 2018, “Receiving cobalt–chrome powders by the method of electric discharge dispersion of wastes and their study“, *Russian metallurgy (Metally)*, vol. 2018(12), pp. 1177-1180.

18. Latypov, R. A., Ageev, E. V., Altukhov, A. Yu. & Ageeva, E. V. 2019, “The effect of temperature on the porosity of additive products made from dispersed waste of cobalt-chromium alloys“, *Russian Metallurgy (Metally)*, vol. 2019(12), pp. 1300-1303.

19. Ageev, E. V., Altukhov, A. Yu., Ageev, E. V. & Pykhtin, A. I. 2021, “Structure and mechanical properties of powders, obtained by electrodispersion cobalt-chromium alloy“, *Journal of applied engineering science*, vol. 19(1), pp. 230-236.

20. Ageeva, E. V., Ageev, E. V. & Latypov, R. A. 2021, “Properties of pseudoplane permit, sintered from powders spark erosion, made in distilled water“, *Russian metallurgy (Metally)*, vol. 6, pp. 119-123.

21. Ageeva, E. V., Ageev, E. V., Kuzovleva, O. V. & Gvozdev, A. E. 2021, “Mathematical optimization process electrodispersion waste of alloy residence“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22(2), pp. 389-401.

22. Ageeva, E. V., Ageev, E. V., Kuzovleva, O. V. & Gvozdev, A. E. 2021, “The development of scientific and technological foundations of a new environmentally friendly and waste grinding process waste in conductive powders of micro- and nanoflake“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21(4), pp. 314-326.

23. Ageev, E. V., Ageeva, E. V. & Horakova, N. M. 2021, “X-ray methods of investigation of the surface of the powder obtained by electroerosion dispersion of waste pseudoplane W-Ni–Fe 95 kerosene“, *Journal of research of the surface: x-ray, synchrotron and neutron techniques*, vol. 15, no. 4, pp. 723-727.

24. Ageev, E. V. & Ageeva, E. V. 2021, “Wear resistance of hardened parts made of electric spark cobalt-chromium powder by additive manufacturing“, *Russian Engineering Research*, vol. 41, no. 8, pp. 731-733.

Получено 12.05.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-194-206

Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов[1]

В. И. Горбачев

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается первая специальная краевая задача механики неоднородного деформируемого твердого тела, когда определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений с тензором деформаций, представляют собой нелинейный оператор от тензора деформаций. Вид определяющего оператора в неоднородном теле зависит от того в какой точке определяются напряжения. На границе тела, в каждой граничной точке, перемещения определяются как свертка произвольного постоянного симметричного тензора второго ранга с координатами этой точки. В нашем исследовании предполагается, что деформации, возникающие в теле от такого граничного воздействия, малы. Как следствие, среднее значение тензора деформаций в теле совпадает с постоянным тензором, определенным на границе, независимо от вида определяющих соотношений. Смещение точки внутри тела представляется в виде суммы двух членов. Первый член - это свертка граничного тензора с координатами точки, а второй член - неизвестная векторная функция (структурная функция), которая зависит от координат точки и граничного тензора. Эта функция равна нулю на границе тела. Для структурной функции в общем случае получено нелинейное операторное дифференциальное уравнение. Для решения этого уравнения применяется метод последовательных приближений и находятся приближенные выражения для структурных функций, а через них деформации и напряжения в каждой точке тела. Затем напряжения усредняют по объему тела и сравнивают со средними деформациями, т.е. определяют вид эффективных определяющих соотношений, выражающих средние напряжения через средние деформации. Подробно рассматривается случай неоднородной по толщине, бесконечной в плане плиты.

Ключевые слова: неоднородная среда, неупругие определяющие соотношения, эффективные определяющие соотношения, неоднородная по толщине плита.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

В. И. Горбачев. Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 194–206.

[1]Работа выполнена в рамках плана НИР кафедры механики композитов механико-математического ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова № АААА-А16-116070810022-4, при финансовой поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3:534.1;539.4:624.07 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-194-206

Effective defining relations of inelastic composites

V. I. Gorbachev

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vigorby@mail.ru

Abstract

In this paper we consider the first special boundary value problem in the mechanics of inhomogeneous deformable solids, when the defining relations connecting the stress tensor with the strain tensor are a nonlinear operator from the strain tensor. The type of the defining operator in an inhomogeneous body depends on at which point the stresses are determined. At the boundary of the body, at each boundary point, the displacements are defined as a convolution of an arbitrary constant symmetric tensor of rank 2 with the coordinates of this point. In our study, it is assumed that the deformations, arising in the body from such a boundary action are small. As a consequence, the average value of the strain tensor in the body coincides with the constant tensor defined at the boundary, independently of type of the defining relations. The displacement of a point inside the body is represented as a sum of two terms. The first term is the convolution of the boundary tensor with the point coordinates, and the second term is an unknown vector function (structural function) that depends on the coordinates of the point and the boundary tensor. This function is zero at the boundary of the body. A nonlinear operator differential equation is obtained for the structural function in the general case. To solve this equation, the method of successive approximations is applied and approximate expressions for the structural functions and, through them, the strains and stresses at each point of the body are found. Stresses are then averaged over the body volume and compared with average strains, i.e., the type of effective defining relations expressing average stresses through average strains is determined. The case of an inhomogeneous in thickness, infinite in plan, plate is considered in detail.

Keywords: inhomogeneous medium, inelastic defining relations, effective defining relations, inhomogeneous plate thickness.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
V. I. Gorbachev, 2022, “Effective defining relations of inelastic composites” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 194–206.

1. Введение

Пусть тело из композитного материала состоит из большого числа приблизительно одинаковых (представительных) разнородных объемов вещества. Под нагрузкой такое тело ведет себя как некоторое однородное тело, свойства которого отличаются от свойств элементов представительного объема. Свойства однородного тела называются эффективными свойствами. Напомним, что представительный объем - это такой минимальный объем вещества, теоретическое или экспериментальное исследование которого позволяет судить о свойствах композита как однородного тела. Для теоретического расчета эффективных свойств необходимо, чтобы внешние факторы (объемные и поверхностные силы, поверхностные смещения), действующие на тело, были такими, чтобы средние значения напряжений и деформаций в каждом представительном объеме совпадали со средними значениями во всем теле композита. Очевидно, что это возможно только при определенном типе нагружения тела. В работе [1] Хашин и Розен приводят два набора исходных данных, при которых эти условия выполняются. В обоих случаях объемные нагрузки отсутствуют. В первом случае смещения граничных точек специальной формы заданы на всей границе тела. В результате необходимо решить первую специальную краевую задачу (СКЗ). Из этого решения следуют определяющие соотношения, позволяющие выразить средние объемные напряжения тела через средние деформации (прямые определяющие соотношения). Во втором случае на всей границе тела задается распределенная нагрузка специального вида, и решается вторая специальная краевая задача. Это решение позволяет получить определяющие соотношения, выражающие средние деформации через средние напряжения (обратные определяющие соотношения). Следует отметить, что в общем случае неоднородности первая и вторая СКЗ не дают взаимно обратных определяющих соотношений. Однако, если тело периодически неоднородно, то при дроблении структуры эффективные определяющие соотношения стремятся к взаимно обратным соотношениям [2].

2. Постановка задачи об эффективных свойствах типа $<\underset{\sim}{\sigma}>\sim<\underset{\sim}{\varepsilon}>$

Угловые скобки здесь и в дальнейшем обозначают среднее значение функции в области определения. Пусть неоднородное тело, занимающее объем V, ограничено поверхностью Σ. Тело находится в равновесии под действием распределенных перемещений, заданных на его поверхности. Отнесём тело к декартовым координатам. Будем рассматривать случай малых деформаций. В этом случае напряженно-деформированное состояние тела описывается следующими уравнениями:

$$\sigma_{ij,j}=0\,,\quad \sigma_{ij}=\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})\,,\quad \varepsilon_{kl}=\Delta_{klmn}u_{m,n}\,,\quad (x\in \text{в}V). \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}, u_i — компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений. $\check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})$ обозначают компоненты оператора прямых определяющих соотношений [3, стр. 65]. В этой записи первый аргумент $x\equiv(x_1,x_2,x_3)$ обозначает то, что определяющие соотношения явно зависят от координат, второй аргумент — тензор деформаций (помечен волной снизу). Галочка сверху обозначает оператор по времени. Определяющие операторы, в общем случае, нелинейно зависят от компонент тензора деформаций. Пусть на всей границе тела заданы перемещения специального вида [1]

$$u_i|_\Sigma=\gamma_{ij}y_j\,,\qquad y\in\Sigma\,,\qquad \gamma_{ij}=\gamma_{ji}=\text{const}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) называется первой специальной краевой задачей, из решения которой находятся прямые эффективные определяющие соотношения неоднородного тела, представляющие средние напряжения через средние деформации. Легко показать, что в случае первой СКЗ, при малых деформациях $<\varepsilon_{ij}>=\gamma_{ij}$.

Решим далее первую СКЗ, найдем перемещения $u_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$, деформации $\varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma})$, напряжения $\sigma_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon})$ и усредним напряжения по объему:

$$<\sigma_{ij}>=\frac{1}{V}\int\limits_V \check{F}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma}))dV=\check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})=\check{F}^{eff}_{ij}(\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle)\,. \tag{3}$$

Операторы $\check{F}^{eff}_{ij}$ — компоненты тензора-оператора второго ранга $\underset{\sim}{\check{F}}^{eff}$, называемого эффективным оператором, а соотношения (3), позволяющие выразить средние по объему напряжения через средние по объему деформации, называются эффективными определяющими соотношениями типа $< \underset{\sim}{\sigma} > \sim < \underset{\sim}{\varepsilon} >$ (прямые эффективные определяющие соотношения).

Сложность решения первой СКЗ существенно зависит от типа исходных определяющих соотношений. Относительно просто решается первая СКЗ для линейно-упругого неоднородного тела, когда

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}\,, \tag{4}$$

где $C_{ijkl}(x)$ — компоненты тензора модулей упругости анизотропного и неоднородного материала тела.

Определяющие соотношения для линейного вязкоупругого неоднородного материала имеют вид:

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}(x,t)) = \int\limits_0^t \Gamma_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(t) - \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где $\Gamma_{ijkl}(x,t,\tau)$ — сингулярные, а $\Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)$ — регулярные ядра релаксации. Для нестареющих материалов определяющие соотношения записываются в виде интегралов Стилтьеса [3, стр. 79], [7, стр. 17]

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(x,t-\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(t) - \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau\,, \tag{6}$$

где $R_{ijkl}(x,t)$ — компоненты тензора функций ползучести неоднородного вязкоупругого материала, который в начальный момент нагружения $t = 0$ ведёт себя как упругий материал с компонентами тензора модулей упругости

$$C_{ijkl}(x) = R_{ijkl}(x,0)\,, \qquad \Gamma^*_{ijkl}(x,t-\tau) = -\frac{\partial R_{ijkl}(x,t-\tau)}{\partial(t-\tau)}\,.$$

Нелинейных определяющих соотношений для вязкоупругих материалов существует гораздо большее количество. Многие из этих соотношений разобраны в работах [3, 4, 5, 6].

В случае теории малых упруго-пластических деформаций (ТМУПД) [8]

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})\,, \tag{7}$$

где $C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})$ — компоненты тензора второго ранга, нелинейно зависящие от компонент тензора деформаций. В частности, для пластически несжимаемого изотропного материала

$$C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = 2\mu(x)\omega(x,\varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,, \tag{8}$$

где $\mu(x)$ — упругий модуль сдвига, $\varepsilon_u = \sqrt{2D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/3}$ — интенсивность деформаций, $D_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 - \delta_{ij}\delta_{kl}/3\,,\quad \omega(x,\varepsilon_u) = 1 - \sigma_u(x,\varepsilon_u)/(3\mu\varepsilon_u)$ — функция пластичности Ильюшина [9]. Здесь $\sigma_u(x,\varepsilon_u)$ — интенсивность напряжений $\sigma_u = \sqrt{3D_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2}$. Функция пластичности — это характеристика материала, определяемая из эксперимента на простое растяжение.

В дальнейшем ограничимся определяющими соотношениями, которые могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})\,, \tag{9}$$

где

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) \equiv 0\,, \qquad\qquad \text{— линейная упругость}$$

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t \Gamma^*_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(x,\tau)d\tau\,, \qquad \text{— линейная вязкоупругость}$$

$$\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = 2\mu(x)\omega(x,\varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,, \qquad \text{— ТМУПД}$$

3. Случай линейно-упругого неоднородного тела.

Решение краевой задачи (1), (2) при линейном упругом определяющем операторе (4) будем искать в виде:

$$u_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl}\,, \tag{10}$$

где $N_{ikl}(x)$ — непрерывные функции, симметричные по двум последним индексам (искомые структурные функции). По перемещениям находим деформации, а потом напряжения:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}\gamma_{kl}\,, \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\gamma_{kl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\gamma_{kl}\,,\\ \sigma_{ij,j} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j}\gamma_{kl} = 0\,.\end{gathered} \tag{11}$$

Из уравнения равновесия (1), граничных условий (2) и из произвольности γ_{kl} следуют уравнения и граничные условия для N_{ikl}-функций

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0; \qquad N_{mkl}|_{\Sigma} = 0. \tag{12}$$

Усредняя напряжения по объему тела и учитывая, что $\gamma_{kl} =< \varepsilon_{kl} >$, получаем выражения для эффективных модулей упругости через N_{ikl}-функции:

$$\begin{gathered}\Big\langle\sigma_{ij}\Big\rangle = \Big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\Big\rangle\gamma_{kl} = \Big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\Big\rangle\Big\langle\varepsilon_{kl}\Big\rangle \;\Rightarrow\\ \Big\langle\sigma_{ij}\Big\rangle = h_{ijkl}\Big\langle\varepsilon_{kl}\Big\rangle\,, \qquad h_{ijkl} = \Big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\Big\rangle.\end{gathered} \tag{13}$$

Довольно просто можно показать, что эффективные модули упругости, получаемые по формуле (13) из решения краевой задачи (12) удовлетворяют всем условиям симметрии и положительной определенности [11]:

$$h_{ijkl} = h_{jikl} = h_{jilk} = h_{klij}\,; \qquad h_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} > m\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}\,,\ m > 0\,, \forall\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji} \neq 0\,.$$

4. Случай неупругих операторных определяющих соотношений.

Рассмотрим далее случай более общих определяющих соотношений (9). Решение первой СКЗ по аналогии с упругим решением будем искать в следующем виде:

$$u_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \tag{14}$$

где $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$ — непрерывные по координатам нелинейные операторы (искомые структурные операторы). В вязкоупругом случае $\check{N}_i$ являются операторами по времени, принимающие нулевые значения на границе тела: $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0$. Далее находим деформации:

$$\varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}). \tag{15}$$

По формуле (9) определим напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) &= C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\big[\gamma_{kl} + \Delta_{klmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}\big] - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) = \\ &= C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,,\end{aligned} \tag{16}$$

где, для сокращения записи, введены новые операторы

$$\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\,. \tag{17}$$

Подстановка напряжений (16) в уравнения равновесия (1) приводит к нелинейной краевой задаче для операторов $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$:

$$\begin{aligned}&\Big[\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,; \\ &\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Решив задачу (18) находим $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$. После этого усредняем напряжения (16) по объему тела и находим эффективные определяющие соотношения неупругого неоднородного тела:

$$\big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle\check{\Phi}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle)\,. \tag{19}$$

4.1. Метод последовательных приближений для решения операторных уравнений.

Формула (16) для компонент тензора напряжений состоит из линейных и нелинейных слагаемых. Это обстоятельство позволяет, для конкретных вычислений, организовать метод последовательных приближений, положив

$$\begin{aligned}&\sigma^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ &\check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} = C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\end{aligned} \tag{20}$$

При этом полагаем, что $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv 0$ при $s<0$. Тогда нелинейные дифференциальные уравнения (18) можем записать в виде системы рекуррентных линейных дифференциальных уравнений в частых производных:

$$\begin{cases}\Big[\check{\Phi}^{\{s\}}_{ij} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,, \\ \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\end{cases} \tag{21}$$

После решения задачи (21) по найденным $\check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$ определяем перемещения, деформации и напряжения по формулам:

$$\begin{cases}u^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \varepsilon^{\{s\}}_{ij} = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,; \\ \sigma^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\end{cases} \tag{22}$$

Уравнения (21) для $\check{N}^{\{s\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})$ можно переписать в виде уравнений линейной упругости для неоднородного тела с заданной фиктивной объёмной нагрузкой

$$\left\{\begin{array}{ll} \Big[C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{s\}}_{m,n}\Big]_{,j} + \check{X}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = 0\,, \qquad \check{N}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,, \\ \check{X}^{\{s\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}^{\{s\}}_{ij,j} = \big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\big]_{,j}\,, \qquad s=0,1,2,\ldots \end{array}\right. \tag{23}$$

Начало рекурсии соответствует случаю $s=0$. В этом случае $\check{X}^{\{0\}}_i = \check{\Phi}^{\{0\}}_{ij,j} = C_{ijkl,j}(x)\gamma_{kl}$. Тогда из (23) получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для функции $N^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$

$$\Big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} + C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{0\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,, \quad \check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,. \tag{24}$$

Из краевой задачи (24) видно, что $\check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$ на самом деле является функцией координат линейно зависящей от произвольного симметричного постоянного тензора второго ранга $\underset{\sim}{\gamma}$, то есть $\boldsymbol{\check{N}^{\{0\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma}) \equiv N^{\{0\}}_{mkl}(x)\gamma_{kl}}$. Следовательно, получаем начальную задачу полностью тождественную задаче (12)

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N^{\{0\}}_{mkl,n})_{,j} = 0; \qquad N^{\{0\}}_{mkl}|_{\Sigma} = 0\,, \tag{25}$$

и находим функции $N^{\{0\}}_{mkl}(x)$. По формулам (22) вычисляем $u^{\{0\}}_i$, $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}$ и $\sigma^{\{0\}}_{ij}$

$$\begin{gathered} u^{\{0\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}^{\{0\}}_{ikl}(x)\gamma_{kl}\,, \qquad \varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}N^{\{0\}}_{mkl,n}(x)\gamma_{kl}\,, \\ \sigma^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \Big[C_{ijkl}(x) + C_{ijmn}(x)N^{\{0\}}_{mkl,n}(x)\Big]\gamma_{kl}\,. \end{gathered} \tag{26}$$

После этого деформацию $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma})$ подставляем в заданный нелинейный оператор $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}})$ при $s=1$. В итоге получаем вполне определенное выражение $\check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))$, соответственно по формуле (23) находим фиктивную объёмную нагрузку $\check{X}^{\{1\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) =$ $= \big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x,\underset{\sim}{\gamma}))\big]_{,j}$. Далее переходим к вычислению первого приближения по формулам (21), или же (23), при $s=1$

$$\left\{\begin{array}{l} \Big[C_{ijmn}(x)\check{N}^{\{1\}}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} + \check{X}^{\{1\}}_i(x,\underset{\sim}{\gamma}) = 0\,, \\ \check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})|_{x\in\Sigma} = 0\,. \end{array}\right. \tag{27}$$

Оператор-функция $\check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$ находится из системы линейных дифференциальных уравнений неоднородной теории упругости (27) с заданными "объёмными нагрузками" и однородными граничными условиями. В отличие от нулевого приближения функция $\check{N}^{\{1\}}_m(x,\underset{\sim}{\gamma})$, и все последующие функции при $s>1$, в общем случае, являются операторами по времени и нелинейно зависят от $\underset{\sim}{\gamma}$.

Эффективные определяющие соотношения в s-м приближении находятся по формуле (19)

$$\begin{aligned}\check{F}_{ij}^{eff\{s\}}(\underset{\sim}{\gamma}) &= \langle \sigma_{ij}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})\rangle = \left\langle \check{\Phi}_{ij}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijmn}(x)N_{m,n}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})\right\rangle = \\ &= \left\langle C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)N_{m,n}^{\{s\}}(x,\underset{\sim}{\gamma})\right\rangle.\end{aligned} \tag{28}$$

В частности, в нулевом приближении, то есть при $s = 0$, из (28) следует формула для эффективных модулей упругости (13).

5. Неоднородная по толщине, бесконечная в плане плита.

Пусть h — толщина плиты, а $-h/2 \leqslant x_3 \leqslant h/2$, $-\infty < x_I < +\infty$, $I = 1,2$. В этом случае определяющие соотношения будут явно зависеть от координаты x_3, и от деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})$):

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x_3)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}). \tag{29}$$

В случае неограниченной в плане плиты предполагается, что искомые операторы $\check{N}_i$ также зависят только от координаты x_3 и находятся из решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающих из трехмерных уравнений (14)-(18):

$$\begin{cases} u_i(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_i(x_3,\underset{\sim}{\gamma}), \\ \varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}), \\ \sigma_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{\Phi}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijm3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}), \\ \left[\check{\Phi}_{i3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) + C_{i3m3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\right]' = 0, \\ \check{N}_i|_{x_3=-h/2} = \check{N}_i|_{x_3=h/2} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь штрих обозначает производную по координате x_3, а

$$\check{\Phi}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})) \equiv C_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})). \tag{31}$$

Из четвертого уравнения (30) следует, что выражение в квадратной скобке является постоянной величиной независящей от координаты, то есть

$$C_{i3m3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) + \check{\Phi}_{i3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \check{K}_i = \text{const}.$$

Отсюда выразим функцию $\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$. Учтём то, что $\langle \check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\rangle = 0$ и найдем константы $\check{K}_i$

$$\check{K}_i = \left\langle C_{i3p3}^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle C_{p3q3}^{-1}\right\rangle\left\langle C_{q3r3}^{-1}\check{\Phi}_{r3}\right\rangle.$$

В результате для $\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})$ получим следующее выражение:

$$\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = C_{m3n3}^{-1}\left\langle C_{n3p3}^{-1}\right\rangle^{-1}\left\langle C_{p3q3}^{-1}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - C_{m3n3}^{-1}\check{\Phi}_{n3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})). \tag{32}$$

Здесь и ниже, в отличие от общего случая, угловые скобки означают среднее значение по толщине плиты

$$\langle f\rangle = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x_3)dx_3 \equiv \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(y)dy.$$

5.1. Интегральное уравнение для деформаций в плите.

Подставим найденное выражение для $\check{N}'$ в формулу (30) для деформаций и получим следующую формулу:

$$\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\right\rangle - \check{\Phi}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right]. \tag{33}$$

Это выражение представляет собой сложнейшее нелинейное интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода [11, стр. 77], [12], из решения которого находятся компоненты тензора деформаций. Удобно представить уравнение (33) следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \tag{34}$$

где

$$K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3) \equiv \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle - C_{n3kl}(x_3)\right], \tag{35}$$

$$\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big) \equiv \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}\right\rangle - \check{C}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right]. \tag{36}$$

Коэффициенты $K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)$ представляют собой *компоненты тензора концентрации упругих деформаций* [13], вызванных неоднородностью материала. Другие коэффициенты $\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$ отражают влияние на концентрацию деформаций нелинейных операторных добавок в определяющих соотношениях. Отметим, что

$$\left\langle K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\right\rangle = \Delta_{ijkl}\,, \qquad \left\langle \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right\rangle = 0\,.$$

5.2. Метод последовательных приближений для вычисления деформаций.

Для практических расчетов эффективных определяющих соотношений необходимо знать распределение деформаций $\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})$ по толщине плиты, а для этого нужно решить нелинейное интегральное уравнение для компонент тензора деформаций. Это уравнение записано в двух эквивалентных формах: (33) и (34). Воспользуемся второй формой интегрального уравнения и применим для его решения метод последовательных приближений [11, 12, 14, 15]. Запишем уравнение (34) следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon^{\{s\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \qquad s=0,1,2,\dots\,,\\
\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}})\big) = \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} C^{-1}_{p3q3}(y)\check{C}_{q3}\big(y,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(y,\underset{\sim}{\gamma})\big)dy-\right.\\
\left.-\check{C}_{n3}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{s-1\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\right].\end{gathered} \tag{37}$$

В качестве нулевого приближения выбираем $\varepsilon^{\{0\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl}$. Тогда

$$\varepsilon^{\{1\}}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = K^{\varepsilon}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)\,, \qquad s=0,1,2,\dots\,, \tag{38}$$

где $\check{K}^{\varepsilon}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{0\}}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$ — вполне определенная величина (36) при заданном виде неупругих операторов $\check{C}_{ij}\big(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\big)$

5.3. Вычисление структурных функций.

Структурные функции $N_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma})$ находятся *по известным деформациям* в результате интегрирования второй из формул (30)

$$\check{N}_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) = \int\limits_{-h/2}^{x_3} C^{-1}_{m3n3}(y)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\Big\rangle - \check{\Phi}_{n3}\big(y, \underset{\sim}{\varepsilon}(y, \underset{\sim}{\gamma})\big)\Big]dy\,. \tag{39}$$

Очевидно, что функции $\check{N}_m(x_3, \underset{\sim}{\gamma})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям (четвертая и пятая строки формул (30)).

5.4. Формулы для напряжений в неоднородной плите.

Далее по третьей из формул (30) найдем напряжения, для чего воспользуемся формулой (32) и получим следующее выражение:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma})) = \check{\Phi}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\Big\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\check{\Phi}_{n3}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}))\,.\end{gathered} \tag{40}$$

Подставив сюда $\check{\Phi}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon})$ из (31), получим другое, эквивалентное, представление для напряжений

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma})) = \tilde{C}_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \tilde{\check{C}}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big)\,, \tag{41}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{C}_{ijkl}(x_3) \equiv C_{ijkl}(x_3) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\Big\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)C_{n3kl}(x_3)\,;\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\check{C}}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big) \equiv \check{C}_{ij}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}\Big\rangle - \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\check{C}_{n3}\big(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}\big)\,.\end{gathered} \tag{43}$$

5.5. Эффективные определяющие соотношения.

Усредним теперь напряжения, представленные формулами (40), по толщине плиты и получим аналитическую формулу для эффективных определяющих соотношений неупругой неоднородной по толщине плиты

$$\begin{gathered}\big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = \Big\langle\check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}))\Big\rangle \equiv \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \\ = \Big\langle\check{\Phi}_{ij}\Big\rangle + \Big\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\Big\rangle\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{\Phi}_{q3}\Big\rangle - \Big\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\check{\Phi}_{n3}\Big\rangle\,.\end{gathered} \tag{44}$$

При осреднении выражений (41) получим эффективные определяющие соотношения, записанные в другой форме

$$\big\langle\sigma_{ij}\big\rangle = \check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = h_{ijkl}\gamma_{kl} - \check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})\,, \tag{45}$$

где h_{ijkl} — компоненты эффективного тензора упругости, а $\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})$ — неупругие составляющие эффективных определяющих соотношений неоднородной плиты:

$$h_{ijkl} = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} \rangle \langle C^{-1}_{n3p3} \rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} C_{n3kl} \rangle, \tag{46}$$

$$\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \left\langle \check{\tilde{C}}_{ij} \right\rangle = \left\langle \check{C}_{ij} \right\rangle + \left\langle C_{ijm3} C^{-1}_{i3n3} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{n3p3} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{p3q3} \check{C}_{q3} \right\rangle - \left\langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3n3} \check{C}_{n3} \right\rangle. \tag{47}$$

6. Заключение

Рассмотрена первая специальная краевая задача механики деформируемого твердого тела, из решения которой вытекают эффективные определяющие соотношения вида $< \sigma > \sim < \varepsilon >$. Задача сводится к серии вспомогательных краевых задач для структурных функций, зависящих от формы тела и вида определяющих соотношений. В случае неоднородной по толщине бесконечной в плане плиты задача вычисления эффективных определяющих соотношений сводится к операторному уравнению для компонент тензора деформаций. Для решения этого уравнения также предлагается итерационный метод последовательных приближений. Получена приближенная аналитическая формула, позволяющая достаточно просто находить эффективные определяющие соотношения неоднородной по толщине плиты из неупругого материала. Приближенная формула отражает характер структурной анизотропии материала плиты и, в упругом случае, дает точные значения эффективных модулей упругости.

Эффективные определяющие соотношения для композитного материала с периодической структурой следуют из приведенных выше формул как частный случай. Это возможно, если заменить средние значения по объему тела на средние значения по любому из периодов. При этом, прямые эффективные характеристики не зависят от объема всего тела, а зависят только от формы ячейки периодичности, а также от расположения и формы компонентов и их объемных долей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials// Перев. Прикл. мех., серия Е (США), №2, 1964, с. 223–232.

2. Горбачев В. И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости. Диссертация доктора физико-математических наук// PhD thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 1991. 395 с.

3. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов// М.: МГУ, 1984. 336 с.

4. Ильюшин А. А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости// М.: Наука, 1970. 280 с.

5. Победря Б.Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости// Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 417-428.

6. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов// М.: Наука, 1970. 328 с.

7. Кристенсен Р. Введнение в теорию вязкоупругости// М.: Мир, 1974. 338 с.

8. Ильюшин А. А. Пластичность// М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

9. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории// М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

10. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических среда// М.: Наука, 1984, 352 с.

11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа// М.: Наука, 1972. 496 с.

12. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения// М.: Наука, 1968. 448 с.

13. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений// М.: Наука, 1969. 456 с.

14. Победря Б. Е., Горбачев В. И. Концентрация напряжений и деформаций в композитах// Механика композитных материалов. — 1984. — № 2. — С. 207—214.

15. Обен Ж. П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Перевод с английского// М.: Мир, 1977. 384 с.

REFERENCES

1. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials// Transl. Applied Mechanics, Series E (USA), No. 2, 1964, pp. 223–232.

2. Gorbachev V. I. Variant metoda osredneniya dlya resheniya kraevyh zadach neodnorodnoj uprugosti. Dissertaciya doktora fiziko-matematicheskih nauk// PhD thesis, MGU im. M.V. Lomonosova, Mekhaniko-matematicheskij fakul'tet, 1991. 395 s.

3. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov// M.: MGU, 1984. 336 s.

4. Il'yushin A. A., Pobedrya B.E. Osnovy matematicheskoj teorii termovyazkouprugosti// M.: Nauka, 1970. 280 c.

5. Pobedrya B.E. Matematicheskaya teoriya nelinejnoj vyazkouprugosti// Uprugost' i neuprugost'. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1973. Vyp. 3. S. 417-428.

6. Moskvitin V.V. Soprotivlenie vyazkouprugih materialov// M.: Nauka, 1970. 328 s.

7. Kristensen R. Vvednenie v teoriyu vyazkouprugosti// M.: Mir, 1974. 338 s.

8. Il'yushin A. A. Plastichnost'// M.: Gostekhizdat, 1948. 376 c.

9. Il'yushin A. A. Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoj teorii// M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 272 c.

10. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennie processov v periodicheskih sreda// M.: Nauka, 1984, 352 s.

11. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza// M.: Nauka, 1972. 496 s.

12. Zabrejko P. P., Koshelev A. I., Krasnosel'skij M. A., Mihlin S. G., Rakovshchik L. S., Stecenko V. YA. Integral'nye uravneniya// M.: Nauka, 1968. 448 s.

13. Krasnosel'skij M. A., Vajnikko G. M., Zabrejko P. P., Rutickij YA. B., Stecenko V. YA. Priblizhennoe reshenie operatornyh uravnenij// M.: Nauka, 1969. 456 s.

14. Pobedrya B. E., Gorbachev V. I. Koncentraciya napryazhenij i deformacij v kompozitah// Mekhanika kompozitnyh materialov. — 1984. — № 2. — S. 207—214.

15. Oben ZH. P. Priblizhennoe reshenie ellipticheskih kraevyh zadach. Perevod s anglijskogo// M.: Mir, 1977. 384 s.

Получено 4.06.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-207-223

Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости[1]

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Ефимов Дмитрий Юрьевич — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются прямая и обратная задачи рассеяния гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с неоднородным анизотропным упругим покрытием в присутствии подстилающей плоской поверхности. Полагается, что материал покрытия цилиндра является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями радиальной координаты, тело помещено в идеальную жидкость, подстилающая поверхность является идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой).

Получено аналитическое решение прямой задачи дифракции. Определены рассеянное акустическое поле и волновые поля в цилиндре и его покрытии.

На основе решения прямой задачи проведено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука. Определены законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие минимальное рассеяние звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения, а также в заданном секторе наблюдения при фиксированной частоте. Построены функционалы, выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука, и осуществлена их минимизация с помощью алгоритма имитации отжига.

Представлены результаты численных расчетов частотных зависимостей интенсивности рассеянного акустического поля при оптимальных параболических законах неоднородности для разных типов трансверсально-изотропных покрытий.

Ключевые слова: звуковые волны, рассеяние, однородный упругий цилиндр, неоднородное анизотропное покрытие.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 207–223.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-207-223

Scattering of a plane sound wave by elastic a cylinder with an inhomogeneous anisotropic coating in the presence of a plane

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Efimov Dmitrii Yurevich — undergraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In the article the direct and inverse problems of scattering of a harmonic plane sound wave by a homogeneous isotropic cylinder with inhomogeneous anisotropic elastic coating in the presence of the underlying flat surface are considered. It is assumed that the coating material of cylinder is radially inhomogeneous and transverse-isotropic, the inhomogeneity laws of the coating material described by continuous radial coordinate functions, the body is placed in an ideal fluid, underlying surface is perfect (absolutely hard or acoustically soft).

An analytical solution of the direct diffraction problem is obtained. The scattered acoustic field and wave fields in the cylinder and its coating are defined.

Based on the solution of the direct problem a mathematical modeling of an inhomogeneous anisotropic coating of a elastic cylinder providing the least sound reflection done.

The inhomogeneity laws of the coating material ensuring the minimum sound scattering in the given frequency range at a fixed angle of observation and also in the given angular sector of observation at a fixed frequency are obtained. The functionals expressing the average intensity of sound scattering are built. Minimization of the functionals are implemented with the help of the burnout simulation algorithm.

The results of numerical calculations of frequency dependencies of intensity of the scatter acoustic field at the optimal parabolic inhomogeneity laws are presented for different types of transverse-isotropic coatings.

Keywords: sound waves, scattering, homogeneous elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic coating.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2022, "Scattering of a plane sound wave by elastic a cylinder with an inhomogeneous anisotropic coating in the presence of a plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 207–223.

1. Введение

Исследованию рассеяния звука цилиндрическими телами с упругими покрытиями посвящен ряд работ. Например, рассеяние плоских волн цилиндром, имеющим упругое покрытие и находящимся в безграничном пространстве, изучено в [1-5]. В [6] решена обратная задача об определении оптимальных законов неоднородности материала покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее звукоотражение плоской волны. Прямые и обратные задачи рассеяния звука цилиндрами с неоднородными покрытиями в присутствии ограничивающих поверхностей рассмотрены в [7-11]. Во всех упомянутых выше работах покрытия цилиндрических тел рассматривались как изотропные. Анизотропия материала покрытия не учитывалась. Лишь в работе [12] осуществлено математическое моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука в случае, когда тело находится в свободном пространстве.

В настоящей работе рассматриваются прямая и обратная задачи рассеяния плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием в присутствии идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) подстилающей плоской поверхности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим изотропный упругий цилиндр бесконечной длины радиусом r_0, материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного трансверсально-изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1. Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Плоская подстилающая поверхность Γ является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости Γ и отстоит от неё на расстоянии d.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $y = -d$. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z (рис. 1). Материал покрытия характеризуется модулями упругости λ_{ijkl}, которые описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r, и плотностью ρ, которая является непрерывной функцией координаты r. Ось z является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр перпендикулярно его оси падает плоская монохроматическая звуковая волна, потенциал скорости которой

$$\Psi_0 = A \exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - i\omega t\right],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k} = \{k_x,\ k_y,\ 0\}$ — волновой вектор падающей волны; $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$ — радиус-вектор; $x = r\ \cos\varphi$; $y = r\ \sin\varphi$; $k_x = k\cos\varphi_0$; $k_y = k\sin\varphi_0$; φ_0 — угол, образованный вектором $\mathbf{k}$ с положительным направлением оси x; ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии идеальной плоскости. Осуществим моделирование покрытия, обеспечивающего требуемое звукоотражение.

3. Приближенное аналитическое решение прямой задачи

Рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z.

Распространение звуковых волн в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [13]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \tag{1}$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

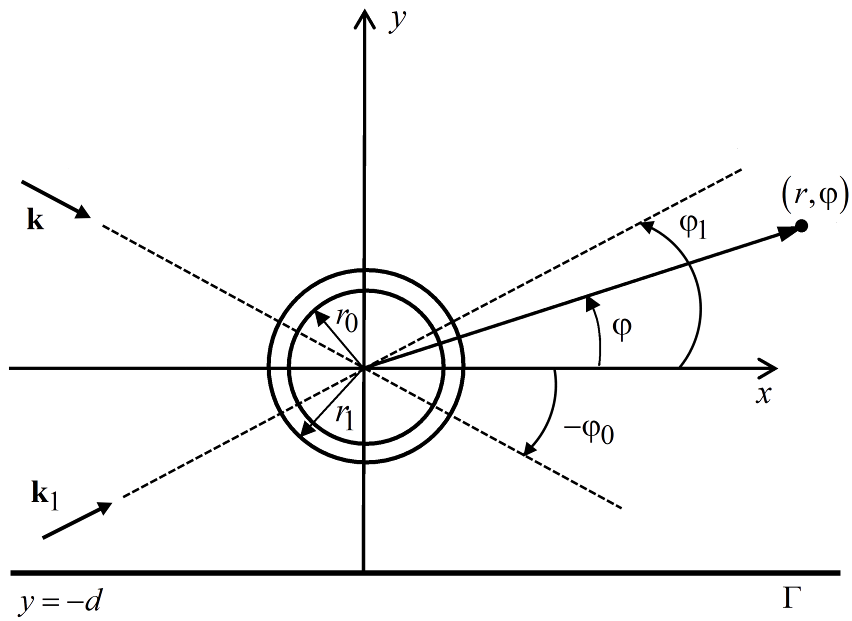


Рис. 1: Геометрия задачи

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi.$$

В случае установившегося режима колебаний распространение упругих волн в однородном изотропном упругом цилиндре описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [13]

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \mathbf{\Phi} + k_\tau^2 \mathbf{\Phi} = 0,$$

где L и $\mathbf{\Phi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения $\mathbf{u}_0$;

$$\mathbf{u}_0 = \operatorname{grad} L + \operatorname{rot} \mathbf{\Phi};$$

$k_l = \omega / c_l$ и $k_\tau = \omega / c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн;
$c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0) / \rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как $\mathbf{\Phi} = \Phi(r, \varphi)\, \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z, то от векторного уравнения относительно потенциала $\mathbf{\Phi}$ переходим к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi(r, \varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции L и Φ будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp\left[in(\varphi - \varphi_0)\right], \tag{2}$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp\left[in(\varphi - \varphi_0)\right], \tag{3}$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0$, записанные через функции L и Φ, в цилиндрической системе координат имеют вид

$$u_{0r} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$u_{0\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения u_0 в однородном изотропном цилиндре имеют вид [14]

$$\sigma_{0rr} = \lambda_0 \left[\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r}\right)\right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0\varphi\varphi} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r}\left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r}\right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r}\right).$$

Используя соотношения приведенные выше, выразим компоненты тензора напряжений σ_{0rr}, $\sigma_{0r\varphi}$ через функции L, Φ

$$\sigma_{0rr} = -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right),$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \frac{\mu_0}{r}\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right).$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном покрытии цилиндра описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в цилиндрической системе координат имеют вид [14]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\omega^2 \rho\, u_r, \\ &\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\omega^2 \rho\ \ u_\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

где u_r, u_φ и σ_{ij} — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ и тензора напряжений в покрытии цилиндра.

Для трансверсально-изотропной упругой среды число независимых модулей упругости равно пяти (λ_{11}, λ_{12}, λ_{22}, λ_{23}, λ_{55}). При такой анизотропии поверхностями изотропии являются концентрические цилиндрические поверхности.

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} соотношениями обобщенного закона Гука [14]

$$\sigma_{rr} = \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}. \tag{5}$$

Здесь использовано двухиндексное обозначение модулей упругости $\lambda_{ik}\quad (i,k = 1,2,\ldots,6)$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора смещений соотношениями

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right). \tag{6}$$

Получим приближенное решение прямой задачи, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндром волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости.

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \tag{7}$$

где Ψ_1 — потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости Γ; Ψ_{s1} — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии цилиндром падающей плоской волны; Ψ_{s2} — потенциал скорости волны, возникающей при рассеянии цилиндром отраженной от плоскости волны.

Чтобы отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом можно было пренебречь, следует считать, что $d \gg r_1$.

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию на поверхности Γ, которое заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \tag{8}$$

если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \tag{9}$$

если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциал Ψ_1 имеет вид

$$\Psi_1 = A_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})], \tag{10}$$

где A_1 — амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = \{k_{1x},\ k_{1y},\ 0\}$ — волновой вектор отраженной от плоскости волны; $k_{1x} = k\cos\varphi_1$; $k_{1y} = k\sin\varphi_1$; φ_1 — угол, образованный вектором $\mathbf{k}_1$ с положительным направлением оси x. Согласно закону Снеллиуса [15] $k_{1x} = k_x$ и $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$.

Подставляя (10) в граничные условия (8) и (9), находим

$$A_1 = \pm A \exp\left(i2kd\ \sin\varphi_0\right), \tag{11}$$

где знаки «+» и» «–» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно.

В цилиндрической системе координат падающая плоская волна представляется разложением [16]

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) \exp\left[in(\varphi - \varphi_0)\right]. \qquad (12).$$

Потенциалы Ψ_{s1} и Ψ_{s2} являются решениями уравнения Гельмгольца (1)и должны удовлетворять граничным условиям на внешней стороне покрытия, а также условиям изучения на бесконечности [13].

Чтобы найти Ψ_{s1} необходимо определить поле смещений в неоднородном покрытии, возникающее в результате падения на шар плоской волны с потенциалом Ψ_0. Для нахождения Ψ_{s2} необходимо определить поле смещений, возникающее в покрытии в результате падения на шар плоской волны с потенциалом Ψ_1.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений.

На внешней поверхности покрытия (при $r = r_1$) потенциал Ψ_{s1} должен удовлетворять граничным условиям

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_0 + \Psi_{s1}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \tag{13}$$

а потенциал Ψ_{s2} — условиям

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1\omega(\Psi_1 + \Psi_{s2}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \tag{14}$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред (при $r = r_0$) должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}. \tag{15}$$

В случае радиальной неоднородности и трансверсально-изотропности материала покрытия цилиндра волновые поля в жидкости и в покрытии симметричны относительно плоскости $\varphi = \varphi_0,\ \varphi_0 + \pi$ и описываются периодическими функциями координаты φ. Поэтому компоненты вектора смещений будем искать в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r\left(r,\varphi\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{1n}\left(r\right)\exp[in(\varphi-\varphi_0)], \\ u_\varphi\left(r,\varphi\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{2n}\left(r\right)\exp[in(\varphi-\varphi_0)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Введем новые неизвестные функции $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ по формулам

$$\tilde{U}_{1n}\left(r\right) = AU_{1n}\left(r\right), \ \tilde{U}_{2n}\left(r\right) = AU_{2n}\left(r\right).$$

Введение новых функций позволит найти вектор смещения неоднородного упругого покрытия $\mathbf{u}$, независящий от амплитуды падающей звуковой волны.

Подставляя выражения (16) в уравнения (4), получим с учетом (5) и (6) следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ для каждого n:

$$\widehat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n\mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n\mathbf{U}_n = 0, \tag{17}$$

где $\mathbf{U}_n = \left(U_{1n}\left(r\right), U_{2n}\left(r\right)\right)^T$; $\widehat{A}_n = \left(a_{nij}\right)_{2\times2}$, $\widehat{B}_n = \left(b_{nij}\right)_{2\times2}$, $\widehat{C}_n = \left(c_{nij}\right)_{2\times2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$a_{n11} = \lambda_{11}r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \quad a_{n22} = \lambda_{55}r^2,$$

$$b_{n11} = \lambda_{11}'r^2 + \lambda_{11}r, \quad b_{n12} = b_{n21} = in\left(\lambda_{12} + \lambda_{55}\right)r, \quad b_{n22} = \lambda_{55}'r^2 + \lambda_{55}r,$$

$$c_{n11} = \omega^2\rho r^2 - n^2\lambda_{55} + \lambda_{12}'r - \lambda_{22}, \quad c_{n12} = in\left(\lambda_{22}'r - \lambda_{55} - \lambda_{22}\right),$$

$$c_{n21} = in\left(\lambda_{55}'r + \lambda_{55} + \lambda_{22}\right), \quad c_{n22} = \omega^2\rho r^2 - n^2\lambda_{22} - \lambda_{55}'r - \lambda_{55}.$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал Ψ_{s1} будем искать в виде

$$\Psi_{s1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n\left(kr\right)\exp\left[in\left(\varphi - \varphi_0\right)\right], \tag{18}$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n.

Подставляя (12), (16) и (18) в первое граничное условие (13), находим

$$A_n = -\frac{A\left[i^n k J_n'(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)\right]}{kH_n'(kr_1)}. \tag{19}$$

Подставляя (12), (16) и (18) во второе и третье условия (13), получаем два краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{1}{r^2}\widehat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{E}}_n\mathbf{U}_n\right)_{r=r_1} = \mathbf{D}_n, \tag{20}$$

где элементы матриц $\tilde{E}_n = (e_{nij})_{2\times 2}$ и $\tilde{D}_n = (d_{ni})_{2\times 1}$ определяются следующими выражениями:

$$e_{n11} = \frac{\lambda_{12}}{r} + \frac{\omega^2\rho_1 H_n(kr)}{kH_n'(kr)}, \quad e_{n12} = \frac{in\lambda_{12}}{r}, \quad e_{n21} = \frac{in\lambda_{55}}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\lambda_{55}}{r},$$

$$d_{n1} = \frac{2i^n\omega\rho_1}{\pi kr H_n'(kr)}, \quad d_{n2} = 0.$$

При получении выражения для d_{n1} было использовано выражение для вронскиана [16]

$$J_n(x)H_n'(x) - J_n'(x)H_n(x) = \frac{2i}{\pi x}.$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_0$ находим неизвестные коэффициенты B_n, C_n разложений (2) и (3), выраженные через величины $U_{1n}(r_0)$, $U_{2n}(r_0)$.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий (15) находим еще два краевых условия для системы дифференциальных уравнений (17)

$$\left(\frac{1}{r^2}\widehat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{F}}_n\mathbf{U}_n\right)_{r=r_0} = 0, \tag{21}$$

где элементы матрицы $\tilde{F}_n = (f_{nij})_{2\times 2}$ определяются по формулам

$$f_{n11} = \left[\gamma_{1n}e_{1n} + \gamma_{3n}e_{2n} + \lambda_{12}/r\right], \quad f_{n12} = \left[\gamma_{2n}e_{1n} + \gamma_{4n}e_{2n} + in\lambda_{12}/r\right],$$

$$f_{n21} = \mu_0\left[\gamma_{1n}e_{3n} + \gamma_{3n}e_{4n} + in\lambda_{55}/\left(\mu_0 r\right)\right], \quad f_{n22} = \mu_0\left[\gamma_{2n}e_{3n} + \gamma_{4n}e_{4n} - \lambda_{55}/\left(\mu_0 r\right)\right],$$

$$e_{1n} = \left[\lambda_0 n^2 J_n\left(k_l r\right) - k_l^2 r^2\left(\lambda_0 + 2\mu_0\right) J_n''\left(k_l r\right) - \lambda_0 k_l r J_n'\left(k_l r\right)\right],$$

$$e_{2n} = 2\mu_0 in\left[J_n\left(k_\tau r\right) - k_\tau r J_n'\left(k_\tau r\right)\right], \quad e_{3n} = 2in\left[J_n\left(k_l r\right) - k_\eta r J_n'\left(k_l r\right)\right],$$

$$e_{4n} = \left[k_\tau^2 r^2 J_n''\left(k_\tau r\right) - k_\tau r J_n'\left(k_\tau r\right) + n^2 J_n\left(k_\tau r\right)\right],$$

$$\gamma_{1n} = k_\tau r J_n'\left(k_\tau r\right)/\Delta_n, \quad \gamma_{2n} = inJ_n\left(k_\tau r\right)/\Delta_n, \quad \gamma_{3n} = inJ_n\left(k_l r\right)/\Delta_n, \quad \gamma_{4n} = -k_l r J_n'\left(k_l r\right)/\Delta_n,$$

$$\Delta_n = r\left[k_l r^2 J_n'\left(k_l r\right) k_\tau J_n'\left(k_\tau r\right) - n^2 J_n\left(k_l r\right) J_n\left(k_\tau r\right)\right].$$

Таким образом, для нахождения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ следует решить краевую задачу (17), (20), (21). Эта краевая задача может быть решена разными методами, например, методом сведения ее к задачам с начальными условиями или методом сплайн-коллокации.

После нахождения решения краевой задачи вычисляем коэффициенты A_n. В результате потенциал скорости Ψ_{s1} определяется выражением (18).

Аналогично можно найти потенциал Ψ_{s2}. Однако для его определения можно воспользоваться результатом, полученным для Ψ_{s1}. Для этого достаточно в качестве волны, падающей на цилиндр, рассматривать плоскую волну с потенциалом Ψ_1. При этом азимутальный угол падения волны с потенциалом Ψ_1 равен $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$, а амплитуда этой волны A_1 определятся выражением (11). Поэтому в выражении (19) для коэффициента A_n следует сделать замену A на A_1, а в разложении (18) заменить φ_0 на $-\varphi_0$.

Потенциал скорости рассеянного поля Ψ_s имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_1 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}$$

или

$$\Psi_s(\omega, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n\, H_n(kr) e^{-in\varphi_0} + A_1 \left(i^n J_n(kr) + A^{-1} A_n\, H_n(kr) \right) e^{in\varphi_0} \right] e^{in\varphi}.$$

4. Решение обратной задачи

Используя полученное решение прямой задачи, определим законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее звукоотражение в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$ и в заданном угловом секторе наблюдения $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$.

Будем считать, что функции ρ, λ_{11}, λ_{12}, λ_{22}, λ_{55} аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r

$$\eta(r) = \eta^* \bar{\eta}(r), \tag{22}$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)} r + \eta^{(2)} r^2. \tag{23}$$

Здесь и далее под символом η подразумевается каждая из величин ρ, λ_{ij}, а под символом η^* — соответствующие характерные величины для механических свойств материала покрытия. Модуль упругости λ_{23} не рассматривается, так как он не присутствует в математической модели задачи.

Введем в качестве меры рассеяния звука величину интенсивности звукового рассеяния $I(\omega, \varphi) = |\Psi_s(\omega, \varphi)/A|^2$ и построим функционалы Φ_1 и Φ_2 вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, \varphi_*)\, d\omega, \tag{24}$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I(\omega_*, \varphi)\, d\varphi, \tag{25}$$

определенные на классе параболических функций (23) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов $\eta^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2)$ в (23), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (23), определенных на отрезке $[r_0, r_1]$, введем ограничения

$$C_{1\eta} \leqslant \bar{\eta}(r) \leqslant C_{2\eta}, \tag{26}$$

где $C_{1\eta}$, $C_{2\eta}$ — некоторые положительные константы.

Каждое из неравенств (26) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат $\bar{\eta}(r)$ бесконечное множество парабол, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega\left(\eta^{(0)},\eta^{(1)},\eta^{(2)}\right)=\left\{(r,f):\ r_0\leqslant r\leqslant r_1,\ C_{1\eta}\leqslant f\leqslant C_{2\eta}\right\}.$$

В области Ω каждая парабола $\bar{\eta}(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_{0\eta}(r_0,f_{0\eta})$, $G_{1\eta}(\bar{r},f_{1\eta})$, $G_{2\eta}(r_1,f_{2\eta})$, где $\bar{r}=(r_0+r_1)/2$, $f_{q\eta}\in[C_{1\eta},C_{2\eta}]$ $(q=0,1,2)$.

Подставляя координаты точек $G_{0\eta}$, $G_{1\eta}$, $G_{2\eta}$ в (23), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений, из которой находим

$$\begin{gathered}\eta^{(0)}=\left[f_{0\eta}r_1\bar{r}\left(\bar{r}-r_1\right)+f_{1\eta}r_1r_0\left(r_1-r_0\right)+f_{2\eta}\bar{r}r_0\left(r_0-\bar{r}\right)\right]/\Delta_\eta,\\ \eta^{(1)}=\left[f_{0\eta}\left(r_1^2-\bar{r}^2\right)+f_{1\eta}\left(r_0^2-r_1^2\right)+f_{2\eta}\left(\bar{r}^2-r_0^2\right)\right]/\Delta_\eta,\\ \eta^{(2)}=\left[f_{0\eta}\left(\bar{r}-r_1\right)+f_{1\eta}\left(r_1-r_0\right)+f_{2\eta}\left(r_0-\bar{r}\right)\right]/\Delta_\eta,\end{gathered}\tag{27}$$

где

$$\Delta_\eta=\left(r_1-r_0\right)\left(r_1r_0-r_1\bar{r}-r_0\bar{r}+\bar{r}^2\right).$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta},C_{2\eta}]$ значения ординат $f_{0\eta}$, $f_{1\eta}$, $f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (27) значения коэффициентов $\eta^{(0)}$, $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$, получаем параболические законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы являются допустимыми.

Если выполняется условие

$$r_0\leqslant-\eta^{(1)}/\left(2\eta^{(2)}\right)\leqslant r_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[r_0,r_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\eta},C_{2\eta}]$, то есть при выполнении условия

$$C_{1\eta}\leqslant\eta^{(0)}-\eta^{(1)2}/\left(4\eta^{(2)}\right)\leqslant C_{2\eta}.$$

Нахождение значений коэффициентов $\eta^{(0)},\eta^{(1)},\eta^{(2)}$ функций (23), удовлетворяющих условиям (26) и минимизирующих функцию пятнадцати переменных

$$\Phi_m\left(\rho^{(0)},\rho^{(1)},\rho^{(2)},...,\lambda_{55}^{(0)},\lambda_{55}^{(1)},\lambda_{55}^{(2)}\right)\to\min\quad(m=1,2),$$

осуществим с помощью алгоритма имитации отжига [17].

Введем для ординаты $f_{q\eta}$ $(q=0,1,2)$ точки $G_{q\eta}$ на отрезке $[C_{1\eta},C_{2\eta}]$ равномерную сетку $f_{q\eta}^{(l_{q\eta})}=C_{1\eta}+l_{q\eta}h$. Здесь $l_{q\eta}$ — номер узла сетки, $h=\left(C_{2\eta}-C_{1\eta}\right)/\tilde{n}$ — шаг сетки, $\tilde{n}$ — количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta},C_{2\eta}]$.

Алгоритм имитации отжига относится к алгоритмам типа случайного поиска и представляет собой метод решения задачи глобальной оптимизации [17]. На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность пятнадцати значений

$$f^{(0)}=\left(f_{0\rho},f_{1\rho},f_{2\rho},...,f_{0\lambda_{55}},f_{1\lambda_{55}},f_{2\lambda_{55}}\right),$$

а также устанавливаются параметры $T_{\max}$ и $T_{\min}$ — наибольшая и наименьшая температура системы. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества. На каждом последующем шаге итерационного процесса происходит генерация нового допустимого решения и понижение температуры в соответствии с правилами

$$f^{(j)}=f^{(j-1)}+T\left(j\right)\cdot X,\ \ X\sim C\left(0,1\right),$$

$$T(j) = T_{\max}/j^{(1/w)},$$

где $C(0,1)$ — стандартное распределение Коши размерности w; j — номер шага. Решение $f^{(j)}$ принимается как оптимальное, если $\Phi_m\left(f^{(j)}\right)$ меньше наименьшего значения $\Phi_m^{(\min)}$, найденного к текущему моменту. Преимуществом метода отжига является возможность избежать «ловушки» в локальных минимумах функции. Это достигается за счет не только принятия изменений параметров, уменьшающих значение функции Φ_m, но и некоторых изменений, увеличивающих ее. Решение $f^{(j)}$ может быть принято оптимальным, если

$$\tilde{\alpha} < P\left[\Phi_m^{(\min)} - \Phi_m\left(f^{(j)}\right),\, T(j)\right],$$

где $\tilde{\alpha} \in (0,1)$ — случайная равномерно распределенная величина; P — функция плотности вероятности распределения Гиббса [17]. Алгоритм продолжает свою работу до тех пор, пока $T(j) > T_{\min}$.

Найденный таким образом локальный минимум функции Φ_m и соответствующий ему набор коэффициентов зависит от выбора начальной точки, от значения шага h, вектора X, а также значений $\tilde{\alpha}$, P, которые за одну полную процедуру поиска могут вычисляться достаточно большое количество раз. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз, а в качестве конечного решения выбирается наилучший найденный результат.

Применение метода отжига для минимизации функционалов вида (24) и (25) подробно описано в [12].

5. Численные исследования

Были проведены расчеты параметров неоднородности покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в дальней зоне акустического поля при $r/r_0 = 100$.

Полагалось, что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1,74 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu_0 = 1,6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2) радиуса $r_0 = 1$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной $0,2$ м располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с). Расстояние от оси цилиндра до границы полупространства $d = 20r_0$. При расчетах рассматривались два типа материала неоднородного трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был выбран алюминий с характерной плотностью $\rho^* = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Характерные значения модулей упругости приведены в таблице.

Характерные величины модулей упругости $\left(\times 10^{10}\right)$ Н/м^2

Материал	λ_{11}^*	λ_{12}^*	λ_{22}^*	λ_{55}^*
Тип 1	5,74	3,28	16,4	2,54
Тип 2	16,4	0,82	5,74	2,95
Изотропный	10,5	5,3	10,5	2,6

Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на цилиндр с покрытием в присутствии абсолютно жесткой плоскости под углом φ_0.

Решение краевой задачи (17), (20), (21) получено методом сплайн-коллокации [18].

В ограничениях (26) полагалось $C_{1\eta} = 0,5$, $C_{2\eta} = 1,5$. При применении алгоритма отжига шаг сетки выбирался равным $h = 0.125$, размерность пространства параметров $w = 15$. Для каждого типа покрытия цилиндра эксперимент по поиску оптимальных значений параметров неоднородности проводился $M = 10$ раз, а каждый эксперимент обеспечивал 32768 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений при $5 \leqslant T(j) \leqslant 10$.

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле $\varphi_* = 2\pi/3$ и $\varphi_0 = -\pi/3$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $5 \leqslant kr_0 \leqslant 7$ имеют следующий вид:

тип 1

$$
\begin{gathered}
\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\
\lambda_{11} = 5,74 \cdot 10^{10} \left(-100r^2 + 220r - 119,5\right), \\
\lambda_{12} = 3,28 \cdot 10^{10} \left(-87,5r^2 + 192,5r - 104,5\right), \\
\lambda_{22} = 16,4 \cdot 10^{10} \left(-100r^2 + 220r - 119,5\right), \\
\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} \left(12,5r^2 - 28,75r + 17,75\right);
\end{gathered} \tag{28}
$$

тип 2

$$
\begin{gathered}
\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\
\lambda_{11} = 16,4 \cdot 10^{10} \left(-37,5r^2 + 82,5r - 44,5\right), \\
\lambda_{12} = 0,82 \cdot 10^{10} \left(-100r^2 + 220r - 119,5\right), \\
\lambda_{22} = 5,74 \cdot 10^{10} \left(12,5r^2 - 22,5r + 10,5\right), \\
\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} \left(62,5r^2 - 140r + 79\right);
\end{gathered} \tag{29}
$$

изотропный

$$
\begin{gathered}
\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot \left(-12,5r^2 + 23,75r - 9,75\right), \\
\lambda_{11} = 10,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\
\lambda_{12} = 5,3 \cdot 10^{10} \left(50r^2 - 110r + 61,5\right), \\
\lambda_{22} = 10,5 \cdot 10^{10} \left(25r^2 - 55r + 30,75\right), \\
\lambda_{55} = 2,6 \cdot 10^{10} \left(68,75r^2 - 153,125r + 85,875\right).
\end{gathered} \tag{30}
$$

Значения функционала Φ_1, соответствующие оптимальным законам (28) и (29) для анизотропного неоднородного покрытия, равны $\Phi_1 = 0,66 \cdot 10^{-2}$ и $\Phi_1 = 0,59 \cdot 10^{-2}$. Для изотропного случая с законами неоднородности (30) получили значение $\Phi_1 = 0,57 \cdot 10^{-2}$.

Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала для упругого цилиндра без покрытия, которое составило $\Phi_1 = 1,14 \cdot 10^{-2}$.

Для случая фиксированной частоты, которой соответствует волновой размер цилиндра $kr_0 = 6$, в угловом секторе $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ при угле падения плоской волны $\varphi_0 = -\pi/6$ получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 1

$$
\begin{gathered}
\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\
\lambda_{11} = 5,74 \cdot 10^{10} \left(-6,25r^2 + 15,625r - 8,25\right), \\
\lambda_{12} = 3,28 \cdot 10^{10} \left(-62,5r^2 + 137,5r - 74,5\right), \\
\lambda_{22} = 16,4 \cdot 10^{10} \cdot 0,5, \\
\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} \left(50r^2 - 108,75r + 60\right);
\end{gathered} \tag{31}
$$

тип 2

$$
\begin{gathered}
\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5, \\
\lambda_{11} = 16,4 \cdot 10^{10} \left(-6,25r^2 + 15,625r - 8,25\right),
\end{gathered}
$$

$$\lambda_{12} = 0,82 \cdot 10^{10} \left(-62,5r^2 + 137,5r - 74,5\right), \tag{32}$$
$$\lambda_{22} = 5,74 \cdot 10^{10} \cdot 0,5,$$
$$\lambda_{55} = 2,54 \cdot 10^{10} \left(50r^2 - 108,75r + 60\right);$$

изотропный

$$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5,$$
$$\lambda_{11} = 10,5 \cdot 10^{10} \left(-12,5r^2 + 22,5r - 8,5\right),$$
$$\lambda_{12} = 5,3 \cdot 10^{10} \left(-25r^2 + 60r - 34,5\right), \tag{33}$$
$$\lambda_{22} = 10,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,5,$$
$$\lambda_{55} = 2,6 \cdot 10^{10} \left(-62,5r^2 + 135r - 71,5\right).$$

Наименьшие значения функционала Φ_2 при оптимальных законах (31) и (32) для покрытий из материалов типов 1 и 2 равны $\Phi_2 = 0,54{\cdot}10^{-2}$ и $\Phi_2 = 0,27{\cdot}10^{-2}$, а для изотропного покрытия при оптимальных законах (33) $\Phi_2 = 0,4 \cdot 10^{-2}$. Значение функционала для упругого цилиндра без покрытия составило $\Phi_2 = 0,85 \cdot 10^{-2}$.

На рис. 2, 3, 4 приведены зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ от волнового размера kr_0 при $\varphi = 2\pi/3$ в диапазоне $5 \leqslant kr_0 \leqslant 7$. Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (28) (рис. 2), (29) (рис. 3) и (30) (рис. 4). Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

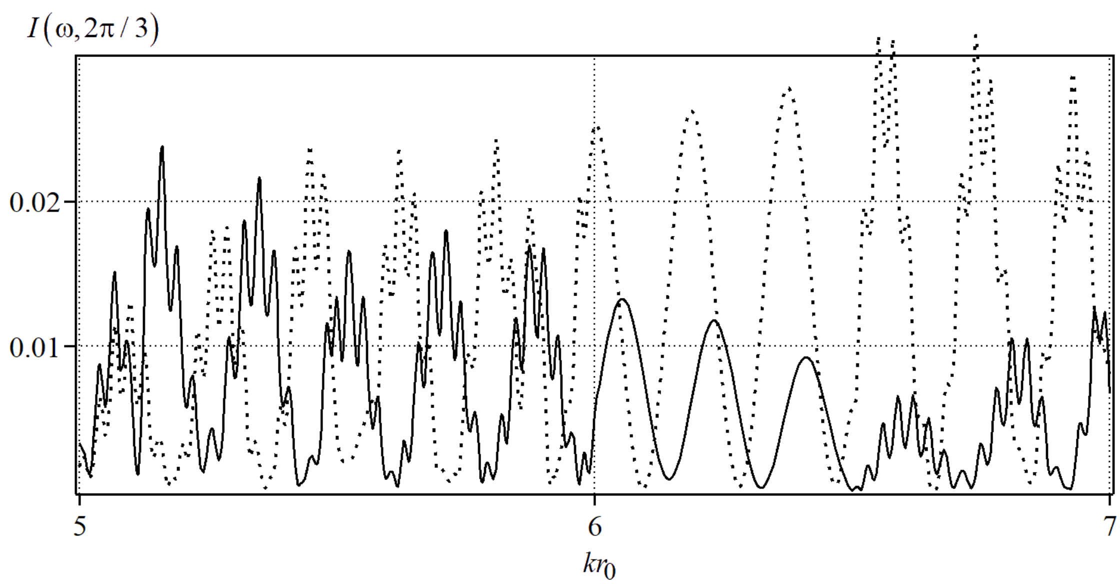


Рис. 2: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 1

Чтобы выявить влияние свойств подстилающей поверхности Γ на рассеянное акустическое поле, была осуществлена процедура минимизации функционала Φ_1 в частотном диапазоне, соответствующем изменению волнового размера в промежутке $5 \leqslant kr_0 \leqslant 7$ при фиксированном значении угла $\varphi_* = 2\pi/3$ и азимутальном угле падающей волны $\varphi_0 = -\pi/3$ в случае акустически мягкой границы полупространства для цилиндра с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием типа 1. Минимальному значению $\Phi_1 = 0,63 \cdot 10^{-2}$ соответствует покрытие со следующими параметрами

$$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,5,$$

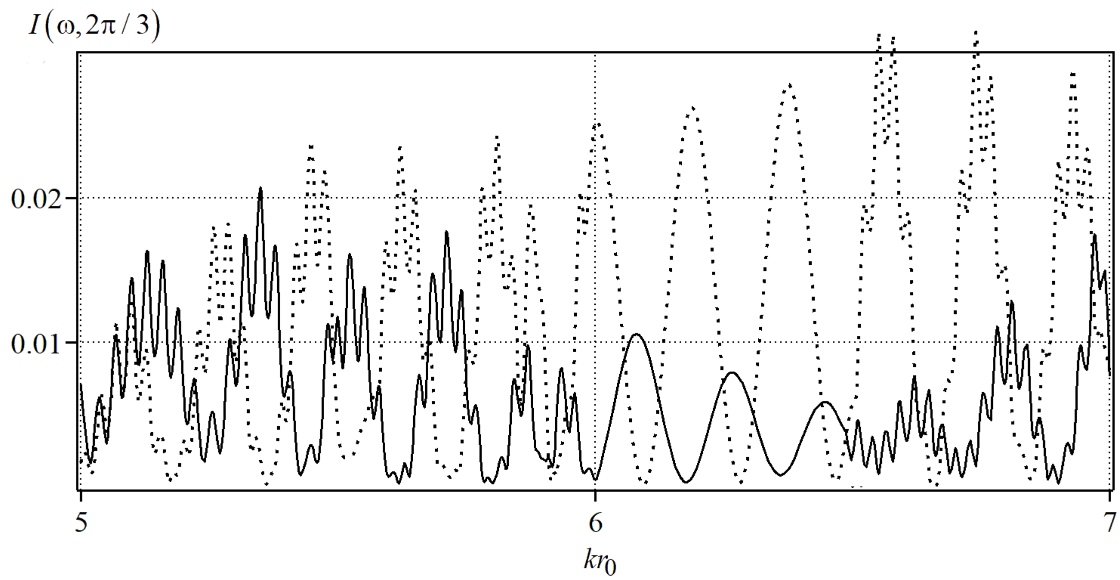


Рис. 3: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 2

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= 5,74 \cdot 10^{10} \left(-100r^2 + 220r - 119,5\right), \\ \lambda_{12} &= 3,28 \cdot 10^{10} \left(-100r^2 + 220r - 119,5\right), \\ \lambda_{22} &= 16,4 \cdot 10^{10} \left(-25r^2 + 56,25r - 30,75\right), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} \cdot 1,5. \end{aligned} \tag{34}$$

При этом значение функционала для цилиндра без покрытия составило $\Phi_1 = 1,12 \cdot 10^{-2}$.

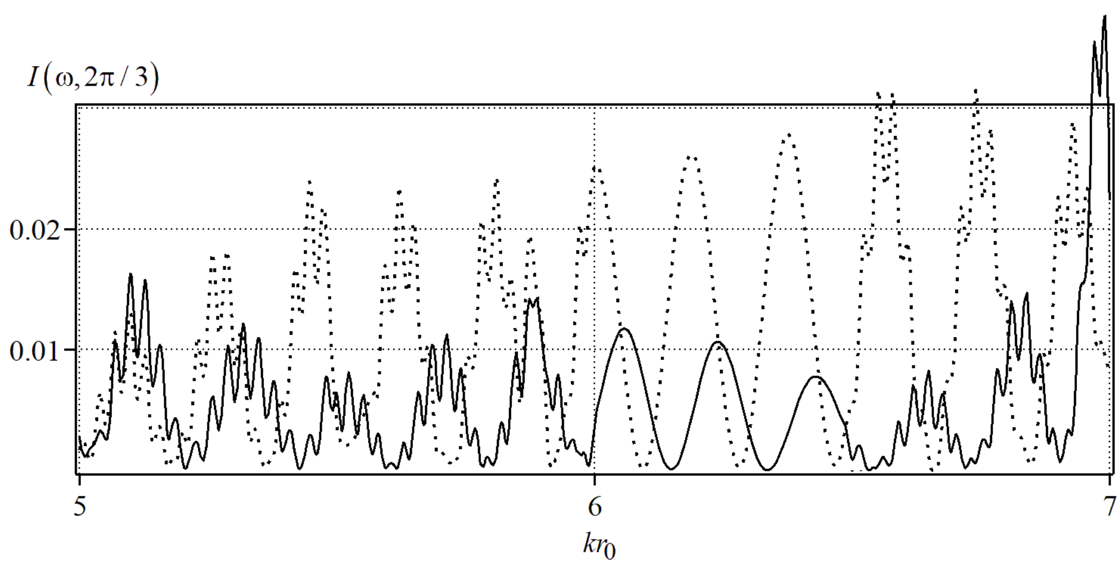


Рис. 4: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с изотропным покрытием

На рис. 5 приведены частотные характеристики для цилиндра с оптимальным покрытием (34) (сплошная линия) и без покрытия (пунктирная линия) при $\varphi = 2\pi/3$ в случае акустически мягкой границы Г.

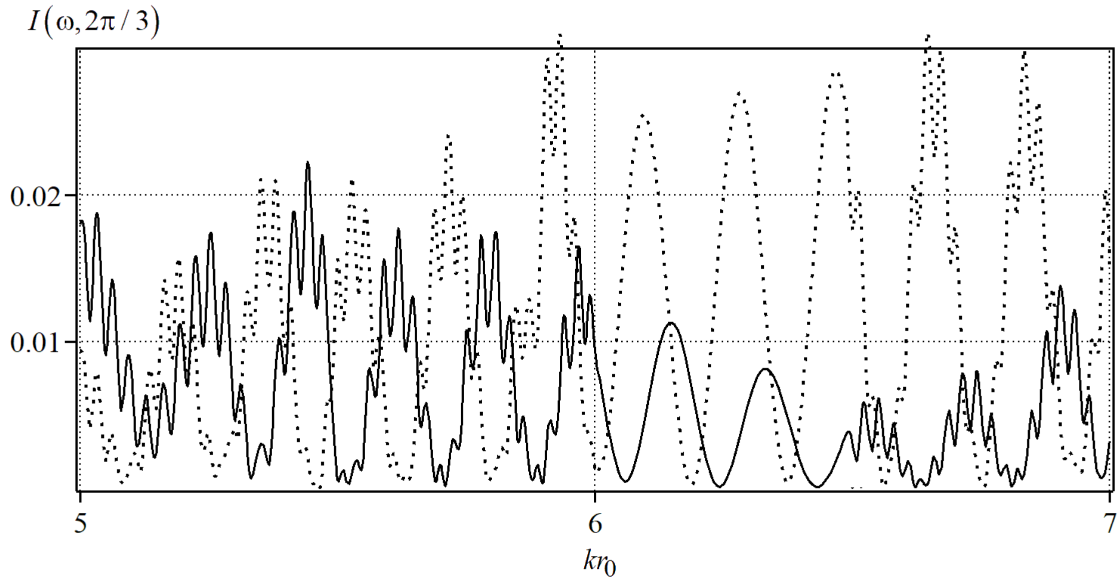


Рис. 5: Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния в случае акустически мягкой поверхности Γ

6. Заключение

В настоящей работе получены аналитические решения прямой и обратной задач дифракции плоских звуковых волн на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии плоской подстилающей поверхности. Осуществлено математическое моделирование покрытия, позволяющего обеспечивать минимальное звукоотражение в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения.

Результаты расчетов показали, что с помощью неоднородных покрытий возможно существенно изменять дифракционную картину и достигать требуемое звукоотражение тел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Honarvar F., Sinclair A. Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod. // J. Acoust. Soc. Am. 1997. Vol. 102. No. 1. P. 41–48.

2. Косарев О. И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.

3. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.

4. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.

5. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.

6. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189–199.

7. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.

8. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.

9. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.

10. Толоконников Л. А, Ларин Н. В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 97–113.

11. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 354–368.

12. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. № 1. С. 293-311.

13. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

15. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

17. Лопатин А.С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133–149. СПб.: Изд-во СПбГУ.

18. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

REFERENCES

1. Honarvar, F. & Sinclair, A. 1997, “Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102, no. 1, pp. 41—48.

2. Kosarev, O. I. 2012, “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].

3. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.

4. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274, [in Russian].

5. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164–169.

6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel’tsyn, S. A. 2017, “Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 4, pp. 733–742.

7. Tolokonnikov, L. A. 2018, “Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no. 9, pp. 276–289, [in Russian].

8. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021, “Diffraction of Sound Waves at an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating in the Vicinity of the Boundary of an Elastic Half-Space”, *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1641–1648.

9. Tolokonnikov, L. A. 2019, “Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 270–281, [in Russian].

10. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021, “Scattering by a cylinder with a inhomogeneous coating of sound waves radiated linear source in a flat waveguide ”, *Mathematical modelling*, vol. 33, no. 8, pp. 97–113, [in Russian].

11. Tolokonnikov, L. A. & Belkin A. E. 2020, “Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368, [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2022, “Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293-311, [in Russian].

13. Shenderov, E. L. 1972, *“Wave problems of underwater acoustics”*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].

14. Nowacki, W.1973, *“Teoria sprezystosci”*, PWN, Warszawa.

15. Brekhovskikh, L. M. 1973, *“Waves in Layered Media”*, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].

16. Ivanov, E. A. 1968, *“Diffraction of electromagnetic waves by two bodies”*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].

17. Lopatin, A. S. 2005, “Annealing method”, *Stochastic optimization in computer science*, SPtb. Gos. Univ., no. 1, pp. 133–149, [in Russian].

18. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, *“Spline function methods”*, Nauka, Moscow, 352 p.,[in Russian].

Получено 26.08.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 539.3: 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов [1]

А. А. Трещев, А. Е. Гвоздев, Н. С. Ющенко, А. А. Калинин

Трещев Александр Анатольевич — член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: taa58@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Ющенко Никита Сергеевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: yushenko_1972@bk.ru
Калинин Антон Алексеевич — инженер, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: antony_ak@mail.ru

Аннотация

Анализ процессов деформирования как давно известных, так и новых полимерных, композитных и синтетических материалов, используемых в строительных конструкций, деталях аппаратов, машин, а также энергетических установок позволил выявить их специфические свойства. Установлено, что многие подобные материалы имеют ортотропию структуры с одновременным проявлением деформационной анизотропией или неоднородностью. Наведенная деформационная анизотропия или механическая неоднородность вызвана зависимостью жесткостных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния. В предыдущих работах авторов показано, что традиционные модели деформирования подобных материалов и их математические представления, приводят к грубым ошибкам, явно проявляющимся при расчете различных конструкций. При этом теории деформирования композитных материалов с «усложненными свойствами», специально разработанные для них другими авторами в последние 40 лет, весьма противоречивы и обладают непреодолимыми недостатками. Авторами представленной работы ранее были разработаны нелинейные энергетические связи тензоров деформаций и напряжений, для определения констант которых рекомендован широкий набор экспериментов. Однако среди экспериментальных испытаний необходимо привлекать опыты по сложным напряженным состояниям, многие из которых в настоящее время практически нереализуемы. Поэтому в 2021 году были постулирован квазилинейный потенциал деформаций, представленный в главных осях ортотропии материалов. Для этого варианта оказалось достаточным вычисления констант по данным простейших опытов. Несмотря на несомненные преимущества данного потенциала, все же реальные нелинейные диаграммы аппроксимировались прямыми лучами по методу наименьших квадратов, а это при качественной адекватности приводило к количественным погрешностям. В связи с этим в представленной статье сделана попытка ухода от общих правил формулировки полной нелинейной потенциальной связи тензоров деформаций и напряжений. В этом направлении постулирована нелинейная математическая модель связи двух тензоров второго ранга, объединяющая

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Тульской области для выполнения работ в сфере науки и техники, договор №ДС/284.

форму обобщенного закона Гука для ортотропного материала, теорию малых упругопластических деформаций и методику тензорного пространства нормированных напряжений. Данный подход позволил определять нелинейные материальные функции, ограничившись набором традиционных простейших экспериментов. Сделано замечание о единственности решений краевых задач, которая сводится к проверке устойчивости уравнений состояния в малом по Друкеру. В рамках предложенной математической модели обработаны широко известные экспериментальные диаграммы для карбоно-графитового композита, для которого получены нелинейные материальные функции.

Ключевые слова: нелинейные материальные функции, деформационная анизотропия, структурная ортотропия, уравнения состояния, тензоры второго ранга, главные оси ортотропии, метод наименьших квадратов.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:
А. А. Трещев, А. Е. Гвоздев, Н. С. Ющенко, А. А. Калинин. Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 224–237.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 539.3: 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials

A. A. Treshchev, A. E. Gvozdev, N. S. Yushenko, A. A. Kalinin

Treschev Alexander Anatolyevich — corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: taa58@yandex.ru
Gvozdev Alexander Yevgenyevich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexqndr2013@yandex.ru
Yushchenko Nikita Sergeevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: yushenko_1972@bk.ru
Kalinin Anton Alekseevich — engineer, Tula State University (Tula).
e-mail: antony_ak@mail.ru

Abstract

Analysis of the deformation processes of both long-known and new polymer, composite and synthetic materials used in building structures, parts of apparatuses, machines, as well as power plants revealed their specific properties. It is established that many similar materials have orthotropy of the structure with simultaneous manifestation of deformation anisotropy or heterogeneity. Induced deformation anisotropy or mechanical inhomogeneity is caused by the dependence of stiffness and strength characteristics on the type of stress state. In previous works of the authors, it has been shown that traditional models of deformation of such materials and their mathematical representations lead to gross errors that are clearly manifested in the calculation of various structures. At the same time, the theories of deformation of composite materials with "complicated properties specially developed for them by other authors in the last 40 years, are very contradictory and have insurmountable disadvantages. The authors of the presented work have previously developed nonlinear energy relations of strain and stress tensors, for determining the constants of which a wide range of experiments is recommended. However, among the experimental tests, it is necessary to involve experiments on complex stress states, many of which are currently practically unrealizable. Therefore, in 2021, a quasi-linear deformation potential was postulated, represented in the main axes of orthotropy of materials. For this option, it turned out to be sufficient to calculate constants according to the simplest experiments. Despite the undoubted advantages of this potential, nevertheless, real nonlinear diagrams were approximated by direct rays using the least squares method, and this, with qualitative adequacy, led to quantitative errors. In this regard, the presented article attempts to avoid the general rules for the formulation of a complete nonlinear potential relationship of strain and stress tensors. In this direction, a nonlinear mathematical model of the connection of two second-rank tensors is postulated, combining the form of the generalized Hooke's law for orthotropic material, the theory of small elastic-plastic deformations and the tensor space technique of normalized stresses. This approach allowed us to determine nonlinear material functions, limiting ourselves to a set of traditional simplest experiments. A remark is made about the uniqueness of solutions to boundary value problems, which boils down to checking the stability of the equations of state in the small Drucker. Within the framework of the proposed mathematical model, widely known experimental diagrams for a carbon-graphite composite are processed, for which nonlinear material functions are obtained.

Keywords: nonlinear material functions, deformation anisotropy, structural orthotropy, equations of state, second-rank tensors, main axes of orthotropy, least squares method.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

A. A. Treshchev, A. E. Gvozdev, N. S. Yushchenro, A. A. Kalinin, 2022, "Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 224–237.

1. Введение

Уникальные здания, сооружения и детали индивидуального изготовления в настоящее время широко распространены в современной технике и строительстве, технологии, которые непрерывно совершенствуются. Данный факт создает предпосылки к созданию наиболее совершенных материалов, обладающих значительно большей жесткостью и прочностью при одновременном снижении общей массы конструкций, а также - новыми уникальными свойствами, отличающимися от традиционных [1 – 13]. Наиболее используемыми среди подобных материалов являются волокнистые, хаотически наполненные наноструктурными «трубками», фибрами композитные материалы, плёночные объекты, пластики (углепластики, стеклопластики, боропластики и др.).

Особенностями как новых, так и большинства давно известных конструкционных материалов типа бетонов и железобетона [14 – 17], ковких и серых чугунов [18 – 20], фторопласта [21, 22], полиметилметакрилата [23 – 25], карбонов [3 – 5, 7, 11, 12, 14, 26, 27], является зависимость их механических характеристик от вида напряженного состояния. Причем некоторая часть из них обладает начальной структурной изотропией [14 – 24, 26], а другая – анизотропией [1 – 25, 27]. Отметим, что для изотропных материалов за последние 50 лет был предложен ряд моделей уравнений состояния разной степени точности в квазилинейной и нелинейной формах, но как показано в работе [14], все они имеют отдельные недостатки и даже ошибочны. Наиболее универсальными и свободными от модельных ограничений, как показано в исследованиях [14, 28 – 30], являются энергетически непротиворечивые уравнения связи деформаций и напряжений, сформулированные в тензорных пространствах нормированных напряжений.

Наряду с этим, для структурно анизотропных материалов известны отдельные и не систематизированные исследования в плане построения определяющих соотношений [1 – 13, 27, 31, 32].

2. Нелинейные уравнения связи тензоров второго ранга

В работах [33, 34] предприняты попытки использования нормированного пространства для построения нелинейных моделей деформирования ортотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, разного уровня нелинейности, по всем правилам постулирования формы удельной энергии деформаций и дополнительной работы напряжений [35, 36]. Как показано [14, 33, 34], в уравнениях высокой точности (нелинейности), даже в отдельных квазилинейных формах потенциалов, для определения всех констант, требуется комплекс испытаний, включающий сложные напряженно-деформированные состояния. При этом требуется привлечение широкого набора испытаний на плоские напряженные состояния (двухосные), пространственные (трехосные) эксперименты в главных плоскостях ортотропии, включающие как растяжения, так и сжатия. Однако это не самое сложное. Гораздо сложнее выполнить испытания на совместные сдвиг в двух - трех главных материальных плоскостях ортотропии. Проведение подобных испытаний даже при современном уровне развития экспериментальной базы не реализуемо. Во всяком случае, в научной литературе сведения о проведении подобных опытов отсутствуют.

В работе [37] в рамках тензорного пространства нормированных напряжений были сформулированы потенциалы деформаций для ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией квазилинейного уровня. Там же разработана методика определения констант потенциалов через экспериментально определенные технические характеристики и установлены ограничения, вытекающие из доказательства теоремы единственности. Очевидно, что дальнейшего совершенствования расчетных моделей конструкций из композитных материалов невозможно добиться без перехода от квазилинейных уравнений состояния к нелинейным, наиболее точно, связывающих тензоры деформаций и напряжений для структур с двойной анизотропией и минимально отличающихся от экспериментальных связей. Однако одного желания и постановки проблемы весьма недостаточно, ведь сложности экспериментального определения технических констант никуда не исчезают. Поэтому первоначально предлагается постулировать нелинейные уравнения связи между двумя тензорами второго ранга для композитных ортотропных материалов с несовершенной упругостью в гибридной форме, близкой к обобщенному закону Гука с модификацией по типу теории малых упругопластических деформаций, но с учетом зависимости жесткостей от вида напряженного состояния.

Предлагаемая модель должна быть универсальной для любого вида напряженного состояния. Кроме того необходимо установить взаимно-однозначные зависимости между деформациями и напряжениями с обоснованием системы простейших экспериментов, достаточных для определения нелинейных материальных функций, которые вводятся в уравнения состояния и учитывают механические свойства структурно ортотропного материала, обладающего деформационной анизотропией.

Нелинейные уравнения связи деформаций и напряжений для ортотропного материала рекомендуется сформулировать в виде:

$$e_{11}=[\mathrm{A}_{1111}(\sigma_i)+B_{1111}(\sigma_i)\,\alpha_{11}]\,\sigma_{11}+[A_{1122}(\sigma_i)+B_{1122}(\sigma_i)\,(\alpha_{11}+\alpha_{22})]\,\sigma_{22}+$$
$$+[A_{1133}(\sigma_i)+B_{1133}(\sigma_i)\,(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\,\sigma_{33};$$
$$e_{22}=[\mathrm{A}_{1122}(\sigma_i)+B_{1122}(\sigma_i)\,(\alpha_{11}+\alpha_{22})]\,\sigma_{11}+[A_{2222}(\sigma_i)+B_{2222}(\sigma_i)\,\alpha_{22}]\,\sigma_{22}+$$
$$+[A_{2233}(\sigma_i)+B_{2233}(\sigma_i)\,(\alpha_{22}+\alpha_{33})]\,\sigma_{33};$$

$$\begin{gathered} e_{33}=[\mathrm{A}_{1133}(\sigma_i)+B_{1133}(\sigma_i)(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\sigma_{11}+\\ +[A_{2233}(\sigma_i)+B_{2233}(\sigma_i)(\alpha_{22}+\alpha_{33})]\sigma_{22}+\\ +[A_{3333}(\sigma_i)+B_{3333}(\sigma_i)\alpha_{33}]\sigma_{33};\\ \gamma_{12}=C_{1212}(\sigma_i)\tau_{12};\gamma_{23}=C_{2323}(\sigma_i)\tau_{23};\gamma_{13}=C_{1313}(\sigma_i)\tau_{13}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $A_{ijkm}(\sigma_i)$, $B_{ijkm}(\sigma_i)$ и $C_{ijkm}(\sigma_i)$ – материальные нелинейные функции от интенсивности напряжений, определяемые характеристиками деформирования ортотропного материала; $\alpha_{ij}=\sigma_{ij}/S$ – компоненты нормированных напряжений ($i,\ j=1,\ 2,\ 3$); $\sigma_i=\sqrt{[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\tau_{12}^2+\tau_{13}^2+\tau_{32}^2)]/2}$ – интенсивность напряжений; $S=\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}=\sqrt{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2+2(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2)}$ – модуль вектора полного напряжения (норма тензорного пространства напряжений).

3. Определение материальных функций модели и их ограничения

Нелинейные материальные функции уравнений состояния (1) представим степенными полиномами, аппроксимирующими экспериментально полученные диаграммы деформирования конкретного материала, полученные при испытании на одноосные растяжение и сжатие вдоль главных осей ортотропии и на сдвиги во всех трех главных материальных плоскостях. Математическая обработка эмпирических результатов осуществлялась в программном модуле Microcal Origin Pro 8.0 (Microcal Software Inc.). Согласно методикам вычисления констант определяющих соотношений, рассмотренных в работах [33, 34], для нелинейно ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией, материальные функции должны определяться следующей совокупностью характеристик, устанавливаемых из экспериментов:

$$\begin{gathered} A_{kkkk}(\sigma_i)=0,5\left[1/\mathrm{E}_\mathrm{k}^+(\sigma_\mathrm{i})+1/\mathrm{E}_\mathrm{k}^-(\sigma_\mathrm{i})\right];\\ B_{kkkk}(\sigma_i)=0,5\left[1/\mathrm{E}_\mathrm{k}^+(\sigma_\mathrm{i})-1/\mathrm{E}_\mathrm{k}^-(\sigma_\mathrm{i})\right];\\ A_{kkmm}(\sigma_i)=-0,5\left[\nu_\mathrm{km}^+(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^+(\sigma_\mathrm{i})+\nu_\mathrm{km}^-(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^-(\sigma_\mathrm{i})\right];\\ B_{kkmm}(\sigma_i)=-0,5\left[\nu_\mathrm{km}^+(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^+(\sigma_\mathrm{i})-\nu_\mathrm{km}^-(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^-(\sigma_\mathrm{i})\right];\\ C_{kmkm}(\sigma_i)=1/\mathrm{G}_\mathrm{km}(\sigma_\mathrm{i});k,m=1,2,3, \end{gathered} \tag{2}$$

где $E_k^{\pm}(\sigma_i)=a_k^{\pm}+m_k^{\pm}\sigma_i+n_k^{\pm}\sigma_i^2$; $\nu_{km}^{\pm}(\sigma_i)=\lambda_{km}^{\pm}+\beta_{km}^{\pm}\sigma_i+\mu_{km}^{\pm}\sigma_i^2$;
$G_{km}(\sigma_i)=g_{km}+p_{km}\sigma_i+q_{km}\sigma_i^2$; $E_k^{\pm}(\sigma_i)$, $\nu_{km}^{\pm}(\sigma_i)$, $G_{km}(\sigma_i)$ – нелинейные функции от интенсивности напряжений, представляющие собой аналоги модулей упругости, коэффициентов поперечной деформации и модулей сдвига ортотропного материала в соответствующих направлениях главных материальных осей и плоскостей (знак «+» соответствует характеристикам, полученным из опытов на осевое растяжение, а знак «–» – на осевое сжатие); $0_k^{\pm}$, $m_k^{\pm}$, $n_k^{\pm}$, $\lambda_{km}^{\pm}$, $\beta_{km}^{\pm}$, $\mu_{km}^{\pm}$, g_{km}, p_{km}, q_{km} – коэффициенты степенных полиномов, получаемые в результате аппроксимации (методом наименьших квадратов) экспериментальных данных по деформированию материалов.

При определении материальных функций необходимо придерживаться приближенных ограничений, традиционных для механики ортотропных материалов [35]:

$$\nu_{km}^+(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^+(\sigma_\mathrm{i})=\nu_\mathrm{mk}^+(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{k}^+(\sigma_\mathrm{i});\nu_{km}^-(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{m}^-(\sigma_\mathrm{i})=\nu_\mathrm{mk}^-(\sigma_\mathrm{i})/\mathrm{E}_\mathrm{k}^-(\sigma_\mathrm{i}). \tag{3}$$

В качестве конкретного материала, обладающего анизотропией двоякого рода, рассмотрен процесс пропорционального деформирования композита «углеродное волокно-углерод

AVCOMod 3a», экспериментальные данные для которого заимствованы из работ [11, 27]. В этих работах приведены результаты экспериментального деформирования на одноосные растяжение и сжатие в направлениях вдоль главных осей ортотропии и на чистый сдвиг в трех взаимно ортогональных главных материальных плоскостях. Результаты математической обработки экспериментальных данных по деформированию композита AVCOMod 3a приведены в табл. 1, а сами экспериментальные диаграммы и их математические представления согласно модели (1) представлены на рис. 1 – 4.

Таблица 1: Константы композитного материала AVCOMod 3a [11, 27]

Вид испытания образца	Технический параметр	Константы полиномов материальных функций		
Одноосное растяжение вдоль главных осей ортотропии	$E_k^+(\sigma_i)$, Па	$a_1^+=1{,}058\cdot10^{10}$	$m_1^+=62{,}829$	$n_1^+=1{,}535\cdot10^{-6}$
		$a_2^+=2{,}864\cdot10^{10}$	$m_2^+=-105{,}476$	$n_2^+=5{,}893\cdot10^{-7}$
		$a_3^+=2{,}301\cdot10^{10}$	$m_3^+=88{,}349$	$n_3^+=3{,}711\cdot10^{-6}$
	$\nu_{km}^+(\sigma_i)$	$\lambda_{12}^+=0{,}158$	$\beta_{12}^+=-3{,}1\cdot10^{-9}$	$\mu_{12}^+=2{,}19\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{21}^+=0{,}103$	$\beta_{21}^+=-1{,}79\cdot10^{-9}$	$\mu_{21}^+=9{,}1\cdot10^{-18}$
		$\lambda_{13}^+=0{,}203$	$\beta_{13}^+=2{,}15\cdot10^{-9}$	$\mu_{13}^+=6{,}15\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{23}^+=0{,}104$	$\beta_{23}^+=0{,}87\cdot10^{-10}$	$\mu_{23}^+=6{,}74\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{31}^+=0{,}146$	$\beta_{31}^+=-0{,}15\cdot10^{-10}$	$\mu_{31}^+=6{,}97\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{32}^+=0{,}1884$	$\beta_{32}^+=-1{,}153\cdot10^{-2}$	$\mu_{32}^+=1{,}914\cdot10^{-4}$
Одноосное сжатие вдоль главных осей ортотропии	$E_k^-(\sigma_i)$, Па	$a_1^-=9{,}988\cdot10^{9}$	$m_1^-=-12{,}943$	$n_1^-=6{,}71\cdot10^{-7}$
		$a_2^-=2{,}326\cdot10^{10}$	$m_2^-=-436{,}81$	$n_2^-=-6{,}08\cdot10^{-7}$
		$a_3^-=5{,}14\cdot10^{9}$	$m_3^-=-129{,}15$	$n_3^-=-78{,}3\cdot10^{-6}$
	$\nu_{km}^-(\sigma_i)$	$\lambda_{12}^-=0{,}118$	$\beta_{12}^-=-1{,}457\cdot10^{-9}$	$\mu_{12}^-=2{,}14\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{21}^-=0{,}06$	$\beta_{21}^-=1{,}77\cdot10^{-9}$	$\mu_{21}^-=2{,}95\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{13}^-=0{,}264$	$\beta_{13}^-=-1{,}118\cdot10^{-9}$	$\mu_{13}^-=3{,}01\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{23}^-=0{,}189$	$\beta_{23}^-=2{,}156\cdot10^{-9}$	$\mu_{23}^-=2{,}1\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{31}^-=0{,}134$	$\beta_{31}^-=-0{,}46\cdot10^{-10}$	$\mu_{31}^-=5{,}82\cdot10^{-17}$
		$\lambda_{32}^-=0{,}07793$	$\beta_{32}^-=-0{,}465\cdot10^{-2}$	$\mu_{32}^-=9{,}0167\cdot10^{-5}$
Сдвиг в главных плоскостях ортотропии	$G_{km}(\sigma_i)$, Па	$g_{12}=4{,}07\cdot10^{9}$	$p_{12}=-1{,}6$	$q_{12}=-8{,}38\cdot10^{-6}$
		$g_{23}=1{,}723\cdot10^{9}$	$p_{23}=16{,}899$	$q_{23}=-1{,}1\cdot10^{-5}$
		$g_{31}=2{,}43\cdot10^{9}$	$p_{31}=-54{,}455$	$q_{31}=-1{,}97\cdot10^{-5}$

В работе [37] была доказана теорема существования и единственности решений для квазилинейного потенциала деформаций, определяющего приближенные связи тензоров деформаций и напряжений для композитных ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией. Там же и в работах [14, 33, 34, 38] показано, что доказательство этой теоремы для любых определяющих соотношений сводится к проверке постулата Друкера

$$\delta e_{ij}\delta\sigma_{ij} \geqslant 0, \tag{4}$$

в рамках, которого определяются ограничения, накладываемые на материальные функции. Эти ограничения в данном нелинейном варианте модели (1) также как для квазилинейного потенциала [37] определены положительной определенностью квадратичной формы по критерию Сильвестра.

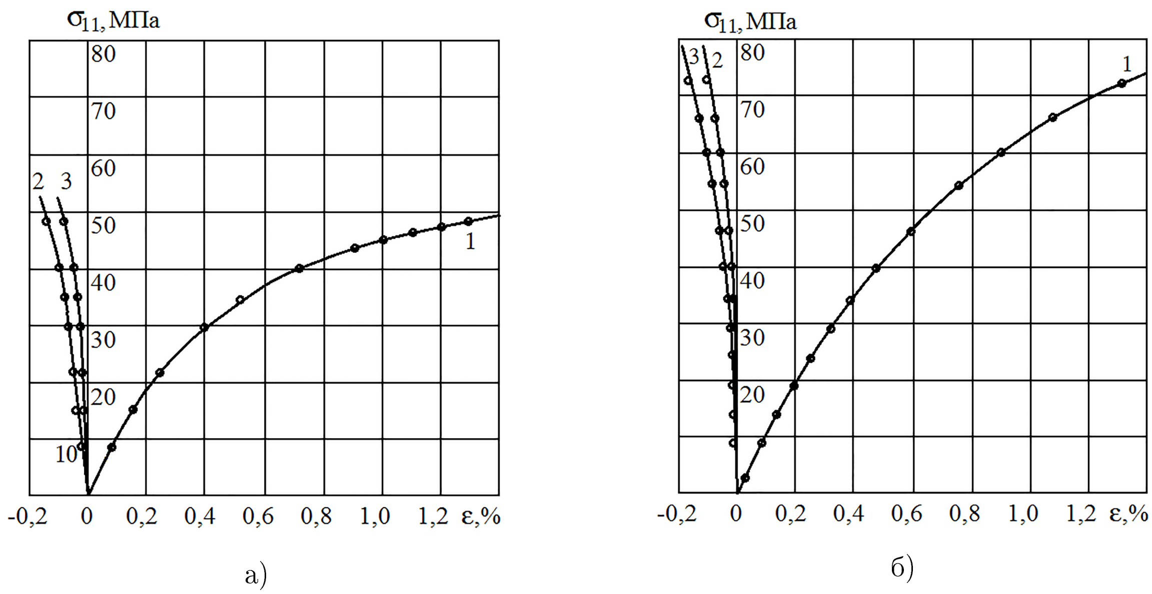


Рис. 1: Диаграммы деформирования вдоль оси x_1: а) растяжение; б) сжатие; 1 – продольная деформация ε_{11}; 2, 3 – поперечные деформации ε_{22} и ε_{33}; ○ – экспериментальные данные; ——– нелинейные аппроксимации

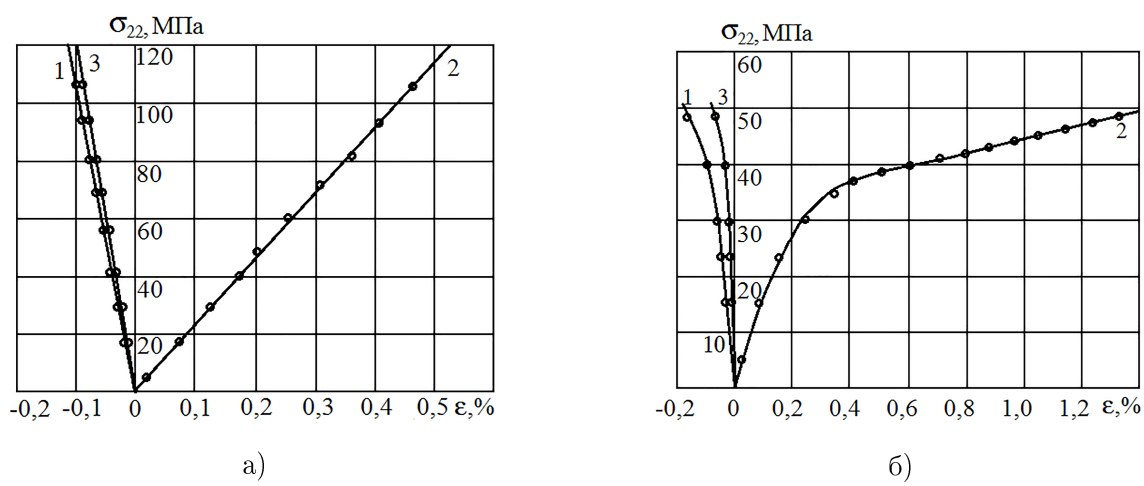


Рис. 2: Диаграммы деформирования вдоль оси x_2: а) растяжение; б) сжатие; 1, 3 – поперечные деформации ε_{11} и ε_{33}; 2 – продольная деформация ε_{22};○ – экспериментальные данные; ——– нелинейные аппроксимации

Для принятых нелинейных уравнений состояния (1) компоненты полной матрицы Сильвестра принимают вид:

$$D_{11}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{11}};\, D_{12}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{22}};\, D_{13}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \sigma_{33}};\, D_{14}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{13}};\, D_{15}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{23}};\, D_{16}=\frac{\partial e_{11}}{\partial \tau_{12}};$$

$$D_{22}=\frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{22}};\, D_{23}=\frac{\partial e_{22}}{\partial \sigma_{33}};\, D_{24}=\frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{13}};\, D_{25}=\frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{23}};\, D_{26}=\frac{\partial e_{22}}{\partial \tau_{12}};\, D_{33}=\frac{\partial e_{33}}{\partial \sigma_{33}};$$

$$D_{34}=\frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{13}};\, D_{35}=\frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{23}};\, D_{36}=\frac{\partial e_{33}}{\partial \tau_{12}};\, D_{44}=\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{13}};\, D_{45}=\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{23}};\, D_{46}=\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial \tau_{12}};$$

$$D_{55}=\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial\tau_{23}};\,D_{56}=\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial\tau_{12}};\,D_{66}=\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial\tau_{12}};\,D_{ij}=D_{ji}. \tag{5}$$

Установлено, что константы материальных функций для композита AVCOMod 3a [11, 27], приведенные в табл. 1 с учетом квадратичных форм (5) удовлетворяют критерию Сильвестра, вытекающего из требований постулата Друкера [14, 33, 34, 38].

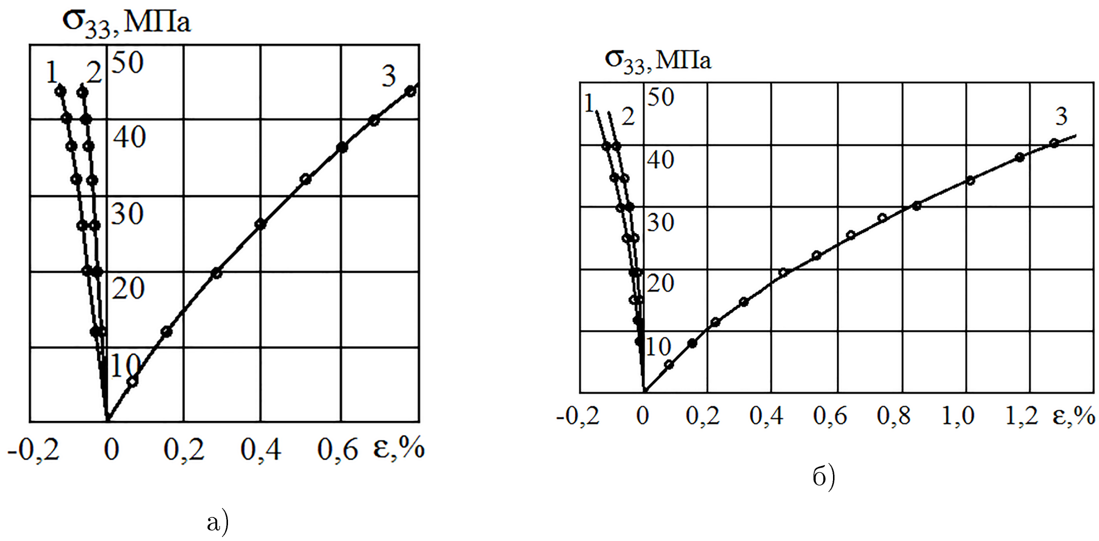


Рис. 3: Диаграммы деформирования вдоль оси x_3: а) растяжение; б) сжатие; 1, 2 – поперечная деформация ε_{11} и ε_{22}; 3 – продольная деформация ε_{33}; ○ – экспериментальные данные; ——– нелинейные аппроксимации

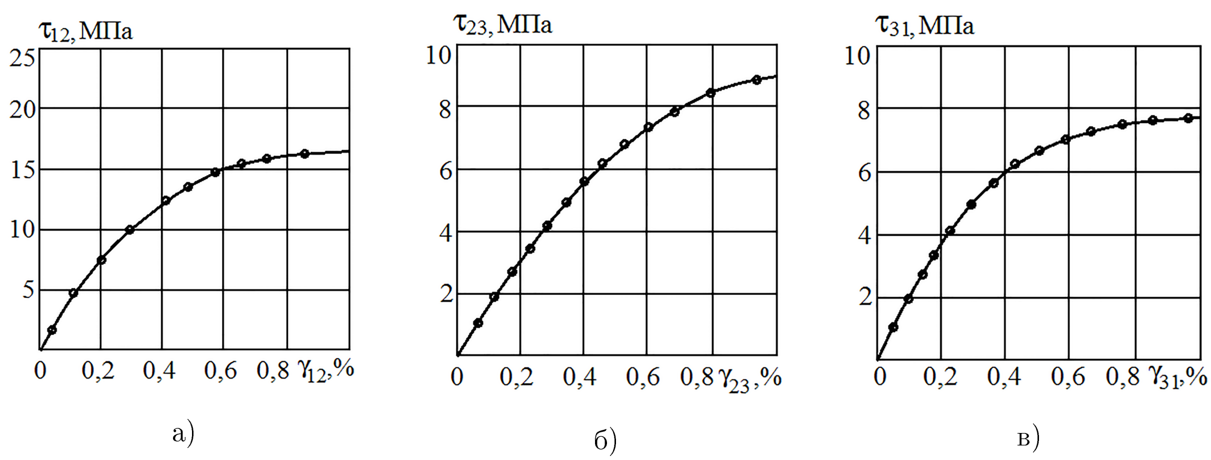


Рис. 4: Диаграммы деформирования на чистый сдвиг в главных плоскостях ортотропии: а) в плоскости x_1x_2; б) в плоскости x_2x_3; в) в плоскости x_1x_3; ○ – экспериментальные данные; ——– нелинейные аппроксимации

4. Подтверждение адекватности введенных уравнений состояния экспериментальным данным

На рис. 1 – 4 подтверждена адекватность постулированных уравнений состояния (1) экспериментально установленным диаграммам при растяжениях, сжатиях в главных осях ортотропии и сдвигов в соответствующих плоскостях для эталонных образцов композита AVCOMod 3a [11, 27]. При этом отметим, что нелинейная модель (1) имеет ряд преимуществ по сравнению с известными уравнениями, сформулированными другими авторами, такими как С.А.Амбарцумян [31], C.W.Bert – L.N.Reddy [2, 27], R.M.Jones – D.A.R.Nelson [3 – 5, 11, 12] и А.А.Золочевский [13] применительно к расчетам, особенно, пространственных конструкций, выполненных из ортотропного композита AVCOMod 3a [11, 27]. В частности, модель (1) свободна от физически неоправданных ограничений, накладываемых на коэффициенты материальных функций, отсутствие кусочности уравнений состояния. Кроме того, погрешность теоретических аппроксимаций (1) эталонных экспериментальных диаграмм по сравнению с другими теориями [2 – 5, 11 – 13, 27], судя по рис. 1 – 4, минимальна, а при поворотах системы координат обладает более высокой точностью.

5. Заключение

Предложенная нелинейная математическая модель связи двух тензоров второго ранга, определяющая деформированное и напряженное состояния ортотропного композитного материала марки AVCOMod 3a [11, 27] позволяет максимально точно предсказывать поведение подобных структур. Для идентификации модели разработана классическая методика определения материальных функций путем обработки экспериментальных диаграмм с использованием процедуры наименьших квадратов. В качестве эталонных диаграмм рекомендуется использовать данные опытов по одноосному растяжению, одноосному сжатию по направлениям главных материальных осей ортотропного композита и на сдвиг в трех взаимно ортогональных плоскостях. Подтверждена энергетическая непротиворечивость нелинейных уравнений состояния с учетом определенных констант материальных полиномов для ортотропного композита [11, 27], которая устанавливается постулатом Друкера. Хотя предложенная модель является упрощенной, но она обладает большей точностью, по сравнению с математически строгими квазилинейными уравнениями и может быть рекомендована для применения в расчетах пространственных конструкций по деформациям и прочности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmueser, D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmueser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – pp. 1742 – 1747.

2. Reddy, L.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – pp. 213 – 219.

3. Jones, R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – pp. 1436 – 1443.

4. Jones, R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. - № 8. – pp. 995 – 1001.

5. Jones, R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – pp. 917 – 923.

6. Крегерс, А.Ф. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния / А.Ф.Крегерс, Р.Д.Максимов, Р.П.Турциныш // Механика полимеров. – 1973. – №2. – С. 212 – 218.

7. Амелина, Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В.Амелина [и др.] // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20. – №5. – С. 27–52.

8. Каюмов, Р.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р.А.Каюмов, С.А.Луканкин, В.Н.Паймушин, С.А.Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. – кн. 4. – С. 112–132.

9. Shafigullin, L.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reiforced polyurethanes for vehicle parts / L.N.Shafigullin, A.A.Bobrishev, V.T.Erofeev, A.A.Treshchev, A.N.Shafigullina // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10. – №23. – pp. 43758-43762.

10. Розе, А.В. Трехармированные тканые материалы / А.В.Розе, И.Г.Жигун, М.Н.Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – С. 471–476.

11. Jones, R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – pp. 1427–1435.

12. Jones, R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – pp. 16–25.

13. Золочевский, А.А. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении / А.А.Золочевский, В.Н.Кузнецов // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 84–92.

14. Трещев, А.А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Тула: ТулГУ, 2020. – 359 с.

15. Bazant, Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P.Bazant, P.D.Bhat // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. – 1976. – Vol. 102. – № EM4. – pp. 701–722.

16. Kupfer, H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsinger Beanspruchung / H.B.Kupfer // Beton und Stahlbetonbau. – 1973. – №11. – pp. 269–274.

17. Tasuji, M.E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M.E.Tasuji, F.O.Slate, A.H.Nilson // ACI Journal. – 1979. – №7. – pp. 806–812.

18. Леонов, М.Я. О механизме деформаций полухрупкого тела / М.Я.Леонов, К.Н.Русинко // Пластичность и хрупкость. – Фрунзе: ИЛИМ, 1967. – С. 86–102.

19. Леонов, М.Я. Зависимости между деформациями и напряжениями для полухрупких тел / М.Я.Леонов, В.А.Паняев, К.Н.Русинко // Инж. журн. МТТ. – 1967. – № 6. – С. 26 – 32.

20. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С.Писаренко, А.А.Лебедев. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.

21. Елсуфьев, С.А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях / С.А.Елсуфьев // Механика полимеров. – 1968. – №4. – С. 742–746.

22. Елсуфьев, С.А. Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С.А.Елсуфьев, В.М.Чебанов // Исслед. по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209–213.

23. Айнбиндер, С.Б. Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов / С.Б.Айнбиндер, М.Г.Лака, И.Ю.Майорс // Механика полимеров. – 1965. – № 1. – С. 65 – 75.

24. Айнбиндер, С.Б. Свойства полимеров при высоких давлениях / С. Б. Айнбиндер, К. И. Алксне, Э. Л. Тюпина, М. Г. Лака. – М.: Наука, 1973. – 118 с.

25. Деревянко, Н.И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе / Н.И.Деревянко // Механика полимеров. – 1968. – №6. – С. 1059–1064.

26. Божанов, П.В. Определение прочностных критериев при возникновении пластических деформаций в поликарбонате / П.В.Божанов, А.АТрещев // Инновации и инвестиции. – 2018. – №12. – С. 323-326.

27. Bert, C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression / C.W.Bert // Transaction of the ASME. – 1977. – Vol. 99 H. – Ser. D. – No. 4. – pp. 344–349.

28. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1. Квазилинейные соотношения / Н.М.Матченко, Л.А.Толоконников, А.А.Трещев // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №1. – С. 73–78.

29. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2. Нелинейные соотношения / Н.М.Матченко, Л.А.Толоконников, А.А.Трещев // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – №4. – С. 87–95.

30. Treshchev, A.A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A.A.Treschev, A.A.Bobrishev, L.N.Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 481 (2019) UNSP012014. - Doi: 10.1088/ 1757-899X/481/1/ 012014. – pp. 1 – 7.

31. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела / С.А.Амбарцумян // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – №3. – С. 51–61.

32. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния / Е.В.Ломакин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1983. – №3. – С. 63–69.

33. Трещев, А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А.А.Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 4-1 (324). – С. 71 – 74.

34. Трещев, А.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов / А.А.Трещев, Ю.А.Завьялова, М.А.Лапшина // Эксперт: Теория и практика (Научно-практический журнал). – Тольятти: АНО «Институт судебной строительно-технической экспертизы» – 2020. – №3 (6). – С. 62 – 68. DOI 10.24411/2686-7818-2020-10027.

35. Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А.Грин, Дж.Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

36. Каудерер, Г. Нелинейная механика / Г.Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 779 с.

37. Трещев, А.А. Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией / А.А.Трещев, Ю.А.Завьялова, М.А.Лапшина, А.Е.Гвоздев, О.В.Кузовлева, Е.С.Крупицын // Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22. – №4 (80). – С. 369 – 383.

38. Турсунов, Б.С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел / Б.С.Турсунов // ПММ. – 1970. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 15–22.

REFERENCES

1. Schmueser, D.W., 1983, "Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells", *AIAA Journal*, vol. 21, no. 12, pp. 1742-1747.

2. Reddy, L.N., Bert, C.W., 1982, "On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials", *ZAMM*, vol. 62, no. 6, pp. 213-219.

3. Jones, R.M., 1977, "A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials", *AIAA Journal*, vol. 15, no. 10, pp. 1436-1443.

4. Jones, R.M., 1980, "Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material", *AIAA Journal*, vol. 18, no. 8, pp. 995-1001.

5. Jones, R.M., 1971, "Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression", *AIAA Journal*, vol. 9, no. 5, pp. 917-923.

6. Kregers, A.F., Maksimov, R.D., Turtsinysh, R.P., "Nonlinear creep of fabric fiberglass under some types of complex stress state", *Mechanics of polymers*, no. 2, pp. 212-218. (In Russian)

7. Amelina, E.V. [et al.], 2015, "On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation", *IVT SB RAS: Computational Technologies*, vol. 20, no. 5, pp. 27-52. (In Russian)

8. Kayumov, R.A., Lukankin, S.A., Paimushin, V.N., Kholmogorov, S.A., 2015, "Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites", *Scientific Notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences*, vol. 157, book 4, pp. 112-132. (In Russian)

9. Shafigullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafigullina A.N., 2015, "Development of the recommendations on selection of glass-fiber reiforced polyurethanes for vehicle parts", *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 10, no. 23, pp. 43758-43762.

10. Rose A.V., Zhigun I.G., Dushin M.N., 1970, "Three-reinforced woven materials", *Mechanics of polymers*, no. 3, pp. 471-476. (In Russian)

11. Jones R.M., Nelson D.A.R., 1976, "Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite", *AIAA Journal*, vol. 14, no. 10, pp. 1427-1435.

12. Jones, R.M., 1977, "Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression", *AIAA Journal*, vol. 15, no. 1, pp. 16-25.

13. Zolochevsky A.A., Kuznetsov V.N., 1989, "Calculation of anisotropic shells made of different-modulus materials under non-axisymmetric loading", *Dynamics and strength of heavy machines*, Dnepropetrovsk: DSU, pp. 84-92. (In Russian)

14. Treschev, A.A., 2020, “Theory of deformation and strength of different resistant materials“, Tula: TulSU, 359 p. (In Russian)

15. Bazant Z.P., Bhat P.D., 1976, “Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete“, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 102, no. EM4, pp. 701-722.

16. Kupfer, H.B., 1973, “Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsinger Beanspruchung“, *Beton und Stahlbetonbau*, no. 11, pp. 269-274.

17. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H., 1979, “Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading“, *ACI Journal*, no. 7, pp. 806-812.

18. Leonov M.Ya., Rusinko K.N., 1967, “On the mechanism of deformations of a semi-brittle body“, *Plasticity and fragility*, Frunze: ILIM, pp. 86-102. (In Russian)

19. Leonov M.Y.,Pinaev V.A.,Rusinko K.N., 1967, “Dependencies between deformations and stresses for semi-fragile bodies“, *Engineering Journal of Solid state mechanics*, no. 6, pp. 26-32. (In Russian)

20. Pisarenko G.S., Lebedev A.A., 1976, “Deformation and strength of materials under complex stress state“, Kiev: Naukova dumka, 416 p. (In Russian)

21. Alsufiev, S.A., 1968, “Investigation of the deformation of fluoroplast-4, with linear and plane stress conditions“, *Mechanics of polymers*, no. 4, pp. 742-746. (In Russian)

22. Alsufyev S.A., Chebanov V.M., 1971, “The study of the deformation of fluoroplast under conditions of plane stress state“, *Studies in elasticity and plasticity*, L.: Publishing house of Leningrad state University, vol. 8, pp. 209-213. (In Russian)

23. Ainbinder S.B., Varnish M.G., Majors I.Y., 1965, “The Influence of hydrostatic pressure on the mechanical properties of polymeric materials“, *Mechanics of polymers*, no. 1, P. 65-75.

24. Ainbinder S.B., Alksne K.I., Tyurin A.L., Varnish M.G., 1973, “Properties of polymers at high pressures“, M.: Science, 118 p. (In Russian)

25. Derevyanko, N.I., 1968, “Properties of reinforced polystyrene under short-term stretching, compression and bending“, *Mechanics of polymers*, no.6, pp. 1059-1064. (In Russian)

26. Bozhanov P.V., Treshchev A.A., 2018, “Determination of strength criteria in the occurrence of plastic deformations in polycarbonate“, *Innovations and investments*, no. 12, pp. 323-326. (In Russian)

27. Bert C.W., 1977, “Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression“, *Transaction of the ASME*, vol. 99 H, Ser. D. №4, P. 344-349. (In Russian)

28. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A., 1995, “Determining ratios of isotropic multi-resisting media. Part 1. Quasi-linear ratios“, *News of the Academy of Sciences. Solid state mechanics*, no. 1, pp. 73-78. (In Russian)

29. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A., 1999, “Determining ratios of isotropic multi-resistive media. Part 2. Nonlinear ratios“, *News of the Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 4, pp. 87-95. (In Russian)

30. Treschev A.A., Bobrishev A.A., Shafigullin L.N., 2019, “Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law“, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 481, UNSP012014, Doi: 10.1088/ 1757-899X/481/1/ 012014. pp. 1-7.

31. Ambartsumyan, S.A., 1969, “Basic equations and of the ratio of the heterogeneous theory of elasticity of an anisotropic body“, *News USSR Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 3, pp. 51-61. (In Russian)

32. Lomakin, E.V., 1983, “Relations of the theory of elasticity for an anisotropic body, the deformation characteristics of which depend on the type of stress state“, *News USSR Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no. 3, pp. 63-69. (In Russian)

33. Treshchev, A.A., 2017, “Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials“, *Fundamental and applied problems of engineering and technology*, no. 4-1 (324), pp. 71-74. (In Russian)

34. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., 2020, “A variant of the deformation model of orthotropic composite materials“, *Expert: Theory and Practice (Scientific and Practical journal*, Togliatti: ANO "Institute of Forensic Construction and Technical Expertise no. 3 (6), pp. 62-68, DOI 10.24411/2686-7818-2020-10027. (In Russian)

35. Green A., Adkins J., 1965, “Large elastic deformations and nonlinear mechanics of a continuous medium“, M.: Mir, 456 p. (In Russian)

36. Kauderer, G., 1961, “Nonlinear mechanics“, M.: Publishing house of foreign literature, 779 p. (In Russian)

37. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S., 2021, “Mathematical defining equations of deformation of materials with double anisotropy“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4 (80), pp. 369-383. (In Russian)

38. Tursunov, B.S., 1970, “On the properties of the stress potential of elastic bodies“, *AMM*, vol. 34, Issue 1, pp. 15-22. (In Russian)

Получено 03.01.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-238-244

О w-сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой взаимно перестановочными подгруппами[1]

Н. В. Артеменко, А. А. Трофимук

Артеменко Наталья Витальевна — Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).
e-mail: artemenkonatasha@outlook.com
Трофимук Александр Александрович — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Аннотация

Подгруппы A и B называются взаимно перестановочными, если A перестановочна с каждой подгруппой из B, а B перестановочна с каждой подгруппой из A. В статье получены достаточные условия w-сверхразрешимости группы $G = AB$, факторизуемой взаимно перестановочными сомножителями A и B. Кроме того, установлено строение w-сверхразрешимого корадикала такой группы.

Ключевые слова: конечная группа, w-сверхразрешимая группа, взаимно перестановочные подгруппы, $\mathfrak{F}$-корадикал.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Н. В. Артеменко, А. А. Трофимук. О w-сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой взаимно перестановочными подгруппами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 238–244.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-238-244

On the w-supersolubility of a finite group factorized by mutually permutable subgroups

N. V. Artemenko, A. A. Trofimuk

Artemenko Natalia Vital'evna — Brest State A. S. Pushkin University (Brest, Belarus).
Trofimuk Alexander Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Brest State A. S. Pushkin University (Brest, Belarus).
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция — 2025» (задание 1.1.02 подпрограммы 11.1 «Математические модели и методы») при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Abstract

The subgroups A and B of a group G are called mutually permutable if A permutes with all subgroups of B and B permutes with all subgroups of A. The sufficient conditions of w-supersolubility of a group $G = AB$ that is factorized by two mutually permutable w-supersoluble subgroups A and B were obtained. Besides we found the construction of w-supersoluble residual of such group.

Keywords: finite group, w-supersoluble group, mutually permutable subgroups, $\mathfrak{F}$-residual.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
N. V. Artemenko, A. A. Trofimuk, 2022, "On the w-supersolubility of a finite group factorized by mutually permutable subgroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 238–244.

1. Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We use the standard notations and terminology of [1, 2].

A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva and V. N. Tyutyanov in [3] proposed the following definition. A subgroup H of a group G is called $\mathbb{P}$-*subnormal* in G, if either $H = G$, or there is a chain subgroups

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_n = G,\ |H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P},\ \forall i.$$

Besides, a group G is called w-*supersoluble* [3] (widely supersoluble), if every Sylow subgroup of G is $\mathbb{P}$-subnormal in G. Denote by $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ the class of all w-supersoluble groups. Note that $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Here $\mathfrak{U}$ is the class of all supersoluble groups. In [3, Theorem 2.7, Proposition 2.8] proved that $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ is a subgroup-closed saturated formation and every group from $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ has an ordered Sylow tower of supersoluble type. By [4, Theorem 1], $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ if and only if every metanilpotent (biprimary) subgroup of G is supersoluble.

In monograph [6, p. 149] presented the following definition: two subgroups A and B of a group G are said to be *mutually permutable* if A permutes with all subgroups of B and B permutes with all subgroups of A. Asaad and Shaalan established the supersolubility of a group $G = AB$ with mutually permutable subgroups A and B provided that B is nilpotent [7, Theorem 3.2] and in the case that the derived subgroup G' is nilpotent [7, Theorem 3.8].

In the present work, the structure of the w-supersoluble residual of the group $G = AB$ with mutually permutable w-supersoluble subgroups A and B is established. Besides we obtained some sufficient conditions for w-supersolubility of such groups.

2. Preliminaries

In this section, we give some definitions and basic results which are essential in the sequel. A group whose chief factors have prime orders is called *supersoluble*.

Denote by $O_p(G)$, $F(G)$ and $\Phi(G)$ the greatest normal p-subgroup of G, the Fitting and Frattini subgroups of G respectively. We use E_{p^t} to denote an elementary abelian group of order p^t and Z_m to denote a cyclic group of order m. The semidirect product of a normal subgroup A and a subgroup B is written as follows: $A \rtimes B$.

The monographs [1, 9] contain the necessary information of the theory of formations.

A class group $\mathfrak{F}$ is called a formation if the following statements is true:

(1) if $G \in \mathfrak{F}$ and $N \lhd G$, then $G/N \in \mathfrak{F}$.

(2) if $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ and $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, then $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

A formation $\mathfrak{F}$ is said to be *saturated* if $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ implies $G \in \mathfrak{F}$. A formation $\mathfrak{F}$ is called *hereditary* if, together with each group, $\mathfrak{F}$ contains all its subgroups. The formations of all nilpotent, abelian and groups with abelian Sylow subgroups are denoted by $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ and $\mathcal{A}$, respectively.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation. Recall that the $\mathfrak{F}$-residual of G, that is the intersection of all those normal subgroups N of G for which $G/N \in \mathfrak{F}$. We define $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\}$ and call $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ the *formation product* of $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{H}$. Here $\mathfrak{E}$ is the class of all finite groups.

If H is a subgroup of G, then $H_G = \bigcap_{x \in G} H^x$ is called *the core* of H in G. If a group G contains a maximal subgroup M with trivial core, then G is said to be *primitive* and M is its *primitivator*.

A simple check proves the following lemma.

Lemma 8. *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation and G be a group. Assume that $G \notin \mathfrak{F}$, but $G/N \in \mathfrak{F}$ for all non-trivial normal subgroups N of G. Then G is a primitive group.*

Lemma 9 ([2, Theorem II.3.2]). *Let G be a soluble primitive group and M is a primitivator of G. Then the following statements hold:*

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) *$F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ and $F(G)$ is an elementary abelian subgroup of order p^n for some prime p and some positive integer n;*

(3) *G contains a unique minimal normal subgroup N and moreover, $N = F(G)$;*

(4) *$G = F(G) \rtimes M$ and $O_p(M) = 1$.*

Lemma 10 ([5, Proposition 2.2.8, Proposition 2.2.11]). *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be formations, K be normal in G. Then:*

(1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;

(2) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$;

(3) *if $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, then $G^{\mathfrak{F}} \leqslant G^{\mathfrak{H}}$.*

Lemma 11. *If $Y \leq X$ and $\mathfrak{F}$ is a hereditary formation, then $Y^{\mathfrak{F}} \leq X^{\mathfrak{F}}$.*

Proof. Since $X^{\mathfrak{F}}$ is normal in X, it follows that $YX^{\mathfrak{F}}$ is a subgroup of X. Then

$$Y/Y \cap X^{\mathfrak{F}} \simeq YX^{\mathfrak{F}}/X^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

because $\mathfrak{F}$ is hereditary. Hence $Y^{\mathfrak{F}} \leq Y \cap X^{\mathfrak{F}} \leq X^{\mathfrak{F}}$. □

Lemma 12. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of* w*-supersoluble subgroups A and B. If N is a minimal normal subgroup of G, then both AN and BN are* w*-supersoluble.*

Proof. By [6, Theorem 4.1.15, Lemma 4.3.3(4)], G is soluble and $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. If $N \leq A \cap B$, then $AN = A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ and $BN = B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. If $A \cap N = 1 = B \cap N$, then by [6, Lemma 4.3.9], $|N|$ is prime. Then $AN/N \simeq A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ and by [10, Lemma 2.16], $AN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Similarly $BN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$

If $N \leq A$ and $B \cap N = 1$, then $AN = A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Let N be non-cyclic. Then $N \leq C_G(B)$ by [6, Lemma 4.3.3(5)]. Since $BN = B \times N$, we have $BN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ by [3, Theorem 2.7]. Hence N is cyclic. Since $BN/N \simeq B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, by [10, Lemma 2.16], $BN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Similarly for $N \leq B$ and $A \cap N = 1$. □

3. New sign of w-supersolubility

We recall that two subgroups A and B of a group G are said to be *mutually sn-permutable* if A permutes with all subnormal subgroups of B and B permutes with all subnormal subgroups of A. Some sufficient conditions for w-supersolubility of the group $G = AB$ with mutually sn-permutable w-supersoluble subgroups A and B were obtained in [11]. In particular, they proved that G is w-supersoluble, if $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$. Besides, if A is nilpotent and B is w-supersoluble, then G

may be not w-supersoluble, see [11, Example 1]. However, this statement is true for the product of such mutually permutable subgroups A and B.

Theorem 1. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of* w*-supersoluble subgroups A and B. Then G is* w*-supersoluble in each of the following cases:*

(1) *B is nilpotent;*

(2) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$*;*

(3) *B is normal in G.*

Proof. We prove all three statements at the same time using induction on the order of G.

Since by [3, Proposition 2.8], every w-supersoluble group has an ordered Sylow tower of supersoluble type, then by [7, Corollary 3.6], G has an ordered Sylow tower of supersoluble type. Hence G is soluble.

If N is a non-trivial normal subgroup of G, then AN/N and BN/N are mutually permutable by [6, Lemma 4.1.10], $AN/N \simeq A/A \cap N$ and $BN/N \simeq B/B \cap N$ are w-supersoluble by [3, Theorem 2.7] ($BN/N \simeq B/B \cap N$ is nilpotent, $BN/N \simeq B/B \cap N$ is siding group).

Since $F(G)N/N \le F(G/N)$, then $F(G)AN/N \le F(G/N)AN/N$ and $|G/N : F(G/N)AN/N|$ divides $|G : F(G)A|$. Similarly $|G/N : F(G/N)BN/N|$ divides $|G : F(G)B|$.

Hence $|G/N : F(G/N)AN/N|$ and $|G/N : F(G/N)BN/N|$ are coprime.

By induction $G/N = (AN/N)(BN/N)$ is w-supersoluble and G is primitive by Lemma 8. Hence by Lemma 9, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ is a unique minimal normal subgroup of G. Besides $G = N \rtimes M$, $N = P$ is a Sylow p-subgroup of G for the greatest $p \in \pi(G)$. If N is cyclic, then $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Hence N is non-cyclic.

1. By [6, Lemma 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Case $A \cap N = 1 = B \cap N$ is false, because N is the Sylow subgroup of G.

If $N \le B$, then $N = B$, because $N = C_G(N)$ and N is the Sylow p-subgroup of G. By Lemma 12, $G = AB = AN$ is w-supersoluble.

If $N \not\le B$, then $B \cap N = 1$ and $N \le A$. By [6, Lemma 4.3.3(5)], $N \le C_G(B)$. Hence $B \le C_G(N) = N$ and $G = AB = AN = A$, a contradiction.

2. By Lemma 12, $AF(G)$ and $BF(G)$ are w-supersoluble. Since P is normal in G and G is soluble, it follows that there exists a chain of subgroup with prime indices between P and G. Therefore, P is $\mathbb{P}$-subnormal in G. Let Q be a Sylow q-subgroup of G, $q \ne p$. By hypothesis, q is not divide $|G : F(G)A|$ or $|G : F(G)A|$. Hence $Q^x \le F(G)A$ or $Q^y \le F(G)B$ for some $x, y \in G$. Let $Q^x \le F(G)A$. Then Q^x is $\mathbb{P}$-subnormal in $F(G)A$. Since B is soluble, B has a series $1 = B_0 < B_1 < \ldots < B_k < B_{k+1} < \ldots < B_n = B$ such that $|B_{k+1} : B_k|$ is prime. Because A and B are mutually permutable, we have $F(G)AB_k$ is subgroup for all k. Hence in a chain of subgroups

$$F(G)A \le F(G)AB_1 \le \ldots \le F(G)AB_k \le F(G)AB_{k+1} \le \ldots \le F(G)AB_n = G$$

the indices $|F(G)AB_{k+1} : F(G)AB_k| = |B_{k+1} : B_k|/|B_{k+1} \cap F(G)A) : B_k \cap F(G)A|$ divide the prime numbers. Hence $F(G)A$ is $\mathbb{P}$-subnormal in G. By [3, Lemma 1.4 (5,8)], Q is $\mathbb{P}$-subnormal in G and hence G is w-supersoluble, a contradiction.

3. Since N is minimal normal in G, it follows that $N \le B$. By [6, Lemma 4.3.3(4, 5)], $A \cap N = 1$ and $N \le C_G(A)$. Hence $G = AB = NB = B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, because $A \le C_G(N) = N$.

Let N be a minimal normal subgroup of G such that $N \le B'$. If N is not contained in M, then $G = N \rtimes M$ and $|N|$ is prime. By [10, Lemma 2.16], G is w-supersoluble. Suppose that N is contained in M and N_1 is a subgroup of N of prime order such that N_1 is normal in M. Then N_1 is normal in B and therefore is normal in G. By [10, Lemma 2.16], G is w-supersoluble. The theorem is proved. □

4. The w-supersoluble residual of the group $G = AB$ with mutually permutable w-supersoluble subgroups A and B

In [12, Theorem 2.1], V.S. Monakhov proved for a group $G = AB$ with mutually permutable supersoluble subgroups A and B that $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$. The w-supersoluble version of this result is presented in Theorem 2.

In [13], the authors proved that if G is the mutually permutable product of the w-supersoluble subgroups A and B and $G^{\mathcal{A}}$ is nilpotent, then G is w-supersoluble. In first part of Theorem 2 we gave a new proof of this result without theory of formation function.

Theorem 2. *Let $G = AB$ be the mutually permutable product of* w*-supersoluble subgroups A and B. Then $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} = (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$.*

Proof.

Suppose that $G^{\mathcal{A}}$ is nilpotent. Then $(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} = 1$. Next we check that G is w-supersoluble.

We use induction on the order of G. Let N be a non-trivial normal subgroup of G. Since by Lemma 10,

$$(G/N)^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}N/N \simeq G^{\mathcal{A}}/G^{\mathcal{A}} \cap N,$$

it follows that $(G/N)^{\mathcal{A}}$ is nilpotent and by induction, G/N is w-supersoluble.

Let $W = G^{\mathcal{A}}$. Since $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ is saturated by [3, Theorem 2.7], we have that G is primitive by Lemma 8. Hence by Lemma 9, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G) = W$ is a unique minimal normal subgroup of G. Besides, $G = N \rtimes M$, $M \in \mathcal{A}$, $N = P$ is a Sylow p-subgroup of G, where p is a greatest prime in $\pi(G)$. If N is cyclic, then $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ by [10, Lemma 2.16]. Hence N is non-cyclic.

By [6, Lemma 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. If $A \cap N = 1 = B \cap N$, then we have a contradiction, since N is a Sylow subgroup of G. If $N \leq A$ and $B \cap N = 1$, then by [6, Lemma 4.3.3(5)], $N \leq C_G(B)$. Hence $B \leq C_G(N) = N$ and $G = AB = AN = A$, a contradiction. Similarly for $N \leq B$ and $A \cap N = 1$.

Hence in the future we consider that $N \leq A \cap B$. Let T be an arbitrary $\{q, r\}$-subgroup of G. By [6, Theorem 1.1.19], there are Hall $\{q, r\}$-subgroups $G_{\{q,r\}}$, $A_{\{q,r\}}$, $B_{\{q,r\}}$ in G, A and B respectively such that $G_{\{q,r\}} = A_{\{q,r\}}B_{\{q,r\}}$. Since A and B are mutually permutable, $A_{\{q,r\}}$ and $B_{\{q,r\}}$ are mutually permutable [6, Lemma 4.1.21]. If $G_{\{q,r\}}$ is a proper subgroup of G, then by Lemma 11, $G^{\mathcal{A}}_{\{q,r\}} \leq G^{\mathcal{A}}$ and $G_{\{q,r\}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ by induction. Then by [4, Theorem 1], T is supersoluble and $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, a contadiction.

Hence G is biprimary and M is an abelian Sylow q-subgroup for some $q \in \pi(G)$. By [14, Lemma I.1.3], M is cyclic. By Dedekind's identity, $M = (A \cap M)(B \cap M)$. Then $M = A \cap M$ or $M = B \cap M$. Suppose that $M = A \cap M$. Then $M \leq A$. Since $N \leq A$, we have that $G = NM \leq A$ and $G = A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

If G is w-supersoluble, then $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} = 1$ and $G^{\mathcal{A}}$ is nilpotent by [3, Theorem 2.13]. Consequently $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} = 1 = (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$ and the statement is true.

Further, we assume that G is non-w-supersoluble and $G^{\mathcal{A}}$ is non-nilpotent. Since $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$, it follows that

$$G^{(\mathfrak{N}\mathcal{A})} = (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} \leqslant G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}$$

by Lemma 10 (2-3). Next we check the converse inclusion. For this we prove that $G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$ is w-supersoluble. By Lemma 10 (1),

$$(G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}})^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} = G^{\mathcal{A}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$$

and $(G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}})^{\mathcal{A}}$ is nilpotent. The quotients

$$G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} = (A(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}})(B(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}},$$

$$A(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} \simeq A/A \cap (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}},$$
$$B(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}} \simeq B/B \cap (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}},$$

hence the subgroups $A(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$ and $B(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$ are w-supersoluble by [3, Theorem 2.7] and are mutually permutable by [6, Lemma 4.1.10]. As shown above, $G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$ is w-supersoluble and $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} \leq (G^{\mathcal{A}})^{\mathfrak{N}}$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Monakhov V. S. Introduction to the Theory of Final Groups and Their Classes [in Russian]. Minsk: Vysh. Shkola, 2006.

2. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

3. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Tyutyanov V. N. On the finite groups of supersoluble type // Siberian Math. J. 2010. Vol. 51, № 6. P.1004-1012.

4. Monakhov V. S. Three Formations over $\mathfrak{U}$ // Math. Notes. 2021. Vol. 110, № 3. P.339-346.

5. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006.

6. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

7. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.

8. Perez E. R. On products of normal supersoluble subgroups // Algebra Colloq. 1999. Vol. 6, №3. P.341-347.

9. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

10. Skiba A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. Vol. 315. P.192-209.

11. Ballester-Bolinches A., Fakieh W. M., Pedraza-Aguilera M. C. On products of generalised supersoluble finite groups // Mediterr. J. Math. 2019. Vol. 16, № 2. P.46-1-46-7.

12. Monakhov V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products // PFMT. 2018. Vol. 34, № 1. P.69-70.

13. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Tyutyanov V. N. On the products of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups of finite groups // Siberian Math. J. 2012. Vol. 53. P.47-54.

14. Weinstein M. (ed.) Between nilpotent and solvable. Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. 2006, Introduction to the Theory of Final Groups and Their Classes [in Russian], Vysh. Shkola, Minsk.

2. Huppert, B. 1967, Endliche Gruppen I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

3. Vasil'ev, A. F., Vasil'eva, T. I., Tyutyanov, V. N. 2010, "On the finite groups of supersoluble type", *Siberian Math. J.*, vol. 51, № 6, pp. 1004-1012.

4. Monakhov, V. S. 2021, “Three Formations over $\mathfrak{U}$“, *Math. Notes*, vol. 110, № 3, pp. 339-346.
5. Ballester-Bolinches, A. & Ezquerro, L. M. 2006, Classes of Finite Groups, Springer, Dordrecht.
6. Ballester-Bolinches, A., Esteban-Romero, R. & Asaad, M. 2010, Products of finite groups, Walter de Gruyter, Berlin.
7. Asaad, M. & Shaalan, A. 1989, “On the supersolubility of finite groups“, *Arch. Math.*, vol. 53, pp. 318-326.
8. Perez, E. R. 1999, “On products of normal supersoluble subgroups“, *Algebra Colloq.*, vol. 6, №3, pp. 341-347.
9. Doerk, K. & Hawkes, T. 1992, Finite soluble groups, Walter de Gruyter, Berlin-New York.
10. Skiba, A. N. 2007, “On weakly s-permutable subgroups of finite groups“, *J. Algebra,* vol. 315, pp. 192-209.
11. Ballester-Bolinches, A., Fakieh, W. M., Pedraza-Aguilera, M. C. 2019, “On products of generalised supersoluble finite groups“, *Mediterr. J. Math.*, vol. 16, № 2, pp. 46-1-46-7.
12. Monakhov V. S. 2018, “On the supersoluble residual of mutually permutable products“, *PFMT*, vol. 34, № 1, pp. 69-70.
13. Vasil’ev A. F., Vasil’eva T. I., Tyutyanov V. N. 2012, “On the products of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups of finite groups“, *Siberian Math. J.*, vol. 53, pp. 47-54.
14. Weinstein M. (ed.) 1982, Between nilpotent and solvable, Polygonal Publ. House, Passaic.

Получено 21.12.2021
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-245-248

Уточнение оценки среднего угла в проблеме Фейеш Тота[1]

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Лепетков Даниил Русламович — Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: Shipsdays@gmail.com

Аннотация

Рассматривается проблема Фейеш Тота о максимуме E_* среднего значения суммы углов между прямыми в $\mathbb{R}^3$ с общим центром. Л. Фейеш Тот предположил, что $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\ldots$. Эта гипотеза до сих пор не доказана. D. Bilyk и R.W. Matzke доказали, что $E_* \leqslant 1.110\ldots$. Мы уточняем эту оценку при помощи экстремальной задачи типа Дельсарта: $E_* \leqslant A_* < 1.08326$. При помощи двойственной проблемы B_* мы показываем, что решение задачи A_* не позволяет доказать гипотезу Фейеш Тота, так как $1.05210 < A_*$.

Ключевые слова: гипотеза Фейеш Тота, единичная сфера, многочлен Лежандра, оценка линейного программирования, задача Дельсарта.

Библиография: 3 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков. Уточнение оценки среднего угла в проблеме Фейеш Тота // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 245–248.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-245-248

Refinement of the mean angle estimation in the Feyesh Toth problem[2]

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Lepetkov Daniil Ruslamovich — Tula State University (Tula).
e-mail: Shipsdays@gmail.com

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.
[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199), https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

Abstract

The Fejes Tóth problem about the maximum E_* of the mean value of the sum of angles between lines in $\mathbb{R}^3$ with a common center is considered. L. Fejes Tóth suggested that $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\ldots$. This conjecture has not yet been proven. D. Bilyk and R.W. Matzke proved that $E_* \leqslant 1.110\ldots$. We refine this estimate using an extremal problem of the Delsarte type: $E_* \leqslant A_* < 1.08326$. Using the dual problem B_* we show that the solution of the A_* problem does not allow us to prove the Fejes Tóth conjecture, since $1.05210 < A_*$.

Keywords: Fejes Tóth conjecture, unit sphere, Legendre polynomial, linear programming bound, Delsarte problem.

Bibliography: 3 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, 2022, “Refinement of the mean angle estimation in the Feyesh Toth problem”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 245–248.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан набор прямых с общим центром. В классической проблеме Фейеш Тота спрашивается, сколь большой может быть сумма углов между прямыми (см. [3, 2]). Если число прямых может быть произвольным, то проблема эквивалентна нахождению величины

$$E_* = \sup_{X\subset\mathbb{S}^2} E(X), \quad E(X) = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} \arccos|x_i x_j|,$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — всевозможные наборы точек на единичной сфере, xy — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Л. Фейеш Тот предположил, что $E_* = \frac{\pi}{3} = 1.047\ldots$ и экстремум образуют множества, состоящие из повторов тройки единичных ортов. Эта гипотеза до сих пор не доказана. В работе [3] доказана оценка $E_* \leqslant \frac{3\pi}{8} = 1.178\ldots$. Эта оценка была уточнена в работе [2]: $E_* \leqslant 1.110\ldots$.

Докажем, что

Предложение 1.
$$E_* < 1.08326.$$

Для доказательства воспользуемся аналитическими методами из теории кодирования, связанными с оценкой линейного программирования Дельсарта (см., например, [1]). Пусть $P_n(t)$ — ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены Лежандра, $P_n(1) = 1$,

$$F(t) = \arccos|t| = \sum_{k=0}^{\infty} F_k P_{2k}(t).$$

Заметим, что четные на $[-1, 1]$ функции раскладываются по четным многочленам $P_{2k}(t)$, причем $\int_0^1 P_{2k}^2(t)\,dt = \frac{1}{4k+1}$. Отсюда $F_k = (4k+1)\int_0^1 \arccos t\, P_{2k}(t)\,dt$.

Предложение 1 вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1 (оценка линейного программирования). *Пусть K — класс непрерывных на $[0, 1]$ четных функций $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_{2k}(t)$, для которых $f_0 > 0$, $f_k \leqslant 0$ при $k \geqslant 1$, $F(t) \leqslant f(t)$ при $t \in [0, 1]$. Тогда*

$$E_* \leqslant A_* = \inf_{f\in K} f_0.$$

Лемма 2 (двойственная оценка). *Пусть L — класс положительных на $[0, 1]$ борелевских мер $\mu(t)$, для которых $\mu_k = \int_0^1 P_{2k}(t)\,d\mu(t)$, $\mu_0 = 1$, $\mu_k \geqslant 0$ при $k \geqslant 1$. Тогда*

$$A_* \geqslant B_* = \sup_{\mu\in L} \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k.$$

Лемма 3. *Имеем*

$$1.05210 < B_* \leqslant A_* < 1.08326.$$

Лемма 3 означает, что решение экстремальной задачи A_* не позволяет доказать гипотезу Фейеш Тота. Также отметим, что оценка из работы [2] получена на многочлене второй степени из проблемы A_*.

Доказательство леммы 1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_N\} \in \mathbb{S}^2$, $f \in K$. Используя свойства функции f и положительную определенность многочленов Лежандра, получаем

$$E(X) = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} \underbrace{F(x_i x_j)}_{\leqslant f(x_i x_j)} \leqslant \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} f(x_i x_j) = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} f_k P_{2k}(x_i x_j)$$

$$= f_0 + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{f_k}_{\leqslant 0} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} P_{2k}(x_i x_j)}_{\geqslant 0} \leqslant f_0.$$

Теперь можно перейти к нижней грани по f. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $f \in K$, $\mu \in L$. Тогда

$$0 \leqslant \int_0^1 \underbrace{(f(t) - F(t))}_{\geqslant 0}\, d\mu(t) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (f_k - F_k) P_{2k}(t)\, d\mu(t) = f_0 \underbrace{\mu_0}_{=1} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{f_k \mu_k}_{\leqslant 0} - \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k,$$

откуда $f_0 \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mu_k$. Теперь можно перейти к нижней грани по f и верхней грани по μ. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Приведем примеры многочленов $f \in K$ и $g(t) = \mu'(t)$, $\mu \in L$, которые дадут нужные оценки. Они получены численными экспериментами с помощью дискретизации и линейного программирования, однако их свойства можно проверить непосредственно. Такой подход хорошо известен в теории экстремальных задач Дельсарта. Все вычисления проводились с 10-ю знаками после точки.

Многочлен

$$f(t) = \sum_{k \in \{0,1,3,5,9,11,13\}} f_k P_{2k}(t),$$

где коэффициенты f_k последовательно равны

$$1.083257455,\ -0.9128828392,\ -0.02249927905,\ -0.06981521396,\ -0.02596318737,$$
$$-\,0.006259729365,\ -0.01301527343.$$

Для него $\min_{t \in [0,1]}(f(t) - F(t)) \geqslant 0.001$. Отсюда округляя, получаем $A_* \leqslant 1.08326$.

Многочлен

$$g(t) = \sum_{k \in \{0,2,4,6,8,10,12,14\}} (4k+1)\mu_k P_{2k}(t),$$

где коэффициенты μ_k последовательно равны

$$1,\ 0.4583469123,\ 0.2734701526,\ 0.1838476292,\ 0.1139628481,\ 0.06729056530,$$
$$0.03222866343,\ 0.01182221436.$$

Для него $\min_{t\in[0,1]} g(t) \geqslant 0.0007$, $\sum_{k\in\{0,2,4,6,8,10,12,14\}} F_k\mu_k = 1.052101964$, где коэффициенты F_k последовательно равны

$$1,\ 0.07500000000,\ 0.03752480159,\ 0.02353061435,\ 0.01654979769,\ 0.01247489073,\ 0.009849540645,\ 0.008039378483.$$

Отсюда округляя, получаем $B_* \geqslant 1.05210$. Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н., Юдин В.А. Экстремальные расположения точек на сфере // Матем. просв. 1997. Вып. 1. С. 115–125.

2. Bilyk D., Matzke R.W. On the Fejes Tóth problem about the sum of angles between lines // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. V. 147, no. 1. P. 51–59.

3. Fodor F., Vıgh V., Zarnócz T. On the angle sum of lines // Arch. Math. (Basel). 2016. V. 106, no. 1. P. 91–100.

REFERENCES

1. Andreev, N.N. & Yudin, V.A. 1997. “An extremal location of points on a sphere”, *Mat. Pros.*, vol. 3, no. 1, pp. 115–125. (In Russ.)

2. Bilyk, D. & Matzke, R.W. 2019. “On the Fejes Tóth problem about the sum of angles between lines”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 147, no. 1, pp. 51–59.

3. Fodor, F., Vıgh, V. & Zarnócz, T. 2016. “On the angle sum of lines”, *Arch. Math. (Basel)*, vol. 106, no. 1, pp. 91–100.

Получено 23.08.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-249-254

О трёхмерных сетках Смоляка III[1]

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это третья статья из серии, посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

В работе показано, что:

1. линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s \geqslant 3$ не является нормальным;
2. найдены значения некоторых тригонометрических сумм $S_q(m_1, \ldots, m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s \geqslant 3$.

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка III// Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 249–254.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005 _р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-249-254

About three-dimensional nets of Smolyak III[2]

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

This is the third article in a series dedicated to Smolyak grids. The work relates to analytical number theory and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

The paper shows that:

1. the linear operator A_q of weighted grid averages over the Smolyak grid at dimension $s \geqslant 3$ is not normal;
2. found the values of some trigonometric sums $S_q(m_1, \ldots, m_s)$ of the resin grid at the dimension $s \geqslant 3$.

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2022, "About three-dimensional nets of Smolyak III", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 249–254.

1. Введение

Рассмотрим s-мерные сетки Смоляка $Sm(q,s)$ с параметром $q \geqslant s$, которые определяются как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ с $\max(s, q-s+1) \leqslant \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,s) = \left\{ \left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \ldots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) \middle| \begin{array}{c} 0 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1, \ldots, 0 \leqslant k_s \leqslant 2^{\nu_s} - 1, \\ \nu_1, \ldots, \nu_s \geqslant 1, \quad \max(s, q-s+1) \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q \end{array} \right\}. \quad (1)$$

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

Обозначим через $S_q(m_1,\ldots,m_s)$ тригонометрическую сумму сетки Смоляка, определенную равенством:

$$S_q(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=0}^{k(q,s)}\frac{(-1)^kC_{s-1}^k}{2^{q-k}}\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}e^{2\pi i\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}+\ldots+\frac{m_sk_s}{2^{\nu_s}}\right)},$$

где $C_s(q)=\{\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{N}^s\,|\,\nu_1+\ldots+\nu_s=q,\,\nu_j\geqslant 1\,(j=1,\ldots,s)\}$, $k(q,s)=\min(q-s,s-1)$.

Суммируя по $k_1,\ldots,k_s$, получим

$$S_q(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=0}^{k(q,s)}(-1)^kC_{s-1}^k\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\delta_{2^{\nu_1}}(m_1)\ldots\delta_{2^{\nu_s}}(m_s),\tag{2}$$

где

$$\delta_a(m)=\begin{cases}1, & \text{при } m\equiv 0\pmod a,\\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0\pmod a)\end{cases}$$

— символ Коробова. Если $m=\prod_p p^{\nu_p(m)}$ — каноническое разложение на простые множители, то $\delta_{2^\nu}(m)=1$ только при $\nu\leqslant\nu_2(m)$. Отсюда видно, что все значения тригонометрических сумм сеток Смоляка целые числа.

В работе [7] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Справедливо равенство* $S_q(\vec{0})=1$.

В этой же работе был поставлен вопрос: каковы истинные значения тригонометрических сумм $S_q(m_1,\ldots,m_s)$ сетки Смоляка при размерности $s\geqslant 3$?

А также, связанный с ним вопрос: является ли нормальным линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка при размерности $s\geqslant 3$?

Цель данной статья — найти эти значения и дать отрицательный ответ на второй вопрос.

2. Тригонометрические суммы сетки Смоляка

Из равенства (2) непосредственно следует, что тригонометрическая сумма сетки Смоляка $S_q(\vec{m})$ равна 0, если хоть одно значение m_j — нечетное число, поэтому далее будем предполагать, что все координаты целого вектора $\vec{m}$ — четные числа. Пусть далее $m_\nu=2^{n_\nu}l_\nu$, $n_\nu\geqslant 1$, $(l_\nu,2)=1$ $(\nu=1,\ldots,s)$ и $N(t;n_1,\ldots,n_s)$ — количество решений в натуральных числах системы

$$\begin{cases}\nu_1+\ldots+\nu_s=t\\ 1\leqslant\nu_j\leqslant n_j\quad(j=1,\ldots,s).\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $N(t,t-s+1,\ldots,t-s+1)=C_{t-1}^{s-1}$ и $N(t;n_1,\ldots,n_s)=0$ при $n_1+\ldots+n_s<t$.

Отсюда сразу следует, что

$$\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\delta_{2^{\nu_1}}(2^{n_1})\ldots\delta_{2^{\nu_s}}(2^{n_s})=N(q-k;n_1,\ldots,n_s),$$

$$S_q(2^{n_1}l_1,\ldots,2^{n_s}l_s)=S_q(2^{n_1},\ldots,2^{n_s})=\sum_{k=0}^{k(q,s)}(-1)^kC_{s-1}^kN(q-k;n_1,\ldots,n_s).$$

Простейший случай получаем при $q=s$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$S_s(2^{n_1},\ldots,2^{n_s})=1. \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, $k(s,s)=\min(0,s-1)=0$ и

$$S_s(2^{n_1},\ldots,2^{n_s})=N(s;n_1,\ldots,n_s)=1.$$

□

Так как от перестановки аргументов в сумме $S_q(2^{n_1},\ldots,2^{n_s})$ её значение не меняется, то будем предполагать, что $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_s$ и обозначать такое значение через $S_q^*(n_1,\ldots,n_s)$. Аналогично, будем писать $N^*(t;n_1,\ldots,n_s)$, предполагая, что $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_s$.

Лемма 3. *Если* $n_1\geqslant q-s+2$ *и* $n_2+\ldots+n_s<q-k(q,s)$, *то*

$$N^*(t;n_1,\ldots,n_s)=n_2\cdot\ldots\cdot n_s\quad (q-k(q,s)\leqslant t\leqslant q),$$

$$S_q^*(n_1,\ldots,n_s)=\begin{cases}0 & \textit{при } q\geqslant 2s-1,\\ n_2\cdot\ldots\cdot n_s\sum\limits_{k=0}^{q-s+1}(-1)^kC_{s-1}^k & \textit{при } s+1\leqslant q\leqslant 2s-2.\end{cases}$$

Доказательство. Действительно, справедливы неравенства

$$s-2\leqslant \nu_2+\ldots+\nu_s\leqslant n_2+\ldots+n_s<q-k(q,s).$$

Поэтому для любого набора натуральных $1\leqslant\nu_j\leqslant n_j$ $(j=2,\ldots,s)$ имеем для $\nu_1==t-(\nu_2+\ldots+\nu_s)$ неравенства

$$0\leqslant t-(q-k(q,s))<\nu_1\leqslant t-s+2.$$

Отсюда следует, что

$$N^*(t;n_1,\ldots,n_s)=n_2\cdot\ldots\cdot n_s\quad (q-k(q,s)\leqslant t\leqslant q).$$

Следовательно, вынося общий множитель, получим

$$S_q^*(n_1,\ldots,n_s)=n_2\cdot\ldots\cdot n_s\sum_{k=0}^{k(q,s)}(-1)^kC_{s-1}^k.$$

Так как при $q\geqslant 2s-1$ имеем $k(q,s)=\min(q-s+1,s-1)=s-1$, то

$$\sum_{k=0}^{k(q,s)}(-1)^kC_{s-1}^k=\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kC_{s-1}^k=(1-1)^{s-1}=0,\quad S_q^*(n_1,\ldots,n_s)=0.$$

□

3. Оператор взвешенных сеточных средних

Рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка заданный равенством

$$g(\overrightarrow{x})=A_qf(\overrightarrow{x})=\sum_{k=0}^{k(q,s)}\frac{(-1)^kC_{s-1}^k}{2^{q-k}}\sum_{\overrightarrow{\nu}\in C_s(q-k)}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+x_1,\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}+x_s\right). \tag{4}$$

Обозначим через $A_qC(\overrightarrow{m})$ действие линейного оператора A_q на коэффициенты Фурье функции $f(\overrightarrow{x})$. В работе [7] следующая лемма:

Лемма 4. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{5}$$

справедливо равенство

$$A_q C(\vec{m}) = S_q(\vec{m}) C(\vec{m}) \tag{6}$$

где $S_q(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки Смоляка.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\left\| A_q f(\vec{x}) \right\|_{E_s^\alpha} \leqslant \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |S_q(\vec{m})| \left\| f(\vec{x}) \right\|_{E_s^\alpha}. \tag{7}$$

Определение 1. *Линейный оператор A_q взвешенных сеточных средних по сетке Смоляка называется нормальным, если он не увеличивает норму любой функции из класса E_s^α.*

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех тригонометрических сумм сетки Смоляка: $\left|S_q(\vec{m})\right| \leqslant 1$ $(\vec{m} \in \mathbb{Z}^s)$. Как показано в работе [2], тригонометрические суммы двумерной сетки Смоляка принимают только три значения: 1, 0, -1. Поэтому оператор взвешенных сеточных средних для двумерных сеток Смоляка — нормальный.

Из доказанной леммы следует, что собственными функциями линейного оператора A_q взвешенных сеточных средних для сеток Смоляка является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$ $(\vec{m} \in \mathbb{Z}^s)$ за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие тригонометрические сумм сеток Смоляка $S_q(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы A_q взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу. Из леммы 3 вытекает, что при $s \geqslant 3$ найдутся тригонометрические суммы сеток Смоляка, для которых их абсолютное значение больше 1. Следовательно, при $s \geqslant 3$ оператор взвешенных сеточных по сетке Смоляка не является нормальным.

4. Заключение

В настоящей работе были даны ответы на вопросы, поставленные в работе [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу, 2002. С. 18–20.

2. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

3. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.

4. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.

5. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.

6. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.

7. Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачёв, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка II// Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, с. 100–121.

8. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, “On grids of Smolyak S. A.”, Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

2. Dobrovol'skii, N. N. 2007, “Deviation of two-dimensional Smolyak grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

3. Dobrovol'skii, N. N. 2007, “A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak”, Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii “Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki” [Proceedings of the international scientific conference “Modern problems of mathematics, mechanics, computer science”], Tula, Russia, pp. 34–36.

4. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2. P. 1. P. 6–18.

5. Dobrovol'skii, N. N., 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

6. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak I", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.

7. N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2021, "About three-dimensional nets of Smolyak II Chebyshevskii sbornik, vol. 22, no. 3, pp. 100–121.

8. Smolyak, S. A., 1963, “Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

Получено 11.06.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 519.2 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-255-261

О плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины для оценки функционирования сложных систем: трехмерный случай[1]

Р. А. Жуков, Н. О. Козлова

Жуков Роман Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ (г. Тула).
e-mail: pluszh@mail.ru
Козлова Надежда Олеговна — кандидат технических наук, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ (г. Тула).
e-mail: 95kno@mail.ru

Аннотация

Построена плотность распределения вероятностей агрегированной случайной величины, используемая для оценки параметров агрегированной производственной функции, определяемой квадратичной сверткой производственных функций, характеризующих частные результаты функционирования элементов сложной системы. Получены соотношения в квадратурах для трехмерного случая.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей, производственная функция, агрегирование, модель, сложная система.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Р. А. Жуков, Н. О. Козлова. О плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины для оценки функционирования сложных систем: трехмерный случай // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 255–261.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-20061, https://rscf.ru/project/22-28-20061/ и Тульской области

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 519.2 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-255-261

On the probability distribution densities of an aggregated random variable for evaluating the functioning of complex systems: a three-dimensional case[2]

R. A. Zhukov, N. O. Kozlova

Zhukov Roman Aleksandrovich — candidate of physics and mathematics sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: pluszh@mail.ru **Kozlova Nadezhda Olegovna** — candidate of technical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: 95kno@mail.ru

Abstract

The probability distribution density of an aggregated random variable is constructed, which is used to estimate the parameters of an aggregated production function determined by a quadratic convolution of production functions characterizing the particular results of the functioning of elements of a complex system. The relations in quadratures for the three-dimensional case are obtained.

Keywords: probability distribution density, production function, aggregation, model, complex system.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
R. A. Zhukov, N. O. Kozlova, 2022, “On the probability distribution densities of an aggregated random variable for evaluating the functioning of complex systems: a three-dimensional case”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 255–261.

1. Введение

При поиске параметров производственных функций (ПФ), применяемых при моделировании функционирования элементов сложных систем [1, 2], используют ряд методов, одним из которых является метод максимального правдоподобия (ММП, ML, MLE – maximum likelihood estimation) [3]. При использовании MLE необходимо знать плотность распределения вероятностей случайной величины и случайных величин, в случае, если рассматривается сложная система, которая оценивается по нескольким результативным признакам [4, 5], агрегированным в один интегральный (обобщенный) признак [6]. Когда агрегирование осуществляется простой суммой частных показателей, то построение плотности распределения суммы случайных величин, имеющих нормальный закон распределения, хорошо известно. Однако, в прикладных исследованиях при специальном агрегировании результативных признаков с учетом их взаимного влияния вопрос построения соответствующей им плотности распределения вероятностей агрегированной случайной величины остается открытым. Для двумерного случая получено аналитическое выражение соответствующей плотности распределения вероятностей [6]. В статье рассматривается случай трех переменных.

[2]The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation № 22-28-20061, https://rscf.ru/project/22-28-20061/ and Tula region

2. MLE и плотность распределения вероятностей агрегированной случайной величины

MLE подразумевает максимизацию функции правдоподобия вида:

$$lnL(y^*|C^*_{i,j}, x^*_{i,j}, \sigma_{y^*}) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} f(y^*|C^*_{i,j}, x^*_{i,j}, \sigma_{y^*}) \rightarrow max. \tag{1}$$

Максимум (1) ищется по набору $C^*_{i,j}$ (параметры стандартизованной i-той ПФ) и σ_{y^*} (стандартное отклонение y^*_i), y^*_i – стандартизованное значение фактического результата функционирования i-того элемента сложной системы y_i, которое определяется по формуле:

$$y_i = f_i(C_{i,j}, x_{i,j}) + \epsilon_i, \tag{2}$$

где i — индекс случайной величины ($i = i..m \in N$), m – число результативных признаков, $C_{i,j}$ — параметры функций $f_i(\cdot) = \hat{y}_i$ (ожидаемое значение, норматив), $x_{i,j}$ – факторные признаки, ϵ_i — стохастические случайные составляющие (предполагается $N(0; \sigma^2_{\epsilon_i})$, дисперсия $\sigma^2_{\epsilon_i}$ неизвестна [6].

Построим плотность распределения случайной величины ϵ, являющейся комбинацией случайных величин ϵ_i из (2), используемых при моделировании функционирования сложных систем с построением агрегированных производственных функций (АПФ), характеризующих подсистемы или систему в целом посредством квадратичной свертки ПФ результатов функционирования элементов системы. Для стандартизованной (центрированной и нормированной) агрегированной случайной величины ϵ^* плотность вероятности будет определяться как:

$$f_p(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\Delta}} \frac{d}{dy^*} \int \cdots \int_D exp(-\frac{1}{2\Delta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_{i,j}\epsilon^*_i\epsilon^*_j)dD, \tag{3}$$

где Δ, $A_{i,j}$ — соответственно определитель и алгебраические дополнения корреляционной матрицы $\|r_{i,j}\|$, элементами которой являются парные коэффициенты корреляции;

$$\epsilon^*_i = \frac{(y^*_i - \hat{y}^*_i)^2}{2\sigma^2_{y^*_i}}; \tag{4}$$

D зависит от комбинации ϵ^*_i и соответственно y^*, являющейся комбинацией y^*_i; $\sigma^*_{y^*_i}$ — дисперсия y^*_i. При этом агрегированные фактические и ожидаемые значения стандартизованного результативного признака подсистемы или системы в целом определяются по формулам:

$$y^*_k(t) = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} r_{i_1,i_2} y^*_{i_1,k}(t) y^*_{i_2,k}(t)}, \tag{5}$$

$$\hat{y}^*_k(t) = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I}\sum_{i_2=1}^{I} \hat{r}_{i_1,i_2} \hat{y}^*_{i_1,k}(t) \hat{y}^*_{i_2,k}(t)}, \tag{6}$$

где r_{i_1,i_2}, $\hat{r}_{i_1,i_2}$ — соответствующие значения парного коэффициента корреляции Пирсона между i_1-тыми $y^*_{i_1}$, $\hat{y}^*_{i_1}$ и i_2-тыми $y^*_{i_2}$, $\hat{y}^*_{i_2}$ переменными ($i_1, i_2 = 1..I$) для k-той подсистемы в период t. Выражение (6), записанное для переменной $\hat{y}^*$, принимающей значения $\hat{y}^*_k(t)$, представляет собой стандартизованную АПФ.

В трехмерном случае требуемую плотность вероятности $f_p(y^*)$ можно найти, используя соотношение:

$$f_p(y^*) = \frac{d}{dy^*}(F(y^*)) = Pr\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} r_{i,j}y_i^*y_j^* \leqslant (y^*)^2\} =$$
$$= \frac{d}{dy^*}(\iiint_{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} r_{i,j}y_i^*y_j^* \leqslant (y^*)^2} f_p(y_1^*, y_2^*, y_3^*)dy_1^*dy_2^*dy_3^*). \quad (7)$$

Здесь $F(y^*)$ – функция распределения случайной величины y^*. Для приведения квадратичной формы $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} r_{i,j}y_i^*y_j^*$ к каноническому виду можно найти собственные числа и собственные векторы матрицы $\|r_{i,j}\|$ или воспользоваться методом Лагранжа.

В первом случае достаточно составить характеристическое уравнение и получить его корни непосредственным вычислением с помощью, например, формулы Кордано. В соответствии с известной теоремой о вещественности собственных значений вещественной симметричной матрицы можно утверждать, что собственные числа матрицы $R = \|r_{i,j}\|$ также будут вещественными. В качестве дополнения к теореме достаточно показать, что в формуле Кордано выражение для определителя кубического уравнения $Q \leqslant 0$, то есть:

$$Q = r_{12}^2 r_{13}^2 r_{23}^2 - \frac{1}{27}(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 < 0). \quad (8)$$

Для этого найдем экстремумы соответствующей функции и покажем, что максимальное значение не превосходит 0. Определим стационарные точки и воспользуемся критерием Сильвестра.

Найдем первые частные производные и приравняем их к 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial r_{12}} = r_{12}(9r_{13}^2 r_{23}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2)^2) \\ \frac{\partial Q}{\partial r_{13}} = r_{13}(9r_{12}^2 r_{23}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2)^2) \\ \frac{\partial Q}{\partial r_{23}} = r_{23}(9r_{12}^2 r_{13}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2)^2). \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) следует, что соотношения выполняются, если

$$(\pm r_{12}) = (\pm r_{13}) = (\pm r_{23}) = r. \quad (10)$$

Следовательно стационарные точки r_{0i} имеют координаты $(\pm r_{12}; \pm r_{13}; \pm r_{23})$.

Найдем вторые производные и составим матрицу Гессе с учетом (10):

$$H(Q) = \begin{pmatrix} -12r^4 & \pm 6r^4 & \pm 6r^4 \\ \pm 6r^4 & -12r^4 & \pm 6r^4 \\ \pm 6r^4 & \pm 6r^4 & -12r^4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В соответствии с критерием Сильвестра форма является отрицательно определенной, если ее главные миноры M_i имеют чередующиеся знаки, начиная с отрицательного, и в этом случае найденная точка является максимумом.

В данном случае $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 = 0$ $\forall r \in [-1; 1]$. Следовательно, квадратичная форма $H(r) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 Q}{\partial r_i \partial r_j} r_i r_j$ $(r_1 = r_{12}, r_2 = r_{13}, r_3 = r_{23})$ неположительна. Можно доказать, что в точке, определенной соотношением (10), Q будет иметь максимум. Достаточно рассмотреть ее значение в окрестности точки r_{0i}. Составим разность

$$\Delta Q = Q(r_{12}, r_{13}, r_{23}) - Q(r_{12} + h_1, r_{13} + h_2, r_{23} + h_3), \quad (12)$$

где $h_1, h_2, h_3 > 0$, $h_1, h_2, h_3 < h$ и $h_1 << r_{12}, h_2 << r_{13}, h_3 << r_{23}$. С учетом (10) первым ненулевым коэффициентом в (12) будет являться коэффициент при r^4, то есть:

$$\Delta Q = \frac{18}{27}((h_1 - h_2)^2 + (h_1 - h_3)^2 + (h_2 - h_3)^2)r^4 + O(h^3)r^3, \tag{13}$$

где $O(h^3)$ – бесконечно малая третьего порядка малости.

Ограничиваясь этим членом, можно заключить, что $\Delta Q > 0, \forall h_1, h_2, h_3 < h$. Следовательно, точка r_{0i} является максимумом. На рис. 1 изображены значения Q при различных значениях r_{12}, r_{13}, r_{23}. Формулы Кордано для вычисления собственных чисел неудобны в силу

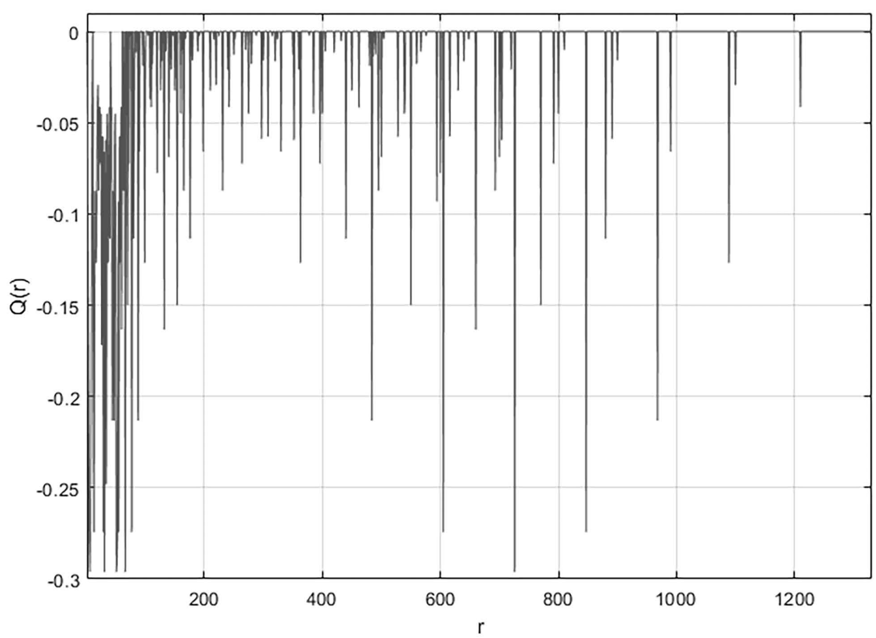


Рис. 1: Значение определителя Q для некоторых значений r_{12}, r_{13}, r_{23} (r_{12}, r_{13}, r_{23} последовательно изменяются в интервале [-1;1] с шагом 0,2. Число точек 1331)

их громоздкости и дальнейшего использовании при преобразовании плотности распределения $f_p(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ в (7).

Целесообразно воспользоваться методом Лагранжа для приведения области интегрирования к каноническому виду. Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} y_1^* &= u_1^* - \frac{r_{12}}{\sqrt{K_{33}\Delta}} u_2^* - (\frac{r_{12}K_{23}}{\sqrt{K_33}} + r_{13}\sqrt{K_{33}})u_3^*, \\ y_2^* &= \frac{r_{12}}{\sqrt{K_{33}\Delta}}(u_2^* + K_{23}\sqrt{\Delta}u_3^*), \\ y_3^* &= \sqrt{K_{33}}u_3^*. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь Δ определяется по формуле:

$$\Delta = 1 + 2r_{12}r_{13}r_{23} - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2. \tag{15}$$

Тогда область интегрирования в (7) преобразуется к виду:

$$(u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2 \leqslant (y^*)^2, \tag{16}$$

а якобиан в подынтегральном выражении будет равен:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{r_{12}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} & \frac{r_{12}r_{23}-r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2\Delta}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-r_{12}^2}} & \frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2\Delta}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-r_{12}^2}}{\sqrt{\Delta}} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Переходя к сферической системе координат и взяв производную по радиусу r, получим выражение для плотности вероятности $f_p(y^*)$:

$$\begin{gathered} f_p(y^*) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\Delta}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (y^*)^2 sin\theta exp[-\frac{1}{2}(y^*)^2 \cdot \\ \cdot (c_{11}cos^2\phi sin^2\theta + c_{22}sin^2\phi sin^2\theta) + c_{22}cos^2\theta + \\ +c_{12}sin2\phi sin^2\theta + c_{13}cos\phi sin2\theta + c_{23}sin\phi sin2\theta] d\theta d\phi, \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} c_{11} = K_{11} \\ c_{22} = \frac{1}{K_{33}\Delta}(K_{11}r_{12}^2 + K_{22} - 2K_{12}r_{12}), \\ c_{33} = \frac{1}{K_{33}}(r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33})(K_{11}r_{12}K_{23} + K_{11}r_{13}K_{33} - \\ -2K_{12}K_{23} - 2K_{13}K_{33}) + K_{33}^2 + 2K_{23}^2 + \frac{K_{22}K_{23}^2}{K_{33}}, \\ c_{12} = \frac{1}{\sqrt{K_{33}\Delta}}(-K_{11}r_{12} + K_{12}) \\ c_{13} = \frac{1}{\sqrt{K_{33}}}(-K_{11}r_{12}K_{23} - K_{11}r_{13}K_{33} + K_{12}K_{23} + K_{13}K_{33}), \\ c_{23} = \frac{1}{K_{33}\sqrt{\Delta}}(K_{11}r_{12}(r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33}) + K_{22}K_{23} - \\ -K_{12}(2r_{12}K_{23} + r_{13}K_{33}) - r_{12}K_{13}K_{33} + K_{23}K_{33}), \end{gathered} \tag{19}$$

$K_{i,j}^{-1} = A_{ij}/\Delta$– элементы обратной матрицы ковариаций.

3. Заключение

Полученные соотношения могут быть использованы при поиске параметров агрегированной производственной функции и уточнения параметров трех производственных функций, входящих в состав АПФ.

Предложенный алгоритм можно расширить на m-мерный случай, когда в рассматриваемую подсистему или систему в целом влючены более трех элементов. Однако, уже в трехмерном случае плотность рапределения вероятностей удается построить только численно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теории, методы, применение. — Москва: Финансы и статистика, 1986. 239 с.

2. Жуков Р. А. Оценка эффективности функционирования социально-экономических систем на основе производственных функций: новый подход // Вестник Волгоградского государственного университета. Экономика. 2019. Том 21. № 3. С. 71-82. DOI: 10.15688/ek.jvolsu.2019.3.7.

3. Ллойд Э., Лендерман У. Справочник по прикладной статистике. Том 1. — Москва: Финансы и статистика, 1989. 510 с.

4. Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Руденко В. А. Некоторые вопросы спецификации трехфакторных моделей производственного потенциала компании, учитывающих интеллектуальный капитал // Прикладная эконометрика. 2012. Том 27. № 3. С. 36–69.

5. Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Руденко В. А. Исследование зависимости случайных составляющих стохастической производственной функции при оценке технической эффективности // Прикладная эконометрика. 2014. Том 34. № 2. С. 3-18.

6. Жуков Р. А. Метод оценки результатов функционирования иерархических социально-экономических систем на основе агрегированной производственной функции // Экономика и математические методы. 2021. Том 57. № 3. С. 17-31. DOI: 10.31857/S042473880016428-9.

REFERENCES

1. Kleiner G. B., 1986, *“Production functions: theories, methods, application“*, Moscow, Finance and Statistics, 239 p.

2. Zhukov R. A., 2019, “Efficiency Evaluation of Functioning of Socio-Economic Systems Based on Production Functions: New Approach“, *Journal of Volgograd State University. Economics* , vol. 21 no. 3, pp. 71-82. DOI: 10.15688/ek.jvolsu.2019.3.7.

3. Lloyd E., Lederman W., 1989, *“Handbook of Applied Statistics. Volume 1.“*, Moscow, Finance and Statistics, 510 p.

4. Ayvazyan S. A., Afanasyev M. Yu., Rudenko V. A., 2012, “Some Issues on the Specification of Three-Factor Models of the Company’s Production Potential Taking into Account Intellectual Capital“, *Applied Econometrics*, vol. 27, no. 3, pp. 36-69.

5. Ayvazyan S. A., Afanasyev M. Yu., Rudenko V. A., 2014, “Analysis of Dependence between the Random Components of a Stochastic Production Function for the Purpose of Technical Efficiency Estimation“, *Applied Econometrics*, vol. 34, no. 2, pp. 3-18.

6. Zhukov R. A., 2021, “Method for assessing the results of hierarchical socio-economic systems’ functioning based on the aggregated production function“, *Economics and Mathematical Methods*, vol.57, no. 3, pp.17-31. DOI: 10.31857/S042473880016428-9.

Получено 11.03.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-262-268

О значениях гипергеометрической функции с параметром из алгебраического поля четвертой степени

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Исследование арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с рациональными параметрами часто проводится с помощью метода Зигеля. Этим методом были получены наиболее общие результаты, относящиеся к данной проблеме. Основной недостаток метода Зигеля (в его классической форме) состоит в невозможности применения этого метода к гипергеометрическим функциям с иррациональными параметрами. В этой ситуации исследование обычно основывается на эффективной конструкции функциональной приближающей формы (в методе Зигеля существование такой формы доказывается с помощью принципа Дирихле). Заметим еще, что построение приближающей формы является лишь первым шагом на пути к получению арифметического результата.

Используя эффективный метод, мы сталкиваемся по крайней мере с двумя проблемами, которые в значительной степени сужают область его применимости. Во-первых, неизвестна более или менее общая конструкция эффективной приближающей формы для произведений гипергеометрических функций. По этой причине приходится рассматривать лишь вопросы линейной независимости над тем или иным алгебраическим полем. Выбор этого поля является второй проблемой. Подавляющее большинство опубликованных результатов, относящихся к рассматриваемому кругу задач, имеет дело с мнимым квадратичным полем (или с полем рациональных чисел). Лишь в отдельных случаях удается провести соответствующее исследование для какого-либо другого алгебраического поля.

В данной работе рассматривается случай поля четвертой степени. С помощью специального технического приема устанавливается линейная независимость над таким полем значений некоторой гипергеометрической функции с иррациональным параметром из этого поля.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрической функции с параметром из алгебраического поля четвертой степени // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 262–268.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 23. No. 3.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-262-268

On the values of hypergeometric function with parameter from algebraic field of the fourth degree

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

In order to investigate arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric functions with rational parameters one often makes use of Siegel's method. By means of this method have been achieved the most general results concerning this problem. The main deficiency of Siegel's method consists in the impossibility of its application in case of hypergeometric functions with irrational parameters. In this situation the investigation is usually based on the effective construction of the functional approximating form (in Siegel's method the existence of such a form is proved by means of pigeon-hole principle). The construction and investigation of an approximating form is the first step to the achievement of arithmetic result.

Applying effective method we encounter at least two problems which make considerably narrow the area of its employment. First, the more or less general effective construction of the approximating form for the products of hypergeometric functions is unknown. While using Siegel's method one doesn't deal with such a problem. Hence the investigator is compelled to consider only questions of linear independence of the values of hypergeometric functions over some algebraic field. Choosing this field is the second problem. The great majority of published results concerning corresponding questions deals with imaginary quadratic field (or the field of rational numbers). Only in exceptional situations it is possible to investigate the case of some other algebraic field.

We consider here the case of a field of the fourth degree. By means of a special technique we establish linear independence over such a field of the values of some hypergeometric function with irrational parameter from that field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
P. L. Ivankov, 2022, "On the values of hypergeometric function with parameter from algebraic field of the fourth degree" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 262–268.

1. Введение

Арифметическая природа значений обобщенных гипергеометрических функций, т.е. функций вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \qquad (1)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, причем $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$, изучалась во многих работах; см., например, [1]–[8]. Если в правой части (1) положить $a(x) \equiv 1$, $b(x) = x(\lambda + x)$, то мы получим функцию

$$K(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}, \ \lambda \neq -1, -2. \ldots .$$

Значения этой функции и ее производной

$$K(\xi) \text{ и } K'(\xi) \tag{2}$$

при $\xi \neq 0$ рассматривались в ряде работ; наиболее общие результаты, относящиеся к арифметической природе таких значений, получены при рациональных λ, см. [3, гл. 6]. В частности, если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то при некоторых естественных ограничениях на λ и ξ доказана алгебраическая независимость чисел (2). При иррациональном λ известные методы, как правило, позволяют доказать лишь линейную независимость этих чисел над соответствующим полем, причем в этом случае участвующие в рассуждениях линейные приближающие формы обычно строят эффективно. Например, из результатов работы [4] следует линейная независимость чисел (2) над мнимым квадратичным полем, если λ и ξ берутся из этого же поля. Наибольшее внимание в этом направлении исследований уделяется количественным результатам. Применительно к рассматриваемому случаю это означает получение оценок снизу модуля линейной формы

$$h_1 K(\xi) + h_2 K'(\xi) \tag{3}$$

в зависимости от максимума модулей коэффициентов h_1 и h_2, причем эти коэффициенты должны быть целыми в соответствующем поле. По этому поводу см. работы [5]— [11]. В некоторых из перечисленных работ получены точные по высоте оценки, а также вычислены входящие в эти оценки постоянные. Эффективные конструкции линейных приближающих форм можно использовать также для изучения ситуации, в которой λ и ξ лежат не в мнимом квадратичном, а в каком-либо другом поле алгебраических чисел. Отметим в связи с этим работы [12] — [15]. В работе [13] рассмотрен случай мнимого кубического поля. В работах [14] и [15] изучается случай вещественного квадратичного поля. В данной работе мы рассматриваем поле алгебраических чисел специального вида четвертой степени. Оценки линейных форм вида (3) при этом не рассматривается, т.к. ожидаемые здесь результаты весьма далеки от окончательных.

2. Формулировка теоремы

Пусть

$$\chi_1(\zeta) = 1, \ \chi_2(\zeta) = \zeta, \ \chi_3(\zeta) = \zeta(\zeta + \lambda);$$

рассмотрим при $j = 1, 2$ и при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ функции

$$K_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\chi_j(\nu) z^{\nu}}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}.$$

Теорема 1. *При $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ числа*

$$K_j(1), \ j = 1, 2, \tag{4}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$.

В сформулированной теореме параметр λ функций $K_j(z)$ лежит в поле четвертой степени. Ранее аналогичные результаты были получены для иррационального λ из некоторых других полей алгебраических чисел (см. выше).

3. Доказательство теоремы

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js} z^s,$$

где

$$p_{js} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\prod_{x=0}^{2n}(\zeta - x)d\zeta}{\chi_{j+1}(\zeta - s)\prod_{x=0}^{s-1}(\zeta - x)(\zeta + \lambda - x)}\,; \tag{5}$$

в последнем выражении Γ есть положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции. Записав интеграл из правой части (5) в виде вычета относительно бесконечно удаленной точки, нетрудно убедиться, что p_{js} являются многочленами от λ с целыми рациональными коэффициентами. В правой части равенства (5) заменим в числителе под знаком интеграла $2n$ на $2n-1$; в левой части заменим p_{js} на p_{0js}. После этого определим при $j = 1, 2$ многочлены

$$P_{0j}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{0js} z^s$$

и линейную форму

$$\sum_{j=1}^{2} P_{0j}(z)K_j(z) = R_0(z). \tag{6}$$

В работе [12, лемма 1] доказано, что

$$\sum_{j=1}^{2} P_j(z)K_j(z) = R(z), \tag{7}$$

где

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu \prod_{x=0}^{2n}(\nu - x)}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}\,. \tag{8}$$

Мы воспользуемся также [12, лемма 2]. В этой лемме утверждается, что если $\lambda \notin \mathbb{Z}$, а ξ — ненулевое число, то при $n \to \infty$

$$P_j(\xi) = \Gamma(\lambda + 2n + 1)\left(\frac{(-1)^j K_{3-j}(\xi)}{\Gamma(\lambda + 1)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ j = 1, 2, \tag{9}$$

$$R(\xi) = \frac{\xi^{2n+1}\Gamma(\lambda + 1)}{(\lambda + 2n + 1)\Gamma(\lambda + 2n + 1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

Из (9) следует неравенство

$$|P_j(\xi)| \leqslant C_1 |\Gamma(\lambda + 2n + 1)|, \tag{11}$$

где положительная постоянная C_1 не зависит от n. Аналогичные соотношения выполняются и для многочленов $P_{0j}(z)$ и линейной формы $R_0(z)$; при этом следует заменить $2n$ на $2n-1$.

Положим $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ и рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} P_{01}(1) & P_{02}(1) \\ P_1(1) & P_2(1) \end{vmatrix}.$$

Элементы этого определителя являются целыми числами в поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$, что вытекает из замечания после равенства (5). При этом сам определитель D отличен от нуля; см. по этому поводу работу [8, леммы 5 и 9]. Пусть существуют два целых в поле $\mathbb{K}$ числа h_1 и h_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля и для которых

$$h_1 K_1(1) + h_2 K_2(1) = 0, \tag{12}$$

т.е. предположим, что числа (4) линейно зависимы над полем $\mathbb{K}$. Поскольку определитель D отличен от нуля, то одну из его строк можно заменить числами h_1 и h_2, и при этом получится отличный от нуля определитель. Пусть, для определенности,

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ P_1(1) & P_2(1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда

$$|\Delta^{(1)}\Delta^{(2)}\Delta^{(3)}\Delta^{(4)}| \geqslant 1, \tag{13}$$

где в левой части выписаны определители, получающиеся из Δ заменой числа λ, входящего в выражения для коэффициентов многочленов (5), соответственно на числа, сопряженные числу $\lambda = i\sqrt[4]{2}$ в поле $\mathbb{K}$, т.е. на числа

$$i\sqrt[4]{2},\ -i\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2}.$$

Учитывая (11), (13), а также равенство $|\Delta^{(1)}| = |\Delta^{(2)}|$, получаем отсюда такое неравенство

$$|\Delta| \geqslant \frac{C_2}{\sqrt{\Gamma(\sqrt[4]{2} + 2n + 1)\Gamma(-\sqrt[4]{2} + 2n + 1)}}, \tag{14}$$

где положительная константа C_2 не зависит от n.

Равенство (12) и оценка (10) при $\xi = 1$ позволяют оценить модуль определителя Δ также и сверху. Известно, что функция $K_\lambda(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка $zy'' + y + (\lambda - 1)y = 0$. Отсюда следует, что среди чисел (4) имеется отличное от нуля. Пусть, например, $K_1(1) \neq 0$. Тогда определитель Δ можно записать в виде

$$\Delta = \frac{1}{K_1(1)} \begin{vmatrix} 0 & h_2 \\ R(1) & P_2(1) \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из (10) получаем такую оценку

$$|\Delta| \leqslant \frac{C_3}{|(\lambda + 2n + 1)(\Gamma(\lambda + 2n + 1))|}$$

Если применить формулу Стирлинга, то мы увидим, что последняя оценка противоречит (14), откуда и следует справедливость теоремы.

4. Заключение

Применяемый в данной работе технический прием, может, быть использован и для решения других аналогичных задач. Можно, например, попробовать обобщить теорему из работы [12], где рассмотрен случай мнимого кубического поля. Формулировка теоремы была опубликована в [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929. № 1, S. 1-70.
2. Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton University Press. Princeton, 1949.
3. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.
4. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1, pp. 64–87.
5. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19–28.
6. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35-45.
7. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220–1235.
8. Галочкин А.И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Математический сборник. 1984. Т. 124, № 3. С. 416–430.
9. Коробов А.Н. Оценки некоторых линейных форм // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983, № 6. С. 36–41.
10. Попов А.Ю. Приближения некоторых степеней числа e // Диофантовы приближения, часть I. Изд-во МГУ, 1985. С. 77–85.
11. Иванков П.Л. О приближении значений некоторых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1994, № 4. С. 12–15.
12. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрической функции с параметром из квадратичного поля // Чебышевский сборник. 2019, т 20, вып. 2. С. 170–177.
13. Иванков П.Л. О совместных приближениях значений некоторых целых функций числами из кубического поля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. № 3. С. 53–56.
14. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.
15. Иванков П.Л. О приближении значений гипергеометрической функции с параметром из вещественного квадратичного поля // Математика и математическое моделирование. 2017, № 1. С. 25–33.
16. Иванков П.Л. О значениях некоторых функций с иррациональным параметром // В сборнике: Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XIX Международной конференции, посвященной 200-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Тула, 2021. С. 204.

REFERENCES

1. Siegel, C.L. 1929, “Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen” *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* № 1, pp. 1–70.

2. Siegel, C.L. 1949, “Transcendental numbers.” Princeton University Press.

3. Shidlovskii, A.B. 1987, *“Transtsendentnye chisla”* , [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian).

4. Osgood, Ch. F. 1966, “Some theorems on diophantine approximation” *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, № 1, pp. 64–87.

5. Galochkin, A.I. 1970, “Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions”, *Mat. Zametki*, v. 8, № 1, pp. 19–28. (Russian).

6. Galochkin, A.I. 1976, “Sharpening of the estimates of some linear forms”, *Mat. Zametki*, v. 20, № 1, pp. 35-45. (Russian).

7. Galochkin, A.I. 1976, “On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions”, *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, № 6, pp. 1220–1235.(Russian)

8. Galochkin, A.I., 1984, “Estimates, unimprovable with respect to height, for certain linear forms”, Mat. Sb., vol. 124(166), № 3, pp. 416–430. (Russian).

9. Korobov, A.N. 1983, “Estimates of some linear forms”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, № 6, pp. 36–41. (Russian).

10. Popov, A. Yu. 1985, “Approximations of some degrees of the number e”, *Diophantovy priblizhenija*, part 1. Moskov. Gos. Univ., Moscow (Russian).

11. Ivankov, P.L. 1994, “On approximation of the values of some functions”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, № 4, pp. 12–15. (Russian).

12. Ivankov, P.L. 2019, “On the values of hypergeometric function with parameter from quadratic field”, Chebyshevsky sbornik, vol. 20, № 2, p. 170–177 (Russian).

13. Ivankov, P.L. 1987, “On simultaneous approximations of the values of some entire functions by the numbers from a cubic field”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1, Mat. Meh.*, № 3, pp. 53-56. (Russian).

14. Ivankov, P.L. 1993, “On linear independence of values of entire hypergeometric functions with irrational parameters”, *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 34, № 5, pp. 839–847. (Russian)

15. Ivankov, P.L. 2017, “On approximation of the values of hypergeometric function with a parameter from real quadratic field”, *Mathematics and Mathematical Modelling*, № 1, pp. 25–33. (Russian).

16. Ivankov, P.L. 2021, “On the values of some functions with irrational parameter” //In: Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modelling: modern problems, applications and problems of history.
   Transactions of the XIX International conference devoted to the 200-th anniversary of P.L.Chebyshev. Tula, P. 204.

Получено 23.06.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 51 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-269-281

Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета и математика XX столетия (к 100-летию основания Института)

С. С. Демидов

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация

Созданный в ноябре 1922 года Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета может быть поставлен в ряд крупнейших математических институтов первой трети XX столетия. По самому своему положению – столичного математического института, обладавшего мощным научным потенциалом – он стал головным математическим институтом Советского Союза, определявшим общественную жизнь отечественного математического сообщества. С переездом в 1934 году из Ленинграда в Москву Президиума АН СССР и Математического института им. В.А. Стеклова общая ситуация претерпела принципиальные изменения – головным научным Институтом в СССР стала Стекловка, включившая в свой состав ведущих учёных университетского НИИ математики и механики, работа которого свелась, в основном, к организации деятельности аспирантуры. При этом, конечно, нам не следует забывать, что, передав Стекловке своих ведущих учёных, Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета фактически стал одним из его соучредителей. И когда мы сегодня говорим об истории Института Стеклова, мы должны рассматривать историю Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета как её неотъемлемую часть. Так что речь идёт не о «смерти» Института, а о новой его жизни, о синтезе идей двух основных российских школ, давшим жизнь Советской математической школе – одной из ведущих математических школ второй половины XX века.

Ключевые слова: Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета, Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Математический сборник I Всероссийский съезд математиков, Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

С. С. Демидов. Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета и математика XX столетия (к 100-летию основания Института) // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 269–281.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 51 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-269-281

Research Institute for Mathematics and Mechanics of Moscow University (to the 100^{th} anniversary of the foundation of the Institute)

S. S. Demidov

Demidov Sergey Sergeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: serd42@mail.ru

Abstract

Established in November 1922, the Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow University can be placed among the largest mathematical institutes in the first third of the 20th century. By its very position – a metropolitan mathematical institute with a powerful scientific potential – it became the leading mathematical institute of the Soviet Union, which determined the social life of the Soviet mathematical community. With the relocation in 1934 from Leningrad to Moscow of the Presidium of the Academy of Sciences of the USSR and the V. A. Steklov Mathematical Institute, the general situation has undergone fundamental changes – «Steklovka» became the head scientific institute in the USSR, which included leading scientists from the university research institute of mathematics and mechanics, whose work was reduced mainly to organizing postgraduate studies. At the same time, of course, we should not forget that, having transferred its leading scientists to «Steklovka», the Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow University actually became one of its co-founders. And when we talk today about the history of the Steklov Institute, we must consider the history of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow University as an integral part of it. So we are not talking about the "death" of the Institute, but about its new life, about the synthesis of the ideas of the two main Russian schools that gave life to the Soviet Mathematical School, one of the leading mathematical schools of the second half of the 20^{th} century.

Keywords: Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow University, Steklov Mathematical Institute of Academy of Science of the USSR, Matematicheskii Sbornik, I All-Russian Congress of Mathematicians, D. F. Egorov, N. N. Luzin

Bibliography: 22 titles.

For citation:
S. S. Demidov, 2022, "Research Institute for Mathematics and Mechanics of Moscow University (to the 100^{th} anniversary of the foundation of the Institute)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 269–281.

1. Введение

К концу XX столетия институты, занимающиеся исследованиями в области математических наук, стали явлением распространённым. Это и небольшие коллективы из нескольких учёных, созданные в рамках рассеянных по миру университетов, и мощные научные образования вроде Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, объединяющие коллективы в несколько десятков, а то и сотен человек, разрабатывающих основные направления современной математики и её приложения. В конце же XIX века таких институтов, насколько мне известно, просто не было. Их появление – результат событий Первой мировой войны, приведших к тектоническим переменам в социально-экономической жизни развитых стран, прежде всего в Европе. Одной из сфер жизни, обнаружившей необходимость создания новых форм организации, стала наука. Важность её результатов, прежде всего достижений научно-технического характера, для всего комплекса вопросов, так или иначе связанных с военно-промышленным комплексом, проявилась со всей очевидностью. Кроме уже названного Института Стеклова или Стекловки, как именуют сегодня в научных кругах это учреждение, ведущее свою историю с 1921 года, широкую известность получили такие учреждения как Институт Анри Пуанкаре в Париже (основан в 1928 году) или Математический институт Гёттингенского университета (основан в 1929 году). Их список можно продолжить. Так что появление в 1922 году подобного Института в Московском университете не выглядит чем-то экстраординарным и может рассматриваться как одно из первых проявлений новой тенденции в организации научных исследований.

2. Начало деятельности Института

Проект учреждения Московского института математических наук появился ещё в 1921 году [1, 2]. Слухи об этом просочились в московские математические круги в начале июня и активно обсуждались во время поездки московских математиков в Петроград на празднование 100-летия со дня рождения П.Л. Чебышева [3 – 5]. Как вспоминал впоследствии Л.А. Люстерник [3, с. 25], «и в вагоне, и в студенческом общежитии (где поселили молодёжь из московского «десанта»; профессоров разместили в Доме Учёных – С. Д.) дискутировалась новость – предстоящее открытие в Москве при МГУ Института математики и механики». Надо думать, что эта новость обсуждалась и в гостинице Дома Учёных, где остановился со своей женой и В.А. Костицын – один из создателей и руководителей нового института (см. [4, 5]). Однако, процесс создания института затянулся. Ему предшествовало учреждение Ассоциации научно-исследовательских институтов при физико-математическом факультете 1 МГУ, которое было утверждено постановлением Научно-технической секции Государственного учёного совета (ГУС) Наркомата просвещения РСФСР от 20 октября 1922 года [2, с. 326][1]. Таких институтов создавалось три: кроме института математических наук, это астрофизический и геофизический[2]. Будучи членом ГУСа, Костицын выступил одним из организаторов Ассоциации и всех трёх названных институтов: он стал членом президиума Ассоциации, учёным секретарём Института математики и механики, членом президиума астрофизического института и заведующим отделом теоретической астрофизики, членом президиума геофизического института и (с 1927 года) его директором и заведующим его теоретическим отделом [2, 9]. Будучи (по крайней мере до 1927 года) человеком влиятельным в органах советской научной администрации (в январе 1926 он был утверждён заведующим научным отделом Главнауки – по существу руководителем всех научных организаций РСФСР), Костицын много сделал для развития Института. Достаточно напомнить о его роли в возобновлении издания *Математического сборника*, ставшего одним из ведущих математических журналов Европы, публиковавшего статьи не только на русском, но и на немецком, французском, итальянском и даже на английском, который только начинал входить в моду в европейских научных кругах.

Первое заседание совета Московского института математических наук – так он именовался поначалу в протоколах заседаний совета Института (Научно-исследовательским институтом

[1]Настоящая статья существенным образом опирается на материалы, хранящиеся в Архиве МГУ им. М.В. Ломоносова, обнаруженные и опубликованные В.С. Савицкайте в [2, 6 – 8].

[2]Всего в 1922 году в Ассоциацию вошло 12 институтов: кроме названных трёх это были институты химии, минералогии и петрографии, геологии, зоологии, антропологии, почвоведения, ботаники, географии

математики и механики его стали называть в протоколах, начиная с заседания 5 мая 1923 года) – состоялось 18 ноября 1922 года. Присутствовали – Л.К. Лахтин, Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров, И.И. Жегалкин, В.Ф. Каган, С.А. Чаплыгин, В.А. Костицын, Н.Н. Лузин, И.И. Привалов, О.Ю. Шмидт [2, с. 326]. В Совет Института входили действительные члены Института, числом 19 – так было определено ГУСом[3] – а также научные сотрудники (с февраля 1923), а впоследствии и аспиранты.

На этом заседании был заслушан доклад В.А. Костицына о структуре и задачах создаваемого Института – о научной деятельности его сотрудников, о подготовке научных кадров и о популяризации науки в широких кругах. Д.Ф. Егорову была поручена разработка плана научной работы, а также вопроса о студентах, «оставленных при университете для подготовки к профессорскому званию»[4], то есть, если воспользоваться термином вошедшим в оборот несколько позднее, вопроса об аспирантуре. Было принято решение назначить директором Института Б.К. Млодзеевского.

Следующее заседание совета состоялось только 2 декабря. На нём был избран президиум совета, в который кроме директора Б.К. Млодзеевского вошли Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын, на которого были возложены обязанности учёного секретаря Института. Было принято предложение Госиздата о подготовке Полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского. Для начала этой работы была организована комиссия в составе Б.К. Млодзеевского, Д.Ф. Егорова и В.Ф. Кагана. Так было положено начало предприятию, первым результатом которого стал выход в 1946 году первого тома пятитомного полного собрания сочинений великого математика.

До конца 1922 года прошло ещё три заседания совета (9, 16 и 23 декабря), на которых был рассмотрен вопрос о штатных научных сотрудниках – было определено их число (12 сотрудников 1-го, 16 2-го разряда, а также 2 технических сотрудника) и были избраны первые сотрудники 1-го разряда – Л.С. Лейбензон, С.С. Бюшгенс, С.П. Фиников, В.В. Степанов, В.С. Фёдоров, А.Я. Хинчин, П.С. Александров и П.С. Урысон.

На закрытых заседаниях совета предполагались обсуждения деятельности Института, отчёты научных сотрудников и аспирантов, на открытых должны были читаться лекции, рассчитанные на широкую аудиторию. Так в июне 1923 состоялись лекции Н.Н. Лузина «Аксиоматика анализа и теория множеств», В.Ф Кагана «Птолемей или Коперник», И.И. Жегалкина «Бесконечность в математике» и А.Я. Хинчина «О простых числах».

Так начиналась деятельность Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета, который после смерти в январе 1923 года Млодзеевского возглавил Д.Ф. Егоров.

3. Институт во главе отечественного математического сообщества

С переездом в 1918 году советского правительства в Москву город стал столицей, которая должна была взять на себя и роль культурного центра страны, сосредоточия её научной, в частности математической, деятельности. Таким образом созданный в 1922 году Научно-исследовательский институт математики и механики фактически превращался в головную научную организацию СССР в области чистой и прикладной математики (тем более, что положение застрявших в Петрограде Российской Академии наук и руководимого В.А. Стекловым академического Физико-математического института оставалось в то время неопределённым (см. [10])). Именно в этой перспективе следует рассматривать усилия по возобновлению изда-

[3] На момент первого заседания их было утверждено 18 – кто попал в этот первый список, кроме присутствовавших 10 человек и А.И. Некрасова, установить пока не удалось.

[4] Это были математики Н.К. Бари, С.А. Бернштейн, А.А. Ветринский, В.Н. Депутатов, С.С. Ковнер, М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник, Ю.А. Рожанская, В.Р. Эйгес и механик А.П. Минаков.

ния *Математического сборника*, 31 том которого увидел свет после восьмилетнего перерыва в 1924 году. Новый *Математический сборник*, взявший на себя роль общесоюзного математического журнала, стал журналом общеевропейским. Достаточно сказать, что в 1924 – 1935 гг. в нём наряду с ведущими отечественными учёными публиковались такие известные зарубежные математики как Ж. Адамар, Э. Картан, М. Фреше, Э. Нётер, В. Серпинский, Р. Мизес, С. Лефшец, Л. Тонелли, Х. Хопф [11].

Наконец Институт вместе с Московским математическим обществом взял на себя инициативу организации и проведения Первого Всероссийского съезда математиков. Прошедший 27 апреля – 4 мая 1927 года в стенах Московского университета, этот съезд стал по существу всесоюзным, собрав 378 участников из 33 городов СССР, и положил начало регулярной общественной жизни отечественного (теперь уже советского) математического сообщества, нарушенной событиями Первой мировой войны, революций 1917 года и последовавшей за ними гражданской войны. На этом съезде был организован оргкомитет Первого всесоюзного съезда математиков, собравшегося 24 – 29 июня 1930 года в Харькове [12].

4. Основные направления математических исследований Института

Однако основой деятельности института оставались научные исследования, интенсивность и широта диапазона которых на протяжении 20-ых годов неуклонно возрастали. В 1925 году Институт был поделён на три секции – секцию математики, основными направлениями деятельности которой стали проблемы анализа, геометрии и теории чисел, секцию математического естествознания – проблемы механики и математической физики, и секцию математической статистики.

Успешное расширение тематики исследований и значительное повышение их интенсивности не должно вызывать удивления: речь идёт о коллективе, объединившем таких выдающихся учёных как Д.Ф. Егоров, В.Ф. Каган, С.А. Чаплыгин, Л.С. Лейбензон, В.А. Костицын, Н.Н. Лузин, В.В. Степанов, И.И. Привалов, О.Ю. Шмидт, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, П.С. Александров, Л.А. Люстерник, М.А. Лаврентьев, П.С. Новиков, И.Г. Петровский, А.Н. Колмогоров, Л.Г. Шнирельман, А.О. Гельфонд, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин.

На 20-е годы приходится процесс стремительного расширения тематики исследований школы Н.Н. Лузина [13]. Если сам Н.Н. Лузин и его ближайшие на тот период ученики – Л.В. Келдыш, П.С. Новиков – сосредоточились на проблемах теории аналитических множеств, то тематика изысканий представителей школы предыдущих поколений стала чрезвычайно многообразной. Замечательно, что объединяющим началом долгое время оставалась метрическая теория множеств и функций, оказавшаяся превосходной «площадкой» для начала исследований в самых различных направлениях [13].

В орбиту интересов лузинских учеников органично вошла теория функций комплексного переменного – начало здесь было положено ещё самим Лузиным, исследования которого продолжили И.И. Привалов, В.В. Голубев, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин, в середине 20-ых годов к ним присоединился М.А. Лаврентьев.

С работ П.С. Урысона и П.С. Александрова 1921 – 24 гг. ведёт своё начало советская топологическая школа. В 1925 под руководством Александрова начал работать топологический семинар, из которого вышли А.Н. Тихонов и Л.С. Понтрягин.

В 1923 году А.Я. Хинчин получил первые важные результаты по теории вероятностей. В конце 20-ых – в начале 30-ых годов этими вопросами стал заниматься А.Н. Колмогоров, в 1933 году предложивший знаменитую аксиоматику теории вероятностей. Так начиналась знаменитая Московская школа теории вероятностей.

В 1922 – 23 гг. А.Я. Хинчин приступил к исследованиям по теории чисел, а в 1925/26 учебном году он организовал семинар по теории чисел, в котором участвовали А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман.

В конце 20-ых – начале 30-ых годов Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, эмигрировавший из Германии А.И. Плеснер и А.Н. Колмогоров заложили основы советской школы функционального анализа, из которой уже вскоре вышел И.М. Гельфанд. В области теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, трудились Д.Ф. Егоров и В.В. Степанов. В конце 20-ых к ним присоединились И.Г. Петровский и В.В. Немыцкий. Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын продолжали исследования в области теории интегральных уравнений.

И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров и впоследствии П.С. Новиков занимались проблемами оснований математики и математической логики.

Если к этому добавить такие традиционные для Москвы области исследований как дифференциальную геометрию (Д.Ф. Егоров и его ученики), обогащённую трудами приехавшего из Одессы В.Ф. Кагана, прикладную математику (С.А. Чаплыгин, Л.С. Лейбензон и др.) и завезённую в 20-ых годах из Киева О.Ю. Шмидтом новую алгебру, а также учесть значимость полученных москвичами результатов во всех перечисленных направлениях, то можно сказать, что Москва к началу 30-ых годов превратилась в один из ведущих математических центров мира, а Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета – в один из наиболее значимых мировых математических институтов [13].

5. Международные связи Института

Сотрудники Института поддерживали научные связи с ведущими математическими центрами Европы, прежде всего с немецкими – с Гёттингеном и Берлином – и французскими – с Парижем и др. Они активно печатались в европейских математических журналах, издавали книги за рубежом. Так монография Н.Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» увидела свет по-французски в издательстве Gauthier-Villars в 1930, а книга А.Я. Хинчина «Асимптотические законы теории вероятностей» и уже упомянутые «Основные понятия теории вероятностей» А.Н. Колмогорова в 1933 году в Берлине по -немецки у Springer'а. Написанная П.С. Александровым совместно с профессором Цюрихского политехнического института Х. Хопфом «Топология» вышла по-немецки в 1935 году всё в том же Берлине у того же Шпрингера.

Представление о живых связях сотрудников Института с ведущими математиками Европы можно составить по данным об их заграничных командировках за 1930 – 31 гг., сохранившимся в архиве Московского университета [8]. Так П.С. Александров с лета 1930 по зиму 1931 читал лекции и вёл семинар по топологии в Гёттингене [14], после чего переехал в Принстон, где также читал лекции и руководил семинаром. По дороге в Москву он задержался в Цюрихе, где выступил с серией докладов на семинаре в Политехническом институте. А.Н. Колмогоров с июня 1930 по март 1931 провёл в Гёттингене, где встречался с Д. Гильбертом, Г. Вейлем, Р. Курантом и др., в Мюнхене, где беседовал с К. Каратеодори, в Берлине, где обсуждал проблемы оснований теории вероятностей с Р. Мизесом, а также во Франции, где работал с М. Фреше, П. Леви и А. Лебегом.

По окончании в 1930 году аспирантуры в Институте в четырёхмесячную командировку в Берлин и Гёттинген был направлен А.О. Гельфонд – автор уже нашумевшего в Европе результата о трансцендентности чисел вида $\alpha^{i\sqrt{q}}$, где α – алгебраическое число, не равное 0 или 1, а $q \geqslant 1$ – целое число. Этот результат был опубликован в 1929 году в Comptes rendus Парижской академии наук, а его автор находился тогда на мощном творческом подъёме – он был на пути полного решения седьмой проблемы Гильберта, которое будет им получено в 1934 году. В Гёттингене он обсуждал эту проблематику с Э. Ландау и Ф. Энгелем. Он же познакомил Ландау с полученными недавно в СССР результатами Л.Г. Шнирельмана и подарил ему знаменитую его работу по аддитивной теории чисел, только что опубликованную в *Известиях Донского политехнического института* – издании для Гёттингена, прямо скажем, экзотическом. Ландау распорядился перевести её на немецкий и она уже в 1933 году появилась в *Mathematische Annalen* [16]. И когда в июне – ноябре 1931 года Шнирельман сам посетил Гёттинген, Франкфурт-на-Майне и Берлин, о его результате знали немецкие коллеги. В Германии он выступал с лекциями и докладами, участвовал в работе семинаров [16]. Берлин и Гёттинген посетил в конце 1930 года Н.А. Глаголев. Аспирант Института Г.К. Хворостин в июне – декабре знакомился с исследованиями по прикладной математике в Берлине (у Р. Мизеса) и по теории турбулентности в лаборатории Гидродинамического института в Гёттингене (у Л. Прандтля).

Немецкие и французские математики также нередко посещали Москву, выступая с лекциями и докладами. Так зиму 1928/29 годов в Москве находилась Э. Нётер, которая вела здесь семинары и читала лекции по алгебре. «Её деятельность, - писал П.С. Александров [14, с. 244], – оказала очень большое влияние на развитие Московской математической школы. В частности, в большой мере под влиянием нётеровских семинаров и лекций в Москве начались общеалгебраические исследования А.Г. Куроша ...».

Обсуждая вопрос о зарубежных командировках сотрудников Института, мы наряду с сотрудниками упомянули двух его аспирантов – А.О. Гельфонда и Г.К. Хворостина. Аспирантура получила в Институте значительное развитие. О динамике её роста красноречиво свидетельствуют следующие данные [6, с. 340]: если в 1923/24 учебном году в Институте было 23 аспиранта, в 1924/25 – 38, в 1925/26 – 63, в 1926/27 – 59, в 1927/28 – 66, 1928/29 – 65, то в 1932 году их число возросло до 200. Правда, аспирантура в те годы носила несколько иной, чем привыкли видеть мы, характер. Это были годы, когда научные степени были отменены (они были восстановлены постановлением Совнаркома 13 января 1934 года) и целью аспирантуры было не написание и защита диссертации, а подготовка к научной или к педагогической деятельности.

6. Институт и вопросы идеологии

Говоря о деятельности Института в 20-е – в начале 30-ых годов, следует, конечно, иметь в виду непростую общую обстановку, складывавшуюся в эти годы в связи с общей идеологической ситуацией в стране[5]. И хотя основные задачи, над которыми трудился Институт, относились к математике, её приложениям и механике, то есть, казалось бы, не носили особенной идеологической нагрузки, идеологический фактор вносил серьёзные коррективы в его деятельность, становясь зачастую определяющим. Это касалось и выбора проблематики проводимых Институтом исследований, и политики в области подготовки научных кадров, и идеологических позиций, занимаемых его сотрудниками. Наиболее громкими и во многом определившими общие настроения, царившие в этот период в Институте, стали события, связанные с его директором Д.Ф. Егоровым – развернувшаяся в середине 20-ых его травля, завершившаяся его удалением весной 1930 г. с поста директора Института, арестом в сентябре того же года по сфабрикованному на Лубянке делу Всесоюзной контрреволюционной организации «Истинно-православная церковь» и кончиной в 1931 году в ссылке в Казани [18]. Директором Института был назначен «красный профессор» О.Ю. Шмидт, ознаменовавший начало своей деятельности призывом к сотрудникам Института перестроить работу на марксистской основе и обвинением во вредительстве тех, кто попытается этому препятствовать[6].

[5]См. раздел «На московском математическом фронте» на с. 18 – 25 книги [17].

[6]Шмидт оставался директором Института до 1931 года, когда его сменил М.Я. Выгодский. В 1932 – 34 гг. во главе Института встал А.Я. Хинчин. С переездом в 1934 году из Ленинграда в Москву Математического

7. Институт и организация международных конференций

Несмотря на идеологический прессинг, математикам удалось сохранить творческий дух, определивший успешное развитие математических исследований в Институте. Подтверждением этому могут служить две международные конференции, организованные Институтом в 1934 и 1935 годах. Как свидетельствовал П.С. Александров [19, с. 255], когда в 1934 году директором Научно-исследовательского института математики и механики стал А.Н. Колмогоров, одним из первых его организационных начинаний «в области международных математических отношений был план создания целой серии международных конференций по различным областям математики. Осуществились лишь первые два звена этой широко задуманной цепи конференций: конференция по тензорной дифференциальной геометрии и её приложениям (1934), председателем оргкомитета который был В.Ф. Каган, и прошедшая под моим руководством топологическая конференция (1935) – первая международная конференция по топологии, когда-либо имевшая место. Обе конференции прошли с успехом и явились крупными событиями международной математической жизни».

Первая конференция прошла в Москве в мае 1934 года [12]. Она собрала большое количество участников из различных городов СССР (из Москвы, Ленинграда, Минска, Харькова, Казани, Воронежа, Одессы и др., в их числе В.Ф. Каган, Д.М. Синцов, С.П. Фиников, Я.С. Дубнов, Ц.Л. Бурстин, Н.Г. Чеботарёв, А.М. Лопшиц, Ю.Б. Румер, А.Н. Колмогоров, А.П. Норден, П.К. Рашевский, В.В. Вагнер) и из-за рубежа (12 математиков из Франции, Германии, Италии, Нидерландов, Австрии, Польши и Чехословакии, в их числе Э. Картан, В. Бляшке, Э. Келлер, Э. Бортолотти, П. Бургатти и Я. Схоутен).

Вторая конференция – Первая международная топологическая конференция – к идее которой оказался причастен американский математик С. Лефшец, а организатором, как мы уже сказали, выступил П.С. Александров [12], прошла в Москве 4 – 10 сентября 1935 года [12, 19 – 22], собрала крупнейших топологов со всего мира и стала знаковым событием в истории топологии. В ней участвовала большая советская делегация, среди членов которой мы видим Н.М. Крылова, В.В. Степанова, П.С. Александрова, Л.А. Люстерника, В.В. Немыцкого, С.Э. Кон-Фоссена, А.Н. Колмогорова, А.А. Маркова, Л.Г. Шнирельмана, А.Н. Тихонова, Л.С. Понтрягина, Н.Н. Боголюбова. Среди зарубежных участников выделим американских математиков С. Лефшеца, Дж. Александера, Г. Биркгофа, Дж. фон Неймана и Х. Уитни (США), группу поляков – В. Серпинского, С. Мазуркевича, К. Куратовского, Ю. Шаудера, К. Борсука, голландца Г. Фрейденталя и представлявшего тогда Голландию вчерашнего поляка и завтрашнего американца В. Гуревича, чеха Э. Чеха, швейцарца Ж. де Рама и совсем молодого тогда А. Вейля.

Эта конференция, память о которой до сих пор жива в мировом топологическом сообществе, с особой наглядностью демонстрирует творческую силу и необычайную энергию коллектива тогдашнего Научно-исследовательского института математики и механики, который смог не только выступить организатором одного из наиболее ярких математических предприятий своего времени, но и проявить себя в нём в качестве одного из законодателей математической моды.

На её открытии выступил С. Лефшец. Сохранилась стенограмма его речи, опубликованная в [20]. Я позволю себе процитировать из неё фрагмент. Её язык, как язык практически любой из стенограмм, несёт на себе и изъяны прямой речи, и погрешности вносимые стенографисткой, у которой нет времени для правки услышанного (да и не всегда она понимает то, что ей приходится на скорости фиксировать). Я не вношу в него никакой редакционной правки, тем более что документ удивительным образом доносит до нас воодушевление автора

института им. В.А. Стеклова университетский Институт математики и механики стал терять своё значение (об этом см. ниже) и его главной функцией стало руководство аспирантурой – его директором в 1935 стал А.Н. Колмогоров, а в 1939 г. его сменил В.В. Степанов.

атмосферой состоявшейся встречи с коллегами и надеждами услышать от них о последних результатах исследований в области топологии, разработкой которой все собравшиеся были тогда поглощены.

Восторгаясь похорошевшей Москвой и строящимся метро (не будем забывать, что в нём жил москвич – в этом городе он родился), Лефшец сказал: «С этими успехами надо поздравить Советский Союз, и не меньше нужно поздравить его за то, что он делает для науки со всех сторон, за выдающиеся усилия, которые мы видим во всех областях науки и особенно в математике. Об этом я могу говорить как человек, знающий особенно это дело. У вас в Москве такой центр, что мы с трудом думаем о конкуренции. С тех пор, когда сюда прибыла Академия наук[7], здесь образовался центр, на который обращено внимание всех стран.

Мне кажется, что вся деятельность Московского университета во всех отраслях знания может служить примером; это уже не только Московский университет, но мировой центр; мы все за ним следим.

Мне особенно нравится, что что здесь особенно шаг задают молодые. Этим я любуюсь каждый раз, когда приезжаю сюда. Молодые люди преобладают. Так как сам я уже не молод (накануне ему исполнился 51 год – С.Д.), мне это иногда грустно; но мне всё же кажется, что это настоящий метод, так можно действительно идти вперёд. Мы сами молодеем при соприкосновении с таким духом. Я это тем более чувствую, что в нашей далёкой Америке пока преобладает тот же самый дух. Мы ещё не потеряли значения молодёжи и хотим им по возможности всегда дать шаг вперёд.

Меня очень интересовало то, что сказал П.С. Александров о топологии и её отношении к теоретическим и прикладным наукам. Сегодня мы наблюдаем в математике тяготение к двум направлениям: одно – алгебраическое и другое – чисто топологическое. У нас теперь, можно сказать, два полюса: алгебра и топология. Так как вся математика к этому стремится, то выходит, что как для теоретической математики, так и для прикладной, а также для физики, химии и других наук – эти две науки оказываются самыми важными, они просто в центре всего математического мышления. Это говорит не тополог, а просто математик; это можно доказать, беря всю математику теорему за теоремой. В физике в отношении топологии до этого ещё не дошли, но насчёт алгебры они это очень хорошо заметили. Всё значение этих двух наук, особенно топологии, нигде так не понято, как в наших двух молодых странах: в СССР и в США. У нас создались самые яркие школы топологии. Они просто в центре дела. Нигде это лучше не поняли и не работают так успешно, как здесь, в Москве.

Хочу снова упомянуть имя покойного Урысона и П.С. Александрова, лидера теперешней школы, большой группы молодых людей и звезды этой школы: молодой человек, надеюсь, мой друг и приятель, Л.С. Понтрягин. Где имеются такие люди, действительно, приятно быть, как топологу».

8. Заключение

В этих словах Лефшеца в скрытой форме мы находим и оценку деятельности Научно-исследовательского института математики и механики, который в то время доживал свои последние дни. Переезд Стекловки из Ленинграда в Москву и та особенная роль, которую приобретали академические институты в структуре строящегося здания советской науки, подписали смертный приговор московскому институту. Его ведущие сотрудники очень быстро вошли в состав Стекловки, сохранив при этом свои позиции и в университете – теперь

[7]Лефшец имеет в виду переезд в 1934 году из Ленинграда в Москву Президиума Академии наук СССР и ряда ведущих академических институтов. Среди них был и Математический институт им. В.А. Стеклова. Этот переезд сыграл выдающуюся роль в развитии математических исследований в стране. Одним из его результатов стало рождение в 30-ые годы Советской математической школы.

уже на новом, учреждённом в 1933 году механико-математическом факультете. А Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета сохранял за собой функции управления аспирантурой. При этом, конечно, нам не следует забывать и то, что передав Стекловке своих ведущих исследователей, Научно-исследовательский институт математики и механики Московского университета фактически стал одним из его соучредителей. И когда мы сегодня говорим об истории Института Стеклова, мы должны рассматривать историю Научно-исследовательского института математики и механики Московского университета как её неотъемлемую часть. Так что речь идёт скорее не о «смерти» Института, а о новой его жизни, о синтезе идей двух основных российских школ, давшим жизнь Советской математической школе – одной из ведущих математических школ второй половины XX века.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров Д.Ф. Работа Научно-исследовательского института математики и механики за пятилетие – с 1923 по 1928 г. // Известия Ассоциации научно-исследовательских институтов при физико-математическом факультете 1 МГУ. 1928. Т. 2. Вып. 3 – 4. С. 301 – 303.

2. Савицкайте В.С. О создании Научно-исследовательского института математики и механики при физико-математическом факультете 1 МГУ // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2005. М.: Дельта-Т. 2005. С. 326 – 328.

3. Люстерник Л.А. Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества // Успехи математических наук. 1965. Т. 20. Вып. 3. С. 21–30.

4. Костицын В.А. «Моё утраченное счастье ...»: Воспоминания, дневники. Т. 1. М.: Новое литературное обозрение. 2017. 783 с.

5. Демидов С.С. Ещё раз о десанте. московских математиков в Петроград в 1921 году // Чебышевский сборник, 2021. Т. 22, вып. 5. С. 263–269.

6. Савицкайте В.С. Научно-исследовательский институт математики и механики при 1 МГУ в конце 1920-ых гг. // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2007. М.: ИДЭЛ. 2008. С. 339 – 341.

7. Савицкайте В.С. О первой международной топологической конференции // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2004. М.: Диполь-Т. 2004. С. 385 – 388.

8. Савицкайте В.С. О заграничных командировках научных сотрудников Научно-исследовательского института математики и механики МГУ в 1930 – 1931 гг. // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2006. М.: Анонс Медиа. 2006. С. 313 – 316.

9. Генис В.Л. Профессор-невозвращенец, или записки советского патриота / Костицын В.А. «Моё утраченное счастье . . . »: Воспоминания, дневники. Т. 1. М.: Новое литературное обозрение. 2017. С. 5 – 26.

10. Демидов С.С. Владимир Стеклов: математик на рубеже двух эпох // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 289. С. 17 – 30.

11. Демидов С.С. «Математический сборник» в 1866 – 1935 гг. // Историко-математические исследования. 2-я серия. 1996. Вып. 1, № 2. С. 127 – 145.

12. Лапко А.Ф., Люстерник Л.А. Математические съезды и конференции в СССР // Успехи математических наук. 1957.Т. 12. Вып. 6, С. 47–130.

13. Демидов С.С., Токарева Т.А. Формирование Советской математической школы // Историко-математические исследования. 2-я серия. 2005. Вып.10, С. 142 – 159.

14. Александров П.С. Воспоминания о Гёттингене // Историко-математические исследования. 1977. Вып. 22. С. 242 – 245.

15. Гельфонд А.О. Некоторые впечатления о научной поездке в Германию в 1930 г. // Историко-математические исследования. 1977. Вып. 22. С. 246 – 251.

16. Юшкевич А.П. Л.Г. Шнирельман в Гёттингене // Историко-математические исследования. 1985. Вып. 28. С. 287 – 290.

17. Дело академика Николая Николаевича Лузина. М.: МЦНМО. 2019. 328 с.

18. Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Фёдорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. 2-я серия. 1999. Вып. 4, С. 123 – 156.

19. Александров П.С. Страницы автобиографии. Часть II // Успехи математических наук. 1980.Т. 35. Вып. 3, С. 241–278.

20. Савицкайте В.С. О первой международной топологической конференции // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2004. М.: Диполь-Т. 2004. С. 385 – 388.

21. Александров П.С. Первая международная топологическая конференция в Москве // Успехи математических наук. 1936. Вып. 1. 1936. С. 260–262.

22. Смирнова Г.С. Связи между польскими и московскими математиками в первой половине XX века // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 3. С. 494 – 505.

REFERENCES

1. Egorov D.F. The work of the Research Institute of Mathematics and Mechanics for the five years – from 1923 to 1928 // Proceedings of the Association of Research Institutes at the Faculty of Physics and Mathematics of the 1st Moscow State University. 1928. Vol. 2. Issue. 3 – 4. S. 301 – 303 (in Russian).

2. Savitskaite V.S. On the creation of the Research Institute of Mathematics and Mechanics at the Faculty of Physics and Mathematics of the 1st Moscow State University // S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual scientific conference, 2005. Moscow: Delta-T. 2005. S. 326 – 328 (in Russian).

3. Lyusternik L.A. Address at the jubilee session of the Moscow mathematical society // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1965. V. 20. Issue 3, pp. 21 – 30 (in Russian).

4. Kostitsyn V.A. “My Lost Happiness . . . ”: Memoirs, diaries. T. 1. Moscow: New literary review. 2017. 783 p. (in Russian).

5. Demidov S.S. Once again about the landing of Moscow mathematicians to Petrograd in 1921 // Chebyshevskii sbornik. 2021. V. 22, № 5. pp. 263–269 (in Russian).

6. Savitskaite V.S. Research Institute of Mathematics and Mechanics at the 1st Moscow State University in the late 1920s // S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual scientific conference, 2007. Moscow: IDEL. 2008. S. 339 – 341 (in Russian).

7. Savitskaite V.S. About the first international topological conference // S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual scientific conference, 2004. Moscow: Dipol-T. 2004. S. 385 – 388 (in Russian).

8. Savitskaite V.S. On foreign business trips of researchers of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of Moscow State University in 1930 – 1931 // S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual scientific conference, 2006. Moscow: Anons Media. 2006. S. 313 – 316 (in Russian).

9. Genis V.L. A professor-defector, or notes of a Soviet patriot / Kostitsyn V.A. “My Lost Happiness. . . ”: Memoirs, diaries. T. 1. Moscow: New literary review. 2017. P. 5 – 26 (in Russian).

10. Demidov S.S. Vladimir Steklov: A Mathematician at the Turn of the Era // Proceedings of the V.A. Steklov Mathematical Institute. 2015. V. 289. P. 17 – 30.

11. Demidov S.S. “Matematicheskii Sbornik” in 1866 – 1935 // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 2nd series. 1996. V. 1, № 2. S. 127 – 145.

12. Lapko A.F., Lyusternik L.A. Mathematical congresses and conferences in the USSR // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1957. V.12. Issue. 6, pp. 47–130 (in Russian).

13. Demidov S.S., Tokareva T.A. Formation of the Soviet mathematical school // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 2nd series. 2005. V. 10, pp. 142 – 159 (in Russian).

14. Aleksandrov P.S. Memories of Göttingen // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 1977. V. 22. S. 242 – 245 (in Russian).

15. Gelfond A.O. Some impressions of a scientific trip to Germany in 1930 // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 1977. V. Вып. 22. С. 246 – 251 (in Russian).

16. Yushkevich A.P. L.G. Schnirelman in Göttingen // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 1985. V. 28. P. 287 – 290 (in Russian).

17. The Case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. Moscow:MTsNMO. 2019. 328 p. (in Russian).

18. Demidov S.S. Professor of Moscow University Dmitry Fedorovich Egorov and imeslavie in Russia in the first third of the 20th century // Istoriko-matematicheskie issledovaniya. 2nd series. 1999. V. 4, pp. 123 – 156.

19. Aleksandrov P.S. Pages from an autobiography. II // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1980. V. 35. Issue. 3, pp. 241 – 278 (in Russian).

20. Savitskaite V.S. About the first international topological conference // S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology. Annual scientific conference, 2004. Moscow: Dipol-T. 2004. S. 385 – 388 (in Russian).

21. Aleksandrov P.S. First international topological conference in Moscow // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1936. Issue 1. pp. 260 – 262 (in Russian).

22. Smirnova G.S. Relations between Polish and Moscow mathematicians in the first half of the XX-th century // Chebyshevskii sbornik. 2019. V. 20, № 3. S. 494 – 505 (in Russian).

Получено 15.04.2022
Принято в печать 14.09.2022

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 23. Выпуск 3.

УДК 511.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-282-303

Из истории кафедры теории чисел: к 150-летию Московского педагогического государственного университета

Е. И. Деза, Н. М. Добровольский Т. К. Иконникова, Л. В. Котова, Е. С. Крупицын, И. Ю. Реброва, М. Е. Чанга, В. Г. Чирский

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Тостого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Иконникова Татьяна Константиновна — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: tk.ikonnikova@gmail.com

Котова Лидия Владимировна — кандидат педагогических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: kolv@inbox.ru

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Тостого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Чанга Марис Евгеньевич — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: maris_changa@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье дан краткий очерк истории кафедры теории чисел МПГУ от ее создания до настоящего времени. В связи со стапятидесятилетием МПГУ представлен короткий рассказ об основных вехах истории, ведущих специалистах, научной и учебно-методической деятльности одной из старейших кафедр Института математики и информатики (до 2018 года — математического факультета) Московского педагогического государственного университета (до 1990 года — Московского государственного педагогического института имени В.И. Ленина).

Ключевые слова: Московский педагогический государственный университет, кафедра теории чисел, аналитическая теория чисел, методика высшего педагогического образования.

Библиография: 45 названий.

Для цитирования:
Е. И. Деза, Н. М. Добровольский, Т. К. Иконникова, Л. В. Котова, Е. С. Крупицын, И. Ю. Реброва, М. Е. Чанга, В. Г. Чирский. Из истории кафедры теории чисел: к 150-летию Московского педагогического государственного университета // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 3, с. 282 – 303.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 3.

UDC 511.1 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-282-303

From the history of the department of number theory: to the 150-th anniversary of Moscow State Pedagogical University

E. I. Deza, N. M. Dobrovolskii, T. K. Ikonnikova, L. V. Kotova, E. S. Krupitsyn, I. Ju. Rebrova, M. E. Changa, V.G. Chirskii

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Dobrovolskii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tostoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Ikonnokova Tatyana Konstantinovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: tk.ikonnikova@gmail.com
Kotova Lidiya Vladomirovna — candidate of pedagogical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: kolv@inbox.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com
Rebrova Irina Yurievna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tostoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Changa Maris Evgenievich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: maris_changa@yahoo.com
Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article gives a brief outline of the history of the department of Number Theory of MSPU from its creation to the present. In connection with the 150-th anniversary of Moscow State Pedagogical University, a short overvew about the main milestones in history, leading specialists, scientific and educational activities of one of the oldest departments of the Institute of Mathematics and Informatics (until 2018 — the Faculty of Mathematics) of Moscow State Pedagogical University (until 1990 — Moscow State Pedagogical Institute named after V.I. Lenin) is presented.

Keywords: Moscow State Pedagogical University, Department of Number Theory, Analytic Number Theory, Methodology of Higher Pedagogical Education.

Bibliography: 45 titles.

For citation:
E. I. Deza , N. M. Dobrovolskii, T. K. Ikonnikova, L. V. Kotova, E. S. Krupitsyn, I. Ju. Rebrova, M. E. Changa, V. G. Chirskii 2022, "From the history of the department of number theory: to the 150-th anniversary of Moscow State Pedagogical University" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 3, pp. 282 – 303.

1. Введение

Кафедра теории чисел Института математики и информатики (ИМИ) Московского педагогического государственного университета является подразделением МПГУ, непосредственно включенным в решение ряда важнейших задач. Кафедра занимается:

- подготовкой в области арифметики, теории чисел, защиты информации учителей математики для основного общего и среднего общего образования, а также кадров высшей квалификации по направлениям деятельности, связанной с математикой (теория чисел, защита информации, дискретная математика) и методикой ее преподавания (арифметика, теория чисел, защита информации, дискретная математика);
- подготовкой в области арифметики, теории чисел, защиты информации учителей информатики для основного общего и среднего общего образования;
- подготовкой в области арифметики, теории чисел, защиты информации учителей экономики для общеобразовательных организаций;
- подготовкой в области защиты информации бакалавров прикладной информатики, нацеленных на работу в образовательных организациях в качестве системных администраторов, инженеров, заместителей директоров по информатизации;
- популяризацией математического образования и пр.

Деятельность кафедры теории чисел Института математики и информатики опирается на исторические традиции, сложившиеся на кафедре, на математическом факультете (ИМИ), в МПГУ, и ориентируется на современные векторы развития системы отечественного образования.

2. Основные этапы развития кафедры

Начало

Кафедра теории чисел МПГУ ведет свое начало от двух кафедр: кафедры алгебры и теории чисел Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина и кафедры высшей алгебры и элементарной математики Московского городского педагогического института им. В.П. Потемкина.

Кафедру алгебры и теории чисел МПГУ им. В.И. Ленина возглавлял профессор Александр Адольфович Бухштаб. На кафедре работали преподаватели Дицман А.П., Рубцов Н.Ф., Смирнова Г.Н., Шестопал Г.А. и др.

Кафедрой высшей алгебры и элементарной математики МПГУ им. В.П. Потемкина руководил доцент (а затем профессор) Василий Ильич Нечаев, сменивший на этом посту по рекомендации академика И.М. Виноградова в 1949 году своего учителя профессора Гребенчу М.К. На кафедре работали преподаватели Алексахин С.П., Гаркави Е.Г., Лемлейн В.Г., Полякова Т.Н. и др.

Становление

В 1960 году произошло объединение упомянутых вузов, объединенная кафедра стала называться кафедрой алгебры и теории чисел, возглавил ее профессор Бухштаб А.А., крупный ученый, труды которого в области развития и совершенствования методов решета и их применения к решению некоторых классических задач теории чисел хорошо известны не только отечественным, но и зарубежным специалистам.

В 1962 году на кафедру пришел профессор Леонид Яковлевич Куликов, и вскоре под его руководством выделилась кафедра алгебры, а оставшаяся часть кафедры алгебры и теории чисел стала называться кафедрой теории чисел и вычислительной математики.

Рис. 1: Бухштаб А.А.

В 1970 году по инициативе профессора Бухштаба А.А., обратившегося с письмом в главную газету страны «Правду», математическому факультету была выделена ЭВМ «Минск» и создана кафедра вычислительной математики и программирования. Руководить новой кафедрой был приглашён профессор Владимир Вениаминович Щенников. Костяк этой новой кафедры составили преподаватели кафедры теории чисел и вычислительной математики Ашкенузи В.Г., Кронрод Л.А., Смирнова Г.Н., Шахов Ю.Н., Шестопал Г.А. и др.

Таким образом, из кафедры алгебры и теории чисел выделилась сначала кафедра алгебры, а затем кафедра вычислительной математики и программирования. С этого времени кафедра, руководимая профессором Бухштабом А.А., называется кафедрой теории чисел.

1976 – 1999 годы

С 1978 года Александр Адольфович Бухштаб перешел на должность профессора-консультанта, а заведующим кафедрой теории чисел стал профессор Василий Ильич Нечаев, который известен своими результатами не только в фундаментальной (аналитическая теория чисел), но и в прикладной (основы защиты информации) математике. За работы в области прикладной математики он был награжден орденом «Знак почета». Одновременно Василий Ильич являлся научным сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова.

В эти годы ведущими преподавателями кафедры были Алевтина Васильевна Жмулева, Лидия Леонидовна Степанова, Елена Борисовна Гладкова, Владимир Леонидович Топунов. В конце восьмидесятых годов на кафедре стал работать Дмитрий Алексеевич Митькин, ее состав пополнили выпускницы матфака Лариса Владимировна Киселева и Елена Ивановна Пантелеева (Деза), ученицы Василия Ильича Нечаева.

В девяностые годы в преподавательский состав кафедры влились Юлия Николаевна Баулина, Татьяна Константиновна Иконникова и Андрей Леонидович Юрченко, ученики Лидии Леонидовны Степановой, Котова Лидия Владимировна, ученица Дмитрия Алексеевича Митькина.

В эти годы кафедра активно сотрудничала с известными учеными математиками, специалистами в области теории чисел. Среди них профессора МГУ Андрей Борисович Шидловский и Николай Михайлович Коробов, научные сотрудники математического института им. В.А. Стеклова доктора наук Сергей Михайлович Воронин и Александр Иванович Павлов и другие.

Рис. 2: Нечаев В.И.

Андрей Борисович Шидловский начал работать в МГПИ еще обучаясь в аспирантуре МГУ, и продолжил работать по совместительству уже будучи преподавателем, а потом и заведующим кафедрой теории чисел МГУ. Доктор физико-математических наук, профессор, всемирно известный математик, Андрей Борисович читал на матфаке МГПИ лекции по теории чисел и вел спецкурсы для слушателей ФПК.

В течение нескольких лет на кафедре работал профессор МГУ доктор физико-математических наук Николай Михайлович Коробов. Он читал лекции по теории чисел и вел спецкурс «Метод тригонометрических сумм» для слушателей ФПК. Николай Михайлович руководил и аспирантами кафедры, его ученицей была Елена Борисовна Гладкова.

Сергей Михайлович Воронин, доктор физико-математических наук, сотрудник института им. В.А. Стеклова, читал оригинальные курсы по теории чисел и истории математики, руководил аспирантами. Особенно интересными были лекции по истории математики, в которых он поражал слушателей своими энциклопедическими знаниями и широкой эрудицией в самых разных областях естественных и гуманитарных наук.

Александр Иванович Павлов осуществлял руководство аспирантами, под его руководством занимался исследованиями в области аналитической теории чисел Андрей Леонидович Юрченко, защитила кандидатскую диссртацию Татьяна Константиновна Иконникова. Несколько лет Александр Иванович являлся председателем ГЭК по защитам выпускных квалификационных работ бакалавров.

Рис. 3: Сотрудники кафедры

1999 – 2006 годы

С 1999 года и до последних дней жизни кафедрой теории чисел руководил профессор, доктор физико-математических наук Дмитрий Алексеевич Митькин, талантливый математик, специалист в области аддитивной теории чисел, внесший большой вклад в полное решение проблемы Варинга в ее классической постановке.

Рис. 4: Митькин Д.А.

В эти годы ассистентом кафедры стала работать Светлана Викторовна Орлова, аспирантка Дмитрия Алексеевича. Следуя традициям, Дмитрий Алексеевич пригласил на кафедру читать курс истории математики известного специалиста в этой области Надежду Вячеславовну Александрову.

Несколько лет на кафедре вел занятия со студентами по дискретной математике выпускник матфака, ученик Дмитрия Алексеевича Митькина и Елены Ивановны Деза Дмитрий Лазаревич Модель.

2007 – 2020 годы

С 2007 по 2020 год кафедру теории чисел возглавлял профессор, доктор физико-математических наук Владимир Григорьевич Чирский, профессор мехмата МГУ, специалист по теории трансцендентных чисел в p-адических полях.

Рис. 5: Чирский В.Г.

Владимир Григорьевич уделял огромное внимание подготовке смены кадрового состава кафедры из выпускников факультета. Его аспиранты Оксана Юрьевна Баженова и Евгений Станиславович Крупицын, выпускники факультета, подготовили кандидатские диссертации.

Следуя традициям кафедры, Владимир Григорьевич привлекал к работе на кафедре ведущих специалистов из других образовательных и научных организаций. На кафедре несколько лет преподавал Алексей Юрьевич Нестеренко, специалист в области теории защиты информации. Он работал в основном с магистрантами.

По приглашению Владимира Григорьевича на кафедре работает выходец из математического института им. В.А. Стеклова Марис Евгеньевич Чанга, он читает специальные курсы для студентов и магистрантов матфака.

Настоящее время

С 2021 года обязанности заведующего кафедрой исполняет Елена Ивановна Деза, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, выпускница математического факультета МПГИ имени В.И. Ленина 1983 года.

На кафедре работают пять преподавателей.

Иконникова Татьяна Константиновна, выпускница математического факультета МПГУ, ученица Лидии Леонидовны Степановой, подготовившая и защитившая кандидатскую диссертацию «Проблема делителей Ингама на множестве чисел без k-х степеней» по аналитической теории чисел под руководством Павлова А.И.

Котова Лидия Владимировна, выпускница математического факультета МПГУ, ученица ученица Лидии Леонидовны Степановой и Дмитрия Алексеевича Митькина, защитившая в 2018 году кандидатскую диссертацию «Профессиональная направленность математической подготовки учителя информатики при обучении методам и средствам защиты информации» по дидактике высшей школы под руководством Деза Е.И.

Крупицын Евгений Станиславович, ученик Владимира Григорьевича Чирского, защитивший в 2020 году под его руководством кандидатскую диссертацию «Арифметические свойства рядов некоторых классов» по аналитической теории чисел в Совете МГУ.

Чанга Марис Евгеньевич, канидат физико-математических наук, в прошлом сотрудник института им. В.А. Стеклова, в 2021 году получивший в МПГУ звание доцента.

Рис. 6: Деза Е.И.

Профессорско-преподавательский состав кафедры теории чисел сформирован из высококвалифицированных преподавателей, среди которых один доктор наук, четыре кандидата наук, два человека имеют ученое звание доцента. Все преподаватели имеют ученые степени. Четверо из пяти сотрудников являются выпускниками математического факультета МПГУ и связаны с кафедрой теории чисел еще со студенческих лет, пройдя долгий путь профессионального становления от студента, выполняющего свою выпускную квалификационную работу на кафедре теории чисел, до аспиранта, ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора. Все преподаватели – люди неслучайные, творческие, бережно сохраняющие и приумножающие традиции кафедры.

3. Научная деятельность кафедры

На кафедре сложилась и успешно работает научная школа по аналитической теории чисел, деятельность которой соответствует приоритетным и актуальным направлениям развития отечественного образования в области подготовки кадров высшей квалификации. Научная деятельность кафедры опирается на традиции, заложенные А.А. Бухштабом (развитие и совершенствование методов решета и их применение к решению классических задач теории чисел) и В.И. Нечаевым (оценки в проблеме Варинга для специальных целозначных многочленов, правильные по порядку оценки полных рациональных тригонометрических сумм, теория линейных рекуррентных последовательностей над конечными полями), впоследствии продолженные благодаря Д.А. Митькину, А.Б. Шидловскому, С.М. Воронину, Н.М. Коробову, А.И. Павлову, В.Г. Чирскому, Н.М. Добровольскому и др.

Аспирантурой кафедры подготовлено большое число специалистов высокого класса, эта работа ведется и в настоящее время.

Кафедра теории чисел всегда тесно сотрудничала и сотрудничает в научной области с кафедрой теории чисел МГУ, Тульским государственным педагогическим университетом и другими вузами России.

На кафедре теории чисел разрабатываются и перспективные направления психолого-педагогических исследований, работает научно-методическое объединение, тематика деятельности которого отражает актуальные проблемы развития отечественного образования, цифровизации образования, фундаментального образования по математике и информатике, вопросов прикладной математики.

В рамках научных школ и направлений ведется публикационная деятельность; преподаватели транслируют результаты своих исследований, в том числе и в изданиях, индексируемых в российских и в международных базах цитирования.

Труды А.А. Бухштаба

Все научные работы А.А. Бухштаба посвящены теории чисел, подавляющая их часть — развитию и совершенствованию методов решета и их применениям к классическим проблемам теории чисел: проблеме Гольдбаха, проблеме близнецов и проблеме представления простых чисел значениями многочлена с целыми коэффициентами.

- А.А. Бухштабу принадлежат важные результаты в изучении поведения известной теоретико-числовой функции $\Phi(x, y) = |\{n \leq x; (n, p) = 1, \forall p < y\}|$. Функция $\Phi(x, y)$ имеет много различных приложений; ее исследование было продолжено многими авторами.

- Современные методы решета в теории чисел были развиты в работах В. Бруна и А. Сельберга. В. Бруну принадлежат первые результаты, относящиеся к проблеме Гольдбаха. Утверждение, что всякое большое четное число представимо в виде $2N = p_a + p_b$, где p_a имеет не более a простых делителей, а p_b – не более b простых делителей (считая кратности), будем записывать в виде (a, b). В. Брун доказал, что имеет место результат $(9, 9)$. В своей докторской диссертации А.А. Бухштаб получил результат $(4, 4)$.

- Для проблемы близнецов (рассмотрим утверждение “бесконечно часто $p_d + 2 = p_c$”) А.А. Бухштаб получил результат $(1, 3)$. Чень Джин-рунь, используя решето с весами, доказал наилучший известный сегодня результат $(1, 2)$. При этом $(1, 1)$ – решение проблемы Гольдбаха — пока не удается получить даже в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана.

А.А. Бухштабом получены важные результаты и в усовершенствовании методов решета. Его основной вклад в методы решета состоит в том, что на основе *тождества Бухштаба*, которое в стандартных обозначениях метода решета имеет вид

$$S(A; P; z) = S(A; P, z_1) - \sum_{z_1 \leq p < z,\ p \in P} S(A_p; P, p),$$

А.А. Бухштаб разработал прием, позволяющий, исходя из известных оценок для S сверху и снизу, построить итерационный процесс, дающий для S более тесные границы. Кроме того, А.А. Бухштаб предложил вариант решета с кусочно постоянными весами. Оптимальный выбор весов сводится к задаче линейного программирования. [1]

Труды В.И. Нечаева

В.И. Нечаеву принадлежат важные результаты в области аналитической теории чисел:

- новые верхние и нижние оценки в проблеме Варинга для специальных целозначных многочленов $\dfrac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$;

- правильные по порядку оценки сверху полных рациональных тригонометрических сумм, улучшающие оценки Хуа Локена;

- оценки полных тригонометрических сумм и сумм с характерами с рекуррентными функциями.

В.И. Нечаев получил также ряд значительных результатов в теории линейно–рекуррентных последовательностей над конечными полями. Его идеи оказали существенное влияние на развитие этой ветви прикладной математики. Научные труды В.И. Нечаева хорошо известны как в нашей стране, так и за рубежом. За работу в области прикладной математики он награжден орденом "Знак Почета". [21]–[32]

Труды Д.А. Митькина

Еще будучи студентом, Д.А. Митькин получил свои первые научные результаты, относящиеся к вопросу оценки полных рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем.

В 1972 г. он закончил механико-математический факультет МГУ и поступил в аспирантуру на кафедру теории чисел, работая под руководством профессора Н.М. Коробова. Научные исследования Д.А. Митькина этого периода были направлены на развитие элементарного метода доказательства классического результата А. Вейля об оценках сумм символов Лежандра и рациональных тригонометрических сумм от многочленов с простым знаменателем. Ему удалось получить доказательство теорем А. Вейля для случая многочленов четной степени и даже усилить их.

В 1985 – 1988 гг. Д.А. Митькин сделал ряд выдающихся научных открытий, среди которых следует выделить полное решение проблемы Варинга в ее классической постановке – представление больших натуральных чисел в виде суммы ограниченного количества слагаемых, являющихся значениями целозначного алгебраического многочлена. Д.А. Митькин доказал, что функция Харди $G(n)$ в этой проблеме задается соотношениями $G(n) = 2^n - 1$, если n – нечетное, $G(n) = 2^n$, если n – четное, где n - степень многочлена.

Данный результат подвел итог исследований в этом направлении многих математиков, среди которых можно назвать Д. Гильберта, Г. Харди, Дж. Литтлвуда, Хуа Логена, В.И. Нечаева, Чена Джинруна. Следует отметить, что подобные точные результаты в теории чисел встречаются чрезвычайно редко. Вместе с другими замечательными исследованиями, относящимися к проблеме Гильберта-Камке, этот результат составил основу докторской диссертации Д.А. Митькина, защищенной в 1988 г. [13]–[20]

Труды В.Г. Чирского

В конце 80-х годов В.Г. Чирский ввёл в рассмотрение класс F-рядов и распространил на него метод Зигеля-Шидловского, применявшийся ранее для E- и G-функций Зигеля, исследовав вопрос о глобальных соотношениях для таких рядов. Это положило начало разработке теории трансцендентных чисел в полиадической области (кольцо полиадических чисел представляет собой прямое произведение колец целых p-адических чисел). В.Г. Чирским получены общие теоремы о бесконечной линейной и алгебраической независимости значений рядов этого класса. Эти общие теоремы были применены к широкому классу обобщённых гипергеометрических рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n ... (\beta_s)_n} z^n$$

при $r > s$. (Такие ряды (отличные от многочленов) имеют нулевой радиус сходимости в поле комплексных чисел, но имеют радиус сходимости больший 1 в любом поле p-адических чисел). Например, им была доказана бесконечная трансцендентность значений ряда Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ (значения которого в целых точках представляют собой так называемые полиадические числа). Важными результатами, впервые полученными в работах В.Г. Чирского, являются теоремы об арифметических свойствах значений обобщенных гипергеометрических рядов, среди параметров которых присутствуют трансцендентные числа (до этого рассматривались лишь ряды с рациональными либо с алгебраическими иррациональными параметрами). В.Г. Чирским и его учениками и коллегами получены результаты, имеющие значение для прикладных задач. [34]–[45]

Труды Е.И. Деза

Е.И. Деза, ученица Л.Л. Степановой и В.И. Нечаева, занималась вопросами многомерной проблемы делителей Дирихле и ее аналогов в числовых полях, в целом, проблемой средних значений арифметических функций, родственных функции делителей.

С 1995 года она под руководством известного французского математика М.М. Деза начала исследования в области обобщенных метрических пространств. В 2006 году вышел в свет Энциклопдичский словарь расстояний, чуть позже переросший в Энциклопдию расстояний, претерпевщую до 2016 года 4 издания.

С начала 90-х годов по настоящее время внимание Е.И. Деза привлекают специальные числа натурального ряда. В этой области вышло несколько монографий, в том числе “Figurate numbers” (2012), “Mersenne numbers and Fermat numbers” (2021), “Perfect and amicable numbers” (2022). [3]–[12]

Аспиранты кафедры

Аспирантурой кафедры подготовлено большое число специалистов высокого класса. Воспитанники кафедры работают ректорами, проректорами, заведующими кафедрами педагогических университетов во многих городах России от Благовещенска до Мурманска и ближнего и дальнего зарубежья.

Среди учеников А.А. Бухштаба отметим двух известных математиков, Григория Фреймана и Илью Пятецкого-Шапиро.

Василий Ильич Нечаев руководил аспирантами по трем различным направлениям. У него было много учеников по прикладным вопросам теории чисел, для широкого круга ученых хорошо известны результаты его учеников по аналитической теории чисел и по методике преподавания математики.

Многие годы основу кафедры теории чисел составляли выпускники математического факультета МПГУ: Баулина Ю.Н., Гладкова Е.Б., Деза (Пантелеева) Е.И., Жмулева А.В., Иконникова Т.К., Киселева Л.В., Котова Л.В., Топунов В.Л., Степанова Л.Л., Юрченко А.Л. Многие из них защитили кандидатские диссертации по руководством В.И. Нечаева:

- Жмулева Алевтина Васильевна, “Теория делимости целых чисел. Факультативный курс”;
- Киселева Лариса Владимировна, “О количестве нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой”;
- Пантелеева (Деза) Елена Ивановна, “О проблеме делителей Дирихле и ее аналогах в числовых полях”;
- Неискашова Елена Валентиновна, “Профессиональная направленность обучения студентов педагогических вузов в процессе углубленного изучения понятия числа”;
- Баулина Юлия Николаевна, “Формулы для числа решений уравнений марковского типа в конечных полях” и др.

Работа по развитию научных идей В.И. Нечаева продолжается. Алевтина Васильевна Жмулева стала его первой защищенной аспиранткой, а разработанный ею факультативный курс “Теория делимости” и сейчас активно востребован в педагогической практике.

В декабре 2012 года Елена Ивановна Деза защитила в МПГУ диссертацию на соискание степени доктора педагогических наук по теме “Индивидуальные траектории фундаментальной подготовки учителя математики в условиях вариативного образования”. Работа была основана на исследовании теоретико-числовой и дискретной содержательных линий подготовки будущего учителя математики и опиралась на многолетний опыт работы автора на кафедре теории чисел.

В 2018 году, продолжая дело Василия Ильича по освещению и популяризации современных математических достижений в области криптографии, защитила кандидатскую диссертацию “Профессиональная направленность математической подготовки учителей информатики при обучении методам и средствам защиты информации” Лидия Владимировна Котова.

Под руководством А.И. Павлова защитила диссертацию Татьяна Константиновна Иконникова.

Дмитрий Алексеевич Митькин руководил подготовкой и защитой более 10 диссертаций. Своих последних аспирантов, Андрееву Т.Ю. и Орлову С.В., он довел до защиты кандидатских диссертаций, будучи уже тяжело больным и прикованным к постели.

Под руководством В.Г. Чирского в 2020 году защитил кандидатскую диссертацию Евгений Станиславович Крупицын.

Кафедра теории чисел послужила трамплином к плодотворной научной, преподавательской, административной деятельности для многих выпускников матфака МГПИ-МПГУ. Так, Д.Л. Модель, выпускник матфака 2001 года, ученик Е.И. Деза, является сегодня директором образоватльного комплекса, ведет активную исследовательскую работу в области дидактики высшего и общего образования. Ученица В.И. Нечаева, выпускница матфака 1991 года Е.В. Неискашова сегодня — заведующая кафедрой высшей математики Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева, кандидат педагогических наук, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. А.Л. Чекин, выпускник матфака 1979 года, ученик А.А. Бухштаба, кандидат физико-математичесеких наук, доктор педагогических наук, возглавляет в настоящее время кафедру математики и информатики в начальной школе Института детства МПГУ.

Сотрудничество с Тульской школой теории чисел

Многие годы кафедра сотрудничает с Тульским государственным педагогическим университетом в лице доктора физико-математических наук профессора Николая Михайловича Добровольского. Он руководил аспирантами кафедры, являлся членом совета математического факультета по защите кандидатских диссертаций, неоднократно входил в состав итоговых аттестационных комиссий.

Определенные научные связи кафедры с Тульской школой теории чисел установились более 50 лет тому назад, когда В.Д. Подсыпанин и М.Н. Добровольский выступали с докладами по результатам своих исследований по полиномам Туэ и матричным разложениям алгебраических иррациональностей на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел МГУ под руководством член-корреспондента АН СССР А.О. Гельфонда в 1965 году.

Развитие этих связей было продолжено в 1986 году, когда Василий Ильич Нечаев взял на кафедру соискателем В.С. Ванькову, преподавателя Тульского государственного педагогического института им. Л.Н. Толстого. Со стороны МПГУ сотрудничество осуществлялось профессорами В.И. Нечаевым, Д.А. Митькиным, С.М. Ворониным, В.Г. Чирским, А.В. Жмулевой. Ряд представителей тульской школы теории чисел учились в аспирантуре при кафедре теории чисел МПГУ и защищали диссертации в Совете, долгое время возглавляемым Дмитрием Алексеевичем Митькиным. Благодаря этому сотрудничеству были подготовлены кандидатские диссертации по теории чисел:

- В.С. Ванькова “Многомерные теоретико-числовые сетки” (МПГУ, 1992 г., рук. В.И. Нечаев);
- А.Л. Рощеня “Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решеток” (МПГУ, 1998 г., рук. В.И. Нечаев);
- И.Ю. Реброва “Пространство решеток и функции на нем” (МПГУ, 2000 г., рук. В.И. Нечаев, Н.М. Добровольский);
- О.В. Родионова “Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения” (МПГУ, 2000 г., рук. Д.А. Митькин, Н.М. Добровольский);
- Г.Т. Вронская “Квадратичное отклонение плоских сеток” (МПГУ, 2005 г., рук. Н.М. Добровольский);
- Л.П. Добровольская “Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов” (МПГУ, 2009 г., рук. В.Н. Чубариков);
- А.С. Герцог “Чисто-вещественные биквадратичные алгебраические поля и их приложения” (МПГУ, 2012 г., рук. Н.М. Добровольский);
- Е.Д. Ребров “Некоторые теоретико-числовые методы приближенных вычислений” (МГУ, 2013 г., рук. Н.М. Добровольский).

Сотрудничество между кафедрой теории чисел МПГУ и кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии ТГПУ им. Л.Н. Толстого по подготовке аспирантов успешно продолжается и сейчас.

Другое важное направление научного сотрудничества связано с организацией и проведением научных конференций сначала по теории чисел, а потом по алгебре и теории чисел. Василий Ильич Нечаев и Дмитрий Алексеевич Митькин стояли у истоков создания традиционной Международной научной конференции “Современные проблемы теории чисел и приложений”, первая из которых прошла в 1993 году, активно участвовали в организации и проведении последующих Международных конференций. Преподаватели кафедры теории чисел являются активными участниками этих конференций и сегодня, когда ТГПУ готовится принять участников уже XXI конференции.

4. Учебно-методическая деятельность кафедры

Кафедрой теории чисел Института математики и информатики проводится предметная подготовка в области арифметики, теории чисел, защиты информации профессиональных кадров для работы в образовательных учреждениях разного уровня и типа, от основной школы до вуза.

Неоценим вклад в дело подготовки учителей математики А.А. Бухштаба. Он принимал активное участие в написании и составлении программ и учебных планов для пединститутов. Он – автор широко известного учебника «Теория чисел», которым пользуются многие поколения студентов. [2]

В.И. Нечаев был одним из крупнейших специалистов по вопросам высшего педагогического образования, автором учебных программ по алгебре, теории чисел, числовым системам, элементарной математике, прикладным вопросам теории чисел; автором нескольких учебников, многочисленных статей в Математической энциклопедии, Детской и Школьной математических энциклопедиях. За многолетнюю работу по совершенствованию дидактики высшей школы, существенный вклад в дело подготовки отечественных педагогических кадров он был награжден знаком ”Отличник народного просвещения“.

В.И. Нечаев стоял у истоков внедрения в образовательный процесс высшей и общеобразовательной школы компьютерных технологий. Он был создателем первой программы для ЭВМ, позволяющей проверить вычислительные навыки школьников. Эта работа была отмечена Золотой медалью ВДНХ.

Разработанный В.И. Нечаевым курс "Числовые системы" и написанный на его основе учебник для студентов педагогических вузов давно стал классикой предметной подготовки учителей математики и информатики. [29]

Курсы «Теория чисел» и «Числовые системы» входят сегодня в образовательные программы всех педвузов РФ, а по учебникам А.А. Бухштаба «Теория чисел», В.И. Нечаева «Числовые системы» занимаются студенты большинства педагогических университетов России и некоторых зарубежных вузов.

Программы по элементарной математике (арифметика и комбинаторика), разработанные на кафедре теории чисел под руководством В.И. Нечаева, послужили основой для создания нескольких учебных пособий указанной тематики, в том числе пособия В.Л. Топунова "Комбинаторика", пособия Л.Л. Степановой и А.В. Жмулевой "Арифметика: практикум по решению задач". В 2008 году последнее пособие было переиздано при активном участии Московского центра непрерывного математического образования и до сих пор активно используется в образовательной практике. Пользуется постоянным спросом и вызывает непреходящий интерес у студентов пособие Л.Л. Степановой "Дополнительные главы теории чисел".

В.И. Нечаев был инициатором введения в образовательные программы математических факультетов педагогических вузов дисциплины "Основы дискретной математики", автором первой программы по дискретной математике для педагогических вузов. Указанный курс давно и прочно занял важное место в учебных планах, в 2010 году на его основе было создано учебное пособие Е.И. Деза и Д.Л. Моделя "Основы дискретной математики".

В.И. Нечаев много лет работал в области прикладной математики. Будучи ведущим отечественным специалистом в вопросах защиты информации, он внес большой вклад не только в развитие, но и в популяризацию новой науки, создав первое в своем роде пособие по криптографии для студентов педагогических вузов, осветив в нем исторические аспекты и математические основы последних достижений. Он был одним из инициаторов включения дисциплины "Криптография. Основы защиты информации" в учебную программу математического факультета МПГУ. Цикл лекций, прочитанный им по прикладным вопросам теории чисел — элементам криптографии — лег в основу пособия "Элементы криптографии (Основы теории защиты информации)". Будучи тяжело болен, он до последних дней жизни продолжал работать над этой книгой. [33]

В течение последних двадцати лет работа по внедрению элементов криптографии в образовательный процесс значительно продвинулась. Сегодня соответствующие курсы читаются практически на всех направлениях подготовки, реализуемых Институтом математики и информатики МПГУ. В 2018 году вышло учебное пособие Е.И. Деза и Л.В. Котовой "Теоретико-числовые основы защиты информации", основанное на идеях В.И. Нечаева. Оно опирается на теперь уже многолетний опыт практической работы преподавателей кафедры в этой области, работы, начало которой было положено В.И. Нечаевым.

Дмитрий Алексеевич Митькин уделял большое внимание математическому образованию школьников, причем не только нашей страны: с 1991 года входил в состав предметной методической комиссии Всероссийских математических олимпиад, публиковал статьи для учителей в журнале «Математика в школе», готовил команду школьников Турции к международным математическим олимпиадам.

Владимир Григорьевич Чирский многие годы был старшим экзаменатором на вступительных экзаменах по математике на различных факультетах МГУ. Опыт этих экзаменов нашел отражение в шести пособиях по элементарной математике.

Список наиболее значимых учебных изданий, подготовленных преподавателями кафедры, представлен ниже.

- Бухштаб А.А. «Теория чисел» (1966 г.).
- Нечаев В.И. «Числовые системы» (1975 г.), «Элементы криптографии: основы теории защиты информации» (1999 г.).
- Жмулева А.В. «Теория делимости целых чисел» (1980 г.), «Арифметика. Практикум по решению задач» (в соавторстве с Л.Л. Степановой, 1986 г.), «Практикум по элементарной математике: арифметика» (в соавторстве с Л.Л. Степановой и Е.И. Деза, 2008 г.), «Сборник задач по теории чисел» (2009 г.).
- Чирский В.Г. «Уравнения элементарной математики» (1999 г.), «Задачи с параметрами и другие сложные задачи» (2007 г.).
- Степанова Л.Л. «Арифметика. Практикум по решению задач» (в соавторстве с А.В. Жмулевой, 1986 г.), «Дополнительные главы теории чисел» (2001 г.), «Практикум по элементарной математике: арифметика» (в соавторстве с А.В. Жмулевой и Е.И. Деза, 2008 г.).
- Топунов В.Л. «Комбинаторика» (2016 г.).
- Деза Е.И., Котова Л.В. «Сборник задач по теории чисел» (2012 г.), «Теоретико-числовые основы защиты информации» (2018 г.).
- Деза Е.И. «Figurate numbers» (2012 г.), «Mersenne numbers and Fermat numbers» (2021 г.).
- Крупицын Е.С., Нестеренко А.Ю. «Теоретико-числовые методы в криптографии» (2011 г.).

Сегодня преподаватели кафедры читают лекции и ведут практические занятия по дисциплинам “Теория чисел”, “Числовые системы”, “Прикладные вопросы математики”, “История математики”, “Информационная безопасность”, “Основы защиты информации” и др. Вниманию студентов предлагается ряд специальных курсов и факультативов по аналитической и алгебраической теории чисел, прикладным вопросам теории чисел, специальным числам натурального ряда, элементарной математике и др.

Ведется активная работа по модернизации учебных планов и программ. Осенью 2021 года кафедра принимала активное участие в разработке предметно-методического модуля программы «Ядро педагогического образования» в части выделения основных структурных составляющих и содержательного наполнения дисциплин «Теория чисел», «Числовые системы», а также блока «Арифметика» дисциплины «Элементарная математика».

Кафедра теории чисел ведет активную работу по поддержке учебно-исследовательской деятельности студентов. Преподаватели кафедры осуществляют руководство курсовыми работами, ВКР бакалавра, магистерскими диссертациями по математике, информатике, методике преподавания математики и информатики. Основными направлениями исследований являются избранные вопросы аналитической теории чисел, алгебраической теории чисел, прикладных вопросов теории чисел, дискретной математики, теории специальных чисел натурального ряда, теории обобщенных метрических пространств; для работ по методике преподавания математики – дополнительно избранные вопросы арифметики. Результаты научно-методических, учебно-методических исследований, методических разработок преподавателей внедряются в учебный процесс, включаются в учебники и учебно-методические пособия

Сотрудники кафедры принимали и принимают активное участие в работе Ученого Совета университета и Института математики и информатики, Диссертационных советов, редколлегий математических и научно-методических журналов.

5. Мы помним

Александр Адольфович Бухштаб

Александр Адольфович Бухштаб родился 4 октября 1905 г. в г. Ставрополе в семье врача Адольфа Александровича Бухштаба. В 1921 г. он поступил в Ростовский политехнический институт, а в 1922 г. перевелся на физико-математический факультет Ростовского университета. В 1924 г. он был переведен на механико-математический факультет Московского университета, который закончил в 1928 г. После окончания МГУ он работал ассистентом в Московском Высшем Техническом училище, а в 1930–32 гг. обучался в аспирантуре механико-математического факультета МГУ под руководством А.Я. Хинчина. По окончании аспирантуры он работал доцентом МВТУ. С 1930 г. по 1939 г. работал в Азербайджанском университете сначала заведующим кафедры алгебры и теории функций, а с 1935 г. — деканом физико-математического факультета АзГУ. В 1939 г. после защиты в МГУ кандидатской диссертации А.А. Бухштаб был утвержден в ученой степени кандидата физико-математических наук и ученом звании профессора. В том же году он поступил в докторантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР и стал профессором кафедры алгебры Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина.

В 1941 г. А.А. Бухштаб эвакуировался в Баку и работал профессором АзГУ, а затем в Высшем военно-морском инженерном училище им. Ф.Э. Дзержинского. В 1943 г. он возвратился в Москву и продолжил работу в докторантуре МИАН. В 1944 г. А.А. Бухштаб защитил докторскую диссертацию на тему «Новые исследования по методу эратосфенова решета» и возобновил работу в качестве профессора МГПИ, где работал до конца своей жизни.

Василий Ильич Нечаев

Василий Ильич Нечаев родился 11 января 1920 года в Москве. В 1937 году он поступил на физико-математический факультет Московского городского педагогического института имени В.П. Потемкина и окончил его с отличием в июне 1941 года.

15 октября 1941 года, в труднейшие дни исторической битвы за Москву, В.И. Нечаев добровольцем ушел в Красную Армию. Прошел с боями всю войну, закончив ее младшим лейтенантом. За боевые заслуги был награжден орденами Красного Знамени и Отечественной войны II степени, многочисленными медалями.

Демобилизовавшись из армии, он возвращается в Московский городской педагогический институт имени В.П. Потемкина и учится в аспирантуре под руководством профессора Михаила Кузьмича Гребенчи (1897 – 1948 г.г.). В 1948 году защищает кандидатскую диссертацию. По окончании аспирантуры в 1949 году по рекомендации академика Ивана Матвеевича Виноградова становится заведующим кафедры алгебры и элементарной математики Московского городского педагогического института, сменив на этом посту своего учителя М.К. Гребенчу.

В 1960 году Московский городской педагогический институт имени В.П. Потемкина был объединен с Московским государственным педагогическим институтом имени В.И. Ленина. В 1970 году, после отделения кафедры алгебры (1962 г.) и создания кафедры вычислительной математики и программирования (1970 г.) кафедра алгебры и теории чисел МГПИ имени В.И. Ленина стала называться кафедрой теории чисел. Именно на этой кафедре — кафедре теории чисел математического факультета МГПИ (позднее — МПГУ), — почти сорок лет проработал В.И. Нечаев, более 20 лет – с 1978 года и до конца жизни – являясь ее заведующим.

С 1948 года Василий Ильич Нечаев — кандидат физико-математических наук, с 1975 года — доктор физико-математических наук, профессор. С 1963 года — старший, а затем — ведущий научный сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова Академии наук СССР (позднее РАН).

Дмитрий Алексеевич Митькин

Дмитрий Алексеевич Митькин родился 25 апреля 1951 г. в г. Владивостоке. В 1967 г. он закончил специализированную школу-интернат физико-математического профиля при МГУ и в том же году поступил на механико-математический факультет Московского университета. В 1972 г. он закончил механико-математический факультет МГУ и поступил в аспирантуру отделения математики того же факультета на кафедру теории чисел. Научные исследования Д.А. Митькина этого периода были направлены на развитие элементарного метода доказательства классического результата А. Вейля об оценках сумм символов Лежандра и рациональных тригонометрических сумм от многочленов с простым знаменателем. Указанные исследования составили основу его кандидатской диссертации на тему "О некоторых вопросах аналитической теории чисел", защищенную в 1975 г. В 1975 г. Д.А. Митькин начал свою трудовую деятельность в ВЦ в г. Химки. В 1981 г. он перешел на преподавательскую работу в МГПИ им. В.И. Ленина на кафедру теории чисел математического факультета.

Докторскую диссертацию на тему "Точные оценки для числа слагаемых в аддитивных проблемах варинговского типа" Дмитрий Алексеевич в 1989 г. В 1991 г. Д.А. Митькин получил звание профессора, а в 1999 г. стал заведовать кафедрой теории чисел математического факультета Московского педагогического государственного университета, которую возглавлял до своей кончины.

Профессор Митькин Д.А. несколько лет возглавлял совет математического факультета по защите кандидатских диссертаций по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел. До последних дней жизни он вёл семинар по аналитической теории чисел, который посещали не только аспиранты МПГУ, но и аспиранты и преподаватели других вузов. Активно работая в науке, Дмитрий Алексеевич уделял большое внимание математическому образованию школьников. С 1991 года он входил в состав предметной методической комиссии всероссийских математических олимпиад.

Алевтина Васильевна Жмулева

Алевтина Васильевна Жмулева родилась 12 августа 1936 года. Она заинтересовалась теорией чисел еще в студенческие годы. Все ее курсовые работы, выполненные под руководством В.И. Нечаева, были посвящены теоретико-числовой тематике. В 1959 году Алевтина Васильевна окончила с отличием Московский городской педагогический институт им. В.П. Потемкина и два года работала в школе по распределению. В 1961 году, после объединения Московского городского педагогического института им. В.П. Потемкина и Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина, она, по рекомендации В.И. Нечаева, была принята ассистентом на кафедру высшей алгебры, элементарной математики и теории чисел, которой руководил профессор А.А. Бухштаб. На ней Алевтина Васильевна работала — старшим преподавателем, доцентом, профессором до последних дней своей жизни, более 58 лет. Когда в практику работы школы были введены факультативные курсы, А.В. Жмулева была направлена в институт усовершенствования учителей читать лекции для учителей Москвы и Московской области по темам факультативов, рекомендованных министерством просвещения для средней школы. Это были факультативы по теории делимости целых чисел и по системам счисления. В 1980 году по материалам этих лекций ею была защищена диссертация «Теория делимости целых чисел. Факультативный курс» на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Научным руководителем был В.И. Нечаев.

Более полувека Алевтина Васильевна вела активную преподавательскую и научно-исследовательскую деятельность в стенах Московского педагогического государственного университета. За это время она внесла огромный вклад в развитие преподавания арифметики и теории чисел не только в МПГУ, но и в системе отечественного педагогического образования в целом, в подготовку многих поколений учителей математики. Любовь к своей профессии, блестящее владение материалом, уважительное и бережное отношение к студентам всегда позволяли ей заинтересовывать теоретико-числовой тематикой широкую аудиторию. На факультете в настоящее время работает немало преподавателей, которых она учила. Есть они и среди авторов этой статьи — возможно, именно лекции А.В. Жмулевой стали для них когда-то первой ступенькой как в науку, так и в профессию педагога.

Ее труд был отмечен несколькими медалями. Она была награждена знаком «Отличник народного просвещения».

Лидия Леонидовна Степанова

Лидия Леонидовна Степанова родилась в Москве 13 апреля 1941 г. В 1959 году она поступила на математический факультет Московского городского педагогического института им. В.П. Потемкина. В 1960 г. Потемкинский и Ленинский пединституты объединили, и Лидия Леонидовна стала студенткой Ленинского пединститута.

Училась она великолепно, состояла в студенческом научном обществе, была ленинским стипендиатом. Дипломная работа Л.Л. Степановой была посвящена популярному в те времена направлению в педагогике — «программированному обучению».

Сразу после окончания института Лидия Леонидовна поступила в аспирантуру на очное отделение кафедры алгебры и теории чисел к В.И. Нечаеву, ставшему ее учителем и впоследствии близким другом, которому она помогала в самых тяжелых жизненных ситуациях. В предисловии к своей книге «Избранные главы теории чисел» Лидия Леонидовна писала: «На всем пути формирования содержания этой книги и программы курса неоценимы была поддержка и советы моего Учителя — Василия Ильича Нечаева, светлой памяти которого кланяюсь». Вместе они участвовали в разработке программ по курсу теории чисел для педвузов. Уже на втором курсе аспирантуры — в 1965 году — Лидию Леонидовну привлекли к преподаванию на родном факультете, где она и проработала всю жизнь.

Лидия Леонидовна принимала активное участие в жизни факультета. Она была куратором группы, состояла в профбюро факультета, разрабатывала учебные программы по курсу теории чисел для педвузов. В середине 80-х годов Л.Л. Степанова заняла должность заместителя декана. Ее всегда можно было найти на факультете, она оставалась здесь допоздна.

Лидия Леонидовна долго работала на подготовительных курсах математического факультета. Благодаря ей многие школьники поступили в институт и успешно его окончили.

6. Заключение

Кафедра теории чисел многие годы давала возможность студентам матфака получать фундаментальные знания, общаться со многими выдающимися математиками, замечательными педагогами, прекрасными людьми и многому у них учиться.

Сегодня кафедра теории чисел продолжает жить, развиваться, укреплять и развивать свои традиции.

Свою стратегическую цель в современных условиях кафедра видит в построении научно-образовательного пространства фундаментальной подготовки в области арифметики, теории чисел и защиты информации высококвалифицированных педагогов по математике, информатике, экономике, на высоком профессиональном уровне владеющих математическим аппаратом, способных квалифицированно взаимодействовать с меняющимся, вариативным контингентом обучающихся в различных институциональных условиях на основе идеи гуманизации профессиональной педагогической деятельности, эффективно использующих современные педагогические и цифровые технологии в профессиональной деятельности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А.А. Асимптотическая оценка одной общей теоретико-числовой функции // Математический сборник. Т. 2 (44). № 6. 1937.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966.
3. Пантелеева (Деза) Е.И. О проблеме делителей в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44. № 4. 1988.
4. Пантелеева (Деза) Е.И. Одно замечание о проблеме делителей Дирихле // Математичские заметки. 1993. Т. 53. № 4.
5. Пантелеева (Деза) Е.И. О средних значениях нкоторых арифмтических функций // Математичские заметки. 1994. Т. 55. № 2.
6. Deza M., Panteleeva (Deza) E. Quasi-semi-metrics, Oriented Multi-cuts and Related Polyhedra // European Journal of Combinatorics. 2000. Vol. 21. № 6.
7. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308, 21.
8. Deza E.I., Deza M.M. Figurate numbers. - World Scientific Publishing Company, 2012.
9. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2.
10. Deza M.M., Deza E.I. Encyclopedia of Distances. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.
11. Deza, E.I., Deza M.M., Dutour Sicirić M. Generaliations of finite metrics and cuts. - World Scientific Publishing Company, 2016.
12. Deza E. Mersenne and Fermat Numbers. - World Scientific Publishing Company, 2021.
13. Митькин Д.А. К оценке рациональной тригонометрической суммы с простым знаменателем // Вестник МГУ. Сер. матем. и мех. 1972. № 5.
14. Митькин Д.А. Оценка суммы символов Лежандра от многочленов четной степени // Математические заметки. 1973. Т. 141. № 1.
15. Митькин Д.А. Об оценках рациональных тригонометрических сумм специального вида // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 4.
16. Митькин Д.А. Об оценках и асимптотических формулах для рациональных тригонометрических сумм, близких к полным // Математический сборник. 1983. Т. 122(164). № 4(12).
17. Митькин Д.А. Многочлены с минимальным множеством значений и уравнение $f(x) = f(y)$ в простом конечном поле // Математические заметки. 1985. Т. 38. № 1.
18. Митькин Д.А. Об оценке числа корней некоторых сравнений по методу Степанова // Математические заметки. 1992. Т. 51. № 6.
19. Митькин Д.А. Об оценке числа решений некоторых “выщербленных” систем уравнений // Математические заметки. 1995. Т. 57. № 5.
20. Митькин Д.А. Уточнение оценки для суммы символов Лежандра от многочленов нечетной степени // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6. Вып. 3(15). С. 123–126.

21. Нечаев В.И. Представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$ // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64.

22. Нечаев В.И. Проблема Варинга для многочленов // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38, № 1.

23. Нечаев В.И. О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17, № 6.

24. Нечаев В.И. Группы невырожденных матриц над конечными полями и рекуррентные последовательности // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152.

25. Нечаев В.И. Неулучшаемая оценка тригонометрических сумм с рекуррентными функциями с непостоянными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1964. Т. 154.

26. Нечаев В.И. Линейные рекуррентные сравнения с периодическими коэффициентами // Математические заметки. 1968. Т. 3, № 6.

27. Нечаев В.И. Тригонометрические суммы для рекуррентных последовательностей // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206, № 2.

28. Нечаев В.И. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Математические заметки. 1975. Т. 17, № 6.

29. Нечаев В.И. Числовые системы. - М.: Просвещение, 1975.

30. Нечаев В.И. К вопросу о представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$ // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142, № 1.

.

31. Нечаев В.И. К вопросу о сложности детерминированного алгоритма для дискретного логарифма // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2.

32. Нечаев В.И. Распределение знаков в последовательности прямоугольных матриц над конечным полем // Труды МИАН. 1996. Т. 218.

33. Нечаев В.И. Элементы криптографии (Основы теории защиты информации). – М.: Высшая школа, 1999.

34. Чирский В.Г. О глобальных соотношениях // Математические заметки. 1990. Т. 48. № 2.

35. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 6.

36. Чирский В.Г., Нестеренко А.Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика. 2015. Т. 27. № 4.

37. Чирский В.Г. Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида // Современные проблемы математики. 2017. № 24.

38. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Т. 81, № 2.

39. Chirskii V.G. Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. 2017. Т. 24. № 2.

40. Чирский В.Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F-рядов // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483. № 3.

41. Cirskii V.G. Product formula, global relations and polyadic integers Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 26. № 3.

42. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром - лиувиллевым полиадическим числом// Доклады Академии наук. 2020. Т. 494.

43. Chirskii V.G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Russian Journal of Mathematical Physics. 2021. Vol. 28. № 3.

44. Чирский В.Г., Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея-Касса-Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 1.

45. Чирский В.Г. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядовэйлерова типа с полиадическим лиувиллевым парамером // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 1.

REFERENCES

1. Buchstab, A.A. 1937, "Asymptotic estimation of a general number-theoretic function", *Matematicheskii Sbornik*, Vol. 2(44), 6. (Russian)

2. Buchstab, A.A. 1966, "Number Theory", *Prosveshenie.* (Russian)

3. Panteleeva (Deza), E.I. 1988, "About divisor problem in number fields", *Math. Notes*, Vol. 44, 4. (Russian)

4. Panteleeva (Deza), E.I. 1993, "One observation on Dirichlet divisor problem", *Math. Notes*, Vol. 53, 4. (Russian)

5. Panteleeva (Deza), E.I. 1994, "On mean values of certain arithmetical sums", *Math. Notes*, Vol. 55, 2. (Russian)

6. Deza, M.M., Panteleeva (Deza), E.I. 2000, "Quasi-semi-metrics, Oriented Multi-cuts and Related Polyhedra", *European Journal of Combinatorics*, Vol. 21, 6.

7. Deza, E.I., Varukhina L.V. 2008, "On mean values of some arithmetic functions in number fields", *Discrete Mathematics*, Vol. 308, Issue 21.

8. Deza, E.I., Deza, M.M. 2012, "Figurate numbers", *World Scientific Publishing Company.*

9. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2). (Russian)

10. Deza, M. M., Deza, E.I. 2016, "Encyclopedia of Distances," *Springer, Berlin - Heidelberg.*

11. Deza, E., Deza, M.M., Dutour Sicirić, M. 2016, "Generaliations of finite metrics and cuts", *World Scientific Publishing Company.*

12. Deza, E. 2021, "Mersenne and Fermat Numbers", *World Scientific Publishing Company.*

13. Mitkin, D.A. 1972, "To the assessment of the rational trigonometric sum with a simple denominator", *Bulletin of Moscow State University, Ser. math. and mech.*, vol. 5. (Russian)

14. Mitkin, D.A. 1973, "Estimating the sum of the Legendre symbols from polynomials of even degree", ıMath. notes, vol. 141, 1. (Russian)

15. Mitkin, D.A. 1975, "On estimates of rational trigonometric sums of a special type", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 224, 4. (Russian)

16. Mitkin, D.A. 1983, "On estimates and asymptotic formulas for rational trigonometric sums close to complete", *Mathematical sbornik*, vol. 122 (164), 4(12). (Russian)

17. Mitkin, D.A. 1985, "Minimum set polynomials and equation $f(x) = f(y)$ in a simple finite field", *Math. notes*, vol. 38, 1. (Russian)

18. Mitkin, D.A. 1992, "On assessing the number of roots of some comparisons using the Stepanov method", *Math. notes*, vol. 51, 6. (Russian)

19. Mitkin, D.A. 1995, "On the estimation of the number of solutions to some "polished" systems of equations", *Math. notes*, vol. 57, 5. (Russian)

20. Mitkin, D.A. 2005, "Clarification of the estimate for the sum of Legendre symbols from odd degree polynomials", *Chebyshevsky sbornik*, vol. 6, 3 (15). (Russian)

21. Nechaev, V.I. 1949, "The representation of integers by sums of terms of the form $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 64. (Russian)

22. Nechaev, V.I. 1951, "Waring's problem for polynomials", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 38, 1. (Russian)

23. Nechaev, V.I. 1953, "On the representation of natural numbers as a sum of terms of the form $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$", *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. math.*, vol. 17, 6. (Russian)

24. Nechaev, V.I. 1963, "The group of non-singular matrices over a finite field, and recurrent sequences", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 152. (Russian)

25. Nechaev, V.I. 1964, "A best-possible estimate of trigonometric sums for recurrent functions with non-constant coefficients", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 154. (Russian)

26. Nechaev, V.I. 1968, "Linear recurrent congruences with periodic coefficients", *Math. notes*, vol. 3, 6. (Russian)

27. Nechaev, V.I. 1972, "Trigonometric sums for recurrent sequences", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 206. (Russian)

28. Nechaev, V.I. 1975, "An estimate of the complete rational trigonometric sum", *Math. notes*, vol. 17, 6. (Russian)

29. Nechaev, V.I. 1975, "Numeric systems", *Prosveshenie*, Moscow. (Russian)

30. Nechaev, V.I. 1976, "On the question of representing natural numbers by a sum of terms of the form $\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$", *Trudy Math. Inst. Steklov*, vol. 142. (Russian)

31. Nechaev, V.I. 1994, "On the complexity of a deterministic algorithm for a discrete logarithm", *Math. notes*, vol. 55, 2. (Russian)

32. Nechaev, V.I. 1996, "Distribution of signs in a sequence of rectangular matrices over a finite field", *Tr. Math. Inst. Steklov*, vol. 218. (Russian)

33. Nechaev, V.I. 1999, “Elements of cryptography (Osnovy teorii zashchity informatsii)”, *Vyssh. Shkola*, Moscow. (Russian)

34. Chirskii, V.G. 1990, “About global relations”, *Math. notes*, vol. 48, 2. (Russian)

35. Chirskii, V.G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Reportsof the Academy of Sciences*, vol. 459, 6. (Russian)

36. Chirskii, V.G., Nesterenko A.Yu. “About one approach to converting periodic sequences” *Discrete Mathematics*, vol. 27, 4. (Russian)

37. Chirskii, V.G. 2017, “Representation of natural numbers by terms of a certain form”, *Modern Problems of Mathematics*, 24. (Russian)

38. Chirskii, V.G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izvestia RAS. Mathematical Series*, vol. 81, 2. (Russian)

39. Chirskii, V.G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, 2.

40. Chirsky, V.G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series”, *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 483, 3. (Russian)

41. Chrskii, V.G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 26, 3.

42. Chirskii, V.G. 2020, “Arithmetic properties of Euler series with parameter - Liuville polyadic number”, *Reports of the Academy of Sciences*, vol. 494. (Russian)

43. Chirskii, V.G. 2021, “Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 28, 3.

44. Chirskii, V.G., Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu. 2022, “Consumption function in the Ramsay-Kass-Kupmans economic growth model in case of stationary saving function”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 23, 1. (Russian)

45. Chirskii, V.G. 2022, “Infinite linear independence with restrictions on a subset of primes of values of the row of Euler type with a polyadic liuville paramer”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 23, 1. (Rusian)

Получено 18.07.2022
Принято в печать 14.09.2022

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-304-305

Памяти Александра Евгеньевича Гвоздева

Некролог

16 декабря 1954 – 13 мая 2022

В пятницу 13 мая 2022 года на 68-ом году ушел из жизни замечательный человек, заботливый муж и отец двоих детей, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого доктор технических наук, профессор Александр Евгеньевич Гвоздев.

Александр Евгеньевич родился 16 декабря 1954 года в г. Евпатория Крымской области. Поступил в 1972 году в Тульский политехнический институт, который с отличием окончил в 1977 году по специальности «Материаловедение, оборудование и технология термической обработки металлов» и был распределён в лабораторию ОНИЛ-5 кафедры «Технология штамповочного производства» где работал инженером, младшим научным сотрудником, ассистентом. После окончания аспирантуры в Институте металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Сверхпластичность и структурообразование стали Р6М5 при диффузионном фазовом превращении и разработка технологии получения заготовки». С 1990 г. был ассистентом кафедры «Вычислительная математика». В 1993 году ему было присвоено звание доцента по данной кафедре. С 1993 года – заместитель декана факультета систем точного машиностроения. С 1995 по 2003 гг. работал начальником научно- исследовательской части Тульского государственного университета. В 1997 году успешно защищает докторскую диссертацию на тему «Деформирование и структурообразование быстрорежущих сталей в условиях сверхпластичности». В 2004 г. Александру Евгеньевичу было присвоено учёное звание профессора по кафедре «Физика металлов и материаловедение».

В 2000 году Александр Евгеньевич был избран по конкурсу на должность заведующего кафедрой «Физика металлов и материаловедение», которой руководил до сентября 2007 года. Кафедра за этот период установила сотрудничество с ИМЕТ им. А.А. Байкова РАН, МАТИ, МАИ, ЦНИИ Чермет им. И.П. Бардина, Объединённым институтом ядерных исследований, МИСиС и Берлинским техническим университетом.

Начиная с 2008 года работал доцентом кафедры «Производство и ремонт ракетно-артиллерийского вооружения» Тульского артиллерийского инженерного института.

В 2013 году Александр Евгеньевич был принят на работу профессором в Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого и, благодаря своему опыту, знаниям и целеустремленности в 2017 году был избран главным научным сотрудником кафедры технологии и сервиса. За время своей работы в ТГПУ им. Л.Н. Толстого Александр Евгеньевич стал одним из самых авторитетных научных сотрудников и преподавателей, заслужив глубокое уважение коллег и студентов.

Область научных интересов Александра Евгеньевича Гвоздева – экстремальные эффекты и причины изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях. Александр Евгеньевич разработал комплексный подход и методику планирования, исследования и анализа экстремальных эффектов изменения характеристик прочности и пластичности труднодеформированных сталей и металлических сплавов на основе полиморфных и мономорфных металлов с применением синтеза нестандартных оптимальных планов эксперимента высоких порядков и моделирования процессов и состояний. На основе предложенного комплексного подхода выявил природу экстремальных эффектов и причин изменения прочности и пластичности в гетерофазных металлических системах традиционного металлургического передела и порошкового способа производства с различной дисперсностью карбидных фаз, ковочных сплавов на основе алюминия, металлического сплава меди с цинком и др. при термомеханических воздействиях и в предпереходных состояниях перед фазовыми превращениями I и II рода.

За время своей научно-исследовательской деятельности, Александр Евгеньевич опубликовал, в соавторстве более 850 научных работ – статей, учебных, учебно-методических пособий и учебников, монографий, патентов и свидетельств государственной регистрации программ для ЭВМ.

Александр Евгеньевич Гвоздев – дипломант всесоюзного конкурса на соискание премий им. Д.К. Чернова. Лауреат премии им. С.И. Мосина, первой премии «Наследники Демидовых» им. Н. Демидова. Награжден юбилейным знаком «За заслуги перед университетом» и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ. Много лет работал членом экспертного совета ВАК РФ по металлургии и металловедению. Являлся членом Академии проблем качества РФ и Ассоциации металловедов России. Входил в состав двух диссертационных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций. Преподаватель высшей школы. В 2018 году был награжден национальной премией «Профессор года». Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. Ветеран труда.

Александр Евгеньевич всегда был отзывчивым, чутким и неравнодушным к чужим проблемам, протягивал руку помощи нуждающимся в ней, поддерживал не только словом, но и делом. Повседневное общение с Александром Евгеньевичем приносило не только позитив, радость и заряд энергии, но и помогало каждому обогатить себя ценным опытом.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким Александра Евгеньевича Гвоздева в связи с его кончиной.

А.Н. Сергеев, С.Н. Кутепов, Ю.С. Дорохин, П.Н. Медведев, А.Н. Чуканов, Д.В. Малий, Д.С. Клементьев, Е.В. Цой, Н.В. Артамонова, И.А. Янчева, В.А. Терешин, Н.М. Добровольский, Н.Н. Добровольский, А.Г. Колмаков, А.Д. Бреки, Е.В. Агеев, О.М. Губанов, А.А. Калинин, О.В. Кузовлева, И.В. Минаев.

DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-3-306-307

Памяти Алексея Николаевича Паршина

Некролог

7 ноября 1942 – 18 июня 2022

18 июня 2022 г. от нас ушел выдающийся советский и российский математик, академик, один из самых ярких представителей Московской школы алгебраической геометрии, заведующий отделом алгебры Математического института имени В. А. Стеклова Российской Академии Наук Алексей Николаевич Паршин.

Алексей Николаевич родился 7 ноября 1942 г. в городе Свердловске, но уже через год семья переехала в Москву. В 1959 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, который окончил в 1964 г. После окончания МГУ он поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Его научным руководителем был И. Р. Шафаревич. С 1968 г. А. Н. Паршин работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

Алексей Николаевич Паршин — ярчайший представитель арифметического направления в алгебраической геометрии.

Уже дипломная работа Алексея Николаевича Паршина — крупное достижение. В дипломной работе им была построена теория итерированных интегралов, которая связана с некоммутативным якобиевым многообразием римановой поверхности.

Наиболее известным и выдающимся является вклад Алексея Николаевича в проблему Морделла, выдвинутую английским математиком Л. Морделлом в 1922 г. Отметим, что формулировку гипотезы Морделла в упрощенном варианте можно объяснить даже школьнику: количество точек над полем рациональных чисел на гладкой плоской алгебраической кривой степени больше 3 конечно. Алексей Николаевич доказал, что гипотеза Морделла сводится к гипотезе Шафаревича о конечности числа классов изоморфизма абелевых многообразий с заданными свойствами. В мировую математическую литературу вошел “трюк Паршина” из его работы по гипотезе Морделла, который широко используется в современных работах. Впоследствии этот результат Алексея Николаевича был использован немецким математиком Г. Фальтингсом в его доказательстве гипотезы Морделла, за что Г. Фальтингс получил премию Филдса в 1986 году. Отметим, что решение гипотезы Морделла требует колоссальной техники из алгебраической геометрии. Вклад Алексея Николаевича в проблему Морделла составил его кандидатскую диссертацию. За эту работу он также получил приглашение выступить с докладом на Международном математическом конгрессе в Ницце в 1970 г.

Другое арифметическое направление, которым Алексей Николаевич занимался на протяжении всей жизни, в том числе и с учениками — это многомерные локальные поля, многомерные адели и их приложения к алгебро-геометрическим вопросам, а также к многомерной теории полей классов, то есть к описанию групп Галуа, приходящих из полей рациональных функций арифметических многообразий, и к проблемам арифметических дзета-функций, которые обобщают обычные дзета-функции Римана и Дедекинда на арифметические многообразия. Работы в этом направлении вошли в его докторскую диссертацию.

В середине 90-х годов Алексей Николаевич начинает интересоваться интегрируемыми системами. Связующим мостом с его предыдущими исследованиями здесь послужили многомерные локальные поля $\mathbb{C}((t_1))\dots((t_n))$, изучаемые им ранее. Его интересуют уравнения КдФ (Кортевега де Фриза) и КП (Кадомцева-Петвиашвили), связанные с солитонными уравнениями. Явные решения этих уравнений можно было получать при помощи алгебраических кривых, а также при помощи иерархий и бесконечномерных грассманианов. Алексей Николаевич пишет несколько работ, где строится обобщение иерархии Кадомцева-Петвиашвили на двумерный случай и ее связь с алгебраическими поверхностями.

Позже Алексей Николаевич развивал теорию представлений дискретных групп Гейзенберга. Опять же, конечной целью для приложений этой теории выступали проблемы дзета-функций арифметических многообразий. Работы, связанные с теорией представлений дискретных групп Гейзенберга, вошли в его пленарный доклад на Международном математическом конгрессе в Хайдерабаде в 2010 г.

Помимо упомянутых докладов на Международных математических конгрессах, за выдающиеся научные достижения А. Н. Паршин был отмечен премией Московского математического общества, премией Гумбольдта (ФРГ), премией им. И. М. Виноградова РАН, золотой медалью им. П. Л. Чебышева РАН, ученой степенью доктора honoris causa Университета Париж-XIII, а также был избран академиком РАН и членом Academia Europaea.

Список научных трудов А. Н. Паршина можно найти на сайте: http://www.mathnet.ru/ /person/11177

Кроме математических работ у Алексея Николаевича были работы по истории математики, философии математики, русской религиозной философии.

Алексей Николаевич много помогал другим людям, всегда щедро делился своими математическими идеями. Он очень живо реагировал на все происходящее вокруг. Он занимал активную общественную позицию: в последние годы он, не жалея времени и сил, боролся с реформой Академии наук и с наукометрией.

Светлая память об Алексее Николаевиче сохранится в сердцах всех тех, кто его знал.

С. О. Горчинский, Н.М. Добровольский, А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 23 Выпуск 3

THE EDITORIAL BOARD

Volume 23 Issue 3

TABLE OF CONTENTS

Volume 20 Issue 3