**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 215, № 2
май, 2023**

О. В. Починка[*], Е. А. Таланова[*†]

МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМА С НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ, ИМЕЮЩИМИ ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ МОРСА

Рассмотрены 3-диффеоморфизмы Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех неподвижных точек с попарно различными индексами Морса. На сегодняшний день открытым является вопрос о том, какие замкнутые 3-многообразия допускают такие диффеоморфизмы. Известно, что множество этих многообразий содержит все линзовые пространства. Более того, на всех многообразиях, кроме $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, рассматриваемые диффеоморфизмы имеют гетероклинические кривые. Установлено, что число гетероклинических кривых диффеоморфизма на заданном многообразии можно минимизировать, сведя его к конечному числу некомпактных гетероклинических кривых, являющихся ориентируемым пересечением инвариантных седловых многообразий. Полученный результат позволит в дальнейшем дать исчерпывающее описание замкнутых 3-многообразий, допускающих рассматриваемые диффеоморфизмы.

Ключевые слова: гетероклинические кривые, ориентируемое пересечение, диффеоморфизмы Морса–Смейла.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10389

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе рассмотрен класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на замкнутом 3-многообразии, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех неподвижных точек с попарно

Исследование поддержано грантом РНФ (договор 22-11-00027), кроме результатов раздела 2, полученных при поддержке международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (№ 075-15-2019-1931).

[*]Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде, Нижний Новгород, Россия. E-mail: opochinka@hse.ru

[†]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: eltalanova@rambler.ru

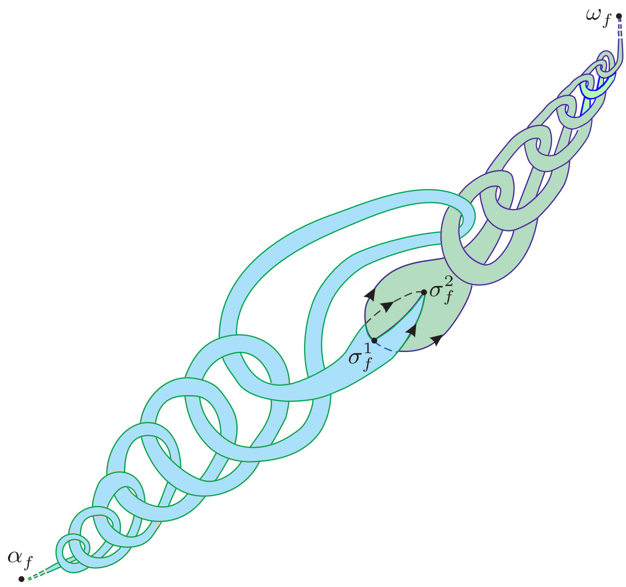

Рис. 1. Диффеоморфизм $f \in G$ с дико вложенными сепаратрисами.

различными индексами Морса. Известно [1], что инвариантные многообразия седловых точек рассматриваемого диффеоморфизма могут быть дико вложенными (см. рис. 1). Из-за этого топология многообразий, допускающих такие диффеоморфизмы, до сих пор не изучена и является открытой проблемой. В случае ручного вложения седловых сепаратрис несущим многообразием рассматриваемых диффеоморфизмов являются линзовые пространства [2]. В работе [3] было доказано, что для любого диффеоморфизма $f \in G$, заданного на многообразии, отличном от линзы $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, множество гетероклинических кривых непусто и содержит как минимум одну некомпактную кривую.

Все гетероклинические кривые диффеоморфизма $f \in G$ принадлежат двумерному устойчивому многообразию $W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1}$ седловой точки σ_f^1 с индексом Морса 1 и двумерному неустойчивому многообразию $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}$ седловой точки σ_f^2 с индексом Морса 2. Положим

$$H_f = W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1} \cap W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}.$$

Если гетероклиническая кривая $\gamma \subset H_f$ некомпактна, то она содержит вместе с любой точкой $x \in \gamma$ точку $f(x)$. Будем считать кривую γ ориентированной в направлении от x к $f(x)$. Также зафиксируем ориентацию на многообразиях $W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1}$ и $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}$. Для некомпактной гетероклинической кривой γ обозначим через $v_\gamma = (\vec{v}^{\,1}_\gamma, \vec{v}^{\,2}_\gamma, \vec{v}^{\,3}_\gamma)$ тройку векторов с началом в точке $x \in \gamma$, таких что $\vec{v}^{\,1}_\gamma$ – вектор нормали к $W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1}$, $\vec{v}^{\,2}_\gamma$ – вектор нормали к $W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}$ и $\vec{v}^{\,3}_\gamma$ – касательный вектор к ориентированной кривой γ. Назовем v_γ *репером некомпактной гетероклинической кривой* γ. Очевидно, что ориентация (правая или левая) репера v_γ не зависит от выбора точки x на γ.

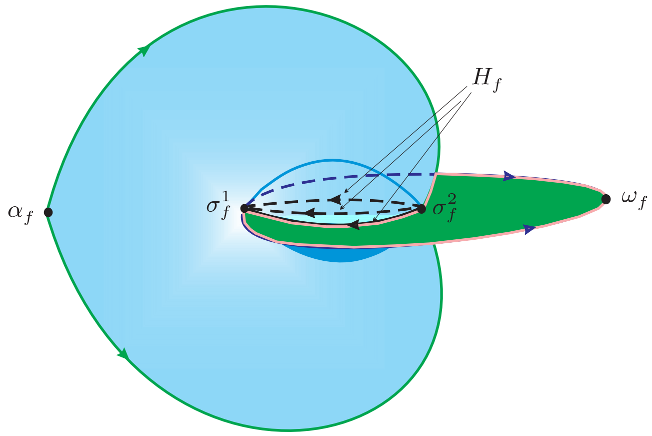

Рис. 2. Диффеоморфизм $f \in G$ с неориентируемым множеством H_f.

Множество H_f назовем *ориентируемым*, если оно состоит только из некомпактных кривых, и реперы всех кривых в H_f имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 2).

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего факта.

Теорема 1. *Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм $f \in G$ с по крайней мере одной некомпактной гетероклинической кривой. Тогда это многообразие также допускает диффеоморфизм $f' \in G$ с ориентируемым множеством гетероклинических кривых.*

2. ДИНАМИКА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ИЗ КЛАССА G

В настоящем разделе мы описываем некоторые динамические свойства диффеоморфизма $f \in G$.

Из определения класса следует, что неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит в точности из четырех точек ω_f, σ_f^1, σ_f^2, α_f с индексами Морса 0, 1, 2, 3 соответственно. В силу того, что у диффеоморфизма f отсутствуют пересечения одномерных сепаратрис седловых точек с двумерными, одномерные седловые многообразия содержат в своих замыканиях единственную узловую точку (см. предложение 2.3 в [4]). А именно,

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^1}) = W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^1} \cup \omega_f, \qquad \mathrm{cl}(W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^2}) = \alpha_f \cup W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^2}.$$

При этом множества $A_f = \mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^1})$, $R_f = \mathrm{cl}(W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^2})$ являются попарно не пересекающимися топологически вложенными окружностями [4] (см. предложение 2.3), возможно, дикими в узловых точках (см. рис. 1). Поскольку пересечение $H_f = W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1} \cap W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}$ непусто, в силу теоремы 2.1 из [4]

$$\mathrm{cl}(W^{\mathrm{s}}_{\sigma_1}) = W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1} \cup R_f, \qquad \mathrm{cl}(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}) = W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2} \cup A_f.$$

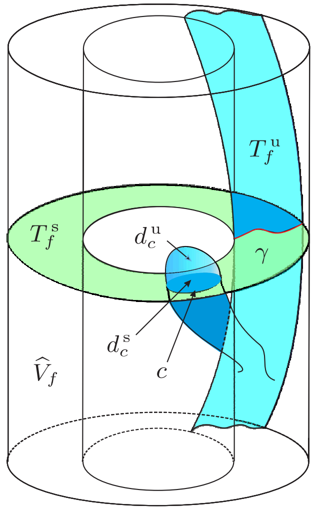

Рис. 3. Факторпространство $\widehat{V}_f$ (для получения пространства нужно склеить верхнее кольцо с нижним, а также внутреннее с внешним).

В силу теоремы 1.1 из [5] множества A_f и R_f являются глобальными аттрактором и репеллером соответственно. Положим

$$V_f = M^3 \backslash (A_f \cup R_f).$$

В силу теоремы 1.2 из [5] пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ является гладким замкнутым ориентируемым 3-многообразием, а естественная проекция $p_f\colon V_f \to \widehat{V}_f$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм

$$\eta_f\colon \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z},$$

ставящий в соответствие элементу $[\hat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ число $\mu \in \mathbb{Z}$, такое что любое поднятие элемента $\hat{c}$ соединяет точку $x \in V_f$ с точкой $f^{\mu}(x)$. Положим

$$T_f^{\mathrm{s}} = p_f(W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1}), \qquad T_f^{\mathrm{u}} = p_f(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}), \qquad C_f = p_f(H_f).$$

3-Многообразие X называется *неприводимым*, если любая 2-сфера, цилиндрически вложенная в X, ограничивает в нем 3-шар.

Топологически вложенная в 3-многообразие X поверхность F называется *собственно вложенной*, если $\partial X \cap F = \partial F$. Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

1) существуют нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset \operatorname{int} F$ и вложенный 2-диск $D \subset \operatorname{int} X$, такой что $D \cap F = \partial D = c$;
2) существует 3-шар $B \subset \operatorname{int} X$, такой что $F = \partial B$.

Поверхность F, не являющаяся сжимаемой в X, называется *несжимаемой* в X.

Предложение 1 (лемма 2 в [6]). *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедливо следующее (см. рис. 3):*

1) *множества T^{s}_f и T^{u}_f являются гладко вложенными 2-торами в $\widehat{V}_f$, такими что $\eta_f(i_{T^{\mathrm{s}}_f *}) = \eta_f(i_{T^{\mathrm{u}}_f *}) = \mathbb{Z}$, где $i_{T^{\mathrm{s}}_f}\colon T^{\mathrm{s}}_f \to \widehat{V}_f$ и $i_{T^{\mathrm{u}}_f}\colon T^{\mathrm{u}}_f \to \widehat{V}_f$ – отображения включения;*
2) *многообразие $\widehat{V}_f$ является неприводимым, и торы T^{s}_f, T^{u}_f являются несжимаемыми в нем;*
3) *любая кривая $c \subset C_f$, такая что $\eta_f([c]) = 0$, стягиваема (или не стягиваема) одновременно на обоих торах $T^s_f z$ и T^u_f.*

Пусть U_A – захватывающая окрестность аттрактора A_f. Введем обозначение $F_A = U_A \backslash f(U_A)$, тогда $\mathrm{cl}(F_A)$ – фундаментальная область ограничения диффеоморфизма f на V_f. Положим $\widehat{V}_A = \mathrm{cl}(F_A)/f$, тогда $\widehat{V}_A$ – гладкое замкнутое 3-многообразие, полученное из $\mathrm{cl}(F_A)$ отождествлением границ в силу диффеоморфизма f. Обозначим через $p_A\colon \mathrm{cl}(F_A) \to \widehat{V}_A$ естественную проекцию. Рассмотрим семейство $E_f \in Diff(M^3)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла, таких что для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ имеет место равенство $\Omega_{f'} = \Omega_f$ и диффеоморфизм f' совпадает с диффеоморфизмом f на U_A и в некоторой окрестности репеллера R_f. Для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ положим $\hat{l}^{\mathrm{s}}_{f'} = p_A(W^{\mathrm{s}}_{\sigma^1_f} \cap F_A)$ и $\hat{l}^{\mathrm{u}}_{f'} = p_A(W^{\mathrm{u}}_{\sigma^2_f} \cap F_A)$.

Предложение 2 (лемма 1 в [6]). *Пусть $\hat{h}\colon \widehat{V}_A \to \widehat{V}_A$ есть изотопный тождественному диффеоморфизм. Тогда существует гладкое по t семейство диффеоморфизмов $\zeta_t \subset E_f$, такое что $\zeta_0 = f$, $\zeta_1 = f'$ и $\hat{l}^{\mathrm{u}}_{f'} = \hat{h}(\hat{l}^{\mathrm{u}}_f)$, $\hat{l}^{\mathrm{s}}_{f'} = \hat{l}^{\mathrm{s}}_f$.*

Предложение 3 (теорема 1 в [6]). *Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм $f \in G$. Тогда это многообразие также допускает диффеоморфизм $f' \in G$, не имеющий компактных гетероклинических кривых, стягиваемых на $W^{\mathrm{s}}_{\sigma^1_f} \backslash \sigma^1_f$.*

3. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В настоящем разделе мы доказываем теорему 1: если многообразие M^3 допускает диффеоморфизм $f \in G$ с по крайней мере одной некомпактной гетероклинической кривой, то это многообразие допускает диффеоморфизм $f' \in G$ с ориентируемым множеством гетероклинических кривых.

Доказательство. Пусть $f \in G$ и множество H_f непусто. В силу предложения 3, не уменьшая общности, можно считать, что множество H_f не содержит компактных гетероклинических кривых. Тогда H_f состоит только из некомпактных гетероклинических кривых, и с каждой такой кривой связан либо положительный, либо отрицательный репер. Покажем, что если множество H_f неориентируемо, то число кривых в нем можно уменьшить как минимум на две.

Для этого заметим, что в силу предложения 1 множество $C_f = p_f(H_f)$ состоит из простых замкнутых кривых c, таких что $\eta_f([c]) \neq 0$. Следовательно, каждая такая кривая является существенной на обоих торах T^{s}_f, T^{u}_f. Поскольку отображение p_f является накрытием, с каждой такой кривой также связан положительный или отрицательный репер, соответствующий кривой $\gamma \subset H_f$, такой что $c = p_f(\gamma)$. Кривые из множества C_f имеют одинаковый гомотопический тип на торе T^{s}_f (на торе T^{u}_f), см., например, [7], поэтому множество $T^{\mathrm{s}}_f \backslash C_f$ (соответственно множество $T^{\mathrm{u}}_f \backslash C_f$)

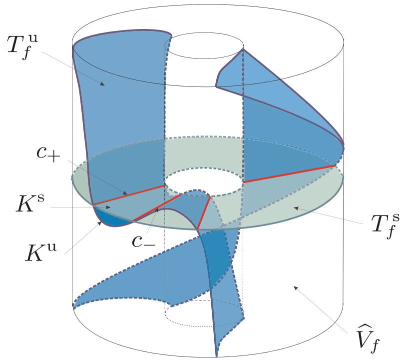

Рис. 4. Проекции гетероклинических кривых с реперами разных знаков в пространство $\widehat{V}_f$.

состоит из конечного числа колец. В силу неориентируемости множества H_f найдутся кривые $c_+, c_- \subset C_f$, имеющие соответственно положительный и отрицательный репер и ограничивающие компоненту связности K^{s} множества $T_f^{\mathrm{s}}\backslash C_f$, а также компоненту связности K^{u} множества $T_f^{\mathrm{u}}\backslash C_f$ (см. рис. 4). Таким образом, множество $T = K^{\mathrm{s}}\cup K^{\mathrm{u}}\cup c_+\cup c_-$ является двумерным тором. Покажем, что тор T ограничивает заполненный тор в $\widehat{V}_f$, внутренность которого не пересекается с $T_f^{\mathrm{s}} \cup T_f^{\mathrm{u}}$.

Действительно, рассмотрим трубчатую окрестность N^{s} тора T_f^{s}. Тогда в точности одна из компонент связности границы множества $N^{\mathrm{s}} \cup K^{\mathrm{u}}$ является тором T' в $\widehat{V}_f$, таким что $(T' \cap T_f^{\mathrm{u}}) \subset K^{\mathrm{u}}$. Рассмотрим пространство орбит $\widehat{V}_{\omega_f} = (W^{\mathrm{s}}_{\omega_f}\backslash\omega_f)/f$. Согласно предложению 2.3 в [4] оно диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Обозначим через p_ω естественную проекцию $p_{\omega_f}: W^{\mathrm{s}}_{\omega_f}\backslash\omega \to \widehat{V}_{\omega_f}$. Положим $\hat{A}_f = p_{\omega_f}(A_f\backslash\sigma_f^1)$. В силу предложения 2.3 в [4] $\hat{A}_f$ – пара окружностей, гладко вложенных в $\widehat{V}_{\omega_f}$. С другой стороны, в силу теоремы 2.1 в [4]

$$M^3 = W^{\mathrm{s}}_{\omega_f} \cup W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^1} \cup W^{\mathrm{s}}_{\sigma_f^2} \cup W^{\mathrm{s}}_{\alpha_f}.$$

Тогда $V_f\backslash W^{\mathrm{s}}_{\sigma_1} = W^{\mathrm{s}}_{\omega}\backslash A_f$, следовательно, многообразия $\widehat{V}_f\backslash T_f^{\mathrm{s}}$ и $\widehat{V}_{\omega_f}\backslash\hat{A}_f$ гомеоморфны. При этом торы $p_{\omega_f}(p_f^{-1}(\partial N^{\mathrm{s}}))$ ограничивают трубчатые окрестности $N_{\hat{A}_f}$ узлов $\hat{A}_f$ в многообразии $\widehat{V}_{\omega_f}$. Также корректно определен тор $\widetilde{T}' = p_{\omega_f}(p_f^{-1}(T'))$, пересекающийся с трубчатой окрестностью одного из узлов по гомотопически нетривиальному кольцу $\widetilde{K}^{\mathrm{s}}$ (см. рис. 5).

Таким образом, тор $\widetilde{T}'$ гомотопически нетривиально вложен в $\widehat{V}_{\omega_f}$. Поскольку заполненные торы $N_{\hat{A}_f}$ также гомотопически нетривиально вложены в $\widehat{V}_{\omega_f}$, они не содержатся там ни в каком 3-шаре. Тем самым многообразие $\widetilde{W} = \widehat{V}_{\omega_f}\backslash \operatorname{int} N_{\hat{A}_f}$ неприводимо, следовательно, тор $\widetilde{T}'$ ограничивает в этом многообразии заполненный тор $\widetilde{V}'$ (см., например, [8], § 1.2, п. (4)). Каждая компонента связности множества $p_{\omega_f}(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}\backslash(H_f\cup\sigma_f^2))$ имеет непустое пересечение с множеством $\operatorname{int} N_{\hat{A}_f}$, поэтому

$$\operatorname{int}\widetilde{V}' \cap p_{\omega_f}(W^{\mathrm{u}}_{\sigma_f^2}\backslash(H_f\cup\sigma_f^2)) = \varnothing.$$

Тогда $p_f(p_{\omega_f}^{-1}(\widetilde{V}'))$ – заполненный тор в $\widehat{V}_f$, который в объединении с частью окрестности N^{s} дает искомый заполненный тор.

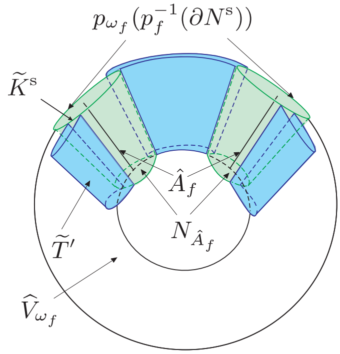

Рис. 5. Проекции инвариантных седловых многообразий в пространство $\widehat{V}_{\omega_f}$.

Обозначим как $T_f'^{\mathrm{u}}$ двумерный тор, полученный сглаживанием тора $(T_f^{\mathrm{u}} \setminus K^{\mathrm{u}}) \cup K^{\mathrm{s}}$, такой что $T_f'^{\mathrm{u}} \cap T_f^{\mathrm{s}} = \varnothing$ вблизи кривых c_+, c_-. По построению существует изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_f$, для которого $\hat{h}(T_f^{\mathrm{u}}) = T_f'^{\mathrm{u}}$. Тогда в силу предложения 2 существует дуга $\zeta_t \subset E_f$, такая что $\zeta_0 = f$, $\zeta_1 = f'$ и $T_{f'}^{\mathrm{u}} = T_f'^{\mathrm{u}}$, $T_{f'}^{\mathrm{s}} = T_f^{\mathrm{s}}$. Соответственно, диффеоморфизм $f' \in G$ задан на том же многообразии M^3, что и f, но имеет на две гетероклинические кривые меньше.

Продолжая этот процесс, мы построим в классе G диффеоморфизм $g : M^3 \to M^3$ с ориентируемым множеством H_g, что и завершает доказательство теоремы.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] O. Pochinka, E. Talanova, D. Shubin, *Knot is a complete invariant of a Morse–Smale 3-diffeomorphism with four fixed points*, arXiv: 2209.04815.

[2] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56.

[3] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.

[4] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2-and 3-Manifolds*, Developments in Mathematics, **46**, Springer, Cham, 2016.

[5] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология*. II, Труды МИАН, **271**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 111–133.

[6] В. И. Шмуклер, О. В. Починка, “Бифуркации, меняющие тип гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма Морса–Смейла”, *ТВИМ*, 2021, № 1, 101–114.

[7] D. Rolfsen, “Knots and links”, Mathematics Lecture Series, **7**, Publish or Perish Press, Berkeley, CA, 1976.

[8] A. Hatcher, *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, 2007, https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf.

Поступила в редакцию 24.10.2022,
после доработки 12.12.2022,
принята к публикации 15.12.2022