

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Талецкий, О количестве наименьших доминирующих множеств в деревьях, *Матем. заметки*, 2023, том 113, выпуск 4, 577–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 85.249.18.84

25 апреля 2023 г., 16:27:25





УДК 519.17

О количестве наименьших доминирующих множеств в деревьях

Д. С. Талецкий

Рассматривается класс деревьев, степень каждой вершины которых не превосходит целого числа d . Показано, что при $d = 4$ каждое n -вершинное дерево из этого класса содержит не более $(\sqrt{2})^n$ наименьших доминирующих множеств (НДМ), и описана структура деревьев, содержащих ровно $(\sqrt{2})^n$ НДМ. С другой стороны, при $d = 5$ для каждого $n \geq 1$ построено n -вершинное дерево, содержащее более $(1/3) \cdot 1.415^n$ НДМ. Кроме того, показано, что каждое n -вершинное дерево содержит менее 1.4205^n НДМ.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: доминирующее множество, наименьшее доминирующее множество, дерево.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13571>

1. Введение

Доминирующим множеством графа называется такое подмножество его вершин D , что любая вершина не из D смежна хотя бы с одной вершиной из D . Доминирующее множество называется *наименьшим*, если оно является наименьшим по мощности. *Числом доминирования* $\gamma(G)$ графа G называется мощность его наименьшего доминирующего множества. Мы будем использовать сокращения “ДМ” и “НДМ” для терминов “доминирующее множество” и “наименьшее доминирующее множество” соответственно.

Известно, что любой граф содержит нечетное количество ДМ [1]. В 2006 г. Брод и Скупиен в статье [2] описали деревья, содержащие максимальное и минимальное количество ДМ в классе всех n -вершинных деревьев. Звезда S_n является единственным n -вершинным деревом, содержащим максимально возможное количество ДМ. Однако существует экспоненциально много n -вершинных деревьев, содержащих минимально возможное количество ДМ. Позднее Вагнер в работе [3] обобщил этот результат на некоторые другие классы графов. В 2022 г. в работе [4] для всех $k \geq 2$ была описана структура деревьев, содержащих максимальное и минимальное количество k -ДМ (таких подмножеств D_k вершин дерева, что каждая вершина не из D_k смежна хотя бы с k вершинами из D_k).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00194).

На сегодняшний день известно сравнительно мало оценок на количество НДМ в деревьях и лесах. В работе [5] даются три эквивалентных условия, при которых дерево содержит единственное НДМ. Вопрос о том, может ли дерево с числом доминирования γ содержать более чем 2^γ НДМ, оставался открытым до 2017 г., когда в работе [6] Биен привел пример такого дерева. С другой стороны, Альварадо и др. в работе [7] доказали, что лес с числом доминирования γ содержит не более чем 2.4606^γ НДМ.

В настоящей работе получены новые оценки максимально возможного количества НДМ в n -вершинном дереве. Показано, что если максимальная степень d вершин дерева не превосходит 4, то оно содержит не более чем $(\sqrt{2})^n$ НДМ. Интересно, что уже в случае $d = 5$ это утверждение неверно. Для любого $n \geq 1$ приведен пример дерева T_n , содержащего более чем $(1/3) \cdot 1.415^n$ НДМ. Кроме того, доказано, что каждое n -вершинное дерево содержит менее 1.4205^n НДМ.

2. Некоторые определения и обозначения

Как обычно, множества вершин и ребер простого неориентированного графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Для вершины $v \in V(G)$ через $\deg_G(v)$ обозначается ее степень, а через $N_G[v]$ обозначается *замкнутая окрестность*, т.е. множество, состоящее из этой вершины и всех смежных с ней вершин. В случае, когда выбор графа G ясен из контекста, мы будем обозначать степень и замкнутую окрестность вершины v через $\deg(v)$ и $N[v]$ соответственно. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная степень вершин графа G .

Деревом называется связный граф без циклов. Вершина дерева степени 1 называется *листом*. Назовем вершину *предлистовой* или *предлистом*, если она смежна хотя бы с одним листом. *Присоединением предлиста степени 2* к вершине v дерева будем называть добавление в это дерево вершин u_1, u_2 и ребер u_1u_2, u_2v . Назовем дерево *разделимым*, если из него можно удалить ребро таким образом, чтобы в полученном лесе количество НДМ осталось прежним, и *неразделимым* в противном случае. *Диаметром* $\text{diam}(T)$ дерева T называется максимально возможное расстояние между его вершинами. Простой путь $X = x_1x_2x_3 \dots$ дерева T называется *диаметральным*, если он состоит из $\text{diam}(T) + 1$ попарно различных вершин. Очевидно, что концы каждого диаметрального пути дерева являются листьями.

Через $\partial_M(G)$ обозначим количество НДМ, которое содержит граф G . Обозначим через $\partial_M^+(G, v)$ (соответственно $\partial_M^-(G, v)$) количество НДМ графа G , которые содержат (соответственно не содержат) вершину v . Назовем вершину v графа G *универсальной*, если $\partial_M^+(G, v) = \partial_M(G)$, и *пустой*, если $\partial_M^-(G, v) = \partial_M(G)$.

Пусть множество D является некоторым НДМ дерева T . Обозначим через $\phi(D)$ множество, полученное заменой в D всех листьев T на смежные с ними предлистья. Легко видеть, что множество $\phi(D)$ определено однозначно и также является НДМ.

Обозначим через $W_{a,b}$ дерево, полученное из пути (v_1, v_2, v_3) присоединением $a \geq 0$ предлистьев степени 2 к вершине v_1 и $b \geq 0$ предлистьев степени 2 к вершине v_3 . Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\partial_M(W_{a,b}) = \partial_M^+(W_{a,b}, v_1) + \partial_M^+(W_{a,b}, v_2) + \partial_M^+(W_{a,b}, v_3) = 2^a(2^b - 1) + 2^{a+b} + 2^b(2^a - 1).$$

Пусть дерево T содержит поддереву $W_{a,b}$, где $a \geq 1$ и $b \geq 0$. Назовем это поддерево *крайним*, если его вершина, смежная с b предлистьями степени 2, является единственной, смежной с другими вершинами T (см. пример на рис. 1). Будем называть эту вершину *контактной* вершиной крайнего поддерева.

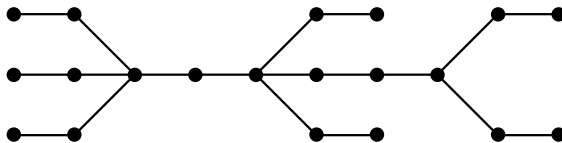


Рис. 1. Пример дерева с двумя крайними поддеревьями $W_{3,2}$ и $W_{2,0}$.

Будем говорить, что множество D доминирует вершину v дерева T , если

$$N[v] \cap D \neq \emptyset.$$

Обозначим через $\widehat{\partial}_M(W_{a,b})$ количество множеств мощности $\gamma(W_{a,b})$ поддерева $W_{a,b}$, которые доминируют все его вершины, кроме, быть может, контактной вершины. Нетрудно видеть, что $\widehat{\partial}_M(W_{a,b}) = \partial_M(W_{a,b}) + 2^a$. Очевидно, что имеет место неравенство

$$\frac{\partial_M(W_{3,b})}{\widehat{\partial}_M(W_{3,b})} \geq \frac{\partial_M(W_{3,0})}{\widehat{\partial}_M(W_{3,0})} = \frac{15}{23}.$$

Назовем n -вершинное дерево *максимальным*, если оно содержит максимально возможное количество НДМ среди всех n -вершинных деревьев. Аналогично, назовем n -вершинное дерево k -*максимальным* (где $k \geq 2$), если оно содержит максимально возможное количество НДМ среди деревьев со степенями всех вершин не более чем k . Заметим, что если дерево T не является $\Delta(T)$ -максимальным, то оно не является и максимальным, но обратное, вообще говоря, неверно.

3. Предварительные результаты

3.1. Универсальные, пустые и предлистовые вершины.

ЛЕММА 1. *Если в дереве T найдется вершина v , смежная хотя бы с двумя листьями u_1 и u_2 , то вершина v универсальна, а листья u_1 и u_2 пусты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что вершина v не универсальна. Тогда найдется НДМ D , не включающее в себя v . Значит, $u_1, u_2 \in D$. Рассмотрим множество $D' = (D \cup \{v\}) \setminus \{u_1, u_2\}$. Очевидно, что если D является доминирующим в T , то D' также является доминирующим, но тогда D не является наименьшим доминирующим, противоречие. Таким образом, вершина v универсальна, следовательно, листья u_1 и u_2 являются пустыми.

ЛЕММА 2. *Для любого дерева T и его вершины v , которая не является листом или предлистом, имеют место следующие утверждения:*

- 1) *если все соседи v являются предлистьями, то вершина v является пустой;*
- 2) *если все соседи v , кроме вершины w , являются предлистьями, а вершина w смежна хотя бы с одним предлистом, то вершина v является пустой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы; второе утверждение доказывается аналогично. Предположим, что вершина v не является пустой; тогда найдется некоторое НДМ D , включающее в себя v . Рассмотрим множество $\phi(D)$, которое также является НДМ в T . Это множество содержит вершину v , а также все смежные с ней вершины. Очевидно, что множество $\phi(D) \setminus \{v\}$ также является доминирующим в T и имеет меньшую мощность, чем D , противоречие. Значит, вершина v пустая, что и требовалось.

ЛЕММА 3. *Если дерево T содержит хотя бы одну универсальную или пустую вершину, то найдется лес F такой, что*

$$|V(F)| \leq |V(T)|, \quad \Delta(F) \leq \Delta(T), \quad \partial_M(F) > \partial_M(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что дерево T содержит универсальную вершину v . Очевидно, что $\deg(v) \geq 2$. Покажем, что в этом случае v смежна по меньшей мере с двумя пустыми вершинами. Пусть это не так и w_1, w_2, \dots, w_k – соседи вершины v , причем все они, кроме, быть может, вершины w_1 , не являются пустыми вершинами. Тогда существует хотя бы одно НДМ D , включающее в себя вершину v и вершины w_2, \dots, w_k . Очевидно, что множество $D' = (D \setminus \{v\}) \cup \{w_1\}$ также является НДМ, тогда вершина w_1 не является пустой, противоречие. Мы доказали, что вершина v смежна хотя бы с двумя пустыми вершинами w'_1, w'_2, \dots, w'_m . Удалим из T вершины w'_2, \dots, w'_m и все инцидентные им ребра, обозначим через F получившийся лес. Очевидно, что

$$|V(F)| < |V(T)|, \quad \Delta(F) \leq \Delta(T).$$

Кроме того, каждое НДМ дерева T будет НДМ и для леса F , откуда $\partial_M(T) \leq \partial_M(F)$. Рассмотрим НДМ D' леса T , содержащее все вершины множества $N[v] \setminus \{w'_1, \dots, w'_k\}$. Нетрудно видеть, что множество $(D' \setminus \{v\}) \cup \{w'_1\}$ является НДМ для леса F , тогда $\partial_M(F) > \partial_M(T)$, что и требовалось.

Предположим теперь, что дерево T без универсальных вершин содержит пустую вершину u . Поскольку в T нет универсальных вершин, то u смежна хотя бы с двумя непустыми вершинами u_1, \dots, u_k . Для каждого $1 \leq i \leq k$ обозначим через T_i максимальное по включению поддереву, содержащее вершину u_i и не содержащее вершину u . Обозначим через F_0 максимальный по включению лес, не содержащий вершину u и вершины поддеревьев T_1, \dots, T_k . Заметим, что если лес F_0 непуст, то в каждой его компоненте связности найдется ровно одна вершина, которая пуста и смежна с u в дереве T . Обозначим через F результат удаления вершины u из T . Очевидно, что $\Delta(F) \leq \Delta(T)$. Легко видеть, что имеет место равенство $\gamma(T) = \gamma(F)$. Действительно, поскольку вершина u пуста в T , то $\gamma(T) \geq \gamma(F)$. Но если $\gamma(T) > \gamma(F)$, то для любого НДМ D леса F множество $D \cup \{u\}$ является НДМ в T и вершина u непуста, противоречие. Таким образом, имеем

$$\partial_M(F) = \partial_M(F_0) \cdot \prod_{i=1}^k \partial_M(T_i), \quad \partial_M(T) = \partial_M(F_0) \cdot \left(\prod_{i=1}^k \partial_M(T_i) - \prod_{i=1}^k \partial_M^-(T_i, u_i) \right).$$

Заметим, что при любом $1 \leq i \leq k$ вершина u_i не является универсальной в T_i (иначе она была бы универсальной в T , что невозможно по предположению). Тогда $\prod_{i=1}^k \partial_M^-(T_i, u_i) > 0$, откуда $\partial_M(F) > \partial_M(T)$, что и требовалось.

ЛЕММА 4. Если в дереве T найдутся смежные предлистовые вершины v_1 и v_2 , то имеет место равенство $\partial_M(T) = \partial_M(T - v_1v_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $N_l[v_1]$ (соответственно $N_l[v_2]$) множество, состоящее из вершины v_1 (соответственно v_2) и всех смежных с ней листьев. Обозначим через F результат удаления ребра v_1v_2 из дерева T . Нетрудно видеть, что как в дереве T , так и в лесе F каждое НДМ содержит ровно по одной вершине из множеств $N_l[v_1]$ и $N_l[v_2]$; тогда каждое НДМ дерева T будет являться НДМ для леса F и наоборот. Таким образом, $\partial_M(F) = \partial_M(T)$, что и требовалось.

ЛЕММА 5. Пусть T – некоторое n -вершинное дерево. Если существует n -вершинный лес F без изолированных вершин такой, что

$$\partial_M(F) > \partial_M(T), \quad \Delta(F) \leq \Delta(T),$$

то дерево T не является $\Delta(T)$ -максимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если такой лес F существует, то найдется n -вершинное дерево T' такое, что $\Delta(T') \leq \max(3, \Delta(F))$ и $\partial_M(T') > \partial_M(T)$. Если F является деревом, то положим $T' = F$. Предположим, что F содержит хотя бы две компоненты связности T_1 и T_2 , каждая из которых содержит не менее двух вершин. Заметим, что каждое дерево, состоящее не менее чем из двух вершин, содержит либо предлистовую вершину степени не более 2, либо предлистовую вершину, смежную хотя бы с двумя листьями (подойдут, например, предпоследние вершины некоторого диаметрального пути дерева). Покажем, что в каждом из следующих трех случаев можно соединить компоненты связности T_1 и T_2 таким образом, чтобы количество НДМ в получившемся дереве $T_{1,2}$ было не меньше, чем в исходном лесе $T_1 \cup T_2$.

Случай 1. Каждая из компонент T_1 и T_2 содержит хотя бы одну предлистовую вершину степени не более 2 (считаем, что путь P_2 состоит из двух предлистовых вершин степени 1). Выберем такие предлистовые вершины $u \in V(T_1)$ и $v \in V(T_2)$ и проведем ребро uv . По предыдущей лемме, количество НДМ в результате добавления ребра не изменится. При этом, как нетрудно видеть,

$$\Delta(T_{1,2}) \leq \max(3, \Delta(T_1), \Delta(T_2)).$$

Случай 2. В деревьях T_1 и T_2 найдутся вершины u и v , каждая из которых смежна не менее чем с двумя листьями. Выберем листья u' и v' , смежные с вершинами u и v соответственно, и проведем ребро $u'v'$. Очевидно, что $\Delta(T_{1,2}) = \max(\Delta(T_1), \Delta(T_2))$. По лемме 2 вершины u' и v' будут пустыми в дереве $T_{1,2}$. Тогда

$$\partial_M(T_{1,2}) = \partial_M(T_1 \cup T_2),$$

что и требовалось.

Случай 3. Одно из поддеревьев (будем считать, что T_1) содержит предлист u степени не более 2, а другое поддерево содержит предлист v , смежный не менее чем с двумя листьями v' и v'' . Проведем ребро uv' и покажем, что $\partial_M(T_{1,2}) \geq \partial_M(T_1 \cup T_2)$. По лемме 2 вершина v' является пустой в дереве $T_{1,2}$. По лемме 1 вершина v универсальна в лесе $T_1 \cup T_2$, тогда $\partial_M(T_{1,2}) \geq \partial_M^+(T_{1,2}, v) = \partial_M(T_1 \cup T_2)$, что и требовалось.

Таким образом, в результате замены леса $T_1 \cup T_2$ на дерево $T_{1,2}$ мы получили из леса F некоторый лес F_1 , содержащий на одну компоненту связности меньше, чем F , при этом $\partial_M(F_1) \geq \partial_M(F)$. Если F_1 является деревом, то положим $T' = F_1$, иначе будем повторять это преобразование до тех пор, пока не получим некоторое дерево F_k , положим $T' = F_k$. Поскольку $\Delta(F_k) \leq \Delta(T)$ и $\partial_M(F_k) > \partial_M(T)$, то условие леммы выполнено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого n -вершинного дерева T имеют место следующие утверждения:

1) если T содержит хотя бы одну универсальную или пустую вершину, то найдется n' -вершинное дерево T' такое, что $n' < n$, $\Delta(T') \leq \Delta(T)$ и $\partial_M(T')^{1/n'} > \partial_M(T)^{1/n}$;

2) если T разделимо, то найдется n' -вершинное дерево T' такое, что $n' < n$, $\Delta(T') \leq \Delta(T)$ и $\partial_M(T')^{1/n'} \geq \partial_M(T)^{1/n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение сразу же вытекает из лемм 3 и 5. Второе утверждение очевидным образом следует из определения разделимого дерева.

3.2. \mathcal{S} -разбиение дерева. Следующая структурная лемма играет ключевую роль при получении верхних оценок на количество НДМ в 4-максимальных и максимальных деревьях.

ЛЕММА 6. Пусть дерево T не содержит пустых вершин. Тогда существует единственное разбиение $\mathcal{S}(T)$ множества $V(T)$ на непересекающиеся подмножества, обладающие следующими свойствами:

1) имеет место равенство $\gamma(T) = |\mathcal{S}(T)|$, при этом любое НДМ дерева T содержит ровно одну вершину из каждого элемента разбиения $\mathcal{S}(T)$;

2) для любого элемента $S' \in \mathcal{S}(T)$ найдется вершина $v' \in V(T)$ такая, что $N[v'] = S'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение индукцией по количеству вершин n . База индукции $n \leq 5$ очевидна. Покажем, что если $n \geq 6$ и $\text{diam}(T) \leq 4$, то утверждение леммы выполнено. Если все нелистовые вершины T являются предлистьями, то каждый предлист смежен ровно с одним листом (иначе в дереве найдутся пустые листья) и каждый элемент $\mathcal{S}(T)$ состоит из предлиста и смежного с ним листа. Легко видеть, что такое разбиение удовлетворяет условию леммы и является единственным. Если же в T найдется вершина v , не являющаяся листом или предлистом, то легко видеть, что такая вершина единственна и все ее соседи являются предлистьями. Тогда по лемме 2 вершина v является пустой, что противоречит предположению.

Пусть теперь $n \geq 6$ и $\text{diam}(T) \geq 5$. Обозначим через $X = x_1x_2x_3x_4x_5 \dots$ некоторый диаметральный путь в T . Заметим, что $\deg(x_2) = 2$, в противном случае вершина x_2 смежна хотя бы с двумя листьями, которые по лемме 1 являются пустыми вершинами, что невозможно по условию. В зависимости от значения величин $\deg(x_3)$, $\deg(x_4)$ и $\deg(x_5)$ возможны следующие случаи.

Случай 1: $\deg(x_3) \geq 3$. В этом случае вершина x_3 либо является предлистовой, либо она смежна хотя бы с одной предлистовой вершиной x'_2 , отличной от x_2 и x_4 . Удалим из T вершины x_1 и x_2 и обозначим через T_1 получившееся дерево. Покажем, что если в T нет пустых вершин, то в T_1 также нет пустых вершин.

Вариант 1, а: вершина x_3 является предлистовой в T_1 . Тогда для любого НДМ D дерева T множество $D \setminus \{x_1, x_2\}$ является НДМ для дерева T_1 . Значит, в T_1 также нет пустых вершин.

Вариант 1, б: вершина x_3 не является предлистовой. Тогда она смежна хотя бы с одной предлистовой вершиной x'_2 , отличной от x_2 и x_4 . Поскольку в T нет пустых вершин и путь X диаметральный, то $\deg(x'_2) = 2$. Пусть некоторая вершина $x' \in V(T_1)$, отличная от x'_1 и x'_2 , является пустой в T_1 (заметим сразу, что вершина x'_2 является предлистовой в T_1 , поэтому она пустой быть не может). Тогда найдется НДМ D дерева T , включающее в себя вершины x_2, x'_2 и x' . Но тогда множество $D \setminus \{x_2\}$ является НДМ для дерева T_1 и вершина x' непуста в T_1 , противоречие. Предположим теперь, что вершина x'_1 пуста в T_1 . Поскольку дерево T не содержит пустых вершин, то для него найдется некоторое НДМ D_3 , включающее в себя вершину x_3 . Очевидно, что множество $D_3 \setminus \{x_1, x_2\}$ является НДМ для дерева T_1 . Если D_3 содержит x'_1 , то x'_1 не является пустой в T_1 , противоречие. Если же D_3 не содержит x'_1 , то множество $(D_3 \cup \{x'_1\}) \setminus \{x'_2\}$ содержит x'_1 и является НДМ для T_1 . Тогда вершина x'_1 не пуста в T_1 и мы снова получаем противоречие.

Таким образом, дерево T_1 не содержит пустых вершин, тогда по предположению индукции в T_1 найдется единственное разбиение $\mathcal{S}(T_1)$, удовлетворяющее условию леммы. Легко видеть, что разбиение $\mathcal{S}(T) = \mathcal{S}(T_1) \cup \{\{x_1, x_2\}\}$ также удовлетворяет условию леммы и является единственным для T , что и требовалось.

Случай 2: $\deg(x_3) = 2, \deg(x_4) \geq 3$. Возможны следующие варианты.

Вариант 2, а: вершина x_4 является предлистом. По лемме 2 вершина x_3 является пустой, что противоречит предположению.

Вариант 2, б: вершина x_4 смежна хотя бы с одной предлистовой вершиной x'_3 , отличной от вершин x_3 и x_5 . По лемме 2 вершина x_3 является пустой, что противоречит предположению.

Вариант 2, с: вершина x_4 смежна с некоторыми вершинами w_1, w_2, \dots, w_s , которые отличны от x_3 и x_5 и не являются предлистовыми (здесь $s \geq 1$). Поскольку путь X является диаметральным и T не содержит пустых вершин, то все соседи вершин w_1, w_2, \dots, w_s , отличные от x_4 , являются предлистьями степени 2. Удалим из T вершины x_1, x_2, x_3 и обозначим через T_2 получившееся дерево. Покажем, что если в T нет пустых вершин, то в T_2 также нет пустых вершин. Пусть это не так и T_2 содержит пустую вершину x' . Тогда найдется НДМ D дерева T , содержащее x' . Очевидно, что множество $D' = (D \setminus \{x_1\}) \cup \{x_2\}$ также является НДМ дерева T . При этом D' не содержит одновременно вершины x_3 и x_4 . Если D' содержит x_3 , то рассмотрим множество $D'' = (D' \setminus \{x_3\}) \cup \{x_4\}$, иначе положим $D'' = D'$. Очевидно, что D'' также является НДМ для T . Но тогда $D'' \setminus \{x_2\}$ является НДМ для T_2 и содержит x' , противоречие.

Таким образом, дерево T_2 не содержит пустых вершин. Тогда по предположению индукции в T_2 найдется единственное разбиение $\mathcal{S}(T_2)$, удовлетворяющее условию леммы. Покажем, что

$$N_{T_2}[x_4] = \{x_4, x_5, w_1, \dots, w_s\} \in \mathcal{S}(T_2).$$

Напомним, что все соседи вершин w_1, w_2, \dots, w_s , отличные от x_4 , являются предлистьями степени 2. Нетрудно видеть, что каждое НДМ дерева T_2 содержит не более одной вершины из множества $N_{T_2}[x_4]$. Действительно, пусть найдется НДМ D ,

содержащее хотя бы две вершины из $N_{T_2}[x_4]$. Тогда множество $(\phi(D) \setminus N_{T_2}[x_4]) \cup \{x_5\}$ также является доминирующим в T_2 , что противоречит минимальности D . Значит, ровно одна из вершин множества $N_{T_2}[x_4]$ входит в каждое НДМ T_2 ; при этом по условию каждая вершина из $N_{T_2}[x_4]$ непустая, что и требовалось.

Рассмотрим разбиение

$$\mathcal{S}(T) = (\mathcal{S}(T_2) \setminus \{N_{T_2}[x_4]\}) \cup \{\{x_1, x_2\}, N_T[x_4]\}.$$

Очевидно, что данное разбиение является единственным, удовлетворяющим условию леммы для дерева T , что и требовалось.

Случай 3: $\deg(x_3) = \deg(x_4) = 2$, $\deg(x_5) \geq 3$. Возможны следующие варианты.

Вариант 3, а: вершина x_5 является предлистовой. По лемме 2 вершины x_3 и x_4 являются пустыми, что противоречит условию.

Вариант 3, б: найдется вершина u , смежная с x_5 и с $\deg(u) - 1$ листом. В этом случае $\deg(u) = 2$, поскольку в дереве нет пустых вершин. Рассмотрим дерево T_3 , полученное удалением из T вершины u и смежного с ней листа u' . Покажем, что если T не содержит пустых вершин, то T_3 их тоже не содержит. Пусть это не так и найдется вершина v' , которая пуста в T_3 и непуста в T . Нетрудно видеть, что как в T_3 , так и в T каждое НДМ содержит ровно 2 вершины из множества $\mathcal{X}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Предположим, что $x' \notin \mathcal{X}_5$. Тогда найдется НДМ D' дерева T , которое содержит вершины x_2 , x_5 и x' . Нетрудно видеть, что множество $D' \setminus \{u, u'\}$ будет содержать вершину x' и являться НДМ для дерева T_3 , противоречие. Пусть теперь найдется вершина $x' \in \mathcal{X}_5$, которая является пустой в T_3 . Тогда найдется НДМ D'' дерева T , содержащее вершины x_6 и x' (если это не так и каждое НДМ дерева T , содержащее x_6 , не содержит x' , то вершина x' является пустой, что невозможно). Нетрудно видеть, что множество $D'' \setminus \{u, u'\}$ содержит x' и является НДМ в T_3 , противоречие.

Таким образом, T_3 не содержит пустых вершин и по предположению индукции существует единственное разбиение $\mathcal{S}(T_3)$. Тогда разбиение $\mathcal{S}(T_3) \cup \{\{u, u'\}\}$ будет единственным в T , что и требовалось.

Вариант 3, с: существует путь (u_1, u_2, u_3, x_5) такой, что вершина u_1 является листом, вершина u_2 смежна с $\deg(u_2) - 1$ листом, а вершина u_3 отлична от x_4 и x_6 и все ее соседи, отличные от x_5 , являются либо листьями, либо предлистьями. Если вершина u_3 предлистовая, то применим рассуждения из варианта 1, а. Покажем, что если u_3 не является предлистовой, то она пуста в T . Достаточно доказать, что каждое НДМ дерева содержит не более одной вершины из множества $\{x_3, x_4, x_5, u_3\}$. Пусть найдется НДМ D , содержащее хотя бы две вершины из этого множества. Нетрудно видеть, что множество $D' = (\phi(D) \setminus \{x_3, x_4, x_5, u_3\}) \cup \{x_5\}$ является НДМ и при этом $|D'| < |\phi(D)| = |D|$, противоречие. С другой стороны, каждое НДМ дерева T должно содержать хотя бы одну вершину из замкнутой окрестности $N[x_4]$, в которую не входит вершина u_3 . Таким образом, вершина u_3 пуста, что противоречит условию леммы.

Вариант 3, д: существует путь $(w_1, w_2, w_3, w_4, x_5)$ такой, что вершина w_4 отлична от вершин x_4 и x_6 . Если при этом $\max(\deg(w_2), \deg(w_3), \deg(w_4)) > 2$, то переименуем вершины и применим рассуждения из случаев 1 и 2. Если же $\deg(w_2) = \deg(w_3) = \deg(w_4) = 2$, то легко видеть, что вершины множества $\{x_3, x_4, w_3, w_4\}$ являются пустыми в T . Действительно, каждое НДМ дерева T должно содержать

хотя бы одну вершину из окрестностей $N[x_4]$ и $N[u_4]$. С другой стороны, как следует из рассуждений предыдущего варианта, каждое НДМ содержит не более одной вершины из множества $\{x_3, x_4, x_5, w_3, w_4\}$. Таким образом, T содержит пустые вершины, что противоречит условию леммы.

Случай 4: $\deg(x_2) = \deg(x_3) = \deg(x_4) = \deg(x_5) = 2$. Рассмотрим дерево T_4 , полученное из T удалением вершин x_1, x_2, x_3 . Докажем, что если T не содержало пустых вершин, то T_4 также их не содержит. Сначала покажем, что $\gamma(T) = \gamma(T_4) + 1$. С одной стороны, каждое НДМ дерева T содержит вершину из множества $\{x_1, x_2\}$, откуда $\gamma(T) \geq \gamma(T_4) + 1$. С другой стороны, для любого НДМ D' дерева T_4 множество $D' \cup \{x_2\}$ будет НДМ для дерева T , откуда $\gamma(T) \leq \gamma(T_4) + 1$.

Предположим, что некоторая вершина x' пуста в T_4 , но непуста в T . Тогда найдется НДМ D дерева T , включающее в себя x' . Рассмотрим множество $D' = D \setminus \{x_1, x_2\}$. Очевидно, что D' содержит не более одной вершины из множества $\{x_3, x_4\}$. Если D' содержит вершину x_3 , то рассмотрим множество $D'' = (D' \setminus \{x_3\}) \cup \{x_4\}$, иначе положим $D'' = D'$. Тогда D'' является НДМ для T_4 и при этом содержит вершину x' , противоречие. Таким образом, дерево T_4 не содержит пустых вершин.

По предположению индукции в T_4 существует единственное разбиение $\mathcal{S}(T_4)$. Очевидно, что оно включает в себя множество $\{x_4, x_5\}$. Нетрудно видеть, что разбиение

$$\mathcal{S}(T) = (\mathcal{S}(T_4) \setminus \{\{x_4, x_5\}\}) \cup \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$$

является единственным подходящим для дерева T . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого дерева T без пустых вершин имеют место следующие утверждения:*

- 1) *если элемент разбиения $S' \in \mathcal{S}(T)$ содержит хотя бы три вершины, то все они не являются ни листьями, ни предлистьями в T ;*
- 2) *если элемент разбиения $S'' \in \mathcal{S}(T)$ содержит две вершины, то одна из них является листом, а вторая смежным с ней предлистом;*
- 3) *если дерево T содержит хотя бы две вершины, то и каждый элемент разбиения $\mathcal{S}(T)$ содержит хотя бы две вершины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Предположим, что некоторый элемент S' такой, что $|S'| \geq 3$, содержит некоторый лист u' . В этом случае S' содержит и смежную с ним вершину u . Поскольку $\partial_M^+(T, u') + \partial_M^+(T, u) = \partial_M(T)$, то все вершины $S' \setminus \{u, u'\}$ являются пустыми в T , что невозможно. Если же S' содержит некоторый предлист w , но при этом не содержит лист w' , смежный с w , то, поскольку вершина w' не универсальна, она не может входить ни в одно множество разбиения $\mathcal{S}(T)$, противоречие. Таким образом, все элементы S' не являются листьями или предлистьями, что и требовалось.

Второе и третье утверждения следствия сразу же вытекают из утверждения 2 предыдущей леммы.

4. Случай 4-максимальных деревьев

ЛЕММА 7. *Для любого $n \geq 3$ если n -вершинное дерево T без пустых вершин является 4-максимальным, то все элементы разбиения $\mathcal{S}(T)$ содержат не более 3 вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого 4-максимального дерева T условие леммы не выполнено. Поскольку $\Delta(T) \leq 4$, то каждый элемент $\mathcal{S}(T)$ содержит не более 5 вершин. Возможны два случая.

Случай 1: найдутся некоторые вершины $w, w_1, w_2, w_3 \in V(T)$ такие, что верно соотношение

$$\{w, w_1, w_2, w_3\} = N[w] \in \mathcal{S}(T).$$

Для всех $1 \leq i \leq 3$ обозначим через T_i максимальное по включению поддерево T , содержащее вершины w и w_i и не содержащее других соседей вершины w . Обозначим через T'_i результат присоединения к вершине w дерева T_i листа w_0 . Обозначим через F_i результат удаления из T_i вершин w и w_i , а также всех инцидентных им ребер. При любом $1 \leq i \leq 3$ лес F_i непуст и не содержит изолированных вершин, поскольку по следствию 2 все вершины окрестности $N[w]$ не являются листьями или предлистьями.

Введем обозначения

$$A_i^+ = \partial_+(T_i, w_i), \quad A_i = \partial(F_i), \quad A_i^- = \partial_+(T'_i, w_0).$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \partial_M(T) &= \partial_M^+(T, w) + \partial_M^+(T, w_1) + \partial_M^+(T, w_2) + \partial_M^+(T, w_3) \\ &= A_1 A_2 A_3 + A_1^+ A_2^- A_3^- + A_1^- A_2^+ A_3^- + A_1^- A_2^- A_3^+. \end{aligned}$$

Удалим из дерева T вершины w и w_3 , а к вершинам w_1 и w_2 присоединим листья w'_1 и w'_2 соответственно (см. рис. 2). В полученном лесе F обозначим через T''_1 (соответственно через T''_2) компоненту связности, содержащую вершину w_1 (соответственно w_2). Тогда $F = T''_1 \cup T''_2 \cup F_3$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_M(F) &= (\partial_M^+(T''_1, w_1) + \partial_M^+(T''_1, w'_1)) \cdot (\partial_M^+(T''_2, w_2) + \partial_M^+(T''_2, w'_2)) \cdot \partial_M(F_3) \\ &= (A_1^+ + A_1) \cdot (A_2^+ + A_2) \cdot A_3 = A_1^+ A_2^+ A_3 + A_1^+ A_2 A_3 + A_1 A_2^+ A_3 + A_1 A_2 A_3. \end{aligned}$$

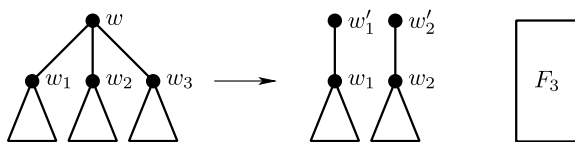


Рис. 2. Преобразование в случае 1.

Поскольку дерево T не содержит универсальных вершин, то для любого $1 \leq i \leq 3$ найдется некоторое НДМ леса F_i , не содержащее ни одной из вершин, смежных с вершиной w_i в дереве T . Тогда для любого $1 \leq i \leq 3$ имеет место строгое неравенство $A_i > A_i^-$. Кроме того, верно неравенство $A_i^+ \geq A_i$. Мы можем считать, что $A_1^+/A_1 \geq A_2^+/A_2 \geq A_3^+/A_3$. Тогда имеет место строгое неравенство $A_1^+ A_2^+ A_3 \geq A_1 A_2 A_3^+ > A_1^- A_2^- A_3^+$, откуда $\partial_M(F) > \partial_M(T)$. Значит, по лемме 5 дерево T не является 4-максимальным, противоречие.

Случай 2: найдутся некоторые вершины $w, w_1, w_2, w_3, w_4 \in V(T)$ такие, что верно соотношение

$$\{w, w_1, w_2, w_3, w_4\} = N[w] \in \mathcal{S}(T).$$

Для всех $1 \leq i \leq 4$ определим подграфы T_i, T'_i, F_i и введем обозначения A_i^+, A_i, A_i^- аналогично предыдущему случаю. Имеет место равенство

$$\partial_M(T) = A_1 A_2 A_3 A_4 + A_1^+ A_2^- A_3^- A_4^- + A_1^- A_2^+ A_3^- A_4^- + A_1^- A_2^- A_3^+ A_4^- + A_1^- A_2^- A_3^- A_4^+.$$

Удалим из дерева T вершину w_4 и все инцидентные ей ребра, а также ребро $w w_3$, после чего присоединим лист w'_3 к вершине w_3 . В полученном лесе F обозначим через T' компоненту связности, содержащую вершины w, w_1, w_2 , а через T'' – компоненту связности, содержащую вершины w_3 и w'_3 . Тогда $F = T' \cup T'' \cup F_4$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \partial_M(F) &= (\partial_M^+(T', w) + \partial_M^+(T', w_1) + \partial_M^+(T', w_2)) \\ &\quad \times (\partial_M^+(T'', w_3) + \partial_M^+(T'', w'_3)) \cdot \partial_M(F_4) \\ &= (A_1 A_2 + A_1^+ A_2^- + A_1^- A_2^+) \cdot (A_3^+ + A_3) \cdot A_4. \end{aligned}$$

Мы можем считать, что $A_1^+/A_1^- \geq A_3^+/A_3^- \geq A_4^+/A_4^- > A_4^+/A_4$, тогда имеет место строгое неравенство $A_1^+ A_2^- A_3^+ A_4 > A_1^- A_2^+ A_3^- A_4^+$. Следовательно, $\partial_M(F) > \partial_M(T)$ и по лемме 5 дерево T не является 4-максимальным, противоречие.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $n \geq 4$ каждое 4-максимальное n -вершинное дерево T содержит не более $(\sqrt{2})^n$ НДМ. Равенство $\partial_M(T) = (\sqrt{2})^n$ достигается, если и только если $n = 2l$ и T содержит ровно l предлистовых вершин, каждая из которых смежна с единственным листом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что условие теоремы выполнено при $n < 6$. Предположим, что при $n \geq 6$ найдутся деревья, для которых это условие не выполнено; выберем среди них дерево T с наименьшим количеством вершин. По следствию 1 если T содержит универсальные или пустые вершины, то оно содержит менее $(\sqrt{2})^n$ НДМ. Аналогично, нетрудно проверить, что если T разделимо, то по следствию 1 оно удовлетворяет условию теоремы, что противоречит предположению. Тогда по лемме 6 существует единственное \mathcal{S} -разбиение $\mathcal{S}(T)$. Поскольку дерево T неразделимо, оно не содержит смежных предлистовых вершин и разбиение $\mathcal{S}(T)$ содержит хотя бы один элемент S' из 3 вершин (случай $|S'| > 3$ невозможен по предыдущей лемме). По следствию 1 все вершины S' не являются листьями или предлистьями, откуда $\text{diam}(T) \geq 6$.

Обозначим через $X = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \dots$ некоторый диаметральный путь T (в качестве иллюстрации см. пример на рис. 3). Если вершина x_3 является предлистом, то в T есть пара смежных предлистьев x_2 и x_3 , тогда по лемме 4 дерево T разделимо, что противоречит предположению. Поскольку в T нет пустых вершин, то любой предлист T смежен с единственным листом. Таким образом, все соседи вершины x_3 , отличные от x_4 , являются предлистьями степени 2. Тогда по леммам 6 и 7 имеем $x_3 \in N[x_4] = \{x_3, x_4, x_5\} \in \mathcal{S}(T)$.

Докажем, что если $\text{deg}(x_5) \geq 3$, то все вершины множества $N[x_5] \setminus \{x_4, x_5, x_6\}$ являются предлистьями степени 2. Пусть это множество непусто, обозначим через w одну из входящих в него вершин. Предположим, что w не является предлистом, тогда найдутся такие вершины w_0 и w_1 , что

$$\{w, w_0, w_1\} = N[w_0] \in \mathcal{S}(T).$$

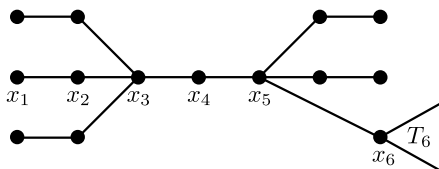


Рис. 3. Вид дерева T при $a = 3$ и $b = 2$.

По следствию 1 вершина w_1 не является листом и предлистом; тогда в T найдется путь (w_1, u', u'') , где вершина u' отлична от вершины w_0 . Но тогда путь $u''u'w_1w_0wx_5x_6\dots$ длиннее пути X , противоречие. Если же вершина w смежна с листом w' и при этом $\deg(w) \geq 3$, то обозначим через u соседа w , отличного от x_5 и w' . Если u является предлистом, то дерево T разделимо по лемме 4. Если же u не является предлистом, то найдутся такие вершины u_0 и u_1 , что $\{u, u_0, u_1\} = N[u_0] \in \mathcal{S}(T)$. Тогда путь $u_1u_0uwx_5\dots$ имеет ту же длину, что и путь X , но при этом по следствию 2 вершина u_1 не является листом, противоречие.

Таким образом, вершины x_3 и x_5 смежны с $a = \deg(x_3) - 1$ и $b = \deg(x_5) - 2$ предлистьями степени 2 соответственно. Обозначим через T' дерево, полученное в результате удаления из T этих предлистьев, смежных с ними листьев, а также вершины x_3 . Обозначим через T_6 результат удаления из T' вершин x_4 и x_5 . По предположению индукции

$$\partial_M(T') \leq 2^{|V(T')|/2} = 2^{(n-2a-2b-1)/2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \partial_M(T') &= \partial_M^+(T', x_4) + \partial_M^+(T', x_5), & \partial_M(T) &= \partial_M^+(T, x_3) + \partial_M^+(T, x_4) + \partial_M^+(T, x_5), \\ \partial_M^+(T, x_4) &= 2^{a+b} \cdot \partial_M^+(T', x_4), & \partial_M^+(T, x_5) &= (2^a - 1) \cdot 2^b \cdot \partial_M^+(T', x_5), \\ \partial_M^+(T, x_3) &= 2^a \cdot (2^b - 1) \cdot \partial_M(T_6) + 2^a \cdot \partial_M^+(T_6, x_6). \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что если $a, b \in \{1, 2\}$, то из соотношений $\partial_M^+(T_6, x_6) \leq \partial_M(T_6)$, $\partial_M(T_6) = \partial_M^+(T', x_4)$ и $\partial_M^+(T', x_4) \leq \partial_M^+(T', x_5)$ следует выполнение неравенства

$$2^{a+b+1/2} \cdot (\partial_M^+(T', x_4) + \partial_M^+(T', x_5)) > \partial_M^+(T, x_3) + \partial_M^+(T, x_4) + \partial_M^+(T, x_5).$$

Если же $a = 3$, то для выполнения этого неравенства потребуется также выполнение соотношения $\partial_M^+(T_6, x_6)/\partial_M(T_6) \leq 3/4$. Цель дальнейших рассуждений – доказать это соотношение. Мы рассмотрим четыре случая в зависимости от того, являются ли вершины x_6, x_7 или их соседи предлистьями в дереве T .

Случай 1: найдутся вершины w и w' такие, что $\{x_6, w, w'\} = N[w] \in \mathcal{S}(T)$. Заметим, что вершина w может как совпадать, так и не совпадать с вершиной x_7 .

Вариант 1, а: все соседи вершины x_6 , отличные от x_5 и w , являются предлистьями степени 2 (в частности, возможен вариант $\deg_T(x_6) = 2$). Очевидно, что имеет место неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6) \leq \partial_M^+(T_6, w)$, откуда $\partial_M^+(T_6, x_6)/\partial_M(T_6) \leq 1/2$.

Вариант 1, б: вершина x_6 смежна с некоторой вершиной x'_5 , которая отлична от вершин x_5 и w и не является предлистом, а также, возможно, с предлистовой вершиной x''_5 степени 2. Тогда найдутся вершины x'_3 и x'_4 такие, что $\{x'_3, x'_4, x'_5\} =$

$N_T[x'_4] \in \mathcal{S}(T)$. Обозначим через T'_5 максимальное по включению поддерево T , содержащее x'_5 и не содержащее x_6 . Легко видеть, что дерево T'_5 является крайним подграфом $W_{a',b'}$ дерева T_6 с контактной вершиной x'_5 , где $a' = \deg(x'_3) - 1$ и $b' = \deg(x'_5) - 2$. Мы можем считать, что $a' = 3$ (иначе рассмотрим диаметральный путь, проходящий через вершины x'_5 и x_6 , переименуем вершины дерева и применим к этому пути рассуждения выше). Обозначим через T'_6 максимальное по включению поддерево дерева T_6 , содержащее вершину x_6 и не содержащее вершину x'_5 . Тогда справедливы соотношения

$$\partial_M^+(T_6, x_6) = \partial_M^+(T'_6, x_6) \cdot \widehat{\partial}_M(W_{a',b'}), \quad \partial_M^+(T_6, w) = \partial_M^+(T'_6, w) \cdot \partial_M(W_{a',b'}).$$

Как и в предыдущем варианте, имеет место неравенство $\partial_M^+(T'_6, x_6) \leq \partial_M^+(T'_6, w)$. Поскольку $\partial_M(W_{3,b'})/\widehat{\partial}_M(W_{3,b'}) \geq 15/23$, то $\partial_M^+(T'_6, x_6)/\partial_M(T_6) \leq 3/4$.

Заметим, что в рассмотренных вариантах рассуждения останутся верными и в случаях, когда предлистья, смежные с x_6 , имеют степень более 2. Этот факт пригодится нам при рассмотрении варианта 3, б.

Вариант 1, с: вершина x_6 смежна с двумя вершинами x'_5 и x''_5 , которые отличны от вершин x_5 и w и не являются предлистьями. Из рассуждений варианта 1, б следует, что вершины x'_5 и x''_5 являются контактными вершинами крайних подграфов $W_{3,b'}$ и $W_{3,b''}$ дерева T_6 , где $b' = \deg(x'_5) - 2$ и $b'' = \deg(x''_5) - 2$. Обозначим через T''_6 максимальное по включению поддерево T , содержащее вершину x_6 и не содержащее вершины x'_5 и x''_5 . Тогда

$$\begin{aligned} \partial_M(T_6, x_6) &= \widehat{\partial}_M(W_{3,b'}) \cdot \widehat{\partial}_M(W_{3,b''}) \cdot \partial_M(T''_6, x_6), \\ \partial_M(T_6, w) &= \partial_M(W_{3,b'}) \cdot \partial_M(W_{3,b''}) \cdot \partial_M(T''_6, w), \\ \partial_M^+(T_6, w) &\geq \frac{\partial_M(W_{3,b'})}{\widehat{\partial}_M(W_{3,b'})} \cdot \frac{\partial_M(W_{3,b''})}{\widehat{\partial}_M(W_{3,b''})} \cdot \partial_M^+(T_6, x_6) > \frac{1}{3} \cdot \partial_M^+(T_6, x_6). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6)/\partial_M(T_6) \leq 3/4$. Рассмотрение случая 1 завершено.

В случаях 2–4 мы предполагаем, что вершина x_6 является предлистовой и смежна с листом l_6 , с вершинами x_5 и x_7 , а также, быть может, с вершиной x'_5 , отличной от вершин x_5 , l_6 и x_7 . При этом вершина x'_5 (если она присутствует в дереве) является контактной вершиной некоторого внешнего подграфа $W_{3,b'}$, где $b' = \deg(x'_5) - 2$. Поскольку $\partial_M(T_6) = \partial_M^+(T_6, x_6) + \partial_M^+(T_6, l_6)$, то достаточно доказать, что либо выполнено неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6) \leq 3\partial_M^+(T_6, l_6)$, либо дерево T не является 4-максимальным.

Случай 2: вершины x_7 и x_8 принадлежат разным элементам разбиения $\mathcal{S}(T)$. Поскольку T неразделимо, то вершина x_7 не является предлистовой. Тогда найдутся вершины u и u' такие, что $\{x_7, u, u'\} = N[u] \in \mathcal{S}(T)$. Поскольку путь X является диаметральной и T не содержит пустых вершин, то все соседи u' , отличные от u , являются предлистовыми вершинами степени 2. Далее возможны два варианта в зависимости от значения величины $\deg_T(x_6)$.

Вариант 2, а: $\deg_T(x_6) = 3$. Покажем, что имеет место неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6) < 3\partial_M^+(T_6, l_6)$. Обозначим через T_7 максимальное по включению поддерево T_6 , содержащее вершину x_7 и не содержащее вершину x_6 . Обозначим через F_7 результат

удаления вершины x_7 и всех инцидентных ей ребер из дерева T_7 . Имеем

$$\begin{aligned}\partial_M^+(T_6, l_6) &= \partial_M(T_7) = \partial_M^+(T_7, x_7) + \partial_M^+(T_7, u) + \partial_M^+(T_7, u'), \\ \partial_M^+(T_6, x_6) &= \partial_M^+(T_7, x_7) + \partial_M^+(F_7, u) + \partial_M^+(F_7, u').\end{aligned}$$

Заметим, что $\partial_M^+(F_7, u') = \partial_M^+(F_7, u)$, поскольку все соседи вершины u' , кроме вершины u , являются предлестьями степени 2. Легко видеть, что

$$\partial_M^+(F_7, u) = \partial_M^+(T_7, u) = \partial_M(T_7 \setminus N[u]).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\partial_M^+(T_6, x_6) = \partial_M^+(T_7, x_7) + 2\partial_M^+(T_7, u) < 2\partial_M^+(T_6, l_6).$$

Вариант 2, b: $\deg_T(x_6) = 4$. В дереве T_6 найдется вершина x'_5 , которая смежна с x_6 и является контактной вершиной крайнего подграфа $W_{3,b'}$, где $b' = \deg(x'_5) - 2$. Используя рассуждения варианта 2, а, получим соотношения

$$\begin{aligned}\partial_M^+(T_6, l_6) &= \partial_M(W_{3,b'}) \cdot (\partial_M^+(T_7, x_7) + \partial_M^+(T_7, u) + \partial_M^+(T_7, u')), \\ \partial_M^+(T_6, x_6) &= \widehat{\partial}_M(W_{3,b'}) \cdot (\partial_M^+(T_7, x_7) + 2\partial_M^+(T_7, u)).\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\partial_M^+(T_7, u) \leq 2\partial_M^+(T_7, x_7)$ (равенство возможно только в случае $\deg(u') = 2$). Тогда из неравенства $\partial_M(W_{3,b'})/\widehat{\partial}_M(W_{3,b'}) \geq 15/23$ следует неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6) < 3\partial_M^+(T_6, l_6)$, что и требовалось.

Случай 3: вершины x_7 и x_8 находятся в одном множестве разбиения, при этом $\deg(x_7) > 2$. В этом случае $N[x_8] = \{x_7, x_8, x_9\} \in \mathcal{S}(T)$.

Вариант 3, а: вершина x_7 смежна хотя бы с одной предлестовой вершиной x'_7 (при этом возможен случай $\deg(x'_7) > 2$). Обозначим через l'_7 единственный лист, смежный с x'_7 . Покажем, что в этом случае имеет место неравенство $\partial_M^+(T_6, x_6) < 3\partial_M^+(T_6, l_6)$. Обозначим через T_7 максимальное по включению поддерево T , содержащее x_7 и не содержащее x_6 . Обозначим через F_7 результат удаления из T_7 вершины x_7 и всех инцидентных ей ребер. Имеем

$$\partial_M^+(T_6, l_6) = \partial_M^+(T_7, x_7) + \partial_M^+(T_7, x_8) + \partial_M^+(T_7, x_9).$$

С другой стороны,

$$\partial_M^+(T_6, x_6) = \partial_M^+(T_7, x_7) + \partial_M^+(T_7, x_8) + \partial_M^+(F_7, x_9).$$

Поскольку $\partial_M^+(T_7, x'_7) \geq \partial_M^+(T_7, l'_7)$, то верно неравенство $\partial_M^+(F_7, x_9) \leq 2\partial_M^+(T_7, x_9)$, откуда $\partial_M^+(T_6, x_6) < 2\partial_M^+(T_6, l_6)$, что и требовалось.

Вариант 3, b: вершина x_7 смежна с некоторой вершиной x'_6 , отличной от x_8 , которая не является предлестовой. Предположим, что найдется некоторый диаметральный путь $X'' = x''_1 x''_2 x''_3 x''_4 x''_5 x'_6 x_7 \dots$. Поскольку вершина x'_6 не является предлестовой, то рассмотрим путь X'' вместо пути x и применим рассуждения из случая 1. Если же такого пути не найдется, то, как нетрудно видеть, вершина x'_6 сама является контактной вершиной некоторого крайнего подграфа $W_{a',b'}$. Тогда найдется некоторый путь $X''' = x'''_2 x'''_3 x'''_4 x'''_5 x'_6 x_7 \dots$, содержащий $\text{diam}(T)$ вершин.

Нетрудно проверить, что рассуждения случая 1 применимы и для пути X''' (в этом случае вершина x_7 , которая не является предлистовой, будет играть роль вершины x_6).

Случай 4: вершины x_7 и x_8 находятся в одном множестве разбиения, причем $\deg(x_7) = 2$. В этом случае $N[x_8] = \{x_7, x_8, x_9\} \in \mathcal{S}(T)$. Обозначим через T'_6 максимальное по включению поддерево T , содержащее вершину x_6 и не содержащее вершину x_7 . Для $m \in \{7, 8, 9\}$ обозначим через T_m максимальное по включению поддерево T , содержащее вершину x_m и не содержащее вершину x_{m-1} .

Вариант 4, а: $\deg(x_6) = 3$. Дерево T устроено следующим образом (см. рис. 4).

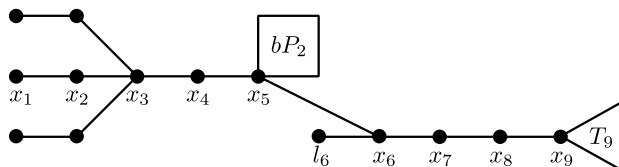


Рис. 4. Структура дерева T , вариант 4, а.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \partial_M(T) &= \partial_M^+(T, x_7) + \partial_M^+(T, x_8) + \partial_M^+(T, x_9), \\ \partial_M^+(T, x_7) &= \partial_M^+(T_7, x_7) \cdot \partial_M(T'_6) = \partial_M^+(T_7, x_7) \cdot \partial_M(W_{3,b+1}), \\ \partial_M^+(T, x_8) &= \partial_M^+(T_7, x_8) \cdot \partial_M(T'_6) = \partial_M^+(T_7, x_8) \cdot \partial_M(W_{3,b+1}), \\ \partial_M^+(T, x_9) &= \partial_M^+(T_8, x_9) \cdot \partial_M^+(T'_6, x_6) = \partial_M^+(T_8, x_9) \cdot \widehat{\partial}_M(W_{3,b}). \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\partial_M(W_{3,b}) = 2^{3+b} + (2^3 - 1)2^b + 2^3(2^b - 1), \quad \widehat{\partial}_M(W_{3,b}) = \partial_M(W_{3,b}) + 2^b.$$

Удалим из дерева T ребро x_7x_8 , а компоненту связности, содержащую вершину x_7 , заменим на лес $(6 + b)P_2$. Обозначим через F получившийся лес, тогда имеем $\partial_M(F) = 2^{6+b}(\partial_M^+(T_8, x_8) + \partial_M^+(T_8, x_9))$. Кроме того, имеет место неравенство

$$\partial_M^+(T_7, x_7) \leq \partial_M^+(T_7, x_8) = \partial_M^+(T_8, x_8) \leq \partial_M^+(T_8, x_9).$$

Нетрудно проверить, что имеет место строгое неравенство $\partial_M(F) > \partial_M(T)$. Тогда по лемме 5 дерево T не 4-максимально, противоречие.

Вариант 4, b: $\deg(x_6) = 4$. В этом случае вершина x_6 смежна с некоторой вершиной x'_5 , отличной от x_5, x_6 и l_6 . Поскольку T неразделимо, то x'_5 является контактной вершиной подграфа $W_{3,b'}$, где $b' = \deg(x'_5) - 2$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \partial_M(T) &= \partial_M^+(T, x_7) + \partial_M^+(T, x_8) + \partial_M^+(T, x_9), \\ \partial_M^+(T, x_7) &= \partial_M^+(T_7, x_7) \cdot \partial_M(T_6) = \partial_M^+(T_7, x_7) \cdot (\partial_M^+(T_6, l_6) + \partial_M^+(T_6, x_6)) \\ &= \partial_M^+(T_7, x_7) \cdot (\partial_M(W_{3,b}) \cdot \partial_M(W_{3,b'}) + \widehat{\partial}_M(W_{3,b}) \cdot \widehat{\partial}_M(W_{3,b'})), \\ \partial_M^+(T, x_8) &= \partial_M^+(T_7, x_8) \cdot (\partial_M(W_{3,b}) \cdot \partial_M(W_{3,b'}) + \widehat{\partial}_M(W_{3,b}) \cdot \widehat{\partial}_M(W_{3,b'})), \\ \partial_M^+(T, x_9) &= \partial_M^+(T_8, x_9) \cdot \partial_M^+(T_6, x_6) = \partial_M^+(T_8, x_9) \cdot \partial_M(W_{3,b}) \cdot \partial_M(W_{3,b'}). \end{aligned}$$

Удалим из дерева вершины x_6 и l_6 , после чего в получившемся лесе заменим компоненты связности, содержащие вершины x_5 и x'_5 , на лес $(7 + b + b')P_2$. Кроме того, присоединим к вершине x_7 три предлиста степени 2. В полученном n -вершинном лесе F обозначим через T' компоненту связности, содержащую вершину x_7 . Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} \partial_M(F) &= 2^{7+b+b'}(\partial_M^+(T', x_7) + \partial_M^+(T', x_8) + \partial_M^+(T', x_9)), \\ \partial_M(T', x_7) &= 8 \cdot \partial_M^+(T_7, x_7), \quad \partial_M(T', x_8) = 8 \cdot \partial_M^+(T_7, x_8), \quad \partial_M(T', x_9) = 7 \cdot \partial_M^+(T_8, x_9). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при любых значениях $b, b' \in \{0, 1, 2\}$ имеет место строгое неравенство $\partial_M(F) > \partial_M(T)$. Тогда по лемме 5 дерево T не 4-максимально, противоречие. Теорема доказана.

5. Оценки максимально возможного количества НДМ в n -вершинных деревьях

5.1. Нижняя оценка. Напомним, что 19-вершинное дерево $W_{4,4}$ есть результат присоединения к каждому из концов пути P_3 четырех предлистьев степени 2 (см. рис. 5). При этом $\partial_M(W_{4,4}) = 736 > (\sqrt{2})^{19}$. Введем обозначение $\theta = 736^{1/19} = 1.415\dots$

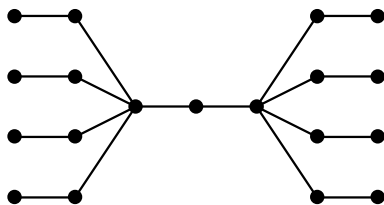


Рис. 5. Дерево $W_{4,4}$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \geq 1$ существует n -вершинное дерево T_n такое, что

$$\Delta(T) \leq 5, \quad \partial(T_n) > \frac{1}{3} \cdot 1.415^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что при $n = 19k$ утверждение теоремы выполнено. Рассмотрим лес $kW_{4,4}$ и будем произвольным образом соединять предлистья степени 2 из разных компонент связности, пока не получим некоторое дерево T_{19k} . Из доказательства леммы 5 следует, что $\Delta(T_n) = 5$ и

$$\partial_M(T_{19k}) = \partial_M(kW_{4,4}) = \theta^n > \frac{1}{3} \cdot 1.415^n.$$

Пусть теперь $n = 19k + r$, где $k \geq 0$ и $1 \leq r < 19$. Если r четно, то положим

$$F_n = kW_{5,5} \cup \frac{r}{2}P_2.$$

Если r нечетно и $k = 0$, то положим

$$F_n = P_r \quad \text{при } r < 7, \quad F_n = P_7 \cup \frac{r-7}{2}P_2 \quad \text{при } r \geq 7.$$

Если же r нечетно и $k > 0$, то положим

$$F_n = (k - 1)W_{5,5} \cup \left(10 + \frac{r - 1}{2}\right)P_2.$$

Будем произвольным образом соединять предлистья степени не более 2 из разных компонент связности F_n , пока не получим некоторое дерево T_n . Из доказательства леммы 5 следует, что $\Delta(T_n) \leq 5$ и $\partial_M(T_n) = \partial_M(F_n)$. Легко проверить, что при всех $n < 19$ верно неравенство $\partial_M(T_n) > (1/3) \cdot \theta^n$. Заметим, что для всех целых p на отрезке $[1, 36]$ выполнено неравенство $(\sqrt{2})^p / \theta^p > 1/3$. Тогда, как нетрудно видеть, для всех целых $n = 19k + r \geq 19$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial_M(T_n)}{\theta^n} \geq \frac{\theta^{19(k-1)} \cdot (\sqrt{2})^{19+r}}{\theta^{19k+r}} > \frac{1}{3},$$

откуда

$$\partial_M(T_n) > \frac{1}{3} \cdot 1.415^n.$$

Теорема доказана.

5.2. Верхняя оценка. По-видимому, максимальные деревья обладают сложной структурой, которая плохо поддается описанию. Используя понятие \mathcal{S} -разбиения, мы получим нетривиальную верхнюю оценку на количество НДМ в n -вершинном дереве.

ЛЕММА 8. Пусть T – максимальное n -вершинное дерево, не содержащее пустых вершин. Тогда все элементы разбиения $\mathcal{S}(T)$ содержат не более трех вершин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого максимального дерева T найдется элемент $S' \in \mathcal{S}(T)$, содержащий $k > 3$ вершин. Если $k \in \{4, 5\}$, то применим рассуждения из леммы 7. Пусть $k = 2p + \delta$, где $p \geq 3$ и $\delta \in \{0, 1\}$. В этом случае найдутся вершины w, w_1, \dots, w_{k-1} такие, что $\{w, w_1, \dots, w_{k-1}\} = N[w] \in \mathcal{S}(T)$. Для всех $1 \leq i \leq k - 1$ определим подграфы T_i, T'_i, F_i и величины A_i, A_i^+, A_i^- аналогично лемме 7. Напомним, что имеет место неравенство $A_i^- < A_i \leq A_i^+$.

Введем обозначения

$$A_* = \prod_{i=1}^{k-1} A_i, \quad A_*^+ = \prod_{i=1}^{k-1} A_i^+, \quad A_*^- = \prod_{i=1}^{k-1} A_i^-,$$

$$A_I^+ = \prod_{i=1}^p A_i^+ \cdot \prod_{j=p+1}^{k-1} A_j, \quad A_{II}^+ = \prod_{i=1}^p A_i \cdot \prod_{j=p+1}^{k-1} A_j^+.$$

Заметим, что $\partial_M(T) = A_* + A_*^- \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (A_i^+ / A_i^-)$. Кроме того, для любого натурального s такого, что $s \leq p$, верно неравенство $A_*^- \cdot A_s^+ / A_s^- < A_I^+$. Если же $p < s \leq k - 1$, то верно неравенство $A_*^- \cdot A_s^+ / A_s^- < A_{II}^+$. Наконец, для всех $1 \leq s \leq k - 1$ верно неравенство $A_*^- \cdot A_s^+ / A_s^- < A_*^+$.

Случай $\delta = 1$. Рассмотрим лес $F' = (p - 2)P_2 \cup T'_I \cup T'_{II}$, в котором компонента T'_I есть результат присоединения к концу пути P_2 лесов F_1, \dots, F_p (здесь и далее подразумевается, что вершина пути соединяется с теми и только теми вершинами

леса F_i , которые были смежны с вершиной w_i в дереве T), а компонента T'_Π есть результат присоединения к концу пути P_2 лесов F_{p+1}, \dots, F_{2p} . Тогда

$$\partial_M(F') = 2^{p-2}(A_* + A_I^+ + A_{II}^+ + A_*^+).$$

Нетрудно проверить, что имеет место неравенство $\partial_M(T) < \partial_M(F')$. По лемме 5 дерево T не максимально, противоречие.

Случай $\delta = 0$. Рассмотрим лес $F'' = (p - 3)P_2 \cup T''$, в котором компонента T'' есть результат присоединения к одному из предлистьев пути P_7 лесов F_1, \dots, F_p , а к другому из предлистьев этого же пути лесов F_{p+1}, \dots, F_{2p-1} . Тогда

$$\partial_M(F'') = 2^{p-3}(A_* + 2A_I^+ + 2A_{II}^+ + 3A_*^+), \quad \partial_M(T) < \partial_M(F'').$$

По лемме 5 дерево T не максимально, противоречие.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого n -вершинного дерева T имеет место неравенство*

$$\partial_M(T) < 1.4205^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что при $n < 6$ условие теоремы выполнено. Предположим, что при $n \geq 6$ существуют n -вершинные деревья, содержащие хотя бы 1.4205^n НДМ. Выберем среди них дерево T с наименьшим количеством вершин (мы можем считать, что T максимально). По следствию 1 T неразделимо и не содержит пустых вершин, тогда по лемме 6 существует единственное \mathcal{S} -разбиение $\mathcal{S}(T)$, которое по лемме 8 содержит только множества из 2 и 3 вершин. Рассмотрим некоторый диаметральный путь $X = x_1x_2x_3x_4x_5 \dots$ в T . Поскольку T неразделимо, то $\{x_3, x_4, x_5\} = N[x_4] \in \mathcal{S}(T)$ и $\deg(x_4) = 2$, а вершины x_3 и x_5 смежны с $a = \deg(x_3) - 1$ и $b = \deg(x_5) - 2$ предлистьями степени 2 соответственно. Обозначим через T' результат удаления из T всех предлистьев степени 2, смежных с вершинами x_3 и x_5 , всех смежных с ними листьев, а также вершины x_3 . По предположению $\partial_M(T') < 1.4205^{|V(T')|}$, откуда

$$\partial_M(T) > 1.4205^{2a+2b+1} \cdot \partial_M(T').$$

При этом

$$\begin{aligned} \partial_M(T) &= \partial_M^+(T, x_3) + \partial_M^+(T, x_4) + \partial_M^+(T, x_5) \leq 2\partial_M^+(T, x_4) + \partial_M^+(T, x_5) \\ &= 2^{a+b+1} \cdot \partial_M^+(T', x_4) + (2^a - 1) \cdot 2^b \cdot \partial_M^+(T', x_5), \\ \partial_M(T') &= \partial_M^+(T', x_4) + \partial_M^+(T', x_5). \end{aligned}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$2^{a+b+1} \cdot \partial_M^+(T', x_4) + (2^a - 1) \cdot 2^b \cdot \partial_M^+(T', x_5) < 1.4205^{2a+2b+1}(\partial_M^+(T', x_4) + \partial_M^+(T', x_5)).$$

Очевидно, что при любых $a, b \geq 0$ имеет место неравенство $1.4205^{2a+2b+1} > (2^a - 1)2^b$. Кроме того, поскольку в дереве T' вершина x_4 является листом, то $\partial_M^+(T', x_4) \leq \partial_M^+(T', x_5)$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\partial_M^+(T', x_4) = \partial_M^+(T', x_5)$. Покажем, что имеет место неравенство

$$2^{a+b+1} + 2^{a+b} - 2^b < 2 \cdot 1.4205^{2a+2b+1}.$$

Разделим на 2 обе части неравенства и рассмотрим функцию

$$f(x, y) = 1.4205^{2x+2y+1} - 3 \cdot 2^{x+y-1} + 2^{y-1}.$$

Нетрудно проверить, что $\min_{x, y \geq 0} f(x, y) > 0$, откуда

$$\partial_M(T) < 1.4205^{2a+2b+1} \cdot \partial_M(T').$$

Полученное противоречие означает, что n -вершинных деревьев, содержащих хотя бы 1.4205^n НДМ, не существует. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. E. Brouwer, *The Number of Dominating Sets of a Finite Graph is Odd*, <http://www.win.tue.nl/~aeb/preprints/domin2.pdf>, 2009.
- [2] D. Bród, Z. Skupień, “Trees with extremal numbers of dominating sets”, *Australas. J. Combin.*, **35** (2006), 273–290.
- [3] S. Wagner, “A note on the number of dominating sets of a graph”, *Util. Math.*, **92** (2013), 25–31.
- [4] D. S. Taletskii, “Trees with extremal numbers of k -dominating sets”, *Discrete Math.*, **345**:1 (2022).
- [5] G. Gunther, B. Hartnell, L. R. Markus, D. Rall, “Graphs with unique minimum dominating sets”, *Proceedings of the Twenty-Fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Boca Raton, FL, 1994), *Congr. Numer.*, **101**, 1994, 55–63.
- [6] A. Bień, “Properties of gamma graphs of trees”, *Presentation at the 17th Workshop on Graph Theory Colourings, Independence and Domination (CID 2017)*, Piechowice, Poland.
- [7] J. Alvarado, S. Dantas, E. Mohr, D. Rautenbach, “On the maximum number of minimum dominating sets in forests”, *Discrete Math.*, **342**:4 (2018), 934–942.

Д. С. Талецкий

Национальный исследовательский университет
 “Высшая школа экономики” в Нижнем Новгороде
 E-mail: dmitailmail@gmail.com

Поступило

30.04.2022

Принято к публикации

10.09.2022