ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

Результативное образование в математической школе[1]

Н. Н. Константинов, А. Л. Семенов

Николай Николаевич Константинов — школа № 179 Департамента образования и науки города Москвы (г. Москва).
e-mail: konstantinovnn@ya.ru
Алексей Львович Семенов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: alsemno@ya.ru

Аннотация

В статье исследуются причины, по которым «математические спецшколы» («матшколы») в одной из своих устойчиво воспроизводимых моделей стали важнейшим и очень продуктивным явлением в российском образовании последних десятилетий. Дается краткое описание современной модели результативного образования, восходящего к сложившейся традиции преподавания в матшколах. Анализируются условия построения воспроизводимой модели результативного образования не только для специализированного обучения математике, но и для других областей российского общего образования. Описываются источники традиции матшкол: практическая ориентация традиционной школы, занимательная математика, математические кружки и олимпиады. Указываются также истоки результативного образования в уровневой дифференциации.

Ключевые слова: школьное математическое образование в России, традиция матшкол и матклассов, школа Константинова, результативное образование, деятельностное учение, исследовательское учение, решение неожиданных задач, занимательная математика, математический кружок, математическая олимпиада, работа студентов со школьниками, уровневая дифференциация, учебно-исследовательская деятельность учащихся, цифровая трансформация образования.

Библиография: 50 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Константинов, А. Л. Семенов. Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 413–446.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (А. Л. Семенов, грант № 17-11-01377 – разделы 3, 6, 8).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

Productive education in the mathematical school

N. N. Konstantinov, A. L. Semenov

Nikolai Nikolaevich Konstantinov — school № 179 of the Department of Education and Science of the City of Moscow (Moscow).
e-mail: konstantinovnn@ya.ru
Alexey Lvovich Semenov — Lomonosov Moscow State University, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: alsemno@ya.ru

Abstract

The article examines the reasons why mathematical schools (mathschools) have become an important and very productive phenomenon in Russian education in recent decades. A brief description of the modern model of productive education traced back to the established tradition of teaching in mathschools, which can lead to the construction of a reproducible model of productive education not only for specialized teaching of mathematics, but also for other areas of Russian general education.

Keywords: the tradition of mathschools and mathclasses, the Konstantinov School, school mathematics education in Russia, productive education, solving unexpected problems, recreational mathematics, mathematical circle, mathematical Olympiad, university students as teachers, level differentiation, learning and research activity of students, digital transformation of education.

Bibliography: 50 titles.

For citation:
N. N. Konstantinov, A. L. Semenov, 2021, "Productive education in the mathematical school", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 413–446.

1. Введение

В данной статье мы пытаемся выделить те причины, по которым школы с углубленным изучением математики (*матшколы*) стали важнейшим и очень продуктивным явлением в российском образовании последних десятилетий. Мы понимаем, что время от времени возникающие в системе образования отдельные инновационные школы, как и целостные системы образовательной деятельности, без прямого участия авторов инновации в большинстве случаев оказывают малое влияние на развитие массовой школы, или хотя бы большого числа школ. Некоторая надежда на то, что инновация «укоренится», может быть связана с тем, что она возникла не «на пустом месте», а является продолжением каких-то важных традиций.

В нашем изложении различие между *матшколой* и *матклассами*, вокруг которых образуется «школа в школе», несущественно. В статье мы показываем, что и традиция математических школ – «школ Константинова» – возникла не на пустом месте. При этом мы не делаем попытки описать всю специфику *матшкол* страны и их роль в обществе. Этому посвящены, в частности, разделы книги [1].

Мы надеемся, что модель *матикол* допускает распространение на другие области российского образования.

В настоящее время в российском образовании формируется подход к общему образованию, основанный на системе принципов, которую можно описать одним термином «результативное образование». Эти принципы, сформулированные Семеновым на основе практики работы *матикол*, изложены им в 8-м разделе данной статьи.

2. Школьная математика в российской школе. Исторически сформировавшиеся цели: прикладная и иные

Началом школьного математического образования в России принято считать 1701 год, когда в Москве указом Петра Великого была основана школа математических и навигацких наук. В этой школе работал и Леонтий Филиппович Магницкий, автор знаменитой «Арифметики». Название школы подчеркивало прикладной характер изучаемой там математики. В указе Петра речь идет также о «фортификации» в качестве элемента подготовки.

Тенденция по продолжению прикладной линии в преподавании школьной математики продолжалась и в XIX веке, когда при многочисленных и разнообразных реформах и «контрреформах» (в меньших масштабах продолжившихся во второй половине XX в.) четко прослеживалась линия разделения гимназического и реального образования. В гимназическом, «классическом» образовании объем математики был меньше, чем в реальном. Стоит указать на то, что в какой-то момент объем изучения математики был во многом определен учебным планом, физико-математический раздел которого был разработан П. Л. Чебышёвым в 1858 г.

Однако для нашего изложения истоков *матикол* еще более важной является роль другого деятеля российской школы. Как пишет известный историк российского математического образования А. В. Ланков (и с ним согласны Ю. М. Колягин и др.) [3]: «Творцом методики арифметики в России, бесспорно, является Петр Семенович Гурьев». Именно ему принадлежит введение почти 200 лет назад учебной технологии «листков», см. далее.

Свои педагогические взгляды П. С. Гурьев описывает в «Отчете по Гатчинскому сиротскому институту», где он был инспектором (цит. по [4]):

> «Важнее всего возбудить самодеятельность в воспитаннике, представить ему будущую науку с ее светлой, лучшей стороны, чтобы он постоянно жаждал познаний и уже в маленьком кругу своей учебной деятельности ощущал отраду и наслаждение от изобретений всякого нового познания, всякой новой истины».

Заметим, что речь идет об учениках *сиротского* института, воспитанников такого сорта образовательной организации не отбирают по особым способностям и мотивированности к учению.

Замечательным было «Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям» П. С. Гурьева (часть I – 1839 г., часть II – 1842 г.). В предисловии автор писал:

> «Когда я составлял свое "Руководство", то преимущественно имел в виду самодеятельность учеников, ибо убежден, что большая часть неуспехов происходит не столько от способностей, сколько от недостатка самодеятельности. Нередко видим, что учитель в классе принимает на себя роль оратора, вместо того, чтобы быть руководителем и только наводить учеников на сознание. От этого ученики ведутся как на помочах и не смеют сделать шагу без своего наставника; когда же потом, будучи предоставлены себе, встречают какие-либо затруднения, то спотыкаются и уже не двигаются с места.

> Привычка довершает дело. Таким образом, ум, не приученный с ранних лет пытать свои силы, делается впоследствии недоверчивым к самому себе и рад, если за него работают другие. Вот причина плоских умов, которыми бывают богаты общества» [5].

Свою книгу «Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему» [6] Гурьев начинает словами:

> «Листки сии, вмещая в себе задачи, расположенные постепенно от легчайших к труднейшим, быв наклеены на папку, примут вид прописей или карт. Таким образом учитель, по предварительному объяснению какого-либо правила, может раздавать сии листки ученикам, соображаясь с силами и способностями каждого. Очевидно, что ученики, получая каждый свой отдельный листок, не имеют уже возможности списывать один от другого решения задач, ученику нет нужды выписывать в свою доску задачи: он только к сделанному решению приписывает номер задачи, которую он разрешил, – а через сие много сбережения времени. По прилагаемым к решениям задач номерам, учитель, имея перед собой книжку, вмещающую в себе Ключ, или решения всех задач, может легко и весьма скоро поверять учеников своих.
>
> Что касается до объяснения Арифметических правил, то я старался изложить оные так, чтобы ученик сам, без помощи учителя, мог идти далее вперед; с той же целью помещены в конце книжки вопросы, которые должны руководствовать ученика при изучении объяснений. Опытный учитель, без сомнения, будет заставлять ученика сравнивать и противополагать пройденное им с выученным прежде, и получаемые понятия о науке соединять в одно целое» [6].

Таким образом, Гурьев подчеркивает, что предлагаемые им технологические решения направлены на:

- структурирование содержания в форме отдельных перечней заданий – «листков»; листок обычно ориентирован на достижение какой-то специфической цели;
- индивидуализацию – подбор учителем листка, соответствующего индивидуальному уровню учащегося (работу в зоне ближайшего развития);
- развитие самостоятельности учащегося;
- создание мотивации, возникающей из открытия нового;
- оптимизацию образовательного процесса, экономию времени учителя, работающего с большим классом, и ученика в таком классе.

Нельзя сказать, что Гурьев полностью следует провозглашаемым им принципам. Например, сами задачи Гурьева – это стандартные арифметические задачи. Говоря о том, как учитель может проверить правильность *ответа* к задаче (с помощью ключа, как в части «В» ЕГЭ [7]), Гурьев не говорит о том, что же делать, если ответ неверен. Тем не менее ряд элементов образования, в дальнейшем использованных в *матшколах,* очевиден.

Интересно, что П. С. Гурьев предпринял попытку представить другую свою книгу «Практическая арифметика» [8] в Ученый комитет Министерства народного просвещения для утверждения в качестве руководства для средних и начальных школ, но П. Л. Чебышёв как член Ученого комитета, проводивший экспертизу книги, дал отрицательный отзыв, посчитав, что автор загромоздил ее большим числом практических приемов. В результате книга не была рекомендована [9, с. 431—432].

П. С. Гурьев составил первый в России задачник по геометрии, хотя учебники по геометрии существовали со времен Эйлера. «Практические упражнения в геометрии», написанные П. С. Гурьевым в соавторстве с его бывшим учеником по Гатчинскому сиротскому институту, учителем математики Александром Дмитриевичем Дмитриевым, вышла в 1844 г. [10]. В книге приводилось 506 задач. Из них около 400 – это задачи на построение, остальные – задачи практической геометрии, несколько задач на доказательство и одна вычислительная задача. В предисловии сказано:

> «Цель предлежащей книги состоит именно в том, чтобы без нарушения общепринятого способа преподавания геометрии дать ученикам возможность чаще возбуждать в себе самодеятельность, пытать свои силы в применении общих законов к частным случаям и, наконец, в преодолении затруднений собственным усиленным напряжением ума находить истинное удовольствие» [10].

Заметим, что в данном случае речь идет именно о *задачнике* по геометрии.

Мы заканчиваем обсуждение вклада Гурьева и продолжим рассмотрение общей ситуации со школьной математикой и основными ее элементами, начиная с геометрии.

Традиционные учебные курсы школьной геометрии имеют ту особенность, что основное содержание работы ученика состоит в выучивании доказательств теорем, в лучшем случае при попытке это доказательство понять. Это мало похоже на «возбуждение самодеятельности». При этом количество теорем, определений, лемм и всего прочего делает задачу самостоятельно придумать существенную часть доказательств (например, из знаменитого учебника Киселева) безнадежной, даже и для успешного учащегося сегодняшней школы. (Мы оставим в стороне обоснованные сомнения в полной строгости школьной геометрии.)

Традиционно, в течение веков, задания, в которых словесно описываются возможные в реальности, гипотетические объекты, события и процессы («текстовые задачи»), считаются важным элементом математического образования. При этом бесспорный авторитет в школьной математике (и отец выдающегося математика) Игорь Владимирович Арнольд так описывал практику обучения решению таких задач, сложившуюся в нашей стране к середине 1940-х годов:

> «Учеников – в том или ином порядке – знакомят с соответствующими «типами» задач, причем обучение решению задач сплошь и рядом сводится к «натаскиванию», к пассивному запоминанию учениками небольшого количества стандартных примеров решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно. В итоге – полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простых арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач» [11].

А вот что писал на эту тему А. Я. Хинчин:

> «Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, т. е. такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удается научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявляли, что "этому вообще научить невозможно". Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач,

> ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах); но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашел решение задачи нового, хотя бы и очень простого типа, – это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях.
>
> Описывая всю эту тяжелую ситуацию, я думаю, что не очень сгустил краски. Если в отдельных случаях дети все же научаются решать задачи, интуитивно отличают правильное рассуждение от ложного, находят в этих упражнениях ума здоровое удовольствие и в конечном счете действительно развивают свою сообразительность, то такие исключения способны только подтвердить печальное общее правило» [12].

Постоянно слыша разговоры о снижении уровня математического образования, вряд ли можно ожидать, что сегодня ситуация существенно улучшилась.

Напомним апокрифическое высказывание Ломоносова (сочиненное, видимо, Иваном Депманом и впервые обнародованное в 1959 г. [13]): «А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Видно, что массовая российская школа (как и школы других стран) в течение столетий была ориентирована на развитие ума основной массы учащихся (исключая двоечников и наиболее способных) в следующих отношениях:

- безошибочное вычисление по известной формуле или алгебраическое преобразование по понятному эвристическому правилу;

- перевод ограниченного количества типов словесных конструкций в последовательность арифметических действий или систему уравнений;

- выучивание геометрических доказательств с пониманием некоторого их числа, практически без использования потенциала геометрии для возможности самостоятельного рассуждения учащегося с опорой на наглядность.

Места для самостоятельности здесь немного. И это совершенно не удивительно, и не следует считать дефектом школы тех времен. Действительно, в качестве результата *массового* образования аккуратное исполнение инструкций и хорошая память были *важнее* самостоятельности мышления. Массовое образование было ориентировано на подготовку людей, которые могут безошибочно произвести арифметические вычисления, которые иногда могут понадобиться каждому, а постоянно нужны бухгалтеру, счетоводу, приказчику, землемеру, статистику. Мотивация включала сильный элемент негативного подкрепления, авторитет родителей и очевидную возможность «выбиться в люди» и там достичь достатка, общественного признания, реализации мечты. Наиболее способные и мотивированные при этом могли освоить работу с уравнениями и тригонометрическими функциями, что позволяло им продолжить обучение на инженера, ученого-физика. И лишь исключительным учащимся, совершенно самостоятельно или под влиянием исключительного учителя, удавалось разглядеть красоту математики.

К чему это приводит в высшем образовании, хорошо видно по рассказу А. С. Кронрода, относящемуся к «Золотому веку» российского университетского математического образования, о его разговоре с известным математиком — Лидией Ивановной Головиной, получившей Первую премию на V Московской математической олимпиаде, профессором мехмата МГУ. Она вела упражнения по уравнениям в частных производных на четвертом курсе мехмата. Кронрод спросил у нее: «Скажите, среди Ваших студентов многие ли смогут доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $1,5$?» Она говорит: «Может, не все, но многие». Он переспросил: «А сколько именно?» Она задумалась: «Двое точно докажут, ну, вот, может быть, еще один...» И она провела пробную контрольную работу на один час и задала на ней эту задачу, которую все должны знать на первом семестре первого курса. Действительно, решило двое. Сама система обучения не обеспечивала гарантий того, что человек действительно усвоил то, что ему преподавали (эта история со ссылкой на Константинова рассказана также в [1]).

3. Занимательная математика как мотивирующая альтернатива

Во все время развития школьного математического образования параллельно с описанной выше основной линией, ориентированной в первую очередь на практические приложения математики, существовала и альтернативная. Это линия занимательной, развлекательной математики, задач «на смекалку», которая пунктиром встречалась и в школе. Изначальная цель этой линии – увлечь, завлечь, заинтересовать, то есть – мотивировать учащегося. Вот несколько показательных, поясняющих примеров.

Знаменитый сборник занимательных задач «Propositiones ad Acuendos Juvenes» («Задачи для оттачивания молодого ума») с «Волком, козой и капустой» был создан Алкуином в VIII веке [14, 15]. Задача о мостах Кёнигсберга привлекла внимание великого Эйлера, но, вероятно, и в его время была посильна способному школьнику. В книге [16] опубликовано 180 задач XVIII века и более ранних.

На картине Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского», пожалуй, самому цитируемому символу российской школы (наряду, вероятно, с «Опять двойка» Ф. П. Решетникова), изображено решение «нестандартной» задачи.

В нашей стране в разное время были очень популярны сборники задач Емельяна Игнатьевича Игнатьева [17] и Якова Исидоровича Перельмана (у которого прослеживается и мостик к приложениям математики, сборники математических задач соседствуют со сборниками физических) [18, 19]. И до сих пор родители с удовольствием их покупают, а издательства прибыльно издают, а ведь на них нет грифа Министерства.

Почему же не сформировалась линия школьных учебников и задачников, интегрирующих традиционные школьные курсы и занимательную математику, всегда остающуюся на периферии? Трудно представить себе троечника по «основному содержанию», получающего «итоговые» пятерки за «дополнительные задания».

Ответ ясен и убедителен: занимательные задачи не сильно продвигали к «твердому усвоению» «арифметических навыков» и прочей школьной премудрости. Премудрость же эта, в представлении авторов учебников, состоит в вычислительной практике, отвечающей, как сказали бы в прошлом веке, потребностям производства, а в нынешнем – нуждам экономики. Парадокс XXI века (наполненного парадоксами) состоит в том, что для экономики сегодня дефицитны не *исполнители* – их функции успешно передаются искусственному интеллекту, а *исследователи* и *творцы* – и в большом и в малом. А исследователи и творцы формируются в решении *исследовательских* и *творческих* задач: «занимательных», «олимпиадных» – разнообразной сложности.

В XX веке традиция занимательных задач, возможно, достигнув максимума в 30-е гг., зашла в школы через олимпиады, которые естественно рассматривать вместе с математическими кружками. Этому рассмотрению посвящен следующий раздел.

4. Кружки и олимпиады

Параллельно с развитием «прикладной» и «занимательной» линий в мировом и российском математическом образовании развивалась линия «кружков» (отчасти пересекающаяся с линией «занимательной» математики).

В России XIX века с понятием кружка связана высокая степень неофициальности (в том числе – и «тайности», как у «тайного общества»), неформальности, демократизма, тесного взаимодействия членов кружка между собой и с руководителем, если он есть. Массовым явлением были литературные кружки, студенческие кружки. Вероятно, не было простым совпадением и то, что математическим кружком назывались сообщества математиков, озабоченных проблемами математического образования.

Замечательным для «кружков» является то, что одни и те же важные элементы «кружка» присутствуют и в работе математика высшего класса со своими учениками, и в работе студента с семиклассниками (и даже – первоклассниками). К тому, что мы называем «кружком» этого высшего эшелона, часто применяется еще наименование «школа», скажем, «школа Лузина» – «Лузитания». Но нам очевидно, что с массовой школой как раз «кружок Лузина» имел намного меньше общего, чем с детским кружком. Заметим, кстати, что будучи студентом, сам Н. Н. Лузин был секретарем кружка Н. Е. Жуковского, который, в свою очередь, был членом Кружка любителей математических наук Н. Д. Брашмана. Как мы увидим дальше, лидеры школьных кружков во многом вышли из кружка Лузина, традиция не прерывалась.

Педагогический стиль Лузина и в целом отличался от «классической» университетской педагогики. Один из членов «Лузитании» Л. А. Люстерник цитирует студента: «Другие профессора показывают математику как завершенное прекрасное здание — можно лишь восхищаться им. Лузин же показывает науку в ее незавершенном виде, пробуждает желание самому принять участие в ее строительстве», и рассказывает:

> «Читает Николай Николаевич лекцию, вдруг задумывается: "Я не могу восстановить доказательства, может быть, кто-нибудь из коллег мне поможет?" Царит напряженная тишина, все думают, кто-то подходит к доске, пробует доказать, не выходит, и покрасневший возвращается на место. Наконец, счастливец под завистливые взоры остальных встает и рассказывает у доски найденное доказательство. Мэтр говорит: "Спасибо, коллега", – благосклонно улыбается. Победитель радостный садится на место.
>
> Лузин смело провел коренную реформу в деле подготовки молодых научных работников математиков. Считалось необходимым до начала самостоятельной научной работы изучить предварительно много толстых фолиантов. Это и в прошлом было более вредно, чем полезно, — нести чрезмерный груз пассивно воспринятой информации... Лузин сумел избежать в подготовке математической молодежи опасностей «переучивания» и дилетантизма, призывая к ранней самостоятельности, сочетающейся с продолжающимся математическим образованием. Так именно действовали позже и другие научные руководители в МГУ» [20].

Однако исследуемая нами традиция, в какой-то степени продолжая традиции кружков, семинаров, сообществ математиков, явное начало берет от попытки ведущих московских математиков начать работу со школьниками в середине 1930-х гг., когда стало ясно, что обычная школа не в состоянии подготовить новое поколение математиков. Математики в Ленинграде и Москве стали читать лекции для школьников и проводить олимпиады. При изложении истории московских кружков в большей части данного раздела мы следуем работам [21] и [1], не выделяя прямых и косвенных цитат.

В 1934 году по инициативе Бориса Николаевича Делоне, Григория Михайловича Фихтенгольца и Александра Даниловича Александрова в Ленинграде была проведена первая в СССР математическая олимпиада. В том же году при Московском университете был создан и кружок для школьников. Его возглавил 21-летний аспирант Колмогорова Израиль Моисеевич Гельфанд.

В 1935 г. прошла Первая московская олимпиада. Еще до этого несколько студентов-математиков Университета вели математические кружки в школах Москвы. После проведения олимпиады было решено перенести эту работу в Университет и объединить ее с лекциями, читавшимися ранее в Математическом институте АН СССР. Так возник большой Школьный математический кружок при МГУ. Его организаторами, помимо И. М. Гельфанда, были Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман. Наряду с ними в работе кружка активно участвовали аспиранты и студенты. С самого начала работа кружка проводилась в двух направлениях: чтение лекций и заседания секций кружка.

Два раза в месяц, по выходным дням, профессора и преподаватели Университета читали лекции по математике для школьников. На лекциях присутствовали десятки, а затем – сотни школьников. Темы этих лекций касались важнейших и весьма разнообразных разделов математики, по большей части – XX века, входящих в университетский курс или даже за его пределами. Впоследствии ряд этих лекций лег в основу серии «Популярных лекций по математике».

В качестве примера работы секций кружка можно указать, что в 1936/37 учебном году секция кружка под руководством члена-корреспондента АН СССР Л. Г. Шнирельмана занималась геометрическими методами теории чисел, секция профессора (впоследствии академика) А. Н. Колмогорова – качественной геометрией. В первые годы работы кружка основной формой занятия секции был доклад одного из школьников (подготовленный, разумеется, под наблюдением руководителя секции). Доклады, считавшиеся наиболее удачными, выносились даже на воскресные занятия (пленумы) кружка. Однако постепенно выяснилось, что доклады школьников являются малоэффективной формой занятий кружка.

Новую концепцию кружковой работы создал Давид Оскарович Шклярский (1918–1942) [22]. Можно полагать, однако, что его концепция возникла в живой среде, в культуре кружков, о которых мы уже говорили, ему удалось выделить наиболее эффективные элементы и одухотворить их своей личностью. В 1936 году он стал одним из победителей II Московской олимпиады, в том же году поступил в МГУ, с 1937 года вел кружок, в 1938–1941 годах был руководителем математических кружков при МГУ. Концепция Шклярского состояла в следующем. Руководитель читал небольшую лекцию, как правило, содержащую законченный рассказ о небольшой математической теории. Иногда рассказ руководителя, с продолжениями, шел в течение двух-трех занятий, занимая на каждом небольшую часть времени. После лекции значительная часть времени на каждом занятии отводилась для рассказа школьников о решенных ими задачах. Часть задач, предложенных на дом или для решения тут же на заседании, иллюстрировала предшествовавший рассказ руководителя; другие же задачи были не связаны с этим рассказом, а некоторые являлись темами своеобразных миниатюрных научно-исследовательских работ. Иногда трудная теорема расчленялась на ряд задач, последовательно предлагавшихся участникам. Естественно, что среди предложенных задач встречались и такие, решить которые удавалось лишь немногим школьникам, а отдельные задачи ожидали своего решения (хотя бы одним участником кружка!) недели и даже месяцы.

Наличие задач разной трудности позволяло руководителю вовлечь в активную работу практически всех участников секции. Большое количество предлагавшихся задач (многие из которых были очень трудны) само собой создавало атмосферу творческого соревнования.

Одной из важнейших особенностей методики Шклярского было привлечение к работе со школьниками так называемых «младших руководителей» – студентов 1–2-го курсов, которые помогали руководителю придумывать, подбирать и проверять задачи. Студенты также обладали приоритетным правом выбирать того ученика, которому будет доверено рассказать найденное решение у доски.

Наиболее важными чертами системы Шклярского были внимание к каждому ученику (этому способствовала и работа помощников-младшекурсников) и поощрение творческого, нетривиального мышления. И та и другая черты роднят подходы Шклярского и Лузина (в «Лузитании»).

Методика Шклярского уже через год принесла заметные результаты: на IV Московской олимпиаде (1938 год) ученики Шклярского получили 12 из 24 премий, в том числе все 4 первые премии!

Давид Оскарович Шклярский погиб в ополчении на фронте Великой Отечественной войны. Его влияние на математическое образование отразилось и в том, что первым автором на обложке нескольких книг важнейшей серии «Библиотека математического кружка» [23] его коллеги, друзья и ученики указывали Шклярского.

Наряду со спецификой математики, кружок обладает важными элементами других лучших структур системы российского дополнительного образования. Там «тебя никто не держит» на данном занятии или курсе, перестать ходить на кружок относительно легко, если ты потерял интерес; там все, кто приходит вместе с тобой, одинаково мотивированы, нет школьных отметок, а наградой тебе служит в первую очередь правильно (или наконец-то правильно) выполненное задание – решенная математическая задача (и конечно, взгляды друзей по кружку).

Система математических кружков не исчезла. Она продолжается и сейчас, хотя, как правило, и без прямого участия математиков – лидеров уровня 1930-х гг. Например, сейчас в кружке при мехмате МГУ, т. н. «Малом мехмате», одновременно занимается до 2 тыс. человек (листки Малого мехмата можно увидеть в интернете [24]). Это возможно благодаря уже сформировавшейся модели работы и содержанию образования в кружках. С другой стороны, на той же «кружковой идее» основаны и кружки разного уровня не при университетах, летние школы и т. д. Как мы увидим дальше, система кружков породила и матклассы и находится с этими классами в тесном взаимодействии.

Еще одним направлением, выросшим из кружков и олимпиад, стала Заочная математическая школа (ЗМШ), идеологом которой был И. М. Гельфанд. В наши цели не входит анализ феномена ЗМШ, но все же обратим внимание на несколько деталей в ее работе. ЗМШ, как и кружки, была дополнительным, к обычному школьному, образованием. Каждый учащийся получал (по почте, «обычной», не электронной, конечно) индивидуальный листок с заданиями, которые нужно было выполнить к определенному сроку (в силу массовости, задания и сроки были общими для всех). Результат выполнения каждого задания анализировался и получал обратную связь (рецензию) преподавателя. Преподавателями были студенты; их работа не оплачивалась, это был массовый вариант «общественной работы», какой-то вид которой должен был вести каждый студент. Были возможны два варианта учебы в ЗМШ: индивидуальный ученик и коллективный ученик, т. е. группа учащихся под руководством учителя. Весь обмен информацией между учеником и учителем происходил по «обычной» почте (обстоятельство, не очевидное для предполагаемого читателя этой статьи в XXI веке).

Специфика работы ЗМШ состояла в том, что грамотно сформированная ее программа – это элементарная школьная математика, ориентированная на сдачу вступительных экзаменов в сильные вузы страны (в первую очередь – в МГУ). В некоторые годы среди поступивших в МГУ количество выпускников ЗМШ превосходило количество выпускников всех математических школ вместе взятых. При этом среди выпускников ЗМШ большинство жило не в больших городах – центрах математической жизни.

Также продолжается система олимпиад. Высокие результаты в них начали поддерживаться образовательными властями. Они стали важнейшим показателем индивидуальных достижений способного школьника в математике, достижений страны и региона. Бумажные и электронные СМИ с огромным удовольствием обсуждают, что Россию очередной раз в олимпиаде обогнали китайцы и др., и с меньшим удовольствием берут интервью у российских золотых медалистов этих олимпиад. Олимпиады стали альтернативой ЕГЭ по отношению к поступлению в вузы, и это – действительно важная альтернатива. Такая ситуация, естественно, имеет и положительные и отрицательные стороны, как всякое высокозначимое (high-stakes) оценивание.

Об олимпиадных задачах писатель, выпускник мехмата МГУ Владимир Губайловский говорит:

> «Эти задачи требуют не припоминания вызубренных заранее знаний и навыков, а умения думать сейчас и здесь, умения так повернуть условия, чтобы вдруг проявился этот неожиданный, укрывшийся в условиях порядок. Человек, даже очень хорошо выучивший школьный курс, но не понявший, как же соотносятся части того целого, которое называется языком математики (пускай даже самого начального), часто не может решить простой задачи, с какой легко справляется шестиклассник на кружке» [1].

Заметим, что здесь подчеркивается не сложность «олимпиадных» задач, а именно неожиданность их решения. Сборники олимпиадных задач, ставшие важной частью современного математического образования, парадоксальным образом снижают эту неожиданность: иногда авторы разбивают их на циклы с общими идеями. Есть и система «подготовки олипиадников». Эту тему мы еще затронем в следующем разделе. Однако для нас важно то, что «олимпиадность», а именно – новизна для данного ученика, неожиданность, возникающий в связи с этим интерес, мотивация, возможна и для массового школьника, совсем не «олимпиадника». Задача может быть простой и в то же время неожиданной.

Важнейший пример тому – олимпиада «Кенгуру» [25], задачи которой, во многом спроектированные Марком Ивановичем Башмаковым, разнообразны, интересны и имеют разную сложность. Эти качества обеспечили фантастическую популярность этого соревнования в начальной школе. А сам задачный материал, продолжающий линию занимательных задач, указывает возможный путь и для расширения содержания математического образования. М. И. Башмаков – выпускник кружка Григория Владимировича Епифанова при матмехе Ленинградского университета, один из лидеров школьных кружков (начиная со своего второго курса), сыгравший ключевую роль в становлении петербургской школы № 239 и других математических школ в этом городе. Вот его слова: «Я почти не знаю человека, который стал бы известным математиком и который не был бы связан с кружками» [26].

5. Математические школы

Читая работы Гурьева, его тексты, относящиеся к философии образования, и рассматривая его «листки», постоянно наталкиваешься на вопрос: почему же представленная в них математика все же очень ограниченна, однообразна и рутинна, в противоречии с его же принципами? Ответ, что «такова и была вся математика того времени, с которой можно было начинать», очевидно, не верен. Это показывают как раз «занимательные», логические и пр. задачи, о которых мы уже говорили выше, как и круги Эйлера из его «Писем к немецкой принцессе...». Дело тут, конечно, в тех практических целях математической подготовки, которые мало менялись в течение столетий. Конечно, в рамках этих целей, как говорится, «не благодаря, а вопреки» формировались и настоящие математические таланты. Ирония судьбы состоит в том, что для них школьные годы оказывались связанными с традиционной школьной математикой и школьными отметками, в лучшем случае компенсируемыми замечательным, как человек или как математик, учителем, или математическим кружком, или книжкой по занимательной математике. В результате им кажется, что более эффективного пути к воспитанию математика-профессионала и нет.

Однако, с начала 1960-х гг. в нашей стране возникла возможность совмещения линий двух важнейших традиций: прагматической и творческой, увлекательной.

Все началось с кампании, запущенной в 1958 г. лично руководителем страны Н. С. Хрущевым, по «укреплению связи школы с жизнью», выразившейся, в частности, в принятии соответствующего закона. Прямой интерпретацией этого лозунга были попытки готовить выпускников школы к карьере рабочих – менее квалифицированных после основной школы, более квалифицированных после старшей школы. Лидеры отечественной науки, прежде всего – математики и физики, предприняли ряд попыток, чтобы, с одной стороны, настоять на возможности для талантливых детей идти непосредственно в университеты, с другой – чтобы проинтерпретировать «связь с жизнью» как, выражаясь сегодняшним языком, «цифровизацию». Для последней, в свою очередь, требовалась модернизация школьного математического образования, которая фактически в первый период выразилась в создании школ с углубленным изучением математики и программирования. (Далее цитируем по [1].) Первым о создании школ с компонентом современной технологии заговорил физико-химик Николай Николаевич Семенов, единственный в истории советский лауреат Нобелевской премии по химии. Семенов заявил, что реализация планов Хрущева обязательно потребует создания «школ нового типа». По мысли Семенова, «в эти школы нужно отбирать 5–8% всех выпускников восьмилетних школ и готовить в них «лаборантов-физиков, лаборантов-химиков, лаборантов-биологов, работников счетных машин, чертежников-конструкторов и т. д.». Шефство над такими заведениями должны брать университеты и исследовательские институты, а каждая школа будет, по мысли Семенова, состоять из двух половин – школы для местных учеников и интерната для одаренных детей из отдаленных районов. В школах должна будет вестись не только педагогическая, но и научно-исследовательская работа. В ходе последующей дискуссии другой крупнейший академик – Колмогоров – высказал и такую мысль: «Уровень тренировки в отношении решения задач [у учеников математических школ] будет, вероятно, выше, чем тот, который сейчас вообще достигается средними студентами университетов, они обычно перегружаются теоретическим материалом за счет малого развития навыков в решении задач».

Осенью 1959 года в трех московских школах – № 2, 7 и 425 (впоследствии 444) – одновременно открылись старшие классы, где в качестве производственного обучения готовили: в 7-й и 425-й «программистов-вычислителей», а во 2-й — радиомонтажников, но с 1960 года и там открыли программистскую специальность, в 7-й школе открыли класс радиомонтажников. Тогда же, в 1960-м, программистов начали готовить в школе № 52.

Автором этой новации в Министерстве просвещения РСФСР считали преподавателя математики школы № 425 Семена Исааковича Шварцбурда [27].

Итак, «общество и государство» получали оправдание для творчества и других «странностей» формирующейся системы образования. Это оправдание фактически состояло в том, что наступал Цифровой век.

Важным результатом этих изменений в 425-й школе стало не только обучение непосредственно программированию, но и появление в школьной математике принципиально нового содержания – основ линейной алгебры и аналитической геометрии [28]. Что же касается приложений, то, слава богу, приложения оказались подходящими. Программирование, несмотря на обилие тогда технических деталей и трудностей, давало возможность для почти постоянного творческого, самостоятельного решения математических по существу (хотя и формулируемых «программистски») задач. Таким образом, параллельно с традиционной школьной математикой (по существу XVIII–XIX вв.) в школе появилась математика XX в. и реальная творческая математическая деятельность учеников.

Крупные московские математики воспользовались открывшейся возможностью повлиять на математическое образование школьников не только через кружки, но и прямо в школе. К тому же, у некоторых из них были дети школьного возраста и был шанс создать для них хорошую школу.

Наиболее прямой формой взаимодействия университета со школой стали физико-математические школы-интернаты, созданные в 1962–1963 гг. при университетах: Новосибирском, Киевском, Московском, Ленинградском. В этих школах, собиравших учащихся старших классов со всей страны, преподавали выдающиеся математики, бывшие и их организаторами, и идеологами: А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Д. К. Фаддеев, В. М. Глушков.

Для нас принципиальную важность представляет история, начавшаяся в московской школе №7. Масштабной фигурой, пришедшей в эту школу и оказавшей решающее влияние на формирование новой системы школьного математического образования, явился Александр Семенович Кронрод [29, 30]. Школьником он участвовал в кружке Д. О. Шклярского, получил Первую премию на IV Московской математической олимпиаде (все четыре премии были получены участниками этого кружка), вошел в последнюю когорту учеников Н. Н. Лузина (наряду с Георгием Максимовичем Адельсоном-Вельским). Фронтовик, блестящий математик, прервал математическую карьеру для занятия прикладными задачами (в «Атомном проекте») и программированием, спроектировавший вместе с инженером Н. Н. Бессоновым первый советский универсальный компьютер. Реальное строительство этого компьютера затянулось на несколько лет, но и построенный только в 1957 г. релейный компьютер оказался более надежным, а иногда и более производительным, чем электронные (ламповые) того времени. В 1946–1953 гг. А. С. Кронрод вел «кружок Кронрода» – семинар для первокурсников и более старших студентов мехмата, который играл роль, сопоставимую с лузинским кружком 1930-х гг. Профессионально занявшись программированием, Кронрод объявил (видимо, ок. 1955 г.) «кружок Кронрода» по программированию в Институте теоретической и экспериментальной физики (одном из центров Атомного проекта). Среди центральных тем этого кружка было «эвристическое программирование» – то, что сегодня называется «искусственным интеллектом». Как эталонный пример рассматривалась задача игры в подкидного дурака. Кронроду удалось организовать чрезвычайно эффективный процесс «производства программного обеспечения» для прикладных задач, решавшихся ИТЭФом. Другими областями приложений вычислительной техники, где под руководством Кронрода получены выдающиеся результаты, были экономика ценообразования и медицинская диагностика. Как мы видим сегодня, в личности Кронрода совместились линии участника и руководителя кружка, профессионального математика, прикладника, программиста и деятеля школьного образования.

Н. Н. Константинов, закончивший физфак МГУ, ведший математические кружки в МГУ, руководивший целой системой таких кружков и бывший аспирантом Кронрода, получил от него предложение организовать математическое образование, продолжающее в 7-й школе традицию кружков МГУ. В 1961 г. Кронрод и его коллеги (М. Л. Гервер и др.) набрали первый класс в 7-й школе. У Константинова был опыт и научного кружка по биологии и генетике Николая Владимировича Тимофеева-Ресовского.

Технология преподавания реализовывала идею «листков», хотя ее авторы в XX веке в течение длительного времени не были знакомы с методикой Гурьева.

10 лет назад была опубликована небольшая заметка Н. Н. Константинова, в которой описана система работы *матkласса*. Сейчас кажется полезным еще раз вернуться к теме и увидеть, насколько устойчивая система была создана и как она эволюционирует и соответствует сформулированным принципам результативного образования. Цитируем по тексту [31]:

> «Основные принципы работы в математических классах – тщательность, неторопливость и самостоятельность».
>
> «Тщательность означает, что тема проходится не временно ("в вузе вас этому обучат как следует"), а окончательно (что не исключает последующего возврата к теме на новом уровне). Потеря тщательности ведет к потере интереса. Ученик, который один раз чего-то недопонял, другой раз чего-то недопонял, засоряет, наконец, свою учебу до того, что ему становится противно в ней жить. Наоборот, тщательность позволяет находить в обычных вещах все новый интерес» –

здесь речь об обязательном достижении цели, важном принципе результативного образования.

> «Основная роль учителя – не в том, чтобы рассказывать и объяснять, а в том, чтобы тщательно проверять, разбираться в любых ошибках, сохраняя искренний интерес ко всем успехам ученика. Этот интерес и является основным стимулом, который имеется в руках учителя, а вовсе не двойки и пятерки, которые, конечно, что-то стимулируют, но, к сожалению, совсем не то, что требуется» –

здесь говорится и о самостоятельности ученика, и о важности системы обратной связи по сравнению с отметками. При этом процесс обучения организован так, что решение задач сходно с решением профессиональных задач математиком или программистом. В силу самого характера профессиональной деятельности в этих областях, наиболее эффективным способом обучения является самостоятельное решение задач. Учащийся непрерывно получает от учителя новые и трудные, но посильные задачи. Но он и сам может взять из книжки задачу, которая заинтересовала его, независимо от каких-то заранее установленных целей. Когда ученик задачу решил (или думает, что решил), важно ее «сдать» учителю – предъявить свое решение для проверки. И эта проверка может оказаться самой содержательной деятельностью во всем процессе получения образования. Учитель пытается понять предложенный учеником текст, как правило, письменный. Ученик в этом тексте старается быть понятым учителем. Успех состоит в том, что эти попытки приводят к возникновению глубокого взаимопонимания между собеседниками. Учителем может служить и группа людей. Им может быть даже и текст книжки, хотя, конечно, лучше всего, если взаимное понимание постепенно создается в результате общения живых людей. В современном школьном образовании, как и в традиционной школе последних столетий, внимание к взаимопониманию учителя и ученика реально оказывается недостаточным. У этого есть очевидные причины, которые мы обсудим чуть позднее, но здесь мы подчеркнем, что цель взаимопонимания в общении часто оказывается вторичной. Основное же для учителя в традиционной модели – это в фиксированных временных рамках преподать, сообщить ученикам готовое знание, а потом оценить, насколько они это знание усвоили: проверить решение задачи или выслушать устный ответ и поставить оценку, в лучшем случае сопроводив ее кратким комментарием. Это совсем не похоже на *взаимо*понимание. В качестве экстремального примера, поясняющего наше представление о *взаимо*понимании и *взаимо*действии, можно вспомнить случай, как крупный математик, Иосиф Бернштейн беседовал со своим аспирантом, который пытался задавать правильные вопросы. Иосиф, не жалея времени, старался эти вопросы понять и дать на них естественные ответы. К концу этой беседы возникло новое знание, которым собеседники не обладали вначале – это знание составило диссертацию аспиранта.

В школе, изобретенной Коменским, учитель в классе сообщает истину десяткам, или даже сотне учеников, а они записывают слова учителя на грифельных досках или все вместе декламируют выученную истину. Коменский, конечно, ясно понимал недостатки такого подхода, он сам говорил о том, что научиться чему-то можно, только делая это – *fabricando fabricamur* (создавая, создаем себя). Однако подход был и остается эффективным, если цель именно – дать готовое знание для заучивания. Лектор сегодня может обращаться к сотням студентов более эффективно, чем во времена Коменского – он может использовать микрофон и большой экран, через интернет может обращаться и ко многим тысячам. Но беседы, диалога, взаимопонимания при этом, как правило, не возникает. *Матшкола* ищет пути решения этой проблемы, ориентируя ученика на содержательный результат взаимопонимания (это и означает жаргонное «сдать»), а не на отметку. При этом разумным образом растут затраты времени ученика на «прохождение темы» и затраты времени учителей на общение, но результат стоит того, особенно, в контексте XXI века.

> «Самостоятельность означает, что значительная часть теоретического материала, иногда почти весь материал, выполняется учащимися самостоятельно – они сами

доказывают или опровергают большинство предлагаемых задач и теорем. Прямой рассказ учителя малоэффективен. Дело в том, что начинающие не понимают математического языка. Например, мало кто из начинающих способных учеников видит разницу между фразами: "для любого C найдется x, который больше C" и "найдется x, который больше любого C". Вот и судите, много ли поймут ученики из грамотного рассказа квалифицированного математика. Поэтому основным способом подсказки учителя становится структурирование материала» –

это действительно та самостоятельность, о которой говорили Гурьев и другие, в форме того, что учащиеся сами «создают математику» и тем самым ее осваивают (Коменский).

«Неторопливость означает, что на каждую трудность уходит столько времени, сколько нужно. Не беда, если пройдено мало. А беда начинается тогда, когда нужно к определенному сроку что-то "пройти" – неважно хорошо или плохо. Это – беда, так как в результате не пройдено ничего, и всем становится неинтересно – и ученикам, и учителям» –

конечно, как и все другие, этот принцип не абсолютен. «Нужное» время не должно «уходить в бесконечность», существует «прокрастинация», поэтому и в *матклассе* есть «дедлайны», к очередной календарной дате нужно оценить, в каком месте «листочка» находится тот или иной студент, и принять решение о «реструктуризации» долгов. И обо всем этом приходится заботиться и в *матклассе,* и в системе результативного образования в целом. Но важно понимание проблемы и общий подход к ее решению. В частности, разные скорости работы учащихся удается выравнивать и синхронизировать благодаря использованию листков, в которых базовый результат достигается при решении части задач, а дополнительные задачи решаются не всеми.

«Важной особенностью сильных математических классов и школ является участие в их работе профессиональных математиков. Значение такого участия трудно объяснить, однако почти каждая биография крупного ученого подтверждает латинскую пословицу: "Каждая клетка из клетки" [Принцип Рудольфа Вирхова «Omnis cellula ex cellula»], ибо и учитель такого ученого оказывается сам достаточно крупным ученым. Научная вера руководителя может быть основана либо на собственном живом опыте, либо на воспоминаниях о собственном опыте, либо на усвоенном чужом опыте. Первый вариант самый ценный» –

так действительно строились первые матклассы, в их работе принимали участие Г.М. Адельсон-Вельский, И. М. Гельфанд, Е. Б. Дынкин, А. С. Кронрод. Существенную роль в ряде случаев сыграло то, что математики просто создавали школу или хотя бы математическое образование для своих детей. Однако со временем оказалось, что задача найти для каждого маткласса профессионального математика – нереалистична. Нашлась замена: потенциальный будущий профессиональный математик, и не один, а много. Можно найти студентов, занятых и увлеченных, по существу, профессиональной математической деятельностью и способных передать ученикам модель этой деятельности и взаимодействия с другими математиками.

«При таком преподавании необходим не выборочный контроль на зачете или экзамене, а сплошной контроль. Для этого требуется много учителей. Выход находится в привлечении студентов. В сильных школах в классе работает несколько учителей математики. Привлекаются сильные студенты, часто победители крупных олимпиад. Студенты с удовольствием повторяют со школьниками свое математическое детство. Отношения студентов со школьниками подобны отношениям старших братьев с младшими, в то время как отношения профессиональных учителей с учащимися подобны отношениям родителей с детьми. Присутствие в школе студентов заметно меняет атмосферу, сглаживая возрастные барьеры» –

вматклассе предполагается работа преподавателя (учителя или студента) с небольшим количеством учеников – до 6 человек. Работа студентов в классе часто начинается с их работы в качестве руководителей математического кружка с теми же школьниками. Привлечение студентов к педагогической деятельности имеет ряд преимуществ. С одной стороны, студенты перенимают ценный педагогический опыт учителя и получают дополнительные возможности для развития. С другой стороны, работа студентов значительно дешевле работы профессионального учителя (во многих случаях бесплатна или окупает только проездной билет), что позволяет обеспечить достаточное количество преподавателей на класс.

> «Сильные математические школы в своих методах и идеях ушли далеко вперед по сравнению с традициями, сохраняющимися в большинстве наших университетов. И сейчас речь не идет о том, чтобы даровать школе университетские методы работы, а скорее о том, что университетам следует присмотреться к школам и кое-что перенять» –

это утверждение можно было бы считать вызовом, эпатажем. К сожалению, авторы, особенно один из них – зав. кафедрой ведущего математического вуза, вынуждены признать справедливость этого тезиса. Парадокс состоит в том, что имея целью готовить математика-исследователя, мы основную часть времени студента и преподавателя затрачиваем не на обучение исследованию в самом исследовании и его обсуждении, а на чтение, слушание и конспектирование лекций, в лучшем случае – разбор чужих доказательств, см. выше о диалоге Кронрода и Головиной, а также – цитату из Колмогорова, где он говорит именно о «решении задач», разумеется, подразумевая не рутинные задачи из задачников, а исследовательскую математику (см. настоящий текст, конец третьего абзаца раздела «Математические школы»).

> «В программу включаются некоторые ключевые темы, которые, разумеется, не охватывают всю математику. Кроме обычных школьных тем, встречаются начала анализа, теория алгоритмов, некоторые темы высшей алгебры. Обычно лучше всего идут начала анализа – они способны надолго увлечь большинство учащихся. Но выбор тем сильно зависит от преподавателей, от их способности с глубоким интересом относиться к теме и к работе учащихся в ней». –

соображения по тому, что традиционно называется «содержанием образования» и считается критически важным, на самом деле менее важно, чем содержание в виде формирования способности к творческой математической деятельности (в том числе, как мы говорили, и программистской). Видимо, в системе, начатой в 7-й школе Кронродом и Константиновым, никогда и не было в одном классе всего, перечисленного выше. Напротив, могло статься, что в течение двух лет способные школьники, занимаясь только в классе по 6–8 часов, а еще и дома, осваивали нечто близкое к первому семестру курса математического анализа. Значит ли это, что время учащихся расходовалось не эффективно? Разумеется, нет. Ученики самостоятельно «создавали математику»: свой «персональный» математический анализ, и в процессе учились создавать любую другую, в том числе – еще не существующую математику. С учетом всего сказанного, подчеркнем, что в рамках первоначального движения математических школ были разработаны прекрасные «задачные» изложения важных разделов математики (см., например, [32, 33]) и эта работа продолжается, в том числе С. И. Комаровым и его коллегами в 179-й школе. Следующие поколения преподавателей используют существующие разработки наряду с тем, что является темой их собственных занятий в математике, и тем, что им кажется интересным. Имеющаяся практика показывает, что наиболее эффективный метод обучения – давать учащимся точно поставленные математические задачи. Нечётко поставленные задачи тоже используются, но к ним надо относиться с осторожностью.

Работал ли в математических школах фактор мотивации в виде новизны, неожиданности решения? В большой степени – да. Новизна в систематическом курсе какого-либо раздела математики для матшколы состоит в том, что «неизвестно, как это делать», и сопровождается дополнительными преимуществами – нужно удерживать большой релевантный материал и т. д.

В этом смысле и, например, традиционная геометрия годилась бы, если бы мы предложили ученикам создавать ее самим, может быть, открывая что-то в эксперименте. Но там возникла бы неприятная с внешней точки зрения и легко критикуемая ситуация: *матшкласс* «прошел» за бо́льшее число уроков меньше обычного класса.

Еще – о результате, точка зрения на олимпиады, высказанная еще до введения ЕГЭ:

> «Стоит отметить, что среди учителей математических классов распространено убеждение, что не следует специально готовить учеников к выступлениям на олимпиадах. Хорошее выступление на олимпиаде должно быть побочным следствием достигнутого математического уровня, а не результатом специального изучения известных типов задач и методов их решения. Это, конечно, не означает, что не нужно изучать поучительные олимпиадные задачи, содержащие полезные методы и идеи, но их нужно изучать не ради олимпиад. Сильные школьники – слишком драгоценное национальное достояние, чтобы тратить их силы и время на такую безделицу, как престиж города или страны» –

это сильное утверждение. Его смысл – в подчеркивании того, какие цели ставит перед собой ученик. Это не только не школьные отметки, но и не победы на олимпиадах. Безусловно, олимпиада мотивирует, победа на ней дает уверенность в себе, а заодно и помогает поступить в желанный вуз. Но есть и не до конца проясненный парадокс относительно высокой доли «олимпиадников» высшего уровня, которые не вышли на сравнимый уровень во «взрослой» математике, хотя есть много примеров и совпадения этих уровней.

Алексей Яковлевич Канель-Белов и Александр Кириллович Ковальджи (выпускники и энтузиасты 2-й школы, когда-то соперницы 7-й, а сегодня, возможно, соперничающей со 179-й) в своем критическом (!) рассмотрении «педагогики листков» [34] пишут: «Элементы листковой системы возникли в 1960-е годы, в частности, в Вечерней математической школе при Московском математическом обществе, созданной Е. Б. Дынкиным...». Это утверждение авторов показывает генетическую связь системы матклассов с системой кружков. И дальше:

> «Усилиями Н. Н. Константинова в Москве сложилась форма обучения в кружках по математике – листки с задачами, которые выдавались ученикам на занятиях. Каждый ученик решал эти задачи в индивидуальном темпе, а учитель проверял правильность решений, делал замечания и давал советы. Листки, как правило, бывают тематическими и рассчитаны на определенный возраст и уровень подготовки учеников. Эти листки стали накопителями идей и популярных задач, которые передавались по городам и весям, помогая всем учителям ценными наработками талантливых математиков-педагогов... При ее осуществлении сложились традиции, связанные, в частности, с большим числом проверяющих. Она позволяет начинающему преподавателю начать работать. Студенты не только помогают проводить занятие, но и образуют промежуточное звено между старшим преподавателем и учениками» [34].

«Технологическое» описание, которое авторы дают системе:

> «Формы листковой системы могут варьироваться, но, в общем и целом, она [система] заключается в следующем:
>
> 1. Учащиеся получают листки с задачами. Иногда туда включается минимум теории.

2. Решив задачу, учащийся поднимает руку, к нему подходит проверяющий.
3. Если задача решена правильно, учащемуся в ведомость вносится знак "плюс".
4. Иначе ему приходится думать дальше.
5. Имеются требования по количеству решенных задач к определенному сроку с учетом их сложности, некоторые задачи объявляются обязательными для решения» [34].

В данном описании не упомянуто, что решения задач, как правило, записываются. Обязательная запись решений позволяет избавиться от существенных проблем: с одной стороны, запись решений позволяет учащимся более ответственно относиться к обоснованию используемых утверждений, с другой стороны, регулирует попытки «сдать» решение путем многократного обращения к преподавателю (и расходу его временнóго ресурса), с третьей – позволяет преподавателю более тщательно проверять ход рассуждений.

Преподаватели, реализовывавшие данную педагогическую модель в 1990–2000-е гг., пишут: «Школьники самостоятельно решают и кратко записывают задачи — каждый в своем темпе. Ни формальных домашних заданий, ни текущих оценок нет (хотя примерно раз в полгода проводится зачет с отметкой), — а на уроке обсуждают их один на один с преподавателями. Для этого на каждом уроке присутствует команда из 4–6 преподавателей. Они же составляют листки» [35].

Одним из критериев качества системы образования можно считать возвращение выпускника в школу в качестве преподавателя: выпускники, с одной стороны, естественным образом сохраняют и продолжают традиции школы, с другой стороны, само по себе наличие у выпускников потребности вернуться в школу в новом качестве является признаком устойчивости сложившейся образовательной модели. В случае студентов педагогического вуза, серьезная работа в школе сильных студентов помогает решить многие проблемы педагогического образования – вероятность того, что такой студент, получив диплом учителя, придет работать в школу, повышается. Продуктивным было бы сотрудничество в одном классе и хороших студентов педвуза, и студентов – будущих математиков. С другой стороны, есть надежда, что и все большее количество выпускников математических факультетов университетов, приобретя во время учебы опыт математической работы, пройдя педагогическую практику в период обучения, потом выберут профессию школьного учителя.

Завершая обсуждение, стоит заметить, что работа *матшкол* и *матклассов* на протяжении прошедших десятилетий столкнулась с рядом проблем, и некоторые из них связаны именно с последовательной линией, описанной выше – воспитываемыми благодаря занятиям математикой самостоятельностью, независимостью суждений, повышенному вниманию к истине и лжи.

6. Другие источники результативного образования в российской школе

Этот раздел полностью написан А. Л. Семеновым.

Успешная и эффективная система, включающая многие черты результативного образования, была реализована в 1980-е гг. в российской школе в массовом масштабе в форме *уровневой дифференциации*. Эта система охватила порядка 1000 вполне рядовых школ и ряд предметов, а не только избранный предмет для учащихся, мотивированных к серьезному учению. Однако центральным элементом этого подхода было математическое образование.

Возникновение и актуальность уровневой дифференциации была связана с двумя важными этапами в развитии экономики и образования в стране. Первый – это становление, начиная с 1930-х гг., технологии и инженерной профессии как центрального элемента в жизни страны (включая ее оборону в биполярном мире) и ориентация школьной прагматики на инженерное дело и инженерные вузы. (Эхом стал «Спутник» в США.) Второй – это переход ко всеобщему среднему образованию в 1970-е гг., объявленный в 1966 г.

Идеологом уровневой дифференциации был Виктор Васильевич Фирсов, по образованию – математик, работавший и руководителем математического кружка для школьников, и преподавателем мехмата МГУ, и учителем школы №444 Москвы, и профессором Московского института повышения квалификации работников образования. В своей статье «О совершенствовании методической системы обучения математике» (1988 г.) [36] он пишет:

> «Традиционная методическая система складывалась в условиях, когда перед школой не стояла задача обучать всех, и главная цель среднего образования заключалась в том, что оно было ступенью к высшему. Это определяло методическую систему в целом, которая была ориентирована на максимальный уровень усвоения и рассчитана на наиболее подготовленную часть школьников. Когда среднее образование стало обязательным, указанная цель перестала быть доминирующей, однако система преподавания претерпела мало изменений. Она по-прежнему осталась направленной на то, чтобы добиваться от всех школьников максимального уровня овладения материалом, которого смогут достичь заведомо не все учащиеся. Это явилось одной из причин таких негативных явлений, как перегрузка, потеря интереса к обучению, формализм в оценке и процентомания [т. е. фальсификация реальной оценки образовательных результатов для улучшения отчетности], серьезные воспитательные издержки, падение уровня математической подготовки выпускников школы...
>
> Ориентация учебного процесса «на максимум усвоения» чрезвычайно опасна как для сильных, так и для слабых учащихся.
>
> Для сильного она нехороша тем, что мы вынуждены все время снижать уровень обучения. Кроме того, очень плохо учиться, когда рядом с тобой никто ничего не понимает. Слабый ученик просто не может учиться на максимальном уровне, у него накапливаются серьезнейшие проблемы, крайне затрудняющие последующее обучение или даже делающие его невозможным.
>
> Необходима переориентация МС [методической системы], позволяющая в каждый конкретный момент учебного процесса перед каждым учеником ставить учебные задачи уровня «посильной трудности». Именно в этом случае ученик оказывается в «зоне ближайшего развития», именно в этом случае может возникнуть эффект «победного учения», что является важнейшей предпосылкой развития интереса к учебе. Таким образом, необходима перестройка МС на основе уровневой дифференциации учебных требований, предъявляемых школьнику, и обеспечения постепенности в движении школьника по этим уровням.
>
> Отметим, что отсутствие гарантированного уровня подготовки школьника на выходе из практически каждой ступени обучения является важнейшим недостатком сложившейся МС. Следствием этого является невозможность опереться на следующей ступени на твердый фундамент математической подготовки школьников. Решение указываемой здесь проблемы по отношению к школьному курсу математики имеет особое значение. Успешное изучение математики возможно только при условии, если на каждой ступени обучения ученик достигает определенного, опорного уровня подготовки.
>
> Исследования показывают, что в настоящее время важнейшими опорными умениями не овладевают до 60% школьников. Поэтому возникает проблема обеспечения

> достижения всеми учащимися уровня обязательной математической подготовки как важнейшего направления совершенствования МС.
>
> Учитывая сложившуюся в школе ситуацию, первоочередным направлением реализации уровневой дифференциации учебных требований следует признавать выделение уровня обязательной подготовки и ориентацию учебного процесса на первоочередное достижение этого уровня всеми учащимися с одновременным созданием условий для более продвинутой реализации математических способностей и дарований. Иными словами, дифференциация учебных требований должна осуществляться на основе обязательных результатов обучения» [36].

В статье «Методика обучения математике как научная дисциплина» (2005 г.) В. В. Фирсов пишет:

> «Важнейшим проявлением специфики общего математического образования является оригинальное целеполагание, в котором формальные цели образования (воспитание и развитие ребенка) выступают наравне с реальными (усвоение математического содержания, умений применять математику к решению прикладных задач). Образно говоря, математику в школе изучают не только и, возможно, не столько ради усвоения собственно математики. Культурное значение школьного математического образования оказывается сопоставимым с культурным значением самой математической науки» [37].

Касаясь общих проблем системы образования, В. В. Фирсов писал в статье «Единая и многообразная» (1989 г.):

> «Стремление наполнить головы учащихся все возрастающим объемом полезной информации выглядит нелепым на фоне реализации остаточного принципа в усвоении учебного материала. Мы можем быть относительно уверены лишь в качестве общеобразовательной подготовки отличника, тогда как про остальных известно только одно — они не полностью усвоили предложенный материал. А поскольку, образно говоря, «четверка за Лермонтова» полностью закрывает «двойку за Пушкина», то относительно подавляющего большинства выпускников школы нельзя определенно сказать, что же они в действительности знают и умеют.
>
> Преимущественное внимание к объему информации, которую должен усвоить ученик, — подход методологически несостоятельный, так как абсолютизирует значение памяти в ущерб умениям самостоятельно действовать, принимать решения, приобретать недостающую информацию путем самообразования.
>
> Уровень обязательной общеобразовательной подготовки — это «сумма знаний», предназначенных для изучения в школе. В идеале он должен представлять собой образцы деятельности (в том числе деятельности самообразования), подлежащие обязательному освоению детьми, что отвечает деятельностному подходу, развиваемому отечественной психолого-педагогической наукой» [38].

Предложенные в уровневой дифференциации принципы, несмотря на относительно широкую реализацию в ряде регионов России, оказали непрямое и, к сожалению, недостаточно сильное влияние на более широкую образовательную практику и политику в сфере образования (см. например, [39]).

Система Фирсова была серьезной попыткой перестроить школу «изнутри», используя уже существующие в школе и обществе стереотипы и ориентиры, вводя при этом просто формулируемые и однозначно понимаемые технологии. Другим подходом, намного более гибким, со всеми присущими гибкости плюсами и минусами, стала *учебно-исследовательская деятельность учащихся* [40]. Идея этого подхода основывается на следующих положениях:

- исследовательская деятельность, интерес к миру присущи человеку с рождения;
- исследовательская деятельность – необходимая часть жизни современного человека;
- исследовательская деятельность ученика дает ему мощную мотивацию в освоении конкретного содержания, является важным источником осознания больших идей и формирования личностных качеств;
- ресурсы времени и энергии ученика могут быть получены за счет снижения затрат на формирование рутинных механических навыков и заучивание знаний.

Учебно-исследовательская деятельность, дополняющая «основную образовательную программу», распространена в тысячах школ России. В некоторых из них, например, в московской школе 1553 им. В. И. Вернадского [41], она успешно интегрируется с более стандартными подходами в освоении школьных предметов. Эта деятельность нашла вполне адекватное отражение во ФГОС. Ясно, что рассматриваемые выше практики матшкол часто включают в себя подлинные и ценные образцы учебно-исследовательской деятельности. Остается только заметить, что с «предметной» точки зрения учебно-исследовательская деятельность, как правило, шире любого предмета – она органично захватывает и многие школьные дисциплины, и многие стороны жизни. Подробнее она рассмотрена в уже упоминавшейся книге А. С. Обухова [40], где можно найти дополнительные ссылки. Наконец, говоря о развитии линии «связи школы с жизнью» в сфере цифровых технологий, естественно упомянуть российские лицеи информационных технологий, прежде всего московский ЛИТ № 1533 [42], программистские проекты школьников которого реализуются в сотрудничестве с профессиональными программистами ведущих ИТ-компаний.

7. Заключение. Перспективы

Авторы настоящей работы знакомы более 55 лет. Знакомство их началось, когда Семенов пришел на кружок Константинова в Зоологическом музее МГУ, а потом – учеником в 9-й класс московской 7-й школы. 50 лет назад началась наша совместная работа в 7-й школе, включающая создание листков для всех учащихся класса, как результат печати 4–5 закладок на пишущей машинке «Эрика», которая брала 6–7 копий на тонкой бумаге (ср. [43]).

В конце 1985 года, благодаря академику Е. П. Велихову, была предпринята попытка создать новую модель образования для страны в рамках большого проекта ВНТК «Школа-1» АН СССР. «Взрослая» исследовательская деятельность работников Академии наук, вузов и еще сильных к тому моменту предприятий военно-промышленного комплекса страны, с одной стороны, и модель математических кружков и *матшкол,* с другой стороны, стали основой такого построения. Краткое изложение нашего взгляда того времени видно из тезисов доклада Константинова на семинаре ВНТК, сохранившихся в архиве А. П. Ершова [44]. Среди тезисов этого доклада: переход от отметки к обратной связи, важность ресурса времени учащегося, персонализация как инструмент значительного индивидуального прогресса «слабого» ученика, принципиальная важность участия математиков – студентов и профессионалов – в работе с учащимися, практически подтвержденная устойчивая тиражируемость модели матkласса, несмотря на ее «инородность» для современной школы.

В проекте ВНТК второй автор данного текста вместе с Анной Константиновной Поливановой выступил инициатором разработки системы математического образования для начальной школы, взявшей за основу разъясненные выше принципы: тщательность, неторопливость и самостоятельность. При этом:

- существенно расширен круг базовых математических объектов: цепочки и мешки символов сделали наглядными математические построения, их анализ и нахождение ошибки;

- особое внимание было уделено логике и языку;
- принципиальным является самостоятельное открытие учеником того, что традиционно предлагается от лица какого-то авторитета: десятичной системы счисления, таблиц сложения и умножения, правил древнерусского языка и т. д.;
- расширился класс решаемых задач, в том числе, за счет задач перебора, построения цепочки или иного объекта по условиям, построения алгоритма и стратегии в игре.

Все это позволило приблизить реализацию нашей системы к принципам результативного образования. Экспериментальную реализацию создаваемой системы вела Елена Игоревна Булин-Соколова в начальных классах московской школы № 57 – школы-лаборатории ВНТК «Школа-1». Эта работа вылилась в ряд линий учебников для начальной школы [45, 46].

Существенным для работы ВНТК была и общая парадигма учебно-исследовательской деятельности учащихся, и контакты с мировым образованием через Благовеста Сендова (Болгария), и знакомство с практикой конструкционизма Симора Паперта [47, 48].

20 лет назад наша непосредственная совместная работа продолжилась, когда Семенову удалось воссоздать 179-ю школу в качестве части вуза (Московского института открытого образования, ректором которого он был) именно как «Школы Константинова», а Константинов вернулся в нее преподавать.

Выросшие из традиций кружков и *матшкол,* принципы результативного образования в XXI веке востребованы именно как характеристики *массового образования.* Сегодня становится понятным, что:

- Массовое математическое образование может быть выстроено как система разнообразных мотивирующих задач, посильно трудных для каждого школьника. Новизна в курсе для массовой школы будет обеспечиваться сразу заметным разнообразием тем, которые можно брать из задач «на смекалку» всех веков, из олимпиад, из программирования (которое сегодня посильно и воспитанникам детского сада [49, 50]).
- Математическое образование для учащихся, ориентирующихся на современную, высокотехнологичную цифровую экономику, должно учитывать потребности этой экономики, где математика неразрывна с цифровыми технологиями. В этом потоке должно выделяться направление ИТ-специализации, включающее серьезное программирование.
- Математическое образование для детей, которые, вероятно, выберут карьеру математика-исследователя, должно ориентироваться на формирование модели математической деятельности. Это может быть построено по-разному в разных школах и классах, с учетом наиболее актуальных сегодня направлений математических исследований, но в первую очередь – с учетом наличия проработанных курсов на задачной основе или ориентиров для их построения. Наличие компьютерной поддержки, соответствующих средств эксперимента, автоматизации доказательства и т. п. в течение ближайших нескольких лет может не быть обязательным.

Такая структура образования должна отражаться и в системе набора в вузы, в случае продолжения линии ЕГЭ – в ЕГЭ по математике и информатике. При этом в последнее десятилетие развитие ЕГЭ шло фактически в направлении сужения разнообразия заданий, подготовки («натаскивания») выпускников на конкретные, узко очерченные виды заданий. Введение базового и профильного уровней мало изменило ситуацию. Введение третьего варианта экзамена в соответствии с указанными выше тремя группами детей представляется, к сожалению, мало реальным.

Альтернативой для всего математического образования может быть смена приоритетов для целей, признание того, что важнейшей задачей школьной математики является подготовка человека к решению неожиданных задач, и, значит, задания ЕГЭ должны обладать высокой степенью неожиданности. Гипотетически можно предположить, что если задания берутся из открытого банка, где есть, например, 100 тыс. заданий, то какой-то выпускник при подготовке к экзамену решит их все. Ну что же, в таком случае придется смириться: хотя для этого ученика на ЕГЭ неожиданностей не было, но он хотя бы блестяще освоил все детали школьного курса и в вуз его стоит принять.

Более серьезная трансформация математического образования может быть связана с основным изменением в жизни человечества за последние сто лет – цифровой революцией. Эту революцию можно назвать и революцией искусственного интеллекта, поскольку в существенной степени она состояла именно в передаче искусственным средствам – компьютерам – многих функций интеллекта человека: сначала более рациональной его части, как функции точных вычислений и точного написания слов, потом и более интуитивной, как распознавание лиц или игра го. Представим себе, что ученик в школе самостоятельно, но с помощью учителя и эксперимента (с компьютером или без) открывает важнейшие факты и алгоритмы математики, например, десятичную систему счисления, алгоритм умножения столбиком (желательно в более удобной, исходной форме индусов и Фибоначчи), формулу корней квадратного уравнения, теорему Пифагора и т. д. В дальнейшем ему может понадобиться то, что он – ученик – открыл. Тогда он, как и все человечество, использует соответствующий компьютерный инструмент арифметических вычислений или решения уравнений и т. д. В этой ситуации, ученик сможет:

- используя на экзамене компьютер, показать результаты не хуже, чем хороший выпускник сегодня;
- в течение срока обучения решать задачи намного более неожиданные и разнообразные, чем сегодня;
- сохранить интерес к математике и готовность ее применять в жизни, набрать опыт такого применения.

Принципы результативного образования легли в основание работ по реализации идей персонализированного компетентностного подхода и развития навыков XXI века. В 2017 г. А. Л. Семенов получил от Германа Оскаровича Грефа предложение возглавить проект по теоретической разработке и проектированию реализации этих принципов, включая функции цифровой платформы, поддерживающей реализацию результативного образования. К лету 2018 г. разработка основных концептуальных положений была вчерне завершена и начался этап реализации.

Мы надеемся, что сегодня уже началось становление новой традиции в нашей стране в условиях реальности, которая только предвиделась А. Н. Колмогоровым, А. С. Кронродом, В. В. Фирсовым.

8. Основные положения результативного образования

Этот раздел полностью написан А. Л. Семеновым.

В настоящее время в российском образовании формируется подход к общему образованию, основанный на системе принципов, которую можно описать одним термином «результативное образование». Вот, в кратком изложении, эти принципы:

1. Результатом образования является способность, умение, желание применить то, что ты в образовании приобрел. Это применение возможно и внутри самого изучаемого предмета, но оно также ценно в других областях и в жизни. Наиболее эффективным способом

достижения результата является именно его применение параллельно с достижением (*fabricando fabricamur,* т. е. «учиться в деятельности» – Ян Коменский).

2. Ценным для применения сегодня и в обозримом будущем являются не конкретные знания-умения-навыки, а общие способы действий, способность знания находить, а умения и навыки приобретать. В процессе учения – достижения указанного результата – решаются конкретные задачи. При решении постепенно осознаются большие идеи, позволяющие ориентироваться в мире, и осваиваются способы действий, применимые в учении и в жизни за пределами области решаемых задач.

3. Планируемые результаты образования, иначе, короче говоря – цели, формулируются учеником совместно со школой и родителями. Ценным является участие и других заинтересованных сторон (например, местных предприятий, вузов) в формировании целей. Цели организованы иерархически, подчиненные цели складываются в более общие. Цели постепенно становятся все более понятны ученику: сначала крупные и близкие, потом все более детальные и далекие. Для достижения какой-то цели бывает необходимо достичь каких-то предыдущих. Среди целей могут быть и находящиеся за пределами школы, данного уровня образования и образования вообще – жизненные цели.

4. Для каждой цели возможны разные степени ее достижения. При планировании выбираются и цели, и степень достижения каждой. Цели, относящиеся к одной предметной области или к разным, но связанные одна с другой, планируются с согласованными степенями их достижения. Минимальная степень достижения цели определяется образовательным стандартом и государственной итоговой аттестацией.

5. К важным целям образования относится формирование способности, умения и желания решать неожиданные, новые задачи (преадаптивность, по А. Г. Асмолову [2]) и продолжать учиться.

6. Цель достигается в результате выполнения цепочки заданий, задания могут быть в том числе и проектными, с открытой, неточной формулировкой. Ее уточнение, как и выбор отдельных заданий из числа предложенных, может осуществлять ученик.

7. Выполняемые задания интересны, посильно трудны для ученика, находятся в зоне его ближайшего развития. Возникающие по ходу решения проблемы мотивируют ученика и помогают формированию модели обращения к учителю, со-ученику, эксперту за помощью.

8. Ученик сам понимает, удалось ли ему выполнить задание и насколько успешно. Ему в этом понимании помогает учитель, а также внешние наблюдения. Например, модель корабля может утонуть или плыть, программа может выдать желаемый результат или зациклиться. Это, наряду с поддержкой взрослого, является стимулом для ученика, а еще более – возможностью применить результаты учения в действии. Наряду с внешним, видимым другими, результатом выполнения задания, ученик осознает и внутренний результат образования.

9. Реакция учителя на работу (выполнение задания) учеником – обратная связь – бывает содержательным обсуждением достигнутого результата, советом, что и как можно улучшить (если такое улучшение имеет смысл), «по умолчанию» содержит элемент поддержки. Порожденное такой реакцией улучшение работы может быть не менее ценно, чем сама работа, в частности потому, что оно отражает общее умение ученика воспринимать внешнюю реакцию. Оценивание, в частности выражаемое отметкой, имеет подчиненную роль и может не использоваться вовсе. При этом среди целей может иметься

и получение внешней отметки, скажем, нужного для поступления в вуз «балла ЕГЭ». Такая цель также может планироваться.

10. Каждая цель, запланированная учеником, им в итоге достигается в запланированной степени (возможно, после цепочки улучшений). При формулировании и достижении внешних целей может быть предусмотрен индивидуальный диапазон: «надежный минимум – желательный оптимум – реально возможный максимум». Естественно, что целью не должна быть обязательно «пятерка», а может быть «зачет», соответствие обязательному минимуму.

11. Поддержание и развитие мотивации ученика к учению является важной задачей участников образовательного процесса. К средствам решения этой задачи относятся: участие ученика в выборе целей и их понимание; выбор конкретной задачи из предлагаемого поля выбора и выбор способа ее решения; решение разнообразных неожиданных, непривычных задач; наличие связей и системность, достраивание больших идей; содержательная обратная связь и поддержка достижений, ощущение прогресса; реальное значимое участие в жизни вне школы как часть образовательного процесса; установка на рост; целостное позитивное отношение к ученику и его будущему со стороны других.

12. Ресурсными ограничениями, в которых идет образовательный процесс, являются (в порядке важности):

    - рабочее время, затрачиваемое учеником на работу над заданием (самостоятельно или вместе с другими);
    - календарное время, за которое учащимся достигается цель;
    - суммарное рабочее время, затрачиваемое учителем.

    Важным, тонким и сложным ресурсом ученика, который должна учитывать школа, является его психофизиологическое здоровье и главное – желание учиться, на сохранение и развитие которого, в частности, направлена система результативного образования.

13. Для каждого задания исходно планируется необходимое для выполнения этого задания время. При принятии задания учеником планируемое время может уточняться с учетом специфики ученика.

14. При планировании учебного процесса в группе учащихся школа осуществляет календарное планирование достижения целей, общих для всех учащихся группы. Для каждого учащегося планируется степень достижения цели и рабочее время на выполнение каждого задания. Кроме того, планируется время, затрачиваемое учителем на обратную связь и иную работу с учащимся и группой.

15. Планируемое суммарное (по всем видам участия в образовательном процессе) рабочее время ученика должно удовлетворять ресурсному ограничению ежедневной, недельной и годовой нагрузки. То же – для учителя.

16. Время, реально затрачиваемое учеником на работу с заданием, фиксируется им самим, в том числе – автоматически, с возможной помощью других.

17. Выявляющееся несоответствие реально затрачиваемого в предмете времени запланированному (перегрузка и недогрузка) рассматривается участниками образовательного процесса. Перегрузка подлежит скорейшей корректировке, включая помощь в концентрации, организации работы и режима дня, изменение внешней среды (в том числе – со

стороны родителей), перераспределение времени между разными предметами, изменение степени достижения целей в предмете, изменение образовательной и иной нагрузки вне школы. Недогрузка также может привести к корректировке планов, в частности, появлению дополнительных целей, не входящих в систему целей, общую для всей группы (класса), в том числе – целей в системе дополнительного образования или продуктивной деятельности.

18. Материальное и информационное пространство школы, ее уклад должны предоставлять ученику пространство выборов, содействовать осуществлению выбора, желательного для общества.

19. Участники образовательного процесса предпринимают усилия для достижения родителями понимания и их участия в формировании уклада и работы школы, индивидуальной системы целей ребенка и хода его учения, смысла обратной связи.

20. Успех школы измеряется как признаваемое родителями и учениками достижение всеми учениками всех запланированных целей и соблюдение ресурсных ограничений. Каждый учитель и школа в целом постоянно учится, организует взаимодействие, включая обратную связь, между всеми участниками образовательного процесса.

При существующих сейчас в российской школе условиях реальность описанной системы во многом зависит от полноценного использования цифровой платформы учения, что, в свою очередь, требует использования цифровых средств учебной деятельности, начиная с редактора текстов и инструментов работы с математическими объектами и кончая аудио- и видеозаписью занятий.

Есть надежда, что многолетняя, воспроизводимая модель *матшкол* допускает распространение на другие области российского образования:

(a) на математическое образование не только высокомотивированных учащихся старших классов, но и всех школьников;

(b) не только на математическое образование, но и на все общее образование.

Выше были приведены (частичные) аргументы в пользу такой возможности. Для (a) – это олимпиада «Кенгуру» Башмакова, для (b) – это уровневая дифференциация В. В. Фирсова и учебно-исследовательская деятельность [40]. При этом мы считаем, что такое распространение может соответствовать принципам результативного образования.

9. Благодарности

Мы благодарны Е. П. Велихову, Л. П. Кезиной, Г. О. Грефу: их видение будущего образования запускало работу; директорам школ А. Б. Волкову, С. Л. Менделевичу, П. А. Якушкину, которые брали на себя ответственность за всех участников образовательного процесса, создававших модель маткласса.

Благодарим Благотворительный фонд СберБанка «Вклад в будущее», который поддержал работу коллег А. Л. Семенова по проектированию работы над цифровой платформой учения и реализации результативного образования на ней. Благодарим В. Кондратьева за участие в создании первого варианта текста и полезное обсуждение, А. С. Обухова, многолетняя практика которого и конкретные замечания были существенны при работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кукулин И., Майофис М., Сафронов П. (ред. и сост.). Острова утопии. Педагогическое и социальное проектирование послевоенной школы (1940—1980-е) // Библиотека журнала «Новое литературное обозрение», серия «Неприкосновенный запас». Москва, 2015. – 695 с.

2. Асмолов А. Г., Шехтер Е. Д., Черноризов А. М. Преадаптация к неопределенности как стратегия навигации развивающихся систем: маршруты эволюции // Вопросы психологии, 2017. №4. — С. 3–26.

3. Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. Пособие для учителей // Учпедгиз, Москва, 1951. – 152 с. [Электронный ресурс] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=452&option_lang=rus (дата обращения 25 января 2020 г.).

4. Калягин Ю. М. Школьный учебник математики: вчера, сегодня завтра // Математическое образование, 2006, вып. 3(38). — С. 2–8. [Электронный ресурс] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paperjrnid=mopaperid=452optionlang=rus (дата обращения 25 января 2020 г.).

5. Гурьев П. С. Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям // Сост. П. С. Гурьев. — Ч. 1—2. СПб.: Типография К. Вингебера, 1839–1842. [Электронный ресурс] URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003823712/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

6. Гурьев П. С. Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему, содержащие в себе 2523 задачи с решениями оных и кратким руководством к исчислению // СПб.: Императ. Акад. наук, 1832. – 345 с. (Сочинение напечатано на отдельных листках.) Небольшие фрагменты книги факсимильно воспроизведены в: Гурьев П. С. Арифметические листки // Матем. обр., 2007, (40). – С. 32–48.

7. Гурьев П. С. Ключ к арифметическим листкам // СПб.: Императ. Акад. наук, 1832. – 74 с.

8. Гурьев П. С. Практическая арифметика // СПб. : Я. А. Исаков, 1861. – 336 с. + Ключ к практической арифметике. – 31 с.

9. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков // М.: Учпедгиз, 1956. — 640 с.

10. Гурьев П. С., Дмитриев А. Д. Практические упражнения в геометрии, или собрание геометрических вопросов и задач с их ответами и решениями. Часть 1. Вопросы и задачи // СПб. : тип. К. Жернакова, 1844. – 227 с.

11. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР, 1946, выпуск 6. – С. 8–28. [Электронный ресурс] https://math.ru/lib/files/iva46.htm (дата обращения 25 января 2020 г.).

12. Хинчин А. Я. О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики // Матем. просв., сер. 2, 1961, вып. 6. – С. 29–36. [Электронный ресурс] http://www.mathnet.ru/links/1dadcfc44070522feb21bd52fe3e9c4c/mp677.pdf (дата обращения 25 января 2020 г.).

13. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей // М.: Учпедгиз, 1959. – 424 с.

14. Propositiones ad Acuendos Juvenes. // Страница Википедии. [Электронный ресурс] https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes (дата обращения 25 января 2020 г.).

15. Alcuin Singmaster D. Problems to Sharpen the Young: an Annotated Translation of Propositiones Ad Acuendos Juvenes, the Oldest Mathematical Problem Collection in Latin // South Bank University, 1995.

16. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи // М.: Дрофа, 2006. – 176 с.

17. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии. Книга для семьи и школы // С.-Петербург, 1908. – 275 с.

18. Перельман Я. И. Занимательная физика. Кн. 1, 2 // Санкт-Петербург : П. П. Сойкин, 1913–1916.

19. Перельман Я. И. Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков // Петроград : тип. т-ва А. С. Суворина, 1916. – 158 с.

20. Люстерник Л. А. Молодость Московской математической школы. // УМН, 1967, т. 22, вып. 4(136). – С. 147–185 (дата обращения 25 января 2020 г.). [Электронный ресурс] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5779&option_lang=rus

21. Леман А. А. (сост.). Сборник задач московских математических олимпиад // Ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. — 384 с.

22. Шклярский Давид Осипович // Сайт math.ru, раздел «История математики». // [Электронный ресурс] https://math.ru/history/people/shklyarskiy (дата обращения 25 января 2020 г.).

23. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра // Сер. «Библиотека математического кружка», вып. 1. М.: Наука, 1976. — 384 с. — 100 000 экз., 6 изданий: 1950, 1954, 1959, 1965, 1976 и 2001 гг.

24. Малый мехмат МГУ. Архив листков // [Электронный ресурс] http://mmmf.msu.ru/archive/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

25. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // [Электронный ресурс] https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 25 января 2020 г.).

26. Башмаков М. И. У истоков ЮМШ // Сб. «Из истории МатМеха», 15 октября 1996 г. [Электронный ресурс] http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (дата обращения 25 января 2020 г.).

27. Шварцбурд С. И. О математической специализации в средней школе // Успехи математических наук, 1966, Т. 21, №. 1 (127). – С. 205–214.

28. Шварцбурд С. И. (сост.). Линейная алгебра и геометрия // АПН РСФСР, Ин-т общ. и политехн. образования, сер. «Проблемы математической школы». М. : Просвещение, 1967. – 366 с.

29. Ландис Е. М., Яглом И. М. Об Александре Семеновиче Кронроде // УМН, 56:5(341), 2001. – С. 191–201.

30. Кронрод А. С. Беседы о программировании // Предисл. Л. А. Кронрод. Послесл. В. Л. Арлазарова. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.

31. Константинов Н. Н. Российские математические классы // Тезисы всероссийского съезда учителей математики в московском университете, 2010. [Электронный ресурс] https://mccme.ru/teachers/articles/russmath.htm (дата обращения 25 января 2020 г.).

32. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи // Серия «Библиотечка физико-математической школы. Математика», вып. 1*. М.: Наука, 1965. – 80 с.

33. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы // Сер. «Библиотечка физико-математической школы», вып. 3. М.: Наука, 1965. – 176 с.

34. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Занятия по математике – листки и диалог // Математическое Просвещение, 3 серия: 19, 2015. – С. 206–235. [Электронный ресурс] https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp-19-kk.pdf (дата обращения 25 января 2020 г.).

35. Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г., Кустарёв А. А., Мерзон Г. А., Ященко И. В. Элементы математики в задачах с решениями и комментариями. Часть 1 // М.: МЦНМО, 2010. – 248 с. [Электронный ресурс] https://mccme.ru/free-books/yaschenko/v08book-08.pdf (дата обращения 25 января 2020 г.).

36. Фирсов В. В. О совершенствовании методической системы обучения математике // 1988. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 136–142. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p136/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

37. Фирсов В. В. Методика обучения математике как научная дисциплина // 2005. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 160–172. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

38. Фирсов В. В. Единая и многообразная // 1989. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 142–147. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p142/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

39. Логинова О. Б. (сост.). Уровневая дифференциация обучения // Сб. статей. Моск. департамент образования, М.: Науч.-пед. об-ние «Образование для всех», 1994. – 125 с.

40. Обухов А. С. Развитие исследовательской деятельности учащихся // 2-е изд., перераб. и доп. М.: Национальный книжный центр, 2015. – 288 с.

41. ГБОУ города Москвы «Школа № 1553 имени В. И. Вернадского. [Электронный ресурс] https://lycu1553.mskobr.ru/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

42. Содружество Лицея № 1533 (информационных технологий). [Электронный ресурс] https://www.lit.msu.ru/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

43. Галич А. Мы не хуже Горация // 1966. [Электронный ресурс] http://www.bards.ru/archives/part.php?id=4132 (дата обращения 25 января 2020 г.).

44. Константинов Н. Н. Опыт матклассов школ №7, 57, 91 и 179 (1962–1986 гг.) с точки зрения ВНТК // Тезисы выступления на семинаре ВНКТ под рук. академика Е. П. Велихова 19 марта 1986 г. Архив академика А. П. Ершова. [Электронный ресурс] http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?fileid=207596 (дата обращения 25 января 2020 г.).

45. Рудченко Т. А., Семенов А. Л. Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций // М.: Просвещение, ИНТ, 2011–2012. Серия «Перспектива».

46. Семенов А. Л., Посицельская М. А., Посицельский С. Е., Рудченко Т. А. и др. Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для общеобразоват. организаций // М.: МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.

47. Семенов А. Л. Симор Пaперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования, № 1, 2017. – С. 269–294. ISSN 1814-9545.

48. Papert S. Письмо академику А. П. Ершову от 22 июня 1988 г. // Архив академика А. П. Ершова (дата обращения 25 января 2020 г.). [Электронный ресурс] http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?l20ang=1&did=38546&fileid=206979.

49. Стартовая страница проекта «ПиктоМир» на сайте ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. [Электронный ресурс] https://www.niisi.ru/piktomir (дата обращения 25 января 2020 г.).

50. Бетелин В. Б., Кушниренко А. Г., Леонов А. Г. Основные понятия программирования в изложении для дошкольников // Информатика и ее применения, 2020, т. 14. Вып. 3. – С. 55–61.

REFERENCES

1. Alcuin, Singmaster D. 1995, *Problems to Sharpen the Young: an Annotated Translation of Propositiones Ad Acuendos Juvenes, the Oldest Mathematical Problem Collection in Latin,* South Bank University.

2. Arnold, I. V. 1946, “Printsipy otbora i sostavleniya arifmeticheskih zadach – Principles of selection and compilation of arithmetic problems“, *Izvestiya APN RSFSR,* 6, pp. 8–28. Available at: https://math.ru/lib/files/iva46.htm (accessed 25 December 2020).

3. Asmolov, A. G., Shehter, E. D., Chernorizov, A. M. 2017, “Preadaptatsiya k neopredelyonnosti kak strategiya navigatsii razvivayushchihsya sistem: marshruty evolyutsii – Preadaptation to uncertainty as a navigation strategy for developing systems: routes of evolution“, *Questions of psychology,* 4, pp. 3–26.

4. Bashmakov, M. I. 1996, *U istokov YuMSh – The origins of Junior Math School,* Proc. “From the history of Mathematics“, Oct. 15, 1996. Available at: http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (accessed 25 December 2020).

5. Betelin, V. B., Kushnirenko, A. G., Leonov, A. G. 2020, “Osnovnyye ponyatiya programmirovaniya v izlogenii dlya doshkolnikov – Basic concepts of programming expanded for preschoolers“, *Informatics and Applications,* v. 14, issue 3, pp. 55–61.

6. Chentsov, N. N., Shklyarsky, D. O., Yaglom, I. M. 1976, *Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoj matematiki. Arifmetika i algebra – Selected problems and theorems of elementary mathematics. Arithmetic and Algebra,* “Library of the Mathematical circle“ series, issue 1. Moscow: Nauka, 384 pp.

7. Depman, I. Ya. 1959, *Istoriya arifmetiki. posobiye dlya uchitelej – History of arithmetic. Manual for teachers,* Moscow: Uchpedgiz, 424 pp.

8. Dynkin, E. B., Molchanov, S. A., Rozental, A. L., Tolpygo, A. K. 1965, *Matematicheskiye zadachi – Math problems,* “Library of physico-mathematical school. Mathematics“ series, issue 1*. Moscow: Nauka, 80 pp.

9. Firsov, V. V. 1988, *O sovershenstvovanii metodicheskoj sistemy obuchenija matematike – On improving the methodological system of teaching mathematics,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 136–142. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p136/` (accessed 25 December 2020).

10. Firsov, V. V. 1989, *Edinaya i mnogoobraznaya – Unified and diverse,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 142–147. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p142/` (accessed 25 December 2020).

11. Firsov, V. V. 2005, *Metodika obucheniya matematike kak nauchnaya distsiplina – Methods of teaching mathematics as a scientific discipline,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 160–172. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/` (accessed 25 December 2020).

12. Galich, A. 1966, *My ne huzhe Goratsiya – We're as good as Horace,* Available at: `http://www.bards.ru/archives/part.php?id=4132` (accessed 25 December 2020).

13. *GBOU goroda Moskvy “Shkola №1553 imeni V. I. Vernadskogo“ – Moscow School “School no. 1553 named after V. I. Vernadsky“* Available at: https://lycu1553.mskobr.ru/ (accessed 25 December 2020).

14. Gelfand, S. I., Gerver, M. L., Kirillov, A. A., Konstantinov, N. N., Kushnirenko, A. G. 1965, *Zadachi po elementarnoj matematike. Posledovatelnosti. Kombinatorika. Predely – Problems in elementary mathematics. Sequences. Combinatorics. Limits,* “The library of a school of physics and mathematics“ series, vol. 3. Moscow: Nauka, 176 pp.

15. Golenishcheva-Kutuzova, T. I., Kazantsev, A. D., Kudryashov, Yu. G., Kustaryev, A. A., Merzon, G. A., Yashchenko, I. V. 2010, *Elementy matematiki v zadachah s resheniyami i kommentariyami. Chast 1 – Elements of mathematics in problems with solutions and review. Part 1,* Moscow, MCCME, 248 pp. Available at: `https://mccme.ru/free-books/yaschenko/v08book-08.pdf` (accessed 25 December 2020).

16. Gurjev, P. S. 1832, *Arifmeticheskiye listki, postepenno raspolozhennyye ot legchaishego k trudnejshemu, soderzhashchiye v sebe 2523 zadachi s resheniyami onyh i kratkim rukovodstvom k ischisleniyu – Arithmetic sheets, gradually arranged from the easiest to the most difficult, containing 2523 problems with solutions to them and a brief guide to calculus,* St. Petersburg: Imperat. Acad. of Sciences, 345 pp. (The essay is printed on separate sheets.) Small fragments

of the book are facsimile reproduced in: Guryev P. S. “Arithmetic sheets“, *Math. education,* 2007, 40, pp. 32–48.

17. Gurjev, P. S. 1832, *Kluch k arifmeticheskim listkam – The key to the arithmetic sheets,* St. Petersburg: Imperat. Acad. of Sciences, 74 pp.

18. Gurjev, P. S. 1839–1842, *Rukovodstvo k prepodavaniyu arifmetiki maloletnim detyam – A guide to teaching arithmetic to young children,* Comp. by P. S. Guryev. Parts 1-2. St. Petersburg: Printing house of K. Wingeber. Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003823712 (accessed 25 December 2020).

19. Gurjev, P. S. 1861, *Prakticheskaya arifmetika – Practical arithmetic,* St. Petersburg : Ya. A. Isakov, 336 pp. + Kluch k prakticheskoj arifmetike – The key to the practical arithmetic, 31 pp.

20. Gurjev, P. S., Dmitriev, A. D. 1844, *Prakticheskiye uprazhneniya v geometrii, ili sobranije geometricheskih voprosov i zadach s ih otvetami i resheniyami. Chast 1. Voprosy i zadachi – Practical exercises in geometry, or a collection of geometric questions and problems with their answers and solutions. Part 1. Questions and tasks,* St. Petersburg: K. Zhernakov typ., 227 pp.

21. Hinchin, A. Ya. 1961, “O tak nazyvaemyh ‘zadachah na soobrazheniye‘ v kurse arifmetiki – About the so-called ’problems for consideration’ in the course of arithmetic“, *Math. prosv.,* ser. 2, vyp. 6, pp. 29–36 (accessed 25 December 2020) Available at: http://www.mathnet.ru/links/1dadcfc44070522feb21bd52fe3e9c4c/mp677.pdf.

22. Ignatiev, E. I. 1908, *V carstve smekalki, ili Arifmetika dlya vseh: opyt matematicheskoj hrestomatii. Kniga dlya semji i shkoly – In the realm of wit, or Arithmetic for all: the experience of mathematical anthology. Book for family and school,* St. Petersburg, 275 pp.

23. Kalyagin, Yu. M. 2006, “Shkolny uchebnik matematiki: vchera, segodnya, zavtra – School textbook of mathematics: yesterday, today tomorrow“, *Mathematical education,* vol. 3(38), pp. 2—8. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=452&option_lang=rus (accessed 25 December 2020).

24. Kanel-Belov, A. Ya., Kovaldji A. K. 2015, “Zanyatija po matematike — listki i dialog – Classes in mathematics — sheets and dialogue“, *Mathematical prosv.,* 3 ser., 19, pp. 206–235. Available at: http://www.mccme.ru/free-books/matprosk.html, arXiv: 1502.01893 (accessed 25 December 2020).

25. *Kenguru – Kangaroo. Math for All. Competitions for schoolchildren.* Available at: https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (accessed 25 December 2020).

26. Konstantinov, N. N. 1986, *Opyt matklassov shkol № 7, 57, 91 u 179 (1962–1986 gg.) s tochki zreniya VNTK – The experience of matclasses of schools no. 7, 57, 91 and 179 (1962–1986) from the point of view of VNTK,* Theses of the speech at the VNKT seminar lead by Academician E. P. Velikhov, March 19, 1986. Archive of Academician A. P. Yershov. Available at: http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?fileid=207596 (accessed 25 December 2020).

27. Konstantinov, N. N. 2010, “Rossijskiye matematicheskiye klassy – Russian math classes“, *Theses of the All-Russian Congress of Mathematics Teachers at Moscow University.* Available at: ttps://mccme.ru/teachers/articles/russmath.htm (accessed 25 December 2020).

28. Kronrod A. S. 2004, *Besedy o programmirovanii – Conversations about programming,* preface by L. A. Kronrod. afterword by V. L. Arlazarov,. 2nd ed., Moscow, Editorial URSS, 248 pp.

29. Kukulin, I., Majofis, M., Safonov, P. (ed. and comp.). 2015, *Ostrova utopii. Pedagogicheskoye i socialnoye proektirovaniye poslevoyennoj shkoly (1940—1980-e) – Islands of utopia. Pedagogical and social design of the post-war school (1940—1980-es),* journal "Novoe literaturnoe obozrenie" library, "Inviolable reserve" series, Moscow, 695 pp.

30. Landis, E. M., Yaglom, I.,M. 2001, "About Aleksandr Semenovich Kronrod", *Russian Mathematical Surveys,* 56(5), pp. 993–1007 (accessed 25 December 2020). Available at: http://dx.doi.org/10.1070/RM2001v056n05ABEH000448.

31. Lankov, A.V. 1951, *K istorii razvitiya peredovyh idej v russkoj metodike matematiki. Posobiye dlya uchitelej – On the history of the development of advanced ideas in the Russian methodology of mathematics. Manual for teachers,* Uchpedgiz, Moscow, 152 pp. (accessed 25 December 2020). Available at: https://www.mathedu.ru/text/lankov_k_istorii_razvitiya_peredovyh_idey_v_russkoy_metodike_matematiki_1951/p0.

32. Leman, A. A. (comp.). 1965, *Sbornik zadach moskovskih matematicheskih olimpiad – Collection of problems of the Moscow Mathematical Olympiads,* ed. by V. G. Boltyansky, Moscow, Prosveshchenie, 384 pp.

33. Ljusternik, L. A. 1967, "The early years of the Moscow mathematics school", *Russian Mathematical Surveys,* 22(4), pp. 55—91. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5779&option_lang=rus (accessed 25 December 2020).

34. Loginova, O. B. (comp.). 1994, *Urovnevaya differenciaciya obucheniya – Level differentiation of training,* Coll. of articles, Moscow Department of Education, Moscow: Scientific and pedagogical association "Education for all", 125 pp.

35. *Maly mehmat MGU. Leaflet archive.* Available at: http://mmmf.msu.ru/archive/ (accessed 25 December 2020).

36. Obuhov, A.S. 2015, *Razvitiye issledovatelskoj deyatelnosti uchashchihsya – Development of research activities of students,* 2nd ed., National Book Center, Moscow. – 288 pp.

37. Olehnik, S. N., Nesterenko, Yu. V., Potapov, M. K. 2006, *Starinnyye zanimatelnyye zadachi – Ancient entertaining tasks,* Moscow, Drofa, 176 pp.

38. Papert S. Letter to professor Ershov from June 22, 1988 // Archive of Academician A. P. Yershov. Available at: http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?l%20ang=1&did=38546&fileid=206979 (accessed 25 December 2020).

39. Perelman, Ya. I. 1913–1916, *Zanimatelnaya fizika. Kn. 1, 2 – Fascinating physics. Books 1, 2,* St. Petersburg: P. P. Soykin publ.

40. Perelman, Ya. I. 1916, *Veselyye zadachi: 101 golovolomka dlya yunyh matematikov – Fun tasks: 101 puzzles for young mathematicians,* Petrograd: printing house of A. S. Suvorin, 158 pp.

41. *PictoMir.* Starting page of FSRC Scientific Research Institute of System Development, RAS. Available at: https://www.niisi.ru/piktomir (accessed 25 December 2020).

42. *Propositiones ad Acuendos Juvenes.* Wikipedia page. Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes (accessed 25 December 2020).

43. Prudnikov, V. E. 1956, *Russkiye pedagogi-matematiki XVIII—XIX vekov – Russian teachers-mathematicians of the XVIII-XIX centuries,* Moscow: Uchpedgiz, 640 pp.

44. Rudchenko T. A. & Semenov A. L. 2011–2012, *Informatika. 1–4 klassy – Informatics. 1–4 grades.* Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, “Perspektiva“ series.

45. *Shklyarsky David Osipovich.* Page on math.ru, section “History of Math“. Available at: https://math.ru/history/people/shklyarskiy (accessed 25 December 2020).

46. Semenov, A. L. 2017, “Seymour Papert i my. Konstrukcionizm – obrazovatelnaya filosofiya XXI veka – Seymour Papert and us. Constructionism – educational philosophy of the XXI century“, *Education issues,* No. 1, pp. 269–294. ISSN 1814-9545.

47. Semenov, A. L., Posicelskaja, M. A., Posicelskij, S. E., Rudchenko, T. A. et al. 2012–2019, *Matematika i informatika. 1–4 klassy – Mathematics and Informatics 1–4 grades.* Educational set (textbooks and workbooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, MCCME, INT.

48. Shvartsburd, S. I. 1966, “O matematicheskoj specializacii v srednej shkole – About mathematical specialization in secondary school“, *Uspekhi matematicheskikh nauk,* vol. 21, №. 1 (127), pp. 205–214.

49. Shvartsburd, S. I. (comp.). 1967, *Linejnaya algebra i geometriya – Linear algebra and geometry, APN RSFSR, Institute of General and Polytechnic Education,* “Problems of the mathematical school“ series. Moscow: Prosveshchenie, 366 pp.

50. *Sodruzhestvo Liceya №1533 (informatsionnye tehnologii) – The Commonwealth Of The Lyceum no. 1533 (Information Technologies).* Available at: `https://www.lit.msu.ru/` (accessed 25 December 2020).

Получено 14.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.