УДК 510.635
AMS MSC2020: 68Q45

Теория определимости в контексте информационно-коммуникационных систем[1]

Семенов А. Л.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН;
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет);
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

Аннотация. В работе обсуждается проблематика определимости и пространств отношений в исторической перспективе, обрисована роль Альфреда Тарского и Ларса Свенониуса, рассматриваются последние результаты, расширяющие полученные ранее для однородных структур, в частности на случай пополнимых вверх. Приложения включают языки описания баз данных, анализ CSP — Constraint Satisfaction Problem (обобщенной выполнимости).

Ключевые слова: теория определимости, Альфред Тарский, пространства определимости, редукты, полные вверх структуры, теорема Свенониуса, базы данных, реляционные алгебры, CSP.

Введение

В докладе будет идти речь о последних результатах и, главное, об открытых проблемах теории определимости. Лейбниц мечтал о lingua generalis — универсальном языке, в котором можно определить любые понятия [1]. Частичным осуществлением этой мечта стала

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 17-11-01377.

конструкция Анны Вержбицкой универсальной системы базовых понятий любого языка [18, 19].

1. История вопроса

Конец XIX–начало XX века ознаменовались поиском базовой системы определений для математики наряду с поисками адекватной системы доказательства. Результатами в области определений стали:

- Канторовская математика, где все свелось к одному виду объектов (множеств) и одному двухместному отношению (принадлежности).
- Арифметика Пеано.
- Геометрия, где итальянской школой, Марио Пиери и др. были построены замечательные системы, за которыми следовало построение Гильберта, интерес Тарского привел, в частности, к прояснению вопроса о том, что двуместных отношений для построения геометрии недостаточно (результат Линденбаума – Тарского).

В 1900 г. в Париже последовательно прошли два конгресса — Международный конгресс по философии и Международный конгресс математиков (где Гильберт поставил свои Проблемы). На каждом из этих конгрессах определимость была темой нескольких докладов. В частности, Алессандро Падоа в своем докладе «Логическое введение в любую дедуктивную теорию» предложил метод доказательства неопределимости какого-то отношения через другие [14]. По существу, это был метод автоморфизмов, центральный в данной теории.

Эдвард Хангтинтон в свой статье 1916 г. [13] писал: «Существуют четыре типа порядка, важных в геометрии и других областях математики: линейный порядок, «между»; цикл; разделение двух пар точек».

Все это вместе заложило основу для теории определимости.

Тарский сохранил интерес к определимости на протяжении всей своей жизни, удивляясь тому, что, как он писал, «математики относятся к понятию определимости с недоверием и подозрительностью» [16].

Одним из вкладов Тарского и его ближайшего коллеги Адольфа Линдебаума в теорию определимости было построение алгебры Линденбаума – Тарского, «бескоординатного» варианта понятия логически определяемого отношения. Результат Тарского (и Геделя) о неопределимости в арифметике арифметической истины, как теорема Тарского об элиминации кванторов, конечно, относятся к жемчужинам теории определимости.

2. Теорема Свенониуса

Существует естественное антимонотонное соответствие Галуа между пространствами определимости и группами перестановок универсума — надгруппами группы автоморфизмов исходной структуры.

«Теоремой полноты» для определимости стала теорема Свенониуса, опубликованная в 1959 г. в журнале Theoria по философии науки, издававшемся университетом Лунда [15]. Теорема утверждает, что метод автоморфизмов всегда позволяет установить не определимость, если допустить элементарные расширения — добавление «идеальных», «мнимых» элементов. Специалисты, например, Р. Бюхи и К. Данхоф [7] оценили результат Свенониуса именно как теорему полноты для определимости, связывая этот результат с Эрлангенской программой Клейна и отмечая медленное признание математиками важности результата Свенониуса. Сегодня недооцененность этой теоремы видна хотя бы из того, что статьи Википедии, относящиеся к определимости, содержат аккуратные определения, в частности — автоморфизма, но даже не упоминают теорему Свенониуса. В Википедии все же есть посвященная Свенониусу статья, где говорится о «'Svenonius theorem' on decidability».

Тем не менее, определенный ренессанс в теории определимости, начиная с 1960-х годов возник. Он был связан, помимо теоремы Свенониуса, с теорией конечных автоматов и определяемых ими отношениями (хотя и в этой области ссылок на Свенониуса не найти). Многие задачи здесь формулировались фактически в терминах теории определимости.

3. Решетки определимости. Автоморфизмы

Начавшаяся цифровая эра сразу же привела к применению компьютеров к поиску информации. Поиск требовал упорядочения информации, например снабжения объектов атрибутами. Это быстро привело к реляционным (то есть — «отношенным») базам данных, иными словами — к алгебрам отношений (реляционные алгебры Кодда и т. д.), а также — к соответствующим логическим системам.

При рассмотрении вопросов об определимости/неопределимости одних отношений через другие, нам представляется разумным (следуя Тарскому) использовать бескоординатный подход. При таком подходе, начав с некоторого семейства отношений на каком-то универсуме, мы рассматриваем замыкание этого множества. Дав имена конечному подмножеству отношений, можно написать формулу (в логике первого порядка). Эта формула задает отношение на универсуме. Все получающиеся так отношения составляют пространство определимости. Естественно, возникает задача описания решеток подпространств определимости данного пространства (которое может быть задана как реляционная структура).

В 1965 г. Клод Фрасне получил первое описание решетки определимости [12]. Это была решетка определимости порядка рациональных чисел, порождающими элементами для пространств были отношения Хантингтона, к котором добавляется тривиальный минимальный элемент — равенство. В последующие годы были получены многочисленные результаты по решеткам определимости. Во всех этих результатах рассматривались однородные структуры, для таких структур имеется антиизоморфизм решетки определимости и решетки замкнутых (в естественной топологии) надгрупп. Все найденные решетки оказались конечными. Гипотеза Томаса (1991 г.) состоит в том, что конечность имеет место для всех решеток однородных структур [17].

Однородные структуры с конечной сигнатурой омега-категоричны: все структуры, им элементарно эквивалентные, изоморфны. Развивая проблематику дальше, мы предложили рассмотреть структуры, для которых изоморфны все их элементарные расширения. Такие структуры мы называем п о л н ы м и в в е р х. Если структура имеет полное вверх элементарное расширение, то ее решетка определимости антиизоморфна структуре надгрупп автоморфизмов для этого расширения.

Рассмотрение полных вверх структур позволило нам впервые получить описания решеток определимости для неоднородных структур, например, для следования целых чисел. Эти решетки оказались бесконечными. Некоторое обобщение понятия однородности позволяет строить соответствующие пополнения.

4. Специальные ситуации, ограничения и приложения

Стараясь найти реалистичные ограничения исходных постановок, можно рассматривать структуры с ограниченной логической сложностью. Так например, для омега-категоричных структур имеет место элиминация кванторов. Однако требование элиминируемости кванторов в случае конечной реляционной сигнатуры оказывается слишком ограничительным (например, ему не удовлетворяет арифметика сложения целых чисел). В работах автора, относящихся к структурам на натуральном ряде в качестве естественного обобщения рассматривались структуры с конечной (в частности — реляционной) сигнатурой, где всякая формула эквивалентна экзистенциальной [2–4]. Другой подход, использованный, в частности, в автоматных моделях баз данных был предложен в работе [10], где предлагается ограничивать число аргументов символов отношений и функций, но допустить возможность их бесконечного количества при элиминации кванторов. Представляет интерес сравнение двух указанных подходов.

Еще одним подходом, приближающим нас к практическим задачам, является рассмотрения свойства «обобщенной выполнимости» или «задачи удовлетворения ограничениям» — Constraint Satisfaction Problem (CSP) — выяснения вложимости конечной структуры в заданную. CSP эквивалентна определимости с помощью ограниченного класса формул: экзистенциальных от позитивных конъюнкций — ограничений. И здесь также большой объем исследований был выполнен для случая однородных структур и пространств определимости, в частности, была сформулирована гипотеза о дихотомии в сложности решения CSP [11]. Проблема была решена независимо А. Булатовым [8, 9] и Д. Жуком [20] для вложимости в конечную структуру. В случае вложений в однородные структуры она была поставлена М. Бодирским, М. Пинскером и А. Понграцем [5]. В работе [6] она формулируется, как Infinite domain CSP dichotomy conjecture для специального класса пространств в однородных структурах. По-видимому, она имеет место и для некоторых структур, пополняемых вверх.

Список литературы

[1] *Лейбниц, Г. В.* О словах. Пер.с фр. — М. : Книжный дом «ЛИБРКОМ», 2010. — 96 с.

[2] *Семенов, А. Л.* О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 1175–1195.

[3] *Семенов, А. Л.* Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1983. — Т. 47, вып. 3. — С. 623–658.

[4] *Семенов, А. Л.* Решетка определимости (редуктов) для целых чисел с операцией следования / А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов // Известия РАН. Серия математическая. — 2021. — № 85:6. (в печати)

[5] *Bodirsky, M.* Projective clone homomorphisms / M. Bodirsky, M. Pinsker, A. Pongrácz // Journal of Symbolic Logic. — 2021. — Vol. 86. — № 1. — С. 148–161.

[6] *Bodor, B.* Classification of ω-categorical Monadically Stable Structures. — 2020. — URL: arXiv:2011.08793v1. — Загл. с титул. экрана.

[7] *Büchi, J. R.* Definibility in Normal Theories / J. R. Buchi, K. J. Danhof // Israel Journal of Mathematics. — 1973. — № 14.3. — P. 248–256.

[8] *Bulatov, A. A.* A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs // In 58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2017, Berkeley, CA, USA, October 15-17, 2017. — 2017.

[9] *Bulatov, A. A.* A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs Simplified. — URL: arXiv:2007.09099. — Загл. с титул. экрана.

[10] Definable Relations and First-order Query Languages Over Strings / M. Benedikt, L. Libkin, T. Schwentick, L. Ségoufin // Journal of the ACM. — 2003. — Vol. 50. — P. 694–751.

[11] *Feder, T.* The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study Through Datalog and Group Theory / T. Feder, M. Y. Vardi // SIAM Journal of Computing. — 1998. — V. 28. — P. 57–104.

[12] *Frasnay, C.* Quelques Problèmes Combinatoires Concernant les Ordres Totaux et les Relations Monomorphes // Annales de l' institut Fourier. — 1965. — Vol. 15, № 2. — P. 415–524.

[13] *Huntington, E. V.* Inter-Relations Among the Four Principal Types of Order // Transactions of the American Mathematical Society. — 1935. — T. 38.1. — P. 1–9.

[14] *Padoa, A.* Logical Introduction to Any Deductive Theory // 1900. Опубл. в сб. From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967. — P. 118–123.

[15] *Svenonius, L.* A Theorem on Permutations in Models // Theoria. — 1959. — T. 25.3. — P. 173–178.

[16] *Tarski, A.* Sur les Ensembles Définissables de Nombres Réels // Fundamenta Mathematicae. — 1931. — Vol. 17, № 1. — C. 210–239.

[17] *Thomas, S.* Reducts of the Random Graph // Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol. 56(1). — P. 176–181.

[18] *Wierzbicka, A.* What Did Jesus Mean?: Explaining the Sermon on the Mount and the Parables in Simple and Universal Human Concepts. — New York : Oxford University Press, 2001. — 512 c.

[19] *Wierzbicka, A.* Imprisoned in English: The Hazards of English as a Default Language. — New York : Oxford University Press, 2013. — 304 c.

[20] *Zhuk, D.* A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture // Journal of the ACM. — 2020. — Vol. 67, № 5. — C. 1–78.

Библиографическая ссылка

Семенов, А. Л. Теория определимости в контексте информационно-коммуникационных систем // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 61–68.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-8

Сведения об авторах

Алексей Львович Семенов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Институт кибернетики и образовательной информатики
им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН;
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет);
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа. Зав. кафедрой математической логики и теории алгоритмов МГУ им. М. В. Ломоносова

Ленинские горы, 1, Москва 119991, Россия
E-mail: alsemno@ya.ru