Определение 3. Подмножество G идеала I назовем его базисом Гребнера, если старший моном любого элемента идеала содержит в качестве подмонома старший моном какого-нибудь элемента из G. Если любой элемент из G свободен от вхождения старших мономов прочих элементов базиса, G будем называть редуцированным базисом Гребнера. Старшие мономы элементов редуцированного базиса назовем обструкциями и обозначим через F_n множество обструкций длины n.

Доказательство теоремы. Из условия на $g(n)$ следует, что существует m, такое, что $u(m)\leqslant m$. Действительно, если $u(k)\geqslant k+1$ для любого k, то, учитывая условие $u(1)=d$, мы имели бы неравенство $g(n)\geqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}+d-3$. Бесконечным словом будем называть отображение $f:\mathbf{N}\to\{x_1, \ldots, x_d\}$, такое, что $\forall n$ слово $f(1)\ldots f(n)\in N_n$. Будем говорить, что нормальное слово $v\in N$ непродолжаемо, если для некоторого k не существует слова $w\in N_k$, такого, что $vw\in N$. Множество всех нормальных слов за исключением непродолжаемых обозначим через N', а число элементов в $N'\bigcap N_i$ — через $u'(i)$. Достаточно показать, что бесконечных слов нет. Действительно, нетрудно заметить, что в этом случае непродолжаемых слов может быть только конечное число, откуда следует конечномерность A (что в градуированном случае, очевидно, равносильно нильпотентности). Покажем, что всякое бесконечное слово периодично с периодом $\leqslant m^d$. Тогда ввиду ограниченности периодов всех бесконечных слов одним общим числом и условия нильпотентности мономов длины $\leqslant m^d$ эти бесконечные периодические слова будут на самом деле конечны. Числа $u'(i)$ обладают свойством $u'(i)\leqslant u'(i+1)$ $\forall i$, так как $\forall v\in N_n$ существует элемент $x_j\in X$, такой, что $vx_j\in N_{n+1}$ и продолжения разных слов $v, w\in N_n$ различны в силу линейной независимости нормальных слов. Можем считать, что $u'(1)\geqslant 2$, так как условие $u'(1)=0$ давало бы требуемое, а условие $u'(1)=1$ противоречило бы нильпотентности букв — образов переменных. Тогда из цепочки неравенств $2\leqslant u'(1)\leqslant u'(2)\leqslant\ldots\leqslant u'(m)<m+1$ следует существование $1\leqslant p\leqslant m$, такого, что $u'(p)=u'(p+1)$. Рассмотрим граф Г, вершинами которого являются мономы из N'_p. Ребро $i\to j$ присутствует, если зацепление $ij=x_{i_1}\ldots x_{i_{p+1}}$ существует и принадлежит N'. При $u'(p)=u'(p+1)$ граф Г может быть только циклом с входящими в него простыми цепочками или объединением таких независимых элементов. Из конструкции базиса Гребнера следует, что множество мономов из N длины $p+1$ состоит из мономов, читаемых с графа при прохождении маршрутов длины 2 (по числу ребер), за исключением тех из них, которые принадлежат F_{p+1}. Так что для любого k множество мономов из N' длины k содержится в множестве, соответствующем маршрутам графа Г длины $k-p$, откуда и вытекает периодичность с периодом $\leqslant u'(p)\leqslant p^d\leqslant m^d$.

Подобным же образом легко получить основное утверждение из [4], доказанное там с помощью сложных комбинаторных построений. Действительно, существования m, такого, что $u(m)\leqslant m+u'(1)-2$, достаточно для периодичности любого бесконечного слова, так как из цепочки неравенств $u'(1)\leqslant u'(2)\leqslant\ldots\leqslant u'(m)\leqslant u(m)<u'(1)+m-1$ следует: существует $1\leqslant p\leqslant m$, такое, что $u'(p)=u'(p+1)$. Затем при условии нильпотентности любой подалгебры в A, порожденной образами любых $d-t$ переменных $x_i\in X$, для $u'(1)$ возможны два варианта: 1) $u'(1)\leqslant d-t$, т. е. любое бесконечное слово содержит не более $d-t$ букв, что автоматически влечет нильпотентность; 2) $u'(1)\geqslant d+t-1$,

в этом случае для нильпотентности достаточно существования m: $u(m) \leqslant m+d-t-1$. А это и есть утверждение из [4]: нильалгебра с условием нильпотентности всех подалгебр, порожденных $s+1$ образующими, нильпотентна, если $g(m) < \frac{(m+1)(m+2)}{2} + ms$.

Проблема о ниль и нильпотентности решается положительно для автоматных нильалгебр (имеющих полиномиальный рост). Но как показывает пример [2] алгебры $A = \langle x, \ y \mid x^2, \ yxy, \ xy^{2^n}x, \ \ n=0, \ 1, \ 2, \ldots \rangle$, не всякая алгебра полиномиального роста первой степени автоматна, так что доказанное утверждение расширяет область положительного решения проблемы Левицкого.

На самом деле в доказательстве теоремы использовалась только нильпотентность мономов. Заметим, что, сохраняя это условие, утверждение леммы нельзя усилить. Примером бесконечномерной алгебры с условием нильпотентности мономов (степени 3) и квадратичным ростом может служить алгебра слова Морса (см. [2]), имеющая ряд $\Sigma u(n) t^n$, где $u(n) = \begin{cases} 6k-2, & n=2k; \\ 6k, & n=2k+1. \end{cases}$

В заключение автор приносит глубокую благодарность профессору В. Н. Латышеву за постоянное внимание и поддержку в работе, а также создателям пакета программ ГРААЛЬ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований России, код проекта 93—12—492.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голод Е. С. О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. **28**. 273—276.
2. Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 157. М., 1990. 5—177.
3. Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. М., 1988.
4. Колотов А. Т. Алгебра и полугруппы с квадратичными функциями роста//Алгебра и логика. 1980. **19**. № 6. 659—668.

Поступила в редакцию
31.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 4

УДК 512.745.2

И. В. Аржанцев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И 14-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

1. На поставленный Гильбертом вопрос о конечной порожденности алгебры инвариантов относительно линейного действия линейной алгебраической группы на векторном пространстве (14-я проблема) получен отрицательный ответ. Однако остается открытым вопрос: для каких групп конечная порожденность алгебры инвариантов все же имеет место? Известно, что к таким группам относятся: 1) все редуктивные группы, 2) одномерная унипотентная группа (теорема Вайценбека). Заметим, что, переходя к унипотентному радикалу групп, мы можем без ограничения общности изучать лишь унипотентные группы [1]. Первая серия контрпримеров была построена Нагатой в 1958 г. [2, 3]. Подробно эти коммутативные унипотентные группы и их соответствующие представления будут описаны ниже.

Недавно Стейнберг предложил конструкцию, близкую к конструкции Нагаты. Она позволила упростить построение контрпримера [4]. В работе [5] линеаризован пример Робертса [6] и тем самым предъявлено еще одно линейное действие унипотентной группы, алгебра инвариантов которого не является конечно порожденной.

Построения Нагаты и Стейнберга существенно использовали некие свойства алгебраических кривых в P^2. В данной работе мы обобщим конструкцию Стейнберга, что позволит нам получить оба контрпримера в рамках одного построения.

Но наиболее интересным кажется применение положительных результатов, связанных с 14-й проблемой, к самой теории алгебраических кривых. Наша конструкция дает возможность интерпретировать факты из теории инвариантов в терминах теории алгебраических кривых и наоборот. Сформулируем доказываемый ниже результат. Пусть фиксировано r точек «общего положения» в P^n (смысл этого термина поясним ниже). Будем говорить, что гиперповерхность проходит через точку T с кратностью не ниже k, если первые k членов разложения Тейлора в точке T соответствующего многочлена равны нулю. Рассмотрим совокупности гиперповерхностей (кривых в случае P^2), проходящих через наши точки с кратностями не ниже k по всем неотрицательным k. Легко видеть, что вместе они образуют Z^+-градуированную алгебру относительно операции умножения соответствующих многочленов.

Теорема. *Если* а) $r=n+1$ *или* б) $r=n+2$, *то соответствующая градуированная алгебра конечно порождена.*

2. Перейдем к изложению конструкции и доказательству теоремы.

Замечание. Основное поле K считаем алгебраически замкнутым характеристики нуль, хотя результаты Стейнберга переносятся и на характеристику p.

Рассмотрим естественное действие группы $\bar{G}=G_a(K)\times\ldots\times G_a(K)$ (n копий аддитивной группы поля) на пространстве $V=A_2\times\ldots\times A_2$. Соответствующее действие на аффинной алгебре имеет вид

$$\begin{cases} g(x_i)=x_i+b_i\times x_i, \\ g(y_i)=y_i, \end{cases} \qquad g=\begin{vmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{vmatrix}, \text{ где } B_i=\begin{vmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть G — подгруппа в $\bar{G}$, выделенная соотношениями

$$\sum_i a_{ij}\times b_i=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m\leqslant n,$$

причем a_{ij} таковы, что матрица (a_{ij}) имеет максимально возможный ранг (a_{ij} фиксированы).

Легко видеть, что группа G изоморфна $(G_a(K))^{n-m}$, и по заданным значениям $b_1, \ldots, b_{n-m}$ (с точностью до перенумерации) оставшиеся находятся однозначно.

Расширим G тором $T=(c_1,\ldots,c_n)$, где $\prod_i c_i=1$. Теперь $B_i=\begin{vmatrix} c_i & c_ib_i \\ 0 & c_i \end{vmatrix}$.

Тогда, обозначив $H=(G, T)$, имеем $A^H=(A^G)^T$, откуда следует, что конечная порожденность алгебры A^G эквивалентна конечной порожденности алгебры A^H.

(а) *Следующие многочлены G-инвариантны:*

$$w_j = \sum_i a_{ji} x_i t / y_i, \quad t = y_1 \ldots y_n.$$

Этот факт следует непосредственно из определений.

(б) *Имеет место изоморфизм алгебр*

$$A[t^{-1}] = K[w_1, \ldots, w_m, y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n, t^{-1}].$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{Vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{ccc} & a_{ij} & \\ \hline y_{m+1}/t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n/t \end{array} \right\Vert \times \begin{Vmatrix} x_1 t/y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n t/y_n \end{Vmatrix}.$$

Перенумерацией добиваемся того, чтобы в левом верхнем углу стоял максимальный невырожденный минор (a_{ij}). Обращая полученную матрицу, выражаем $x_1, \ldots, x_m$ через $w_1, \ldots, w_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ в $A[t^{-1}]$.

Замечание. Тем самым доказана алгебраическая независимость элементов $w_1, \ldots, w_m$ над полем $K(y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n)$.

(в) *Алгебра инвариантов A^H изоморфна $A \cap K[w_1, \ldots, w_m, t, t^{-1}]$.*

Доказательство. Включение $\supset$ очевидно. Обратно

$$K[w_1, \ldots, w_m, y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n, t^{-1}] =$$

$$= K[y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n, t^{-1}][w_1, \ldots, w_m];$$

$$K[y_1, \ldots, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, x_n, y_n]^G = K[y_1, \ldots, y_n],$$

так как можно считать, что на $A_2 \times \ldots \times A_2$ (последние $n-m$ копий) действует $(G_a)^{n-m}$. Но $K[y_1, \ldots, y_n]^T = K[t]$, откуда следует обратное включение.

(г) *Однородный многочлен $f_k(w_1, \ldots, w_m)$ делится на t^k тогда и только тогда, когда $f_k \in V_{kP_1, \ldots, kP_n}$, где $P_i = (a_{ij})_1^m \in P^{m-1}$, а $V_{kP_1, \ldots, kP_n}$ — совокупность гиперповерхностей в P^{m-1}, проходящих через точки $P_1, \ldots, P_n$ с кратностями не ниже k.*

Доказательство. Можно считать, что $P_1 = (1:0:\ldots:0)$. Тогда

$$w_i = \frac{\sum a_{1i} y_1 \ldots \overline{y_i} \ldots y_n x_i}{a_{11}} = t x_1/y_1 + y_1 \left(\sum_i \frac{a_{1i}}{a_{11}} y_2 \ldots \overline{y_i} \ldots y_n x_i \right)$$

не делится на y_1, $(a_{11} : \ldots : a_{m1}) \to (1:0:\ldots:0)$. При $k > 1$

$$w_k = \sum_{i>1} y_1 \ldots \overline{y_i} \ldots y_n x_i (a_{1i} a_{k1} - a_{ki} a_{11})$$

делится на y_1. Тогда

$$f \in V_{kP_1} \Leftrightarrow f(w_1, \ldots, w_m) = \sum_{i=k}^{d} f_i(w_2, \ldots, w_m) w_1^{d-i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(w_1, \ldots, w_m) \mid y_1^k \ (\deg f_i = i).$$

Проделав то же самое для $y_2, \ldots, y_n$, получим требуемое.

(д) *Любой однородный элемент из $A^н$ представим в виде линейной комбинации*

$$\sum_k \frac{f_k(w_1, \ldots, w_m)}{t^k},$$

где $f_k(w_1, \ldots, w_m) \mid t^k$ и f_k однородны.

Доказательство. Интерпретируем п. (г) как

$$f_k(w_1, \ldots, w_m) \mid t^k \Leftrightarrow f_k \in V_{kP_1 \ldots kP_n} \Leftrightarrow f_k \in \bigcap_{i=1}^{n} l_i^k,$$

где l_i — «идеал точки P_i», порожденный $(z_i^{(1)} = a_{mi}w_1 - a_{1i}w_m, \ldots, z_i^{(m-1)} = a_{mi}w_{m-1} - a_{m-1i}w_m)$.

Лемма 1. *Элементы $y_1, \ldots, \overline{y_i}, \ldots, y_n, x_i, z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m-1)}, t$ алгебраически независимы над K.*

Доказательство. Пусть $v_i = y_1 \ldots \overline{y_i} \ldots y_n x_i$. Тогда

$$x_i = v_i y_i t^{-1} \Rightarrow K[t^{-1}][x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] =$$
$$= K[t^{-1}][v_1, \ldots, v_n, y_1, \ldots, y_n] =$$
$$= K[t^{-1}][v_1, \ldots, \overline{v_i}, \ldots, v_n, x_i, y_1, \ldots, y_n].$$

Далее

$$z_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} (a_{mi}a_{kj} - a_{ki}a_{mj}) v_j$$

не содержит v_i; $w_1, \ldots, w_m$ алгебраически независимы. Из алгебраической независимости переменных

$$\{y_1, \ldots, y_n, x_i, z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m-1)}\}$$

следует, что

$$\{y_1, \ldots, \overline{y_i}, \ldots, y_n, x_i, t, z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m-1)}\}$$

алгебраически независимы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Переменные $w_m, z_i^{(1)}t^{-1}, \ldots, z_i^{(m-1)}t^{-1}$ алгебраически независимы по модулю идеала m_i тех многочленов из $K(w_1, \ldots, w_m, t)$, которые делятся на y_i.*

Доказательство. Пусть $y_i = 0$. Тогда выражение $z_i^{(k)}t^{-1}$ определено корректно. Пусть $Q \in K[w_m, z_i^{(1)}t^{-1}, \ldots, z_i^{(m-1)}t^{-1}] \cap m_i$, $Q(a_{mi}y_1 \ldots \overline{y_i} \ldots y_n x_i, z_i^{(1)}t^{-1}, \ldots, z_i^{(m-1)}t^{-1}) = 0$. Домножив на подходящую степень t^s, получим противоречие с леммой 1.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$V_i\left(\sum_{n \geqslant 0} h_n t^{-n}\right) = \inf_n V_i(h_n t^{-n})$$

для $h_n \in K[w_1, \ldots, w_m]$, где $V_i(g)$ — кратность y_i в многочлене g.

Доказательство. Пусть $d = \inf_n V_i(h_n t^{-n})$, тогда $\exists n = n_0 : V_i(h_{n_0}) = n_0 + d$, следовательно, $n_0 + d \geqslant 0$ и $\forall n\, V_i(h_n) \geqslant n + d$, $h_n \in l_i^{n+d}$ при $n + d > 0$ и $h_{n_0} \notin l_i^{n_0+d+1}$. Итак, если $n + d \geqslant 0$, то

$$h_n = \sum_{k_1 + \ldots + k_{m-1} = n+d} f_{nk_1 \ldots k_{m-1}} z_i^{(1)k_1} \ldots z_i^{(m-1)k_{m-1}} + Q_n,$$

где $Q_n \in l_i^{n+d+1}$, $f_{n_0 k_1 \ldots k_{m-1}} \neq 0$ для некоторых $(k_1, \ldots, k_{m-1})$. Если $n+$ $+d<0$, то $Q_n = h_n$, поэтому

$$\sum_n h_n t^{-n-d} = \sum_{n \geqslant -d} \sum_{k_1, \ldots, k_{m-1}} f_{nk_1 \ldots k_{m-1}} \left(\frac{z_i^{(1)}}{t}\right)^{k_i} \cdots \left(\frac{z_i^{(m-1)}}{t}\right)^{k_{m-1}} +$$

$$+ \sum_n Q_n t^{-n-d},$$

$$V_i \left(\sum_n h_n t^{-n-d}\right) = 0, \quad V_i \left(\sum_n h_n t^{-n}\right) = d.$$

Лемма 3 доказана.

Отсюда, если

$$f = \sum_n g_n t^{-n} \in A,$$

то $V_i(f) \geqslant 0$, тогда $V_i(g_n t^{-n}) \geqslant 0$ и $g_n t^{-n} \in A$ $\forall n$, что и требовалось доказать в п. (д).

Итак, алгебра A^H порождена многочленами $\frac{f_k(w_1, \ldots, w_m)}{t^k}$, где $f_k \in$ $\in V_{kP_1, \ldots, kP_n}$, $t = y_1 \ldots y_n$, а также многочленами t, $w_1, \ldots, w_m$. Теперь используя утверждение п. (г), несложно понять, что конечная порожденность алгебры A^H равносильна конечной порожденности введенной выше градуированной алгебры форм.

3. Ниже будут рассмотрены контрпримеры Нагаты и Стейнберга. В обоих случаях использовалась другая градуировка алгебры A^H — по степеням многочленов. Тогда алгебра становится биградуированной: $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_{ij}$, $A_i = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A_{ij}$. До некоторого номера j_*, который растет с ростом i, при фиксированном i имеем $A_{ij}=0$. Наиболее существенный момент — как изменяется j_* с ростом i. В каждом случае используется своя лемма из теории алгебраических кривых. Эти леммы мы здесь доказывать не будем.

Контрпример Нагаты. Лемма 4. *Рассмотрим нашу алгебру A для точек $P_1, \ldots, P_r$ в P^2, $r = n^2 \geqslant 16$. Тогда:*

а) *$A_{m,j} = 0$ при $j \leqslant m\sqrt{r}$,*

б) *для любого $\bar{r} \geqslant \sqrt{r}$ существует $\bar{m} : A_{\bar{m}, [\bar{m}\bar{r}]} \neq 0$,*

где [ ] — целая часть числа.

Доказательство приведено в [3].

Пусть теперь $\{f_j\}$ — однородная система образующих, f_j принадлежит A_{j, k_j}, $k^* = \inf(k_j/j)$. По лемме 4, а $k^* > \sqrt{r}$. Но для любого монома

$$f = f_1^{i_1} \ldots f_p^{i_p}, \ \deg(f) \geqslant k^* (i_1 + 2i_2 + \ldots + pm_p)$$

и f принадлежит $A_{i_1+2i_2+\ldots+pm_p}$. Значит, $\deg(a_n) \geqslant k^* n$ для любого a_n из A_n, что противоречит лемме 4, б. Итак, алгебра A^H не является конечнопорожденной.

Контрпример Стейнберга. Здесь $r=9$, $P_i = (1 : a_i : a_i^3)$.

Лемма 5. *Для любого $m \geqslant 0$*

а) *$A_{m,j} = 0$ при $j < 3m$;*

б) $A_{m,3m}=K\,(y-x^3)^m$;

в) *существует* $f\nmid(y-x^3)$, $f\in A_{m,3m+1}$.

Доказательство приведено в [4].

Пусть опять $f_1, f_{m_1}, \dots, f_{m_r}$ — однородная система образующих, $f_1=$ $=y-x^3$, f_{m_i} принадлежит A_{m_i,d_i} и можно считать, что $f_{m_i}|f_1$. По лемме 5 $d_i\geqslant 3m_i+1$. Предположим, что $m>\max m_i$, f из $A_{m,3m+1}$, $f|f_1$. Значит, $f=P(f_1, f_{m_1}, \dots, f_{m_r})$ и хотя бы один член не делится на f_1. Пусть это будет $\prod_{i=1}^{r}(f_{m_r})^{e_i}\in A_{\Sigma m_i e_i,\Sigma d_i e_i}$. Тогда $3m+1=\sum_i d_i e_i$ и $m=\sum_i m_i e_i$, следовательно, $1=\sum_i(d_i-3m_i)e_i$, $d_i-3m_i\geqslant 1$. Это возможно лишь при $m=m_{i_0}$, $e_{i_0}=1$, все остальные e_i равны нулю. Но это противоречит условию $m>\max m_i$. Утверждение доказано.

Несложно убедиться, что при $m=1$ или 2 алгебра всегда конечно порождена. Оба контрпримера соответствуют случаю $m=3$ и в этом смысле оптимальны. Однако неясно, можно ли обойтись меньшим числом точек, т. е. можно ли построить контрпример для $(G_a(K))^c$ при $c=2, 3, 4, 5$.

Замечание. В примере Стейнберга $c=6$, у Нагаты $c=13, 33, \dots$. При $c=0$ мы получаем представление единичной группы, алгебра инвариантов совпадает с исходной алгеброй A и потому конечно порождена — получили п. *а* теоремы. При $c=1$ имеется представление $G_a(K)$, и из теоремы Вейценбека получаем п. *б* теоремы.

Замечание. Можно было бы рассматривать $Z^++Z^++\dots+Z^+$-градуированную алгебру форм, задаваясь в каждой из фиксированных точек своей кратностью. Теорема при этом также имеет место. В доказательстве это соответствовало бы изучению самой группы G, не расширенной тором.

В заключение рассмотрим случай P^2. Для одной или двух точек проверить конечную порожденность нашей алгебры кривых можно непосредственно. Теорема дает ответ в случае трех и четырех точек, где непосредственно проверить не удается. Пример Стейнберга показывает, что такая алгебра не является конечно-порожденной для девяти различных точек, лежащих на кубической параболе.

Работа выполнена под руководством профессора Э. Б. Винберга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы. Математика. Фундаментальные направления. Т. 55. М., 1989. 137—297.
2. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. М., 1974.
3. Nagata M. On the fourteenth problem of Hilbert//Lecture in Tata Institute. Bombay. 1963.
4. Tan Lin. An elementary conterexample to Hilbert's fourteenth problem. Depart. of Math. West Chestar University, 1991. Preprint.
5. A'Campo A. Linearisierung von Roberts' Gegenbeispiel. Basel, 1992.
6. Roberts P. An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new conterexample to Hilbert's fourteenth problem//J. Algebra. 1990. 132. 461—473.

Поступила в редакцию
21.04.93